บทที่ 1
ตรรกศาสตร์สัญลักษณ์
(Symbolic Logic)

คำนำ

วิชาตรรกศาสตร์เป็นวิชาที่ว่าด้วยการวิเคราะห์ศิลปในการให้เหตุผล ซึ่งได้พัฒนาสืบเนื่องมาจากอริสโตเติล (Aristotle) วิชาตรรกศาสตร์ในทางคณิตศาสตร์ได้พัฒนาการคำนวณในรูปของสัญลักษณ์โดยเขียนสัญลักษณ์แทนข้อความ (Statement) ที่จะนำมาคำนวณ และเรียกชื่อเสียใหม่ว่า ตรรกศาสตร์สัญลักษณ์ (Symbolic Logic หรือ Mathematical Logic หรือ Statement Calculus)

การศึกษาคณิตศาสตร์ในปัจจุบัน เราจะศึกษาโครงสร้างของระบบคณิตศาสตร์ (Mathematical Model) ในแต่ละระบบเช่นการศึกษาโครงสร้างของระบบคณิตศาสตร์ของจำนวนนับ จำนวนเต็ม จำนวนตรรกยะ จำนวนจริง เวคเตอร์ เป็นต้น โดยเราจะศึกษา

1. เซตของสมาชิกที่เราจะนำมาศึกษา
2. การดำเนินการ (operations) ของสมาชิกในเซตนั้น
3. ความสัมพันธ์ (relations) ระหว่างสมาชิกในเซตนั้น
4. สัจพจน์ (Oxions or postulates) เกี่ยวกับเซต การดำเนินการ และความสัมพันธ์นั้น

การดำเนินการและความสัมพันธ์ของสมาชิกในเซตนั้นแล้ว จึงทำความจริงที่มีในสี่ข้อนั้นมาสรุปและพิสูจน์ทฤษฎีบท (Theorems)

1.1 ข้อความหรือประพจน์ (Statements or propositons)

ประโยคบอกเล่า ใช้ในเรื่องราวเล่าบอกตามธรรมดา บางทีก็ใช้ไปในทางรับ บางทีก็เป็นไปในทางปฏิเสธ ประโยคบอกเล่า แตกต่างไปจากประโยคประเภทอื่น ก็คือมีค่าความจริง (truth - values) ในตัวของมันเอง ในทางคณิตศาสตร์เรียกประโยคประเภทนี้ **ข้อความ** หรือบางท่านเรียกว่า **ประพจน์** เมื่อผู้ใดพูดประโยคเหล่านี้ขึ้นมา ผู้ฟังจะวินิจฉัยได้ทันทีว่า ประโยคนั้นๆ

มีค่าความจริง เป็นจริง (true) หรือเท็จ (false) เช่น ประโยคว่า โลกมีสัณฐานกลม ปลาและนกเป็นสัตว์บก 2 + 2 = 5 เป็นต้น

เราจะไม่สนใจประโยคที่ไม่ใช่ข้อความ เนื่องจากประโยคประเภทนี้ไม่มีค่าความจริง ได้แก่ ประโยคคำสั่ง ประโยคขอร้อง หรือชักชวนและประโยคคำถาม

ในหัวข้อนี้เราได้นิยามของ เซต P ซึ่งประกอบด้วยสมาชิกซึ่งเรียกว่า ข้อความหรือประพจน์ ซึ่งเราจะเขียนด้วยสัญลักษณ์ p, q, r, ... นั่นคือ P = { p : p เป็นประพจน์ }

แบบฝึกหัด 1.1

จงตัดสินใจว่าประโยคต่อไปนี้ เป็นประพจน์หรือไม่

1. 5 น้อยกว่า 7
2. $7 \times 8 = 72$
3. นาย ก. สอบชิงทุนรัฐบาลไปศึกษาต่อต่างประเทศได้
4. นาย ข. เป็นนักศึกษาแพทย์
5. นาย ก. เป็นทหาร และเป็นนายกรัฐมนตรีด้วย
6. คุณไม่ไปงานแต่งงานเพื่อนหรือ
7. ถ้า a เป็นจำนวนนับแล้ว a ย่อมเป็นจำนวนเต็มด้วย
8. สำหรับ x ใดๆ ถ้า x เป็นจำนวนจริงแล้ว x ย่อมเป็นจำนวนเชิงซ้อนด้วย
9. นาย ก. เป็นอาจารย์หรือนาย ก. เป็นนักศึกษา
10. มีจำนวนเต็ม e ซึ่ง $x + e = x$ สำหรับทุกจำนวนเต็ม x
11. ไม่มีใครเลยในประเทศไทย เป็นโรคเอดส์
12. นาย ก. ทำงานอะไร

1.2 ตัวเชื่อมข้อความ (Logical Connectives)

ในการพูดประโยคบอกเล่า โดยทั่วๆ ไป มักจะนำข้อความต่างๆ มาเชื่อมกันเข้าด้วยกัน ให้ได้ข้อความใหม่ ที่มีความหมายแตกต่างกันออกไป ในทางคณิตศาสตร์เรียกว่า ตัวดำเนินการ ตัวเชื่อมข้อความต่างๆ เหล่านี้ พอประมวลได้ดังต่อไปนี้

1.2.1 ปฏิเสธ (denial หรือ negation) *"ไม่ หรือไม่ใช่ (not)"* เช่นเรามีข้อความว่า *"ปลาเป็นสัตว์น้ำ"* เมื่อเราดำเนินการด้วย ไม่หรือไม่ใช่ข้อความนี้จะได้ข้อความใหม่ว่า *"ปลาไม่ใช่สัตว์น้ำ"* ถ้าเราให้ p เขียนแทนข้อความว่า *"ปลาเป็นสัตว์น้ำ"* เราจะใช้ ~p หรือ p′ แทนข้อความ *"ปลาไม่ใช่สัตว์น้ำ"* จึงพบว่า ถ้าข้อความ p มีค่าความจริงเป็นความจริง (T) แล้ว ค่าความจริงของ ~p ต้องเป็นเท็จ (F) และถ้าข้อความ p มีค่าความจริงเป็นเท็จแล้ว ค่าความจริงของ ~p ต้องเป็นจริงเราจึงสร้างตารางวิเคราะห์ได้ดังต่อไปนี้

P	-P
T	F
F	T

ตาราง 1.2.1

1.2.2 ข้อความร่วม (Conjuctive statements) เชื่อมด้วย "และ (and)"

คำว่า *"และ"* เป็นคำที่ทุกคนเข้าใจความหมายของมันได้ดีแล้ว ข้อความที่เชื่อมด้วยและ เช่น *"ปลาเป็นสัตว์น้ำ และ ปูก็เป็นสัตว์น้ำด้วย"* แต่เรามักจะไม่พูดเช่นนั้น ข้อความที่มีความหมายเช่นเดียวกับข้อความข้างต้น เรามักจะพูดเสียใหม่ให้สั้นและกระทัดรัด และมีความหมายเช่นเดียวกันก็คือ พูดว่า *"ปลาและปูเป็นสัตว์น้ำ"* หรือ *"ปลาและปูต่างเป็นสัตว์น้ำด้วยกัน"* บางครั้งอาจพบตัวเชื่อม *และ* ในรูปอื่นเช่น *"นกเป็นสัตว์บก แต่ปลาเป็นสัตว์น้ำ"* ซึ่งก็มีความหมายเช่นเดียวกันกับ *"นกเป็นสัตว์บกและปลาเป็นสัตว์น้ำ"* ข้อความดังที่กล่าวข้างต้นเรียกว่า ข้อความประกอบชนิดหนึ่ง และข้อความประกอบชนิดนี้ เรียกว่า ข้อความร่วมของสองข้อความ

ถ้าให้ p แทนข้อความแรก และ q แทนข้อความหลัง จึงเขียนข้อความประกอบชนิดนี้ด้วยสัญลักษณ์ "$p \wedge q$" หรือ "$p \& q$" อ่านว่า p และ q หรือข้อความร่วมของ p กับ q

พิจารณาข้อความประกอบต่อไปนี้

1) แมลงมีหกขา แต่แมงมีแปดขา
2) แมลงมีหกขา และแมงมีหกขาด้วย
3) แมลงมีแปดขา และแมงมีแปดขาด้วย
4) แมลงมีแปดขา แต่แมงมีหกขา

พบว่า ข้อความ $p \wedge q$ จะเป็นจริงต่อเมื่อ p และ q มีค่าความจริงเป็นจริง จึงเขียนตารางวิเคราะห์ ค่าความจริงของ $p \wedge q$ ในกรณีต่างๆ ไว้ดังนี้

p	q	$p \wedge q$
T	T	T
T	F	F
F	T	F
F	F	F

ตาราง 1.2.2

1.2.3 ตัวเชื่อมการเลือก (Disjunction) "หรือ (or)"

คำว่า *"หรือ"* เป็นคำเชื่อมข้อความที่มีคนเข้าใจต่างกันเป็นสองความหมาย เช่นถ้ากล่าวว่า *"แมลงมีหกขาหรือแมงมีแปดขา"* บางท่านอาจเข้าใจว่าข้อความใดข้อความหนึ่งมีค่าความจริงเป็นจริงเท่านั้นจึงทำให้ข้อความเลือกนี้มีค่าความจริงเป็นจริง ในทางคณิตศาสตร์ให้ถือว่า ข้อความใดข้อความหนึ่งมีค่าความจริงเป็นจริง หรือทั้งสองข้อความมีค่าความจริงเป็นจริงให้ถือว่าข้อความเลือกนั้นมีค่าความจริงเป็นจริง มีเพียงกรณีเดียวที่ทั้งสองข้อความมีค่าความจริงเป็นเท็จจึงทำให้ข้อความเลือก $p \vee q$(อ่านว่า "ข้อความเลือก ของข้อความ p กับข้อความ q *หรือ* "ข้อความ p หรือ ข้อความ q") เป็นเท็จ เช่นกล่าวว่า *"แมลงมีแปดขาหรือแมง มีหกขา"*

เป็นข้อความเลือกที่เป็นเท็จ จึงทำตารางวิเคราะห์ค่าความจริงได้ดังต่อไปนี้

p	4	p ∨ q
T	T	T
T	F	T
F	T	T
F	F	F

ตาราง 1.2.3

1.2.4 ข้อความมีเงื่อนไข (Conditional)

คำว่า *"ถ้า.......แล้ว......."* ในภาษาอังกฤษเขียนว่า *"If.........., then..........."* เป็นข้อความที่มีเงื่อนไข เช่นผู้พูดอาจพูดว่า *"ถ้าฉันมีรถยนต์แล้ว ฉันจะมาหาเธอทุกวัน"* ประโยคเช่นนี้ผู้พูดอาจลดบางคำเสียบ้าง ก็มีความหมายเช่นเดียวกันเช่นพูดว่า *"ถ้าฉันมีรถยนต์ ฉันจะมาหาเธอทุกวัน"* หรือ *"ฉันจะมาหาเธอทุกวัน ถ้าฉันมีรถยนต์"* เมื่อมองอีกครั้งข้อความชนิด นี้ก็เหมือนกับข้อสัญญา การพิจารณาค่าความจริงของข้อความขนิดนี้ก็คือ พิจารณาว่า ผู้พูดรักษาสัญญาหรือเปล่าในกรณีที่ผู้พูดยังรักษาสัญญา คือสัญญายังใช้ได้ข้อความนั้นก็มีค่าความจริงเป็นจริง ในกรณีที่ผู้พูดผิดสัญญาข้อความนั้นก็มีค่าความจริงเป็นเท็จ จึงพบว่าข้อสัญญานี้ใช้ไม่ได้กรณีที่ผู้พูดมีรถยนต์ แต่ก็ไม่ได้ไปหาเธอทุกวัน แต่ในกรณีที่ผู้พูดยังไม่มีรถยนต์จะไปหาเธอทุกวัน หรือไม่ได้ไปหาเธอทุกวันข้อความนั้น ก็ยังคงใช้ได้ ดังนั้น ถ้าให้

p แทนข้อความ *"ฉันมีรถยนต์"* และ

q แทนข้อความ *"ฉันไปหาเธอทุกวัน"*

เราก็จะเขียนข้อความนั้นด้วยสัญลักษณ์ว่า "$p \Rightarrow q$" อ่านว่า "p implies q" หรือ "ถ้า p แล้ว q" และจากที่ได้อธิบายเงื่อนไขสัญญาข้างต้นจึงเขียนตารางวิเคราะห์ค่าความจริงของ $p \Rightarrow q$ ได้ดังนี้

p	q	$p \Rightarrow q$
T	T	T
T	F	F
F	T	T
F	F	T

ตาราง 1.2.4

1.2.5 ข้อความมีเงื่อนไขสองทาง (Biconditional)

คำว่า *"......ก็ต่อเมื่อ......"* หรือ *"....ต่อเมื่อ....เท่านั้น"* ในภาษาอังกฤษ *"......if and only if ...."* หรือเขียนย่อๆ ว่า *"....iff...."* เป็นตัวเชื่อมข้อความที่มีเงื่อนไขขึ้นต่อกัน (ทั้งสองทาง) เช่น *"จำนวนเต็มบวก a เป็นเลขคู่ ก็ต่อเมื่อ 2 หาร a ลงตัว"* ถ้าให้

p แทนข้อความ *"จำนวนเต็มบวก a เป็นเลขคู่"* และ

q แทนข้อความ *"2 หาร a ลงตัว "*

เราเขียนสัญลักษณ์แทนข้อความนี้ว่า $p \Leftrightarrow q$ และพบว่าข้อความนี้มีค่าความจริงเป็นจริง ก็ต่อเมื่อ p และ q มีค่าความจริงเหมือนกัน จึงทำตารางวิเคราะห์ค่าความจริงของ $p \Leftrightarrow q$ ได้ดังนี้

p	q	$p \Leftrightarrow q$
T	T	T
T	F	F
F	T	F
F	F	T

ดังที่กล่าวมาแล้วข้างต้นเรานำข้อความย่อยๆ มาเชื่อมด้วยตัวเชื่อม $\sim$, $\wedge$, $\vee$, $\Rightarrow$, $\Leftrightarrow$

แล้วข้อความประกอบที่เกิดขึ้นใหม่ก็ยังคงเป็นข้อความจึงกล่าวได้ว่า ถ้าให้ P เป็นเซตของข้อความ $p, q, r, \ldots$ แล้ว $\sim p$, $p \wedge q$, $p \vee q$, $p \Rightarrow q$, $p \Leftrightarrow q$ ก็ยังคงเป็นข้อความอยู่ในเซต P นั่นเองจึง กล่าวได้ว่า $\sim$ เป็นตัวดำเนินการที่ต้องการสมาชิกของ P อย่างน้อยหนึ่งตัว จึงเรียก $\sim$ ว่า เป็นตัวดำเนินการ ยูนารี (Unary Operator) ในเซต P ส่วน $\wedge, \vee, \Rightarrow,$ และ $\Leftrightarrow$ ต้องการสมาชิกในเซต P สองตัวมาดำเนินการจึงเรียกตัวดำเนินการเหล่านี้ว่าตัวดำเนินการไบนารี (Binary Operators) ในเซต P

1.3 ตารางค่าความจริง (Truth Table)

ทุกข้อความประกอบ (Statement form) A กำหนดฟังก์ชันค่าความจริง (Truth - function) โดยกำหนดค่าความจริงให้กับประพจน์ที่ประกอบขึ้นเป็นกรณีๆ ไป ในแต่ละกรณีก็คำนวณค่าความจริง ของข้อความประกอบ A ดังตัวอย่างต่อไปนี้

ตัวอย่าง 1.3.1 การทำตารางวิเคราะห์ค่าความจริงของข้อความ $(p \vee \sim p) \Rightarrow p$ เนื่องจากข้อความนี้มีข้อความย่อยๆ เพียงหนึ่งตัว การวิเคราะห์ก็ดำเนินไปเพียงสองกรณี (คือเมื่อ p มีค่าความจริงเป็นจริงและค่าความจริงเป็นเท็จ) จึงได้

P	-P	$p \vee \sim p$	$(p \vee \sim P) \Rightarrow p$
T	F	T	T
F	T	T	F

ตัวอย่าง 1.3.2 การทำตารางวิเคราะห์ค่าความจริงของข้อความ $(\sim p \vee q) \Leftrightarrow p$ เนื่องจากข้อความนี้มีข้อความย่อยๆ สองจำนวน คือ p กับ q จึงต้องพิจารณา $\binom{2}{1}\binom{2}{1} = 2 \times 2 = 2^2 = 4$ กรณี จึงทำตารางวิเคราะห์ค่าความจริงได้ดังนี้

p	q	~p	$\sim p \vee q$	$(\sim p \vee q) \Rightarrow p$
T	T	F	T	T
T	F	F	F	T
F	T	T	T	F
F	F	T	T	F

วิธีทำจึงเริ่มที่ช่อง p เติม T T F F ลงไปในแนวดิ่งในช่อง q ก็เติม T F T F ลงไปในแนวดิ่งจึงได้ 4 กรณีที่ต่างกันเป็น TT, TF, FT, FF แล้วจึงเริ่มคำนวณค่าความจริง

ตัวอย่าง 1.3.3 วิเคราะห์ค่าความจริงของ $((p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow r)) \Rightarrow (p \Rightarrow r)$ ข้อความนี้มีข้อความย่อยๆ สามจำนวนคือ p, q และ r จึงต้องวิเคราะห์ $2^3 = 8$ กรณี วิธีทำก็เช่นเดียวเริ่มที่ ช่อง p เติม T T T T F F F F ลงไปแนวดิ่งช่อง q เติม T T F F T T F F ลงในแนวดิ่ง แล้วเติม T F T F T F T F ลงในช่อง r ในแนวดิ่ง จึงต้องวิเคราะห์ในกรณี T T T, T T F, T F F, F T T, F T F, F F T และ F F F จึงได้ตารางวิเคราะห์ดังต่อไปนี้

p	q	r	$p \Rightarrow q$	$q \Rightarrow r$	$(p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow r)$	$p \Rightarrow r$	$((p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow r)) \Rightarrow (p \Rightarrow r)$
T	T	T	T	T	T	T	T
T	T	F	T	F	F	F	T
T	F	T	F	T	F	T	T
T	F	F	F	T	F	F	T
F	T	T	T	T	T	T	T
F	T	F	T	F	F	T	T
F	F	T	T	T	T	T	T
F	F	F	T	T	T	T	T

หมายเหตุ ข้อความนี้เรียกว่า Hypothetical Syllogism

แบบฝึกหัด 1.3

1. จงบอกค่าความจริงของข้อความต่อไปนี้

   1.1 ถ้า $5 + 7 = 12$ แล้ว $6 + 7 = 13$

   1.2 ถ้า $5 \times 7 = 35$ แล้ว $6 \times 7 = 36$

   1.3 ถ้า $3 \times 4 = 1$ แล้ว $x - 3 = 5$

2. จงสร้างตารางวิเคราะห์ค่าความจริงของข้อความต่อไปนี้

   2.1 $(p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow P)$

   2.2 $(p \wedge (p \Rightarrow q)) \Rightarrow 4$ **(Modus Ponens)**

   2.3 $(p \Rightarrow q) \wedge \sim q) \Rightarrow \sim p$ (Modus **Tollens**)

   2.4 $((p \vee q) \wedge \sim q) \Rightarrow q$ **(Disjunctive Syllogism)**

   2.5 $[((p \Rightarrow q) \wedge (r \Rightarrow s)) \wedge (p \vee r)] \Rightarrow (q \vee s)$ **(Constructive Dilemma)**

   2.6 $[((p \Rightarrow q) \wedge (r \Rightarrow s))$ A $(\sim q \vee \sim r)] \Rightarrow (\sim p \vee \sim r)$ **(Dustructive Dilemma)**

   2.7 $(p \Rightarrow q) \Leftrightarrow (\sim q \Rightarrow \sim p)$ **(Contraposition)**

1.4 ความสัมพันธ์ตรรกสมมูล (logical eguivalence)

นิยาม ข้อความ A ตรรกสมมูลกับข้อความ B ก็ต่อเมื่อข้อความ A และ B มีค่าความจริงเหมือนกันกรณีต่อกรณี ถ้าข้อความ A ตรรกสมมูลกับ B เราจะเขียนด้วย สัญลักษณ์ว่า A = B.

ตัวอย่าง ข้อความที่ตรรกสมมูล ที่ควรทราบและเป็นประโยชน์ในขณะนี้คือ $p \Rightarrow q = \sim p \vee q$ และ $p \Leftrightarrow q = (p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow p) = (\sim p \vee q) \wedge (\sim q \vee p)$ ซึ่งอาจแสดงให้เห็นได้โดยตารางข้างล่างนี้

p	q	$\sim p$	$p \Rightarrow q$	$\sim p \wedge q$
T	T	F	T	T
T	F	F	F	F
F	T	T	T	T
F	F	T	T	T

p	q	$p \Rightarrow q$	$q \Rightarrow p$	$(p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow p)$	$p \Leftrightarrow q$
T	T	T	T	T	T
T	F	F	T	F	F
F	T	T	F	F	F
F	F	T	T	T	T

จากสองตารางข้างบนเราจึงพบว่า เซต P ของประพจน์ p, q, r, ... กับตัวดำเนินการ $\sim, \wedge, \vee, \Rightarrow, \Leftrightarrow$ สามารถลดตัวดำเนินการที่อาจเปลี่ยนแปลงไปเป็นตัวดำเนินการอื่นได้คือ $\Rightarrow$ อาจเปลี่ยนเป็น $\sim$ กับ $\vee$ และ $\Leftrightarrow$ อาจเปลี่ยนเป็น $\sim, \wedge, \vee$ ได้ดังนั้น เซต P จึงเหลือตัวดำเนินการเพียงสามตัว คือ $\sim, \wedge, \vee$ และความสัมพันธ์ = จึงเขียนว่า $(P, \sim, \wedge, \vee, =)$.

จากนิยามข้างต้นจึงพบว่าความสัมพันธ์ = เป็นความสัมพันธ์สมมูล (equinalent relation) ในเซต P คือสำหรับข้อความ p, q, r ใดๆ ใน p

1) $p = p$ (reflexivity)
2) ถ้า $p = q$ แล้ว $q = p$ (Symmetry)
3) ถ้า $p = q$ และ $q = r$ แล้ว $p = r$ (Transtivity)

แบบฝึกหัด 1.4

จงใช้ตารางวิเคราะห์แสดงตรรกยะสมมูลต่อไปนี้

$$\left.\begin{array}{ll} 1. & p \vee q = q \vee q \\ 2. & p \wedge q = q \wedge p \end{array}\right\} \text{Commutative laws}$$

$$\left.\begin{array}{ll} 3. & p \wedge (q \vee r) = (p \wedge q) \vee (p \wedge r) \\ 4. & p \vee (q \wedge r) = (P \vee q) \wedge (P \vee r) \end{array}\right\} \text{Distributive laws}$$

5. $p \Rightarrow q \;=\; \sim q \Rightarrow \sim p)$ (Contrasspositon)

1.5 ข้อความสัจนิรันดร์ (Tautology) และข้อความขัดแย้ง (Contradiction)

นิยาม ข้อความ A กล่าวได้ว่าเป็นข้อความสัจนิรันดร์ ก็ต่อเมื่อข้อความ A มีค่าความจริงเป็นจริงหมดทุกกรณี ถ้าข้อความ A เป็นข้อความสัจนิรันดร์ เราจะกล่าวว่า $A = T$

ตัวอย่างที่เห็นได้โดยชัดเจนว่า เป็นข้อความสัจนิรันดร์ ก็คือ $p \vee \sim p$ จึงเขียนว่า $p \vee \sim p = T$ และยังมีข้อความอื่นๆ เช่น ข้อความในแบบฝึกหัด 1.3 ข้อ 2.2 - 2.7

นิยาม ข้อความ A กล่าวได้ว่า เป็นข้อความขัดแย้ง (Contradiction) ก็ต่อเมื่อ A มีค่าความจริงเป็นเท็จหมดทุกกรณี ถ้าข้อความ A เป็นข้อความขัดแย้ง เราจะกล่าวว่า $A = F$

ตัวอย่างที่เห็นได้โดยชัดเจนก็คือ $p \wedge \sim p = F$

1.6 สัจพจน์ (Axioms) สำหรับพีชคณิตของข้อความ

สำหรับเซต P ของข้อความ ตัวดำเนินการไบนารีสองตัว $\wedge$ และ $\vee$ ในเซต P, ตัวดำเนินการยูนารี $\sim$ ในเซต P และสมาชิกพิเศษ F และ T ของเซต P สัจพจน์ต่อไปนี้เป็นจริง

(1) สำหรับข้อความ p และ q ใดๆ ใน P $\quad p \vee q = q \vee p$

(2) สำหรับข้อความ p และ q ใดๆ ใน P $\quad p \wedge q = q \wedge p$

Commutative laws

(3) สำหรับข้อความ p, q และ r ใดๆ ใน P

$$p \wedge (q \vee r) = (p \wedge q) \vee (p \wedge r)$$

(4) สำหรับข้อความ p, q และ r ใดๆ ใน P

$$p \vee (q \wedge r) = (p \vee q) \wedge (p \vee r)$$

Distributive laws

(5) สำหรับข้อความ p ใดๆ ใน P $\quad p \vee F = p$

(6) สำหรับข้อความ p ใดๆ ใน P $\quad p \wedge T = p$

(7) สำหรับข้อความ p ใดๆ ใน P $\quad p \vee \sim p = T$

(8) สำหรับข้อความ p ใดๆ ใน P $\quad p \wedge \sim p = F$

(9) $F \neq T$

เราจึงกล่าวได้ว่า ระบบ (P, ~, ∧, v, F, T) เป็นระบบพีชคณิตบูเลียน (Boolean Algebra)

ทฤษฎีบท 1.1 ความแน่นอนของคอมพลิเมนต์ (Uniqueness of Complemebt) สำหรับข้อความ p และ q ใดๆ

$$\text{ถ้า } p \vee q = T \text{ และ } p \wedge q = F \text{ แล้ว } q = \sim p$$

พิสูจน์ สำหรับข้อความ p และ q ใดๆ

สมมติว่า $p \vee q = T$ และ $p \wedge q = F$

ขั้นแรก พิจารณา

$q = q \vee F$	โดยสัจพจน์ (5)
$= q \vee (p \wedge \sim p)$	โดยสัจพจน์ (8)
$= (q \vee p) \wedge (q \vee \sim p)$	โดยสัจพจน์ (4)
$= (p \vee q) \wedge (q \vee \sim p)$	โดยสัจพจน์ (1)
$= T \wedge (q \vee \sim p)$	โดยโจทย์
$= (q \vee \sim p) \wedge T$	โดยสัจพจน์ (2)
$= q \vee \sim p$	โดยสัจพจน์ (6)

ขั้นที่สอง พิจารณา

$\sim p = \sim p \vee F$	โดยสัจพจน์ (5)
$= -p \vee (P \wedge q)$	โดยโจทย์
$= (\sim p \vee p) \wedge (\sim p \vee q)$	โดยสัจพจน์ (4)
$= T \wedge (\sim p \vee q)$	โดยสัจพจน์ (7)
$= (\sim p \vee q) \wedge T$	โดยสัจพจน์ (2)
$= -p \vee q$	โดยสัจพจน์ (6)
$= q \vee -p$	โดยสัจพจน์ (1)
$= q$	โดยขั้นแรก

บทแทรก 1.2 สำหรับข้อความ p ใดๆ $\sim(\sim p) = p$

พิสูจน์ ขั้นแรก $\sim p \vee p = p \vee \sim p$ โดยสัจพจน์ (1)

$= T$ โดยสัจพจน์ (7)

ขั้นที่ 2 $\sim p \wedge p = p \wedge \sim p$ โดยสัจพจน์ (2)

$= F$ โดยสัจพจน์ (8)

ดังนั้น โดยทฤษฎีบท **1.1** จึงได้ $p = \sim(\sim p)$

ทฤษฎีบท 1.3 Idempotence สำหรับข้อความ p ใดๆ

a) $p \wedge p = p$ b) $p \vee p = p$

พิสูจน์ ก) $p = p \wedge T$ โดยสัจพจน์ (6)

$= p \wedge (p \vee \sim p)$ โดยสัจพจน์ (7)

$= (p \wedge p) \vee (p \wedge \sim p)$ โดยสัจพจน์ (3)

$= (p \wedge p) \vee F$ โดยสัจพจน์ (8)

$= p \wedge p$ โดยสัจพจน์ (5)

ข) $p = p \vee F$ โดยสัจพจน์ (5)

$= p \vee (p \wedge \sim p)$ โดยสัจพจน์ (8)

$= (p \vee p) \wedge (p \vee \sim p)$ โดยสัจพจน์ (4)

$= (p \vee p) \wedge T$ โดยสัจพจน์ (7)

$= p \vee p$ โดยสัจพจน์ (6)

หมายเหตุ การพิสูจน์ต่อไปนี้ เราจะพิจารณาเพียงสั้นๆ โดยใช้สัจพจน์และทฤษฎีบทที่ผ่านมาแล้ว และจะไม่เขียนอ้างถึงเพื่อให้การพิสูจน์สั้นและกระทัดรัดกว่า

ทฤษฎีบท 1.4 สำหรับข้อความ p, q, r ใดๆ

a) $p \wedge F = F$

b) $p \vee T = T$

c) $p \wedge (p \vee q) = p$

d) $p \vee (p \wedge q) = p$

Absorption laws

e) ถ้า $q \vee p = r \vee p$ และ $q \vee \sim p = r \vee \sim p$ แล้ว $q = r$

f) ถ้า $q \wedge p = r \wedge p$ และ $q \wedge \sim p = r \wedge \sim p$ แล้ว $q = r$

g) $p \vee (q \vee r) = (p \vee q) \vee r$

h) $p \wedge (q \wedge r) = (p \wedge q) \wedge r$

associative laws

i) $\sim(p \vee q) = \sim p \wedge \sim q$

j) $\sim(p \wedge q) = \sim p \vee \sim q$

De Morgan's laws.

k) $p \wedge \sim q = F$ ก็ต่อเมื่อ $p \wedge q = p$

l) $\sim F = T$

m) $\sim T = F$

พิสูจน์ สำหรับข้อความ p . q, และใดๆ

a) $p \wedge F = (p \wedge F) \vee F$

$= (p \wedge F) \vee (p \wedge \sim p)$

$= (p \wedge \sim p) \vee (p \wedge F)$

$= p \wedge (\sim p \vee F)$

$= p \wedge \sim p$

$= F$

b) $p \vee T = (p \vee T) \wedge T$

$= T \wedge (p \vee T)$

$= (p \vee \sim p) \wedge (p \vee T)$

$= p \vee (\sim p \wedge T)$

$= p \vee \sim p$

$= T$

/

c) $p \wedge (p \vee q) = (p \vee F) \wedge (p \vee q)$

$= p \vee (F \wedge q)$

$= p \vee F$

$= p$

d) $p \vee (p \wedge q) = (p \wedge T) \vee (p \wedge q)$

$= p \wedge (T \vee q)$

$= p \wedge (q \vee T)$

$= p \wedge T$

$= p$

e) สมมติว่า $q \vee p = r \vee p$ และ $q \vee \sim p = r \vee \sim p$

พิจารณา $q = q \vee F$

$= q \vee (p \wedge \sim p)$

$= (q \vee p) \wedge (q \vee \sim p)$

$= (r \vee p) \wedge (r \vee \sim p)$

$= r \vee (p \wedge \sim p)$

$= r \vee F$

$= r$

f) สมมติว่า $q \wedge p = r \wedge p$ และ $q \wedge \sim p = r \wedge \sim p$

พิจารณา $q = q \wedge T$

$= q \wedge (p \vee \sim p)$

$= (q \wedge p) \vee (q \wedge \sim p)$

$= (r \wedge p) \vee (r \wedge \sim p)$

$= r \wedge (p \vee \sim p)$

$= r \wedge T$

$= r$

g) 1) $(p \vee (q \vee r)) \wedge p = p \wedge (p \vee (q \vee r))$

$= (p \wedge p) \vee (p \wedge (q \vee r))$

$= (p \vee (p \wedge (q \vee r))$

$= p$ โดย Absorption law.

2) $((p \vee q) \vee r) \wedge p = p \wedge ((p \vee q) \vee r)$

$= (p \wedge (p \vee q)) \vee (p \wedge r)$

$= p \vee (p \wedge r)$ โดย Absorption law

p โดย Absorption law

ดังนั้น $(p \vee (q \vee r)) \wedge p = ((p \vee q) \vee r) \wedge p$

3) $(p \vee (q \vee r)) \wedge \sim p = \sim p \wedge (p \vee (q \vee r))$

$= (\sim p \wedge p) \vee (\sim p \wedge (q \vee r))$

$= (p \wedge \sim p) \vee (\sim p \wedge (q \vee r))$

$= F \vee (\sim p \wedge (q \vee r))$

$= \sim p \wedge (q \vee r)$

4) $((p \vee q) \vee r) \wedge \sim p = \sim p \wedge ((p \vee q) \vee r)$

$= (\sim p \wedge (p \vee q)) \vee (\sim p \wedge r)$

$= ((\sim p \wedge p) \vee (\sim p \wedge q)) \vee (\sim p \wedge r)$

$= (F \vee (\sim p \wedge q)) \vee (\sim p \wedge r)$

$= (\sim p \wedge q) \vee (\sim p \wedge r)$

$= \sim p \wedge (q \vee r)$

ดังนั้น $(p \vee (q \vee r)) \wedge \sim p = ((p \vee q) \vee r) \wedge \sim p$

โดย f) จึงได้ $p \vee (q \vee r) = (p \vee q) \vee r$

h) การพิสูจน์กระทำเช่นเดียวกับข้อ g) โดยแสดงให้เห็นว่า

$(p \wedge (q \wedge r)) \vee p = ((p \wedge q) \wedge r) \vee p$ และ

$(p \wedge (q \wedge r)) \vee \sim p = ((p \wedge q) \wedge r) \vee \sim p$ แล้วจึงใช้ความจริงจากข้อ e)

จึงได้ $p \wedge (q \wedge r) = (p \wedge q) \wedge r$

i) 1) $(p \vee q) \wedge (\sim p \wedge \sim q) = (\sim p \wedge \sim q) \wedge (p \vee q)$

$= \sim p \wedge (\sim q \wedge (p \vee q))$

$= \sim p \wedge ((\sim q \wedge p) \vee (\sim q \wedge q))$

$= \sim p \wedge ((\sim q \wedge p) \vee F)$

$= \sim p \wedge (\sim q \wedge p)$

$= (\sim q \wedge p) \wedge \sim p$

$= \sim q \wedge (p \wedge \sim p)$

$= \sim q \wedge F = F$

2) $(p \vee q) \vee (\sim p \wedge \sim q) = p \vee (q \vee (\sim p \wedge \sim q))$

$= p \vee ((q \vee \sim p) \wedge (q \vee \sim q))$

$= p \vee ((q \vee \sim p) \wedge T)$

$= p \vee (q \vee \sim p)$

$= (q \vee \sim p) \vee p$

$= q \vee (\sim p \vee p)$

$= q \vee T = T$

โดยทฤษฎีบท 1.1 จึงได้ว่า $\sim p \wedge \sim q = \sim (p \vee q)$.

j) การพิสูจน์ว่า $\sim p \vee \sim q = \sim(p \wedge q)$ กระทำโดยทำนองเดียวกับการพิสูจน์ i)

k) 1) สมมติว่า $p \wedge \sim q = F$

$p = p \wedge T$

$= p \wedge (q \vee \sim q)$

$= (p \wedge q) \vee (p \wedge \sim q)$

$= (p \wedge q) \vee F$

$= p \wedge q$

ดังนั้น ถ้า $p \wedge \sim q = F$ แล้ว $p = p \wedge q$

2) สมมติว่า $p = p \wedge q$

$p \wedge \sim q = (p \wedge q) \wedge \sim q$

$= p \wedge (q \wedge \sim q)$

$= p \wedge F$

$= F$

ดังนั้น ถ้า $p = p \wedge q$ แล้ว $p \wedge \sim q = F$

1) และ 2) นั้นคือ $p \wedge \sim q = F$ ก็ต่อเมื่อ $p = p \wedge q$

l) $\sim F = \sim(p \wedge \sim p)$

$= \sim p \vee \sim (\sim p)$

$= T$

m) $\sim T = \sim(p \vee \sim p)$

$= \sim p \wedge \sim (\sim p)$

$= F$

แบบฝึกหัด 1.6

ถ้าให้ $p - q = p \wedge \sim q$ จงพิสูจน์ว่า

1. $p \vee q = p \vee (q - p)$
2. $p - (p - q) = p \wedge q$
3. $p = T - p$
4. $p \wedge q = F$ ก็ต่อเมื่อ $p - q = p$
5. $p \wedge (q - r) = (p \wedge q) - (p - r)$

6. จงแสดงว่าข้อความในแบบฝึกหัด 1.3 ข้อ 2.2 ถึง 2.7 ตรรกสมมูลกับ T (Tautology) โดยใช้วิธีการทางพีชคณิตของประพจน์

7. จงแสดงว่าข้อความต่อไปนี้เป็นข้อความขัดแย้ง (Contradiction)

   7.1 $(P \vee q) \wedge (p \vee \sim q) \wedge (\sim p \vee q) \wedge (\sim p \vee \sim q)$

   7.2 $[(p \wedge r) \vee (p \wedge \sim r)] \Leftrightarrow [(\sim p \wedge r) \vee (\sim p \wedge \sim r)$

   โดยใช้วิธีการทางพีชคณิตของประพจน์

1.7 เงื่อนไขตรรก (Logical Implication)

นิยาม ข้อความ A จะกล่าวได้ว่า มีเงื่อนไขตรรกต่อข้อความ B ก็ต่อเมื่อในกรณีที่ข้อความ A มีค่าความจริงเป็นจริง ค่าความจริงของ B จะต้องเป็นจริงด้วย เมื่อแปลความจากนิยาม เราอาจเขียนเสียใหม่ว่า ข้อความ A กล่าวได้ว่า มีเงื่อนไขตรรกต่อข้อความ B ก็ต่อเมื่อ $A \Rightarrow B = T$ เราจะเขียนสัญลักษณ์ว่า $A \leq B$ นั่นคือ

$$
\begin{aligned}
(A \leq B) \quad & \Leftrightarrow (A \Rightarrow B = T) \\
& \Leftrightarrow (\sim A \vee B = T) \\
& \Leftrightarrow (A \wedge (\sim A \vee B) = A) \\
& \Leftrightarrow ((A \wedge \sim A) \vee (A \wedge B) = A) \\
& \Leftrightarrow (F \vee (A \wedge B) = A) \\
& \Leftrightarrow (A \wedge B = A)
\end{aligned}
$$

ทฤษฎีบท 1.7 ความสัมพันธ์ $\leq$ คล้องตาม

1. $p \leq p$ (Reflexivity)
2. ถ้า $p \leq q$ และ $q \leq p$ แล้ว $p = q$ (Anti - Symmetry)
3. ถ้า $p \leq q$ และ $q \leq r$ แล้ว $p \leq r$ (Transitivity)

พิสูจน์ 1) เนื่องจาก $p \wedge p = p$

$\therefore p \leq p$

2) สมมติว่า $p \leq q$ และ $q \leq p$

$\therefore p \wedge q = p$ และ $q \wedge p = q$

พิจารณา
$$
\begin{aligned}
p &= p \wedge q \\
&= q \wedge p \\
&= q
\end{aligned}
$$

3) สมมติว่า $p \leq q$ และ $q \leq r$

$\therefore p \wedge q = p$ และ $q \wedge r = q$

พิจารณา
$$
\begin{aligned}
p \wedge r &= (p \wedge q) \wedge r \\
&= p \wedge (q \wedge r) \\
&= p \wedge q \\
&= p
\end{aligned}
$$

$\therefore p \leq r$

แบบฝึกหัด 1.7

ถ้าให้ $p - q = p \wedge \sim p$ จงพิสูจน์ว่า

I . $p \leq q \Leftrightarrow p - q = F$

2 . $p \leq F \Leftrightarrow p = F$

3 . $p \leq q \Leftrightarrow \sim p \vee q = T$

1.8 ประโยคเปิด และ วลีบอกปริมาณ (Open Sentence and Quantifiers)

ประโยคเปิดคือประโยคที่เปิดโอกาสให้เราแทนตัวแปรด้วยตัวคงที่ โดยเนื้อแท้ของประโยคเปิดไม่มีค่าความจริงแต่เมื่อแทนตัวแปรด้วยตัวคงที่แล้วก็จะกลายเป็นประพจน์ทันที เช่น ประโยคต่อไปนี้

x เป็นนักศึกษามหาวิทยาลัยรามคำแหง

$x+7 = 13$

$x + 3y = 8$

เป็นต้น ในการคำนวณ เรามักจะแทนประโยคเปิดด้วยตัวอักษรตัวใหญ่แล้วตามด้วยตัวแปร เช่น ให้

Px หรือ $P(x)$ แทนประโยค x เป็นนักศึกษามหาวิทยาลัยรามคำแหง

Qx หรือ $Q(x)$ แทนประโยค $x + 7 = 13$

Rxy หรือ $R(x,y)$ แทนประโยค $x + 3y = 8$

ประโยคเปิดจะถูกเปลี่ยนแปลงให้เกิดเป็นประพจน์ (มีค่าความจริงได้ด้วยวิธีการสองวิธี)

1) แทนตัวแปรด้วยตัวคงที่ เช่นประโยคเปิดที่ยกเป็นตัวอย่างไว้ข้างต้น พบว่า $Q(5)$ $(5 + 7 = 13)$ มีค่าความจริงเป็นเท็จ แต่ $Q(6)$ มีค่าความจริงเป็นจริง $R(1,2)$ เท็จ แต่ $R(2,2)$ จริง.

2) เติมวลีบอกปริมาณ เพื่อขยายประโยคเปิดลงไป ก็จะได้ประพจน์ (มีค่าความจริง) เช่น เรากล่าวว่า *"สำหรับทุกจำนวนธรรมชาติ x ใดๆ $x + 7 = 13$"* ก็เป็นประพจน์ที่มีค่า ความจริงเป็นเท็จ แต่ถ้าเรากล่าวว่า *"มีจำนวนธรรมชาติ x บางจำนวนที่ $x + 7 = 13$"* เป็น ข้อความที่เป็นจริง

สำหรับวลีบอกปริมาณ ของประโยคแรก เขียนด้วยสัญลักษณ์ว่า

$\forall x \in \mathbb{N}\,[x + 7 = 13]$ หรือ $\forall x \in \mathbb{N}\,[Q(x)]$, $\mathbb{N}$ คือเซตของจำนวนธรรมชาติ

โดยแท้จริงแล้ว เราจะอ่านว่า *"สำหรับทุกจำนวนธรรมชาติ x ใดๆ $x + 7 = 13$"* ความหมายของมันก็คือ *"สำหรับทุก x ถ้า x เป็นจำนวนธรรมชาติแล้ว $x + 7 = 13$"* เราก็อาจเขียนได้อีกรูปหนึ่งว่า $\forall x\,[x \in \mathbb{N} \Rightarrow x + 7 = 13]$ สมมติว่าเราให้ $R(x)$ แทนประโยคเปิด $x \in \mathbb{N} \Rightarrow x + 7 = 13$ และเขียนเสียใหม่ว่า $\forall x\,[\,R(x)\,]$ ซึ่ง

$\forall x\,[R(x)] = R(a_1) \wedge R(a_2) \wedge R(a_3) \wedge ...R(a_i)$ เป็นสิ่งใดๆ ที่เราแทน x ถ้าเราแทนค่า x ด้วย $\frac{1}{2}$ $R(\frac{1}{2})$ แทนได้ว่า $\frac{1}{2} \in \mathbb{N} \Rightarrow \frac{1}{2} + 7 = 13$ ซึ่งให้ความจริงเป็นจริง เพราะว่า $\frac{1}{2} \in \mathbb{N}$ มีค่าความจริงเท็จ แต่ $R(5)$ เท็จ ดังนั้น $\forall x\,[R(x)]$ จึงมีค่าความจริงเป็นเท็จ

ส่วนวลีบอกปริมาณสำหรับประโยคที่ 2 อาจเขียนด้วยสัญลักษณ์ว่า

$$\exists x \in \mathbb{N}\,[x + 7 = 13] \text{ หรือ } \exists x \in \mathbb{N}\,[Q(x)]$$

โดยความจริงแล้วเราจะอ่านว่า *"มีจำนวนธรรมชาติ x บางจำนวนซึ่ง x + 7 = 13"* หรือจะพูดว่า มีบาง x ซึ่ง x เป็นจำนวนธรรมชาติและ $x + 7 = 13$ ก็อาจเขียนสัญลักษณ์แทนประโยคนั้นได้อีกรูป คือ $\exists x\,[x \in \mathbb{N} \wedge x + 7 = 13]$ ถ้าให้ $S(x)$ แทนประโยคเปิด $x \in \mathbb{N} \wedge x + 7 = 13$ และเขียนเสียใหม่ว่า $\exists x\,[S(x)]$ ซึ่ง $\exists x\,[S(x)] = S(a_1) \vee S(a_2) \vee S(a_3) \vee ...S(a_i)$ เป็นสิ่งใดๆ ที่แทนค่า x ถ้าเราแทนค่า x ด้วย 5, $S(5)$ แทนได้ว่า $5 \in \mathbb{N} \wedge 5 + 7 = 13$ ซึ่งมีค่าความจริงเป็นเท็จแต่ $S(6)$ มีค่าความจริงเป็นจริง จึงได้ค่าความจริงของ $\exists x\,[S(x)]$ มีค่าความจริงเป็นจริง

บางทีเราก็พบประโยคคณิตศาสตร์แปลกๆ เช่น *"ไม่มีจำนวนตรรกยะ x ใดๆ เลย ซึ่ง $x = \sqrt{2}$"* ซึ่งจะพูดว่า *"สำหรับทุกจำนวนตรรกยะ x , $x \neq \sqrt{2}$"* ก็มีความหมายเหมือนกันจึงได้

$$\sim\exists x \in \mathbb{Q}\,[x = \sqrt{2}] = \forall x \in \mathbb{Q}\,[x \neq \sqrt{2}]$$

นั่นคือ ถ้าให้ $P(x)$ แทนประโยคเปิด $x = \sqrt{2}$ เราจึงได้

$$\sim\exists x\,[P(x)] = \forall x\,[\sim P(x)]$$

เมื่อเราใส่ ~ เข้าไปทั้ง 2 ข้าง ก็จะได้

$$\exists x\,[P(x)] = \sim\forall x\,[\sim P(x)]$$

ถ้าให้ $Q(x) = \sim P(x)$ จึงได้ว่า

$$\sim\forall x\,[Q(x)] = \exists x\,[\sim Q(x)]$$

1.9 แบบการพิสูจน์คณิตศาสตร์

ทฤษฎีบทหรือจะเป็นโจทย์ทางคณิตศาสตร์ จะประกอบด้วยประพจน์ หรือข้อความในการพิสูจน์ก็ใช้หลักการทางตรรกศาสตร์ ทำข้อความที่เป็นผลลัพธ์จาก นิยาม (Definition) สัจพจน์ (Axioms หรือ Postulates) รวมทั้งทฤษฎีบทที่ผ่านมาแล้ว นำมาอนุมาน เพื่อยืนยันว่า ทฤษฎีบท

นั้นถูกต้อง การพิสูจน์ก็ดำเนินไปโดยอาศัยการสรุปถูก ซึ่งมีรูปแบบการสรุปผลที่ถูกต้องอยู่ 7 รูปแบบตามที่ได้พบมาแล้ว ในตัวอย่าง 1.2.3 และแบบฝึกหัด 1.3 ข้อ 2.2 ถึง 2.7 คือ

1). Modus Ponens

เหตุ 1) $p \Rightarrow q$ และ
2) p
WA q

$[(p \Rightarrow q) \wedge p] \Rightarrow q = t$

2) Modus Tollens

เหตุ 1) $p \Rightarrow q$ และ
2) $\sim q$
WR $-p$

$[(p \Rightarrow q) \wedge \sim q] \Rightarrow \sim p = t$

3) Hypothetical Syllogism

เหตุ 1) $p \Rightarrow q$ และ
2) $q \Rightarrow r$
WR $p \Rightarrow r$

$[(p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow r)] \Rightarrow (p \Rightarrow r) = t$

4) Disjunctive Syllogism

เหตุ 1) $p \vee q$ และ
2) $\sim q$
WA p

$[(p \vee q) \wedge \sim p] \Rightarrow p = t$

5) Conductive Dilemma

เหต 1) $p \Rightarrow q$ และ
2) $r \Rightarrow s$ และ
3) $p \vee r$
WA $q \vee s$

$[(p \Rightarrow q) \wedge (r \Rightarrow s) \wedge (p \vee r)] \Rightarrow (q \vee s) = t$

6) Cestructive Dilemma

เหตุ 1) $p \Rightarrow q$ และ
2) $r \Rightarrow s$ และ
3) $\sim q \vee \sim r$
WA $-p \vee \sim r$

$[(p \Rightarrow q) \wedge (r \Rightarrow s) \wedge (\sim q \vee \sim r)] \Rightarrow (\sim p \vee \sim r) = t$

7) Contraposition

$$\left.\begin{array}{ll} \text{เหตุ} & p \Rightarrow q \\ \hline \text{ผล} & \sim q \Rightarrow \sim P \end{array}\right\} (p \Rightarrow q) \Leftrightarrow (\sim q \Rightarrow \sim p) = t$$

การพิสูจน์ทฤษฎีบทก็คือการพิสูจน์ข้อความในแบบต่างๆ พอสรุปได้ดังต่อไปนี้

แบบ 1) การพิสูจน์ ข้อความ p

พิสูจน์ .

$\therefore$ p

แบบ 2) การพิสูจน์ข้อความ $p \wedge q$

พิสูจน์ .

$\therefore$ p

.

$\therefore$ q

แบบ 3) การพิสูจน์ข้อความ $p \Rightarrow q$

พิสูจน์ สมมติ p

$\therefore$ q

แบบ 4) การพิสูจน์ข้อความ $p \vee q$ เราพบว่า

$p \vee q = \sim p \Rightarrow q = \sim q \Rightarrow p$ การพิสูจน์จึงใช้การพิสูจน์ 3) คือ

พิสูจน์ สมมติ $\sim p$ (หรือ $\sim q$)

$\therefore$ q (หรือ p)

แบบ 5) การพิสูจน์ข้อความ $p \Leftrightarrow q$ เราพบว่า

$$p \Leftrightarrow q = (p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow p)$$

การพิสูจน์จึงผสมผสานกันระว่าง 2) และ 3) คือกระทำดังนี้

พิสูจน์ $\Rightarrow$ สมมติ p

$\therefore$ q

$\Leftarrow$ สมมติ q

$\therefore$ p

แบบ 6) การพิสูจน์ $\forall x\ [P(x)]$

พิสูจน์ สำหรับสมาชิก x ใดๆ

$\therefore$ $P(x)$

แบบ 7) การพิสูจน์ $\exists x\ [P(x)]$ กระทำโดยการเลือกสมาชิกพิเศษ (Special element) a ขึ้นมา แล้วพิสูจน์ให้ได้ $P(a)$ เป็นจริงการพิสูจน์จึงกระทำดังนี้

พิสูจน์ a (เป็นสมาชิกพิเศษที่เราหามา)

$\therefore$ $P(a)$

ตัวอย่าง 1.9.1 มีสมาชิก $e \in \mathbb{N}$ ซึ่ง $ex = xe = x$ สำหรับทุก $x \in \mathbb{N}$
พิจารณาข้อความในตัวอย่างนี้ก็จะเขียนด้วยสัญลักษณ์ได้ว่า

$\exists e\, [\, e \in \mathbb{N} \wedge \forall x\, [\, x \in \mathbb{N} \Rightarrow xe = ex = x\,]]$ หรือจะเขียนว่า

$\exists e \in \mathbb{N} \forall e \in \mathbb{N}\, [\, xe = ex = x\,]$ การพิสูจน์จึงเริ่มด้วย แบบ 7) แบบ 6) แบบ 3) ตามลำดับ

พิสูจน์ เนื่องจาก $1 \in \mathbb{N}$
ให้ $e = 1$
สำหรับสมาชิก x ใดๆ ใน $\mathbb{N}$
เรามี $1x = x1 = x$
นั่นคือ มี $e = 1 \in \mathbb{N}$ ซึ่ง $ex = xe = x$ สำหรับทุก $x \in \mathbb{N}$

ตัวอย่าง 1.9.2 **นิยาม** 1) $X \subseteq Y \Leftrightarrow \forall x\, [\, x \in x \Rightarrow x \in Y\,]$
2) $x \in X \cap Y \Leftrightarrow x \in X \wedge x \in Y$
3) $X = Y \Leftrightarrow X \subseteq Y \wedge Y \subseteq X$

จงพิสูจน์ว่า $A \subseteq B \Rightarrow A \cap B = A$

การพิสูจน์ตัวอย่างนี้ เราก็จะต้องสมมติว่า $A \subseteq B$ แล้ว พิสูจน์ให้ได้ว่า $A \cap B \subseteq A$ และ $A \subseteq A \cap B$

พิสูจน์ สมมติว่า $A \subseteq B$

1) สำหรับสมาชิก x ใดๆ

สมมติว่า $x \in A \cap B$

$\therefore \; x \in A \wedge x \in B$ (นิยาม 2)

$\therefore \; x \in A$

(นั่นคือ $\forall x [x \in A \cap B \Rightarrow x \in A]$)

นั่นคือ $A \cap B \subseteq A$

2) สำหรับสมาชิก y ใดๆ

สมมติว่า $y \in A$ และ

$\therefore \; y \in A \Rightarrow y \in B$ (สมมติฐาน A C B และนิยาม 1)

$\therefore \; y \in B$

นันคือ $y \in A \wedge y \in B$

$\therefore \; y \in A \cap B$ นิยาม 2)

(นั่นคือ $\forall y [y \in A \Rightarrow y \in A \cap B]$)

นั่นคือ $A \subseteq A \cap B$

(จาก 1) และ 2) จึงได้ว่า $A \cap B \subseteq A \wedge A \subseteq A \cap B$)

1) และ 2) นั่นคือ $A \; n \; B = A$

หมายเหตุ 1) ข้อความที่อยู่ในวงเล็บ "(.........)" จะเขียนไว้ก็ได้หรือจะไม่เขียนก็ไม่ผิด

2) " $\therefore$ " จะเขียนไว้หน้าผลลัพธ์ที่ได้จากประโยคที่แล้ว (ทำหน้าที่แทน $\Rightarrow$)

3) "นั่นคือ" จะเขียนไว้หน้าผลลัพธ์จากการพิสูจน์ข้างบนทั้งหมด

แบบฝึกหัดทบทวน 1

1) จงพิจารณาประโยคใดต่อไปนี้เป็นประพจน์

1. บ้านนี้สุนัขดุ
2. ต้องข้ามถนนตรงทางม้าลาย
3. อย่ายั่วโมโห
4. ขี้แพ้ชวนตี
5. สวยแต่รูป
6. มีมนุษย์บนดาวอังคาร
7. Π เป็นจำนวนตรรกยะ
8. ขอบคุณที่ให้โอกาส
9. ยินดีต้อนรับเลือด น้ำเงิน ทอง หยดใหม่
10. สิริวรรณประเมินสถานการณ์ผิด
11. ทำไมของถึงแพงอย่างนี้
12. แม่น้ำตาปีอยู่ในจังหวัดปัตตานี
13. ลิ้นจี่มีรสเปรี้ยว
14. ความไม่มีโรคเป็นลาภอันประเสริฐ
15. ให้นักศึกษาเลือกทำข้อ 1, 2 หรือ 3

2) จงพิจารณาประโยคใดต่อไปนี้เป็นประพจน์ หรือไม่เป็นประพจน์

1. ฉันไม่ได้เล่นเทนนิสนานแล้ว
2. ฉันเล่นหมากรุกไม่เป็น
3. ไม่จริงที่ว่า “ฉันไม่ได้รักแม่”
4. โปรดข้ามถนนตรงทางม้าลายหรือสะพานลอย
5. ท้องฟ้าจะแจ่มใสก็ต่อเมื่อ ไม่มีฝนตก
6. ฉันเรียนและสอบได้
7. ห้ามเล่นน้ำหรือจับสัตว์น้ำในบริเวณนี้
8. ขอให้โชคดีและเดินทางโดยสวัสดิภาพ
9. ห้ามเด็ดดอกไม้

10. เขตทหารห้ามเข้า
11. ดวงจันทร์เป็นบริวารของโลกหรือดวงอาทิตย์
12. ฉันไม่ได้เรียนแต่สอบได้
13. อินโดนีเซียและประเทศไทย มีการปกครองแบบเดียวกัน
14. ทหารเท่านั้น จึงจะเป็นนายกรัฐมนตรีได้
15. ไม่จริงที่ว่า สมปองเป็นน้องสมชาย

3) กำหนดให้ p : ณัฐ มีความสุข

q : ปกรณ์มีความทุกข์

จงเขียนประพจน์ต่อไปนี้ในรูปสัญลักษณ์

1. ณัฐและปกรณ์มีความสุข
2. ณัฐหรือไม่ก็ปกรณ์มีความสุข
3. ทั้งณัฐและปกรณ์ไม่มีความสุข
4. ไม่จริงที่ว่า ณัฐและปกรณ์มีความทุกข์
5. ไม่จริงที่ว่า ณัฐ และปกรณ์มีความทุกข์

4) ถ้าสมมติว่า ทั้งณัฐและปกรณ์มีความสุขแล้ว ประพจน์ใดในข้อ 3 มีค่าความจริงเป็นจริง

5) กำหนดให้ p : ฉันชอบหนังสือเล่มนี้

q : ฉันชอบคณิตศาสตร์

จงเขียนประพจน์ที่ให้ต่อไปนี้เป็นคำพูด

1. $p \wedge q$
2. $\sim p$
3. $\sim q$
4. $(\sim p) \wedge (\sim q)$
5. $(\sim p) \wedge q$
6. $p \vee q$
7. $\sim (p \wedge q)$
8. $\sim [(\sim p) \wedge q]$

6) ถ้าสมมติว่า ฉันชอบหนังสือเล่มนี้และฉันชอบคณิตศาสตร์แล้ว ประพจน์ใด ในข้อ 5 มีค่าความจริงเป็นจริงสำหรับฉัน

7) ถ้าสมมติว่า ฉันชอบหนังสือเล่มนี้ แต่ฉันไม่ชอบคณิตศาสตร์ แล้วประพจน์ใดในข้อ 5 มีค่าความจริงเป็นจริงสำหรับฉัน

8) จงสร้างตารางหาค่าความจริงของประพจน์ต่อไปนี้

1. $(\sim p) \wedge q$
2. $(\sim p) \vee q$
3. $(\sim p) \vee (\sim q)$
4. $(\sim p) \wedge (\sim q)$
5. $\sim (p \wedge q)$
6. $p \vee (\sim q)$

9) กำหนดให้ p : สมศักดิ์สอบไล่ได้
q : สมศักดิ์ได้เลื่อนชั้น

จงเขียนประพจน์ต่อไปนี้เป็นคำพูด

1. $p \Rightarrow q$ 2. $q \Rightarrow p$
3. $(\sim p) \Rightarrow (\sim q)$ 4. $(\sim q) \Rightarrow (\sim p)$

IO) จงบอกค่าความจริงของประพจน์ต่อไปนี้

1. ถ้า $2 \times 3 = 5$ แล้ว $2 + 3 = 6$
2. ถ้า $5 \times 6 = 56$ แล้ว $5 - 6 = 1$
3. t-h $5 \times 6 = 42$ แล้ว $5 - 6 = 10$
4. ถ้า $5 \times 6 = 30$ แล้ว $5 + 6 = 10$.
5. ถ้า $2 + 3 = 5$ แล้ว $2 \times 3 = 5$

11) สมมติว่า $a \times b = c$, $b \times c = d$ และ $c \neq d$ แล้วจงบอกค่าความจริงของประพจน์ต่อไปนี้

1. ถ้า $a \times b = c$ แล้ว $b \times c = d$
2. ถ้า $a \times b = d$ แล้ว $b \times c = c$
3. ถ้า $a \times b = b$ แล้ว $b \times c = d$
4. ถ้า $a \times b = c$ แล้ว $b \times c = c$

12) จงแสดงโดยใช้ตารางค่าความจริงว่าประพจน์ต่อไปนี้มีค่าความจริงเหมือนกัน

1. $\sim (p \wedge q)$ กับ $\sim p \vee \sim q$
2. $\sim (p \vee q)$ กับ $\sim p \wedge \sim q$
3. $(p \Rightarrow q)$ กับ $\sim p \vee q$
4. $\sim q \Rightarrow \sim q)$ กับ $p \Rightarrow q$

13) จงหาค่าที่เป็นไปได้ทั้งหมด ซึ่งจะไปแทนที่ x แล้วทำให้แต่ละประโยคต่อไปนี้เป็นจริง

1. ถ้า $2 + 3 = 5$ แล้ว $x + 4 = 8$
2. ถ้า $2 + 3 = 6$ แล้ว $x + 4 = 8$
3. ถ้า $7 + 6 = 13$ แล้ว $x - 3 = 7$
4. ถ้า $7 \times 6 = 42$ แล้ว $x - 3 = 7$
5. ถ้า $x + 4 = 8$ แล้ว $2 + 3 = 5$
6. ถ้า $x - 3 = 7$ แล้ว $7 + 6 = 13$
7. ถ้า $x - 3 = 7$ แล้ว $7 \times 6 = 42$
8. ถ้า $3 - x = 4$ แล้ว $2 \times 5 = 13$
9. ถ้า $3 - x = 4$ แล้ว $2 \times 5 = 10$

14) จงพิจารณาว่าประพจน์ต่อไปนี้เป็น สัจนิรันดร์หรือไม่เป็น และประพจน์ใดเป็นข้อความขัดแย้งกัน (Contradiction)

1. $[\sim(\sim p)\ 1 \Rightarrow p$
2. $[(p \Rightarrow q) \wedge (\sim q)\ 1 \Rightarrow (\sim p)$
3. $[(p \Rightarrow q) \wedge q] \Rightarrow p$
4. $[(p \Rightarrow q) \wedge (\sim p)\ \mathrm{I} \Rightarrow (\sim q)$
5. $[(p \Rightarrow q) \wedge (\sim p)\ 1 \Rightarrow q$
6. $[(p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow r)] \Rightarrow (p \Rightarrow r)$
7. $[(p \sim q) \wedge (q \vee (\sim p)]$
8. $\sim[p \vee (\sim r)] \Rightarrow [q \vee (\sim p)]$

15) จงพิจารณาว่าประพจน์แต่ละประพจน์ต่อไปนี้เป็นข้อความสมมูลเชิงตรรกศาสตร์หรือไม่

1. $[\sim(\sim p)\ 1 \Leftrightarrow p$
2. $(p \wedge q) \Leftrightarrow (q \wedge p)$
3. $(p \wedge q) \Leftrightarrow (q \vee p)$
4. $(p \Rightarrow q) \Leftrightarrow [q \vee (\sim p)\ 1$
5. $(p \Rightarrow q) \Leftrightarrow \sim[p \wedge (\sim q)]$
6. $[(p \vee q) \wedge (\sim q)\ 1 \Leftrightarrow p$

16) จงพิจารณาข้อโต้แย้งต่อไปนี้สมเหตุสมผลหรือไม่

1) ถ้าคุณชอบสุนัขแล้วคุณจะมีอายุยืนยาวถึง 120 ปี

   คุณชอบสุนัข

   ดังนั้น คุณจะมีอายุยืนยาวถึง 120 ปี

2) ถ้าคุณชอบคณิตศาสตร์แล้ว คุณจะชอบหนังสือเล่มนี้

   คุณไม่ชอบคณิตศาสตร์

   ดังนั้น คุณไม่ชอบหนังสือเล่มนี้

3) ถ้าคุณทำงานหนักแล้ว คุณจะประสบความสำเร็จ

   คุณไม่ประสพความสำเร็จ

   ดังนั้นคุณไม่ได้ทำงานหนัก

4) ถ้าคุณอ่านหนังสือเล่มนี้แล้ว คุณจะชอบคณิตศาสตร์

   คุณชอบคณิตศาสตร์

   ดังนั้นคุณอ่านหนังสือเล่มนี้

5) ถ้าคุณอ่านหนังสือเล่มนี้แล้วคุณจะชอบคณิตศาสตร์

   คุณไม่ได้อ่านหนังสือเล่มนี้

   ดังนั้นคุณไม่ชอบคณิตศาสตร์

6) ถ้าคุณชอบหนังสือเล่มนี้แล้ว คุณจะชอบคณิตศาสตร์

   ถ้าคุณชอบคณิตศาสตร์แล้ว คุณจะเป็นคนฉลาด

   ดังนั้น ถ้าคุณเป็นคนฉลาดแล้ว คุณต้องชอบหนังสือเล่มนี้

7) ถ้าคุณมีความสุขแล้ว คุณจะโชคดี

   ถ้าคุณโชคดีแล้ว คุณจะร่ำรวย

   ดังนั้น ถ้าคุณยังไม่ร่ำรวยแล้ว คุณก็ยังไม่มีความสุข