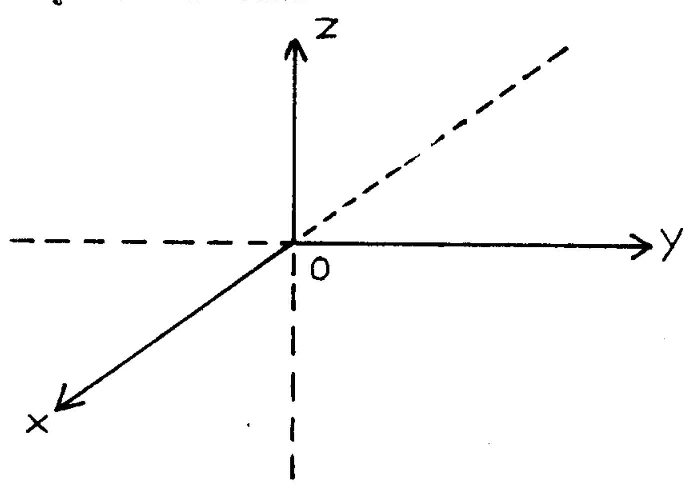
บทที่ ๙

9.1 สเปซของจำนวนสามมิติ

(the three-dimentional number space)

นิยาม 9.1.1 เซทของอันดับตรีคูณ (ordered triples) ทั้งหมดของจำนวนจริง มีชื่อเรียกว่า สเปซของจำนวนสามมิติ (the three-dimentional number space) และเขียนแทนด้วยสัญญลักษณ์ R^3 อันดับตรีคูณแต่ละอัน (x, y, z) มีชื่อเรียกว่า จุดในสเปซของจำนวนสามมิติ (a point in the three-dimentional number space)

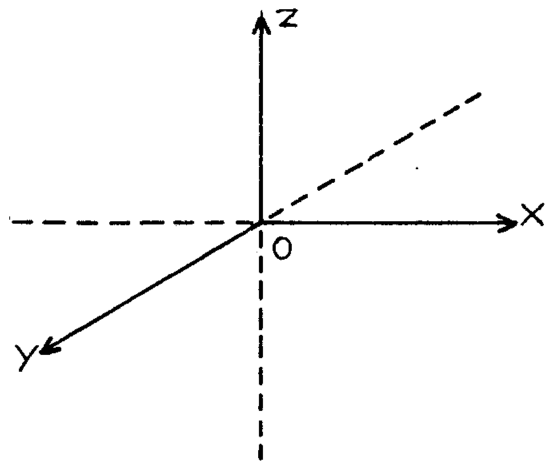
R^3 ในความหมายของสเปซสามมิติทางเรขาคณิต เราพิจารณาระยะที่มีทิศทาง (directed distances) ของจุด ๆ หนึ่งจากระนาบที่ตั้งฉากซึ่งกันและกันสามระนาบ ระนาบทั้งสามก่อสร้างขึ้นโดยเส้นตรงที่ตั้งฉากซึ่งกันและกันสามเส้น ซึ่งตัดกันที่จุด ๆ หนึ่ง ซึ่งเราเรียกว่าจุดกำเนิด (origin) และเขียนแทนด้วยอักษร O เส้นตรงทั้งสามนี้ถูกเรียกว่าแกนโคออร์ดิเนต (coordinate axes) มีชื่อเรียกว่า แกน x, แกน y และแกน z โดยปกติแกน x และแกน y จะอยู่ในระนาบตามแนวนอน และแกน z อยู่ในระนาบตามแนวยืน ทิศทางที่เป็นบวก (positive direction) จะถูกเลือกบนแต่ละแกน



รูป 9.1.1

ถ้าทิศทางที่เป็นบวกถูกเลือกตามรูป 9.1.1 ระบบโคออร์ดิเนตแบบนี้มีชื่อเรียกว่า ระบบมือขวา (right-handed system) ที่มีชื่อเช่นนี้ ก็เพราะมา

จากความจริง ซึ่งถ้าใช้มือขวาวางให้หัวแม่มือชี้ไปทางทิศทางที่เป็นบวกของแกน x และนิ้วชี้ชี้ไปทางทิศทางที่เป็นบวกของแกน y แล้วนิ้วกลางก็จะชี้ไปทางทิศทางที่เป็นบวกของแกน z



รูป 9.1.2

ถ้าทิศทางที่เป็นบวกถูกเลือกตามรูป 9.1.2 ระบบโคออร์ดิเนตแบบนี้จะมีชื่อเรียกว่า **ระบบมือซ้าย (left-handed system)** ที่มีชื่อเช่นนี้ ก็คงอธิบายได้ในทำนองเดียวกัน

โดยทั่ว ๆ ไป เรามักนิยมใช้ระบบมือขวา แกนทั้งสามจะกำหนดระนาบโคออร์ดิเนต 3 ระนาบ (three coordinate planes)

แกน x และแกน y จะอยู่ในระนาบ xy

แกน y และแกน z จะอยู่ในระนาบ yz

และ แกน z และแกน x จะอยู่ในระนาบ xz

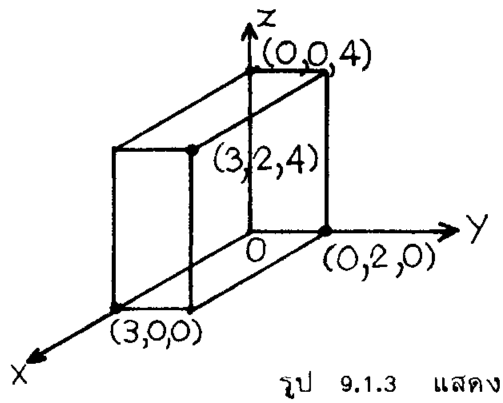
อันดับตรีคูณของจำนวนจริงแต่ละอัน (x, y, z) จะมีความสัมพันธ์กับแต่ละจุด P ในสเปซสามมิติทางเรขาคณิต

ระยะที่มีทิศทางของ P จากระนาบ yz เรียกว่า โคออร์ดิเนต x

ระยะที่มีทิศทางของ P จากระนาบ xz เรียกว่า โคออร์ดิเนต y

และ ระยะที่มีทิศทางของ P จากระนาบ xy เรียกว่า โคออร์ดิเนต z

โคออร์ดิเนตทั้งสามนี้มีชื่อเรียกว่า rectangular cartesian coordinates ของจุด และมีการสมนัยหนึ่งต่อหนึ่ง (a one-to-one correspondence) ระหว่างอันดับตรีคูณของจำนวนจริงทั้งหลายกับจุดในสเปซสามมิติทางเรขาคณิต เป็นระบบที่มีชื่อเรียกว่า rectangular cartesian coordinate system เพราะฉะนั้น เราจึงเขียน R^3 แทนความหมายของสเปซสามมิติทางเรขาคณิต และเราเรียกอันดับตรีคูณ (x, y, z) อันหนึ่งแทนจุด ๆ หนึ่ง



รูป 9.1.3 แสดงจุด (3, 2, 4)

ระนาบโคออร์ดิเนตทั้งสามจะแบ่งสเปซออกเป็นแปดส่วน แต่ละส่วนเรียกว่า octant octant ที่หนึ่ง (first octant) คือ ส่วนที่มีโคออร์ดิเนตทั้งสามเป็นบวกทั้งหมด

เส้นตรงเส้นหนึ่งจะขนานกับระนาบ ๆ หนึ่ง ก็ต่อเมื่อ(iff) ระยะทางจากจุดใด ๆ บนเส้นตรงเส้นนั้นไปยังระนาบนั้นมีค่าเท่ากัน

เส้นตรงทั้งหลายที่อยู่บนระนาบที่กำหนดให้ จะขนานกับระนาบนั้น ในกรณีย์เช่นนี้ ระยะทางจากจุดใด ๆ บนเส้นตรงเส้นนั้นไปยังระนาบนั้นจะมีค่าเป็นศูนย์

ทฤษฎี 9.1.1

(1) เส้นตรงเส้นหนึ่งขนานกับระนาบ yz ก็ต่อเมื่อ (iff) จุดทั้งหมดบนเส้นตรงเส้นนั้นมีโคออร์ดิเนต x เท่ากัน

(2) เส้นตรงเส้นหนึ่งขนานกับระนาบ xz ก็ต่อเมื่อ (iff) จุดทั้งหมดบนเส้นตรงเส้นนั้น มีโคออร์ดิเนต y เท่ากัน

(3) เส้นตรงเส้นหนึ่งขนานกับระนาบ xy ก็ต่อเมื่อ (iff) จุดทั้งหมดบนเส้นตรงเส้นนั้น มีโคออร์ดิเนต z เท่ากัน

ในสเปซสามมิติ ถ้าเส้นตรงเส้นหนึ่งขนานกับระนาบสองระนาบซึ่งตัดกัน มันก็จะขนานกับเส้นตรงซึ่งเกิดขึ้นจากระนาบทั้งสองตัดกัน และถ้าเส้นตรงที่กำหนดให้ขนานกับเส้นตรงเส้นที่สอง แล้วเส้นตรงที่กำหนดให้นั้นก็จะขนานกับระนาบใด ๆ ซึ่งบรรจุเส้นตรงเส้นที่สองนั้น

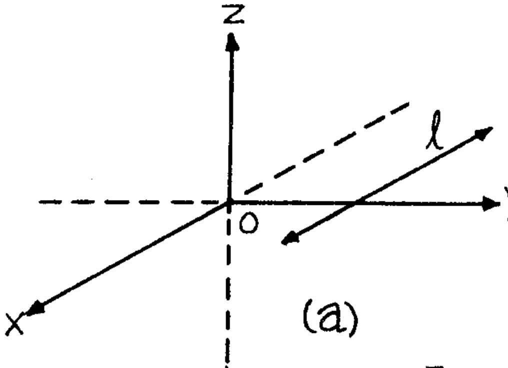
ทฤษฎี 9.1.2

(1) เส้นตรงเส้นหนึ่งขนานกับแกน x ก็ต่อเมื่อ (iff) จุดทั้งหมดบนเส้นตรงเส้นนั้นมีโคออร์ดิเนต y เท่ากัน

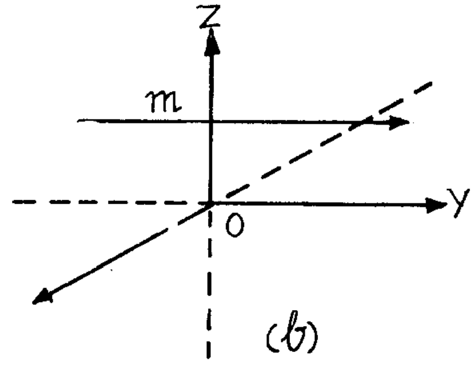
และมีโคออร์ดิเนต z เท่ากัน

(2) เส้นตรงเส้นหนึ่งขนานกับแกน y ก็ต่อเมื่อ (iff) จุดทั้งหมดบนเส้นตรงเส้นนั้น มีโคออร์ดิเนต x เท่ากัน และมีโคออร์ดิเนต z เท่ากัน

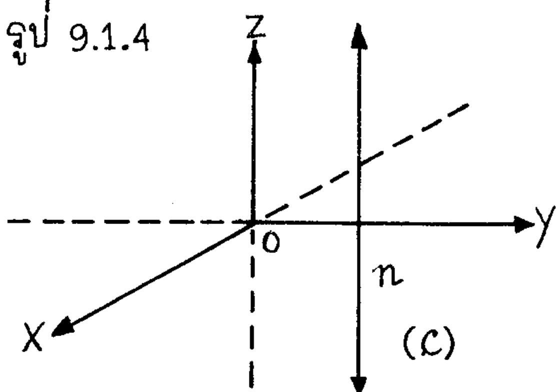
(3) เส้นตรงเส้นหนึ่งขนานกับแกน z ก็ต่อเมื่อ (iff) จุดทั้งหมดบนเส้นตรงเส้นนั้น มีโคออร์ดิเนต x เท่ากัน และมีโคออร์ดิเนต y เท่ากัน



รูป 9.1.4



รูป 9.1.5



รูป 9.1.6

รูป 9.1.4 แสดงเส้นตรง l ขนานกับแกน x

รูป 9.1.5 แสดงเส้นตรง m ขนานกับแกน y

รูป 9.1.6 แสดงเส้นตรง n ขนานกับแกน z

ทฤษฎี 9.1.3 (1) ถ้า $A(x,y,z)$ และ $B(x_2,y,z)$ เป็นจุดสองจุดบนเส้นตรงเส้นหนึ่งซึ่งขนานกับแกน x แล้วระยะที่มีทิศทางจาก A ถึง F ซึ่งเขียนแทนด้วยสัญญลักษณ์ $\overline{AB}$

$$\overline{AP} = x_2-x_1$$

(2) ถ้า $C(x, y_1, z)$ และ $D(x, y_2, z)$ เป็นจุดสองจุดบนเส้นตรงเส้นหนึ่งซึ่งขนานกับแกน y แล้วระยะที่มีทิศทางจาก C ถึง D ซึ่งเขียนแทนด้วยสัญลักษณ์ $\overline{CD}$

$$\overline{CD} = y_2 - y_1$$

(3) ถ้า $E(x, y, z_1)$ และ $R(x, y, z_2)$ เป็นจุดสองจุดบนเส้นตรงเส้นหนึ่ง ซึ่งขนานกับแกน z แล้วระยะที่มีทิศทางจาก E ถึง F ซึ่งเขียนแทนด้วยสัญลักษณ์ $\overline{EF}$

$$\overline{EF} = z_2 - z_1$$

ตัวอย่าง 9.1.1 จงหาระยะที่มีทิศทาง $\overline{PQ}$ จากจุด $P(2, -5, -4)$ ถึงจุด $Q(2, -3, -4)$

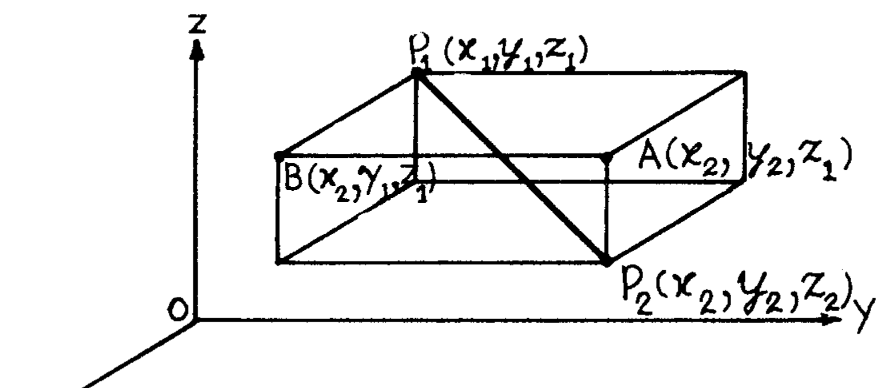
$\overline{PQ} = (-3)-(-5) = 2$ ตอบ

ทฤษฎี 9.1.4 จะให้สูตรสำหรับการหาระยะที่ไม่มีทิศทาง (undirected distance) ระหว่างจุดใด ๆ 2 จุด ในสเปซสามมิติ

ทฤษฎี 9.1.4 ระยะที่ไม่กำหนดทิศทางระหว่างจุด $P_1(x_1, y_1, z_1)$ และจุด $P_2(x_2, y_2, z_2)$ ซึ่งเขียนแทนด้วยสัญลักษณ์ P_1P_2 เราจะได้

$$\left|\overline{P_1 P_2}\right| = \sqrt{(x_2-x_1)^2 + (y_2-y_1)^2 + (z_2-z_1)^2}$$

พิสูจน์



จากทฤษฎีของพีธากอรัส เราได้

$$|\overline{P_1P_2}|^2 = |\overline{P_1A}|^2 + |\overline{AP_2}|^2 \quad \text{———} (1)$$

เพราะว่า $$|\overline{P_1A}|^2 = |\overline{P_1B}|^2 + |\overline{BA}|^2 \quad \text{———} (2)$$

แทนค่า $|\overline{P_1A}|^2$ จาก (2) ใน (1) เราจะได้

$$|\overline{P_1P_2}|^2 = |\overline{P_1B}|^2 + |\overline{BA}|^2 + |\overline{AP_2}|^2$$

$$|\overline{P_1P_2}|^2 = (x_2-x_1)^2 + (y_2-y_1)^2 + (z_2-z_1)^2$$

ดังนั้น $$|\overline{P_1P_2}| = \sqrt{(x_2-x_1)^2 + (y_2-y_1)^2 + (z_2-z_1)^2}$$

ช.ต.พ.

ตัวอย่าง 9.1.2 จงหาระยะที่ไม่กำหนดทิศทางระหว่างจุด

$P(-3, 4, -1)$ และ $Q(2, 5, -4)$

วิธีทำ

$$|\overline{PQ}| = \sqrt{(2+3)^2 + (5-4)^2 + (-4+1)^2}$$

$$= \sqrt{25 + 1 + 9} = \sqrt{35} \quad \underline{\text{ตอบ}}$$

นิยาม 9.1.2 กราฟของสมการใน R^3 คือ เซทของจุดทั้งหมด (x, y, z) ซึ่งมีโคออร์ดิเนตเป็นจำนวนที่สอดคล้องเป็นไปตามสมการนั้น

กราฟของสมการใน R^3 มีชื่อเรียกว่า พื้นที่ผิว (surface)

ถ้าพิจารณาสมการ $x = 3$

ใน R^1 สมการนี้คือ สมการของจุดซึ่งอยู่ห่างจากจุดกำเนิดไปทางขวา 3 หน่วย

ใน R^2 สมการ $x = 3$ คือ สมการเส้นตรง ซึ่งอยู่ห่างจากแกน Y ไปทางขวา 3 หน่วย และใน R^3 สมการนี้คือ สมการของระนาบ ซึ่งอยู่ห่างออกไปข้างหน้าของระนาบ yz 3 หน่วย

ระนาบที่ขนานกับระนาบ yz จะมีสมการอยู่ในรูป $x = k$
เมื่อ k เป็นค่าคงที่
ระนาบที่ขนานกับระนาบ xz จะมีสมการอยู่ในรูป $y = k$
และ ระนาบที่ขนานกับระนาบ xy จะมีสมการอยู่ในรูป $z = k$
ใน R^3 กราฟของสมการกำลังหนึ่งโดยทั่วไปใน x, y และ z
คือ $Ax + By + Cz + D = 0$ เป็นระนาบ
ระนาบจะถูกกำหนดขึ้น โดย

(1) จุดสามจุดซึ่งไม่ได้อยู่บนเส้นตรงอันเดียวกัน
(2) เส้นตรงเส้นหนึ่ง และจุด ๆ หนึ่งซึ่งไม่ได้อยู่บนเส้นตรงเส้นนั้น
(3) เส้นตรงสองเส้นตัดกัน
(4) เส้นตรงขนานกันสองเส้น

ในการวาดรูประนาบจากสมการของระนาบ จะสะดวกถ้าหากหาจุดซึ่งระนาบนั้นตัดแต่ละแกนโคออร์ดิเนตเสียก่อน
โคออร์ดิเนต x ของจุด ซึ่งเกิดขึ้นจากระนาบนั้นตัดแกน x มีชื่อเรียกว่า <u>x intercept</u> ของระนาบนั้น
โคออร์ดิเนต y ของจุด ซึ่งเกิดขึ้นจากระนาบนั้น ตัดแกน y มีชื่อเรียกว่า <u>y intercept</u> ของระนาบนั้น
และโคออร์ดิเนต z ของจุด ซึ่งเกิดขึ้นจากระนาบนั้นตัดแกน z มีชื่อเรียกว่า <u>z intercept</u> ของระนาบนั้น

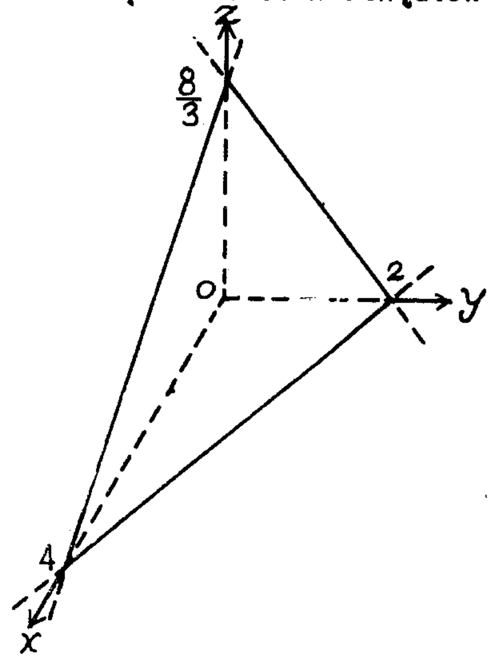
ตัวอย่าง 9.1.3 จงวาดรูประนาบ ซึ่งมีสมการ $2x + 4y + 3z = 8$

โดยการแทนค่า y และ z เท่ากับศูนย์ เราจะได้ $x = 4$
ดังนั้น x intercept ของระนาบนั้น คือ 4
ในทำนองเดียวกัน เราก็จะได้ y intercept และ z intercept ของระนาบนั้น คือ 2 ละ $\frac{8}{3}$ ตามลำดับ

เพราะฉะนั้น ระนาบตัดแกน x แกน y และแกน z ที่จุด (4, 0, 0)

$(0, 2, 0)$ และ $(0, 0, \frac{8}{3})$ ตามลำดับ

เมื่อลากเส้นตรงเชื่อมต่อระหว่างจุดทั้งสาม เราก็จะได้รูประนาบตามต้องการ

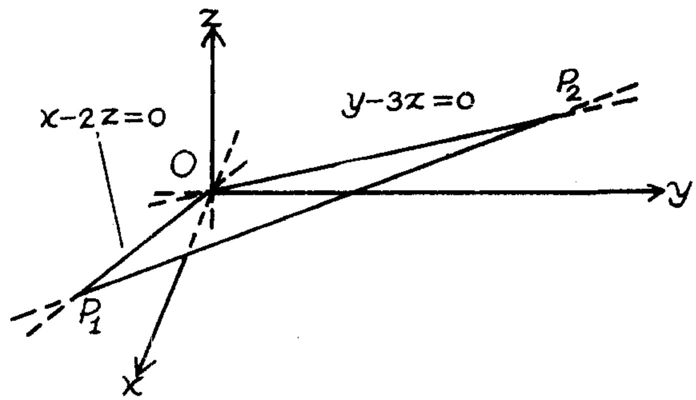


ตัวอย่าง 9.1.4 จงวาดรูประนาบ ซึ่งมีสมการ $3x + 2y - 6z = 0$

ในกรณีนี้ ระนาบตัดแต่ละแกนที่จุดกำเนิด
ถ้าเราให้ $x = 0$ ในสมการที่กำหนดให้ เราจะได้ $y - 3z = 0$ ซึ่งเป็นเส้นตรงในระนาบ yz และเส้นตรงเส้นนี้เกิดจากการตัดกัน ระหว่างระนาบ yz กับระนาบที่กำหนดให้ ในทำนองเดียวกัน เส้นตรงที่เกิดขึ้นจากการตัดกันระหว่างระนาบ xz กับระนาบที่กำหนดให้ ก็จะได้จากการให้ $y = 0$ และเราก็จะได้ $x - 2z = 0$ เมื่อลากเส้นตรงทั้งสองเส้นนี้ และลากเส้นตรงจากจุด ๆ หนึ่งบนเส้นตรงเส้นหนึ่งไปยังจุด ๆ หนึ่งบนเส้นตรงอีกเส้นหนึ่ง เราก็จะได้รูประนาบตามต้องการ

เส้นตรง $y - 3z = 0$ และเส้นตรง $x - 2z = 0$ มีชื่อเรียกว่า <u>traces</u> ของระนาบที่กำหนดให้ในระนาบ yz และระนาบ xz ตามลำดับ

สมการ $x = 0$ เป็นสมการของระนาบ yz เพราะว่าจุด (x, y, z) อยู่ในระนาบ yz ก็ต่อเมื่อ (iff) $x = 0$
ในทำนองเดียวกัน สมการ $y = o$ และ $z = 0$ เป็นสมการของระนาบ xz และระนาบ xy ตามลำดับ



นิยาม 9.1.3 ทรงกลม (sphere) คือ เซทของจุดทั้งหลายในสเปซสามมิติที่อยู่ห่างจากจุดคงที่จุดหนึ่งเป็นระยะทางเท่ากัน จุดคงที่นี้มีชื่อเรียกว่า จุดศูนย์กลาง (center) ของทรงกลม และระยะทางคงที่นี้มีชื่อเรียกว่า รัศมี (radius) ของทรงกลม

ทฤษฎี 9.1.5 สมการของทรงกลมรัศมี r และมีจุดศูนย์กลางอยู่ที่ (h, k, l) คือ

$$(x-h)^2+(y-k)^2+(z-l)^2 = r^2$$

พิสูจน์ ให้จุด (h, k, l) เขียนแทนด้วยสัญลักษณ์ C จุด P(x, y, z) คือ จุด ๆ หนึ่งบนทรงกลม ก็ต่อเมื่อ (iff)

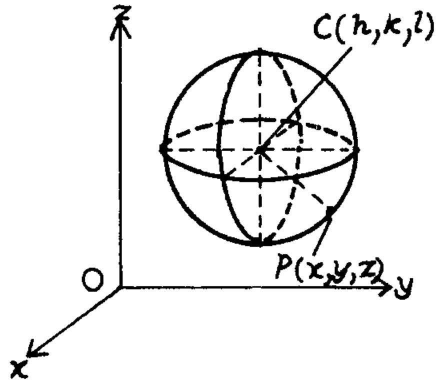
และ z $|\overline{CP}| = r$

หรือ $\sqrt{(x-h)^2+(y-k)^2+(z-l)^2} = r$

ยกกำลังสองทั้งสองข้าง

$$(x-h)^2+(y-k)^2+(z-l)^2 = r^2$$

ข.ต.พ.



ตัวอย่าง 9.1.5 จงหาสมการของทรงกลม ซึ่งมีจุดศูนยกลางอยู่ที่จุด $C(2, 1, -1)$ และบรรจุจุด $(9, -4, 0)$

วิธีทำ รัศมีของทรงกลมนี้ คือ

$$r = |\overline{CP}| = \sqrt{(9-2)^2+(-4-1)^2+(0+1)^2} = \sqrt{75}$$

เพราะฉะนั้น สมการของทรงกลมนี้ คือ

$$(x-2)^2+(y-1)^2+(z+1)^2 = 75$$

หรือ $x^2+y^2+z^2-4x-2y+2z-69 = 0$

<u>ตอบ</u>

ตัวอย่าง 9.1.6 จงแสดงว่ากราฟของสมการ

$$x^2+y^2+z^2-6x-4y+2z = 2$$

เป็นทรงกลม และจงหาจุดศูนย์กลางและรัศมีของทรงกลมนี้

วิธีทำ $x^2+y^2+z^2-6x-4y+2z = 2$

$$x^2-6x+9+y^2-4y+4+z^2+2z+1 = 2+9+4+1$$

$$(x-3)^2+(y-2)^2+(z+1)^2 = 16$$ ซึ่งเป็น

สมการของทรงกลมมีจุดศูนย์กลางอยู่ที่จุด $(3, 2, -1)$ และมีรัศมีเท่ากับ 4

<u>ตอบ</u>

แบบฝึกหัด

ข้อ 1 ถึงข้อ 8 จงหาระยะที่ไม่กำหนดทิศทางระหว่าง A และ B

1. A (0, 0, 0) ; B (7, 2, 3)
2. A (1, 1, 1) ; B (3, 4, 2)
3. A (-1, 1, 2) ; B (2, 3, 5)
4. A (2, -1, -3) ; B (4, 0, -1)
5. A (3, 4, 2) ; B (1, 6, 3)
6. A (2, -4, 1) ; B $(\frac{1}{2}, 2, 3)$
7. A (4, -3, 2) : B (-2, 3, -5)
8. A $(-2, -\frac{1}{2}, 5)$; B (5, 1, -4)
9. จงพิสูจน์ว่าจุด (1, -1, 3), (2, 1, 7) และ (4, 2, 6) เป็นจุดยอดมุม (vertices) ของสามเหลี่ยมมุมฉากรูปหนึ่ง และจงหาพื้นที่ของมัน
10. เส้นตรงเส้นหนึ่งลากผ่านจุด (6, 4, 2) และตั้งฉากกับระนาบ yz จงหาโคออร์ดิเนตของจุดบนเส้นตรงนี้ที่อยู่ห่างจากจุด (0, 4, 0) เป็นระยะทาง 10 หน่วย
11. จงพิสูจน์ว่าจุด (-3, 2, 4), (6, 1, 2) และ (-12, 3, 6) อยู่บนเส้นตรงอันเดียวกัน โดยใช้สูตรระยะทาง
12. จงเขียนรูปกราฟของ $x = -2$ ใน R^1, R^2, และ R^3
13. จงเขียนรูปกราฟของ $x = 6$ และ $y = 3$ ใน R^2 และ R^3

ข้อ 14 ถึงข้อ 19 จงวาดรูประนาบที่กำหนดให้

14. $2x-y+2z-6 = 0$
15. $4x-4y-2z-9 = 0$
16. $4x+3y-12z = 0$
17. $y+2z-4 = 0$
18. $3x+2z-6 = 0$
19. $z = 5$

ข้อ 20 ถึงข้อ 23 จงหาสมการของระนาบซึ่งบรรจุจุดทั้งสามที่กำหนดให้

20. (3, 4, 1), (1, 7, 1), (-1, -2, 5)

21. (0, 0, 2), (2, 4, 1), (-2, 3, 3)

22. (-2, 2, 2), (-8, 1, 6), (3, 4, -1)

23. (a, b, o), (a, o, c), (o, b, c)

24. จงหาสมการของทรงกลม ซึ่งมีจุดศูนย์กลางอยู่ที่ (3, 7, -4) และผ่านจุด (5, 1, -1)

25. จงหาสมการของทรงกลมซึ่งมีจุดศูนย์กลางอยู่ที่ (0, -4, -8) และมีรัศมี 6

26. จงหาสมการของทรงกลม ซึ่งมีรัศมี 4 และมีจุดศูนย์กลางร่วมกับทรงกลม ซึ่งมีสมการ $x^2+y^2+z^2-2y+8z-9 = 0$

27. จงหาสมการของทรงกลมซึ่งผ่านจุด (0, 0, 4), (2, 1, 3), และ (0, 2, 6) และมีจุดศูนย์กลางอยู่ในระนาบ yz

ข้อ 28 ถึงข้อ 31 จงหากราฟของสมการที่กำหนดให้

28. $x^2+y^2+z^2-8x+4y+2z-4 = 0$

29. $x^2+y^2+z^2-8y+6z-25 = 0$

30. $x^2+y^2+z^2-6z+9 = 0$

31. $x^2+y^2+z^2-x-y-3z+2 = 0$

9.2 ฟังก์ชันของตัวแปรค่าที่มีจำนวนมากกว่าหนึ่งตัวแปร

(Functions of More Than One Variable)

นิยาม 9.2.1 เซตของอันดับ n เท่าทั้งหลายของจำนวนจริง เรียกว่า สเปซจำนวน n มิติ และเขียนแทนด้วยสัญลักษณ์ R^n อันดับ n เท่าแต่ละอัน $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ เรียกว่า จุดในสเปซ จำนวน n มิติ

นิยาม 9.2.2 ฟังก์ชันของตัวแปรค่า n ตัว คือ เซตของอันดับคู่ในรูป (P, w) ซึ่งอันดับคู่ที่แตกต่างกันสองรูปใด ๆ จะไม่มีอีลีเมนต์ตัวแรกเหมือนกัน P เป็นจุดในสเปซจำนวน n มิติ และ w เป็นจำนวนจริง เซตของค่าที่เป็นไปได้ทั้งหมดของ P มีชื่อเรียกว่า **โดเมน** (domain) ของฟังก์ชัน และเซตของค่าที่เป็นไปได้ทั้งหมดของ w มีชื่อเรียกว่า **พิสัย** (range) ของฟังก์ชัน

จากนิยาม 2 เราจะเห็นว่าโดเมนของฟังก์ชันของตัวแปรค่า n ตัว คือ เซต ของจุดใน R^n และมีพิสัย คือ เซตของจำนวนจริง

นิยาม 9.2.3 ถ้า f เป็นฟังก์ชันของตัวแปรค่าตัวเดียว และ g เป็นฟังก์ชันของตัวแปรค่า 2 ตัว แล้วฟังก์ชันประกอบ (composite function) f.g คือ ฟังก์ชันของตัวแปรค่า 2 ตัว ซึ่งนิยามได้

$$(f.g)(x, y) = f(g(x, y))$$

และโดเมนของ f. g คือ เซตของจุดทั้งหมด (x, y) ในโดเมนของ g ซึ่ง g(x, y) อยู่ในโดเมนของ f

นิยาม 9.2.4 ถ้า f เป็นฟังก์ชันของตัวแปรค่า 2 ตัว แล้วกราฟของ f คือ เซตของจุดทั้งหมด (x, y, z) ใน R^3 ซึ่งมี (x, y) เป็นจุดในโดเมนของ f และ $z = f(x, y)$

นิยาม 9.2.5 ถ้า f เป็นฟังก์ชันของตัวแปรค่า n ตัว แล้วกราฟของ f คือ เซตของจุดทั้งหมด $(x_1, x_2, \ldots, x_n, w)$ ใน R^{n+1} ซึ่งมี $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ เป็นจุดในโดเมนของ f และ

$$w = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$$

ตัวอย่าง 9.2.1 โดเมนของฟังก์ชัน g คือ เซตของอันดับตรีคูณทั้งหมดของจำนวนจริง (x, y, z) ซึ่ง

$$g(x, y, z) = x^2-5xz+yz^2$$

จงหา (ก) $g(1, 4, -2)$

(ข) $g(2a, -b, 3c)$

(ค) $g(x^2, y^2, z^2)$

(ง) $g(y, z, -x)$

วิธีทำ (ก) $g(1, 4, -2) = 1^2-5(1)(-2)+4(-2)^2$

$= 1+10+16 = 27$ ตอบ

(ข) $g(2a, -b, 3c) = (2a)^2-5(2a)(3c)+(-b)(3c)^2$

$= 4a^2-30\,ac-9bc^2$ ตอบ

(ค) $g(x^2, y^2, z^2) = (x^2)^2-5(x^2)(z^2)+(y^2)(z^2)^2$

$= x^4-5x^2z^2+y^2z^4$ ตอบ

(ง) $g(y, z, -x) = y^2-5y(-x)+z(-x)^2$

$= y^2+5xy+x^2z$ ตอบ

ตัวอย่าง 9.2.2 กำหนดให้ $f(t) = \ln t$ และ $g(x, y) = x^2+ y$ จงหา $h(x, y)$ ถ้า $h = f\cdot g$ และจงหาโดเมนของ h

วิธีทำ

$$h(x, y) = (f.g)(x, y)$$

$$= f(g(x, y))$$

$$= f(x^2 + y)$$

$$= \ln (x^2 + y)$$ <u>ตอบ</u>

ถ้าโดเมนของ g คือ เซตของจุดทั้งหมดใน R^2 และโดเมนของ f คือ $(0, +\infty)$

เพราะฉะนั้น โดเมนของ h คือ เซตของจุดทั้งหมด (x, y) ซึ่ง $x^2 + y > 0$

<u>ตอบ</u>

แบบฝึกหัด 9.2

1. ให้ฟังก์ชัน f ของตัวแปรค่า 2 ตัว x และ y เป็นเซตของอันดับคู่ทั้งหมด ในรูป (P, z) ซึ่ง $z = (x+y)/(x-y)$ จงหา

   (ก) $f(-3, 4)$; (ข) $f(x^2, y^2)$; (ค) $\left[f(x, y)\right]^2$

   (ง) $f(-x, y)-f(x, -y)$; (จ) โดเมนของ f (ฉ) พิสัยของ f

2. ให้ฟังก์ชัน g ของตัวแปรค่า 3 ตัว x, y, และ z เป็นเซตของอันดับคู่ทั้งหมด ในรูป (P, w) ซึ่ง $w = \sqrt{4-x^2-y^2-z^2}$ จงหา

   (ก) $g(1, -1, -1)$; (ข) $g(-a, 2b, \frac{1}{2}c)$

   (ค) $g(y, -x, -y)$ (ง) โดเมนของ g ; (จ) พิสัยของ g

   (ฉ) $\left[g(x, y, z)^2 - g(x+2, y+2, z)\right]^2$

   ข้อ 3 ถึงข้อ 16 จงหาโดเมนและพิสัยของฟังก์ชัน f

3. $f(x, y) = \sqrt{\dfrac{25-x^2-y^2}{x}}$

4. $f(x, y) = x\sqrt{25-x^2 y^2}$

5. $f(x, y) = \dfrac{x}{\sqrt{25-x^2-y^2}}$

6. $f(x, y) = \dfrac{x^2-y^2}{x-y}$

7. $F(x, y) = \ln(xy-1)$

8. $f(x, y) = \ln(x^2-4y)$

9. $f(x, y, z) = (x+y)\sqrt{z-2}$

10. $f(x, y, z) = \ln(x^2+y^2+z^2-1)$

11. $f(x, y, z) = |x| \; e^{y/z}$

12. $f(x, y, z) = \dfrac{x}{|y| - |z|}$

13. $f(x, y) = 4x^2+4y^2$

14. $f(x, y) = \frac{1}{4}(x^2+y^2)$

15. $f(x, y) = 16-x^2-y^2$

16. $f(x, y) = \sqrt{100-x^2-y^2}$

ข้อ 17 และข้อ 18 จงหา $h(x,y)$ ถ้า $h = f.g$ และจงหาโดเมนของ h

17. $f(t) = \sqrt{t}$, $g(x, y) = e^x-e^y$

18. $f(t) = e^t$, $g(x, y) = y \ln x$

19. กำหนดให้ $f(x, y) = x-y$, $g(t) = \sqrt{t}$, $h(s) = s^2$

จงหา (ก) $(g \cdot f)(5, 1)$

(ข) $f(h(3), g(9))$

(ค) $f(g(x), h(y))$

(ง) $g((h \cdot f)(x, y))$

(จ) $(g \cdot h, (f(x, y))$

20. กำหนดให้ $f(x, y) = x/y^2$, $g(x) = x^2$, $h(x) = \sqrt{x}$

จงหา (ก) $(h \cdot f)(2, 1)$

(ข) $f(g(2), h(4))$

(ค) $f(g(\sqrt{x}), n(x^2))$

(ง) $h((g \cdot f)(x, y))$

(จ) $(h \cdot g)(f(x, y))$

9.3 ลิมิตและการต่อเนื่องของฟังก์ชันของตัวแปรค่าที่มีจำนวนมากกว่าหนึ่ง

(Limits And Continuity of Functions of MOre Than One Variable)

นิยาม 9.3.1 ถ้า $P(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ และ $A(a_1, a_2, \ldots, a_r)$ เป็นจุดสองจุดใน R^n แล้วระยะทางระหว่าง P และ A ซึ่งเขียนแทนด้วยสัญลักษณ์ $||P-A||$ คือ

$$||P-A|| = \sqrt{(x_1-a_1)^2 + (x_2-a_2)^2 + \ldots + (x_n-a_n)^2}$$

ถ้า ใน R^1 เราให้ $P = x$ และ $A = a$

$$||x-a|| = \sqrt{(x-a)^2} = |x-a|$$

ถ้า ใน R^2 เราให้ $P = (x,y)$ และ $A = (x_o, y_o)$

$$||(x, y)-(x_o, y_o)|| = \sqrt{(x-x_o)^2 + (y-y_o)^2}$$

และถ้าใน R^3 เราให้ $P = (x,y,z)$ และ $A = (x_o, y_o, z_o)$

$$||(x, y, z)-(x_o, y_o, z_o)|| = \sqrt{(x-x_o)^2 + (y-y_o)^2 + (z-z_o)^2}$$

นิยาม 9.3.2 ถ้า A เป็นจุดใน R^n และ r เป็นจำนวนบวก แล้วลูกกลมเปิด (open ball) $B(A ; r)$ คือ เซ็ตของจุดทั้งหมด P ใน R^n ซึ่ง $||P-A|| < r$

นิยาม 9.3.3 ถ้า A เป็นจุดใน R^n และ r เป็นจำนวนมาก แล้วลูกกลมปิด (closed ball) $B[A ; r]$ คือ เซ็ตของจุดทั้งหมด P ใน R^n ซึ่ง $||P-A|| \leq r$

หมายเหตุ ลูกกลมเปิดใน R^2 บางครั้ง เราเรียกว่า แผ่นกลมเปิด (open disk) และลูกกลมปิดใน R^2 บางครั้งเราเรียกว่า แผ่นกลมปิด (closed disk)

ถ้า a เป็นจุดใน R^1 แล้วลูกกลมเปิด $B(a ; r)$ คือ เซ็ตของจุดทั้งหมด x ใน R^1 ซึ่ง $|x-a| < r$ —— (9.3.1)

เซ็ตของจุดทั้งหมด x ที่เป็นไปตาม (9.3.1) ก็คือ เซ็ตของจุดทั้งหมดในช่วงเปิด $(a-r, a+r)$ ดังนั้นลูกกลมเปิด $B(a;r)$ ใน R^1 คือ ช่วงเปิดที่มีจุดกลางอยู่ที่ a และจุดปลายอยู่ที่ $a-r$ และ $a+r$ ลูกกลมปิด $B[a; r]$ ใน R^1 คือ ช่วงปิด $[a-r, a+r]$

ถ้า (x_o, y_o) เป็นจุดใน R^2 แล้วลูกกลมเปิด $B((x_o,y_o);r)$ คือ เซ็ตของจุดทั้งหมด (x, y) ใน R^2 ซึ่ง

$$||(x, y)-(x_o,y_o)|| < r \quad \text{———} \quad (๙.๓.๒)$$

หรือ $$\sqrt{(x-x_o)^2+(y-y_o)^2} < r$$

ดังนั้น ลูกกลมเปิด $B((x_o, y_o) ; r)$ ใน R^2 จะประกอบขึ้นด้วยจุดทั้งหมดในพื้นที่ภายใน ซึ่งห้อมล้อมโดยวงกลมที่มีจุดศูนย์กลางอยู่ที่ (x_o,y_o) และมีรัศมี r ลูกกลมปิด $B\left[(x_o,y_o),r\right]$ ใน R^2 คือ เซ็ตของจุดทั้งหมดในลูกกลมเปิด $B((x_o,y_o) ; r)$ และบนวงกลมที่มีจุดศูนย์กลางอยู่ที่ (x_o,y_o) และมีรัศมี r

ถ้า (x_o,y_o,z_o) เป็นจุดใน R^3 แล้วลูกกลมเปิด $B((x_o,y_o,z_o) ; r)$ คือ เซ็ตของจุดทั้งหมด (x, y, z) ใน R^3 ซึ่ง

$$||(x, y, z)-(x_o, y_o,z_o)|| < r \quad \text{———} \quad (9.3.3)$$

หรือ $$\sqrt{(x-x_o)^2+(y-y_o)^2+(z-z_o)^2} < r$$

ดังนั้น ลูกกลมเปิด $B((x_o,y_o,z_o) ; r)$ ใน R^3 จะประกอบขึ้นด้วยจุดทั้งหมดในพื้นที่ภายใน ซึ่งห้อมล้อมโดยทรงกลมที่มีจุดศูนย์กลางอยู่ที่ (x_o,y_o,z_o) และมีรัศมี r

นิยาม 9.3.4 ให้ f เป็นฟังก์ชันของตัวแปรค่า n ตัว ซึ่งถูกนิยามอยู่บนลูกกลมเปิด $B(A ; r)$ ยกเว้นที่จุด A แล้วลิมิตของ $f(P)$ ขณะเมื่อ P เข้าใกล้ A คือ L ซึ่งจะเขียนแทนได้ในรูป $\lim_{P \to A} f(P) = L$

ถ้า $|f(P)-L|$ สามารถทำให้เล็กเท่าที่เราต้องการ โดยการทำ $||P-A||$ ให้เล็กเพียงพอ แต่ $||P-A|| > 0$

นิยาม 9.3.5 ให้ F เป็นฟังก์ชันของตัวแปรค่า ๒ ตัว ซึ่งถูกนิยามอยู่บนแผ่นกลมเปิด $B((x_o,y_o) ; r)$ ยกเว้นที่จุด (x_o,y_o) แล้ว

$$\lim_{(x,y)\to(x_o,y_o)} f(x, y) = L$$

ถ้า $|f(x,y)-L|$ สามารถทำให้เล็กเท่าที่เราต้องการ

โดยการทำ $\sqrt{(x-x_o)^2+(y-y_o)^2}$ ให้เล็กเพียงพอ

แต่ $\sqrt{(x-x_o)^2+(y-y_o)^2} > 0$

ตัวอย่าง 9.3.1 จงหา $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(1,3)} \frac{3x-y}{27x^3-y^3}$

วิธีทำ

$$\lim_{(x,y)\to(1,3)} \frac{3x-y}{27x^3-y^3} = \lim_{(x,y)\to(1,3)} \frac{3x-y}{(3x-y)(9x^2+3xy+y^2)}$$

$$= \lim_{(x,y)\to(1,3)} \frac{1}{9x^2+3xy+y^2}$$

$$= \frac{1}{\displaystyle\lim_{(x,y)\to(1,3)} (9x^2+3xy+y^2)}$$

$$= \frac{1}{9+9+9} = \frac{1}{27}$$ <u>ตอบ</u>

ตัวอย่าง 9.3.2 กำหนดให้ $f(x, y) = \dfrac{xy}{x^2+y^2}$

จงพิสูจน์ว่า $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$ หาค่าไม่ได้ **(not exist)**

พิสูจน์ ให้ S_1 เป็นเซ็ตของจุดทั้งหมดบนแกน x แล้ว

$$\lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\(P\ \text{ใน}\ S_1)}} f(x, y) = \lim_{x\to 0} f(x, 0) = \lim_{x\to 0} \frac{0}{x^2+0} = 0$$

ให้ S_2 เป็นเซ็ตของจุดทั้งหมดบนเส้นตรง $y = x$ แล้ว

$$\lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\(P\ \text{ใน}\ S_2)}} f(x, y) = \lim_{x\to 0} f(x, x) = \lim_{x\to 0} \frac{x^2}{x^2+x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

เพราะว่า $\displaystyle\lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\(P\ \text{ใน}\ S_1)}} f(x, y) \neq \lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\(P\ \text{ใน}\ S_2)}} f(x, y)$.

เพราะฉะนั้น $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x, y)$ หาค่าไม่ได้

ข.ต.พ.

ตัวอย่าง 9.3.3 กำหนดให้ $f(x,y) = \dfrac{x^2y}{x^4+y^4}$

จงพิสูจน์ว่า $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$ หาค่าไม่ได้ (not exist)

พิสูจน์ ให้ S_1 เป็นเซ็ตของจุดทั้งหมดบนแกน x หรือแกน y แกนใดแกนหนึ่ง

ดังนั้น ถ้า (x,y) อยู่ใน S_1 , $xy = 0$

เพราะฉะนั้น $\lim\limits_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\(P \text{ ใน } S_1)}} f(x,y) = 0$

ให้ S_2 เป็นเซ็ตของจุดทั้งหมดบนเส้นตรงเส้นใดเส้นหนึ่ง ซึ่งผ่านจุดกำเนิด ดังนั้น

ถ้า (x,y) เป็นจุดอยู่ใน S_2 , $y = mx$ แล้วเราจะได้

$$\lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\(P \text{ ใน } S_2)}} f(x, y) = \lim_{x\to0} \frac{mx^3}{x^4+m^2x^2}$$

$$= \lim_{x\to0} \frac{mx}{x^2+m^2} = 0$$

ให้ S_3 เป็นเซ็ตของจุดทั้งหมดบนพาราโบลา $y = x^2$ แล้ว

$$\lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\(P \text{ ใน } S_3)}} f(x,y) = \lim_{x\to0} \frac{x^4}{x^4+x^4} = \lim_{x\to0} \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

เพราะว่า $\lim\limits_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\(P \text{ ใน } S_3)}} f(x,y) \neq \lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$

เพราะฉะนั้น $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$ หาค่าไม่ได้

ข.ต.พ.

นิยาม 9.3.6 สมมติว่า f เป็นฟังก์ชันของตัวแปรค่า n ตัว และ A เป็นจุดจุดหนึ่งใน R^n แล้ว f ถูกกล่าวได้ว่าต่อเนื่องที่จุด A ก็ต่อเมื่อ (iff) เป็นไปตามสภาพทั้งสามดังต่อไปนี้

(1) $f(A)$ หาค่าได้ (exists) ;

(2) $\lim\limits_{P \to A} f(P)$ หาค่าได้ ;

(3) $\lim\limits_{P \to A} f(P) = f(A)$

นิยาม 9.3.7 ฟังก์ชัน f ของ ตัวแปรค่า ๒ ตัว x และ y ถูกกล่าวได้ว่าต่อเนื่องที่จุด (x_o,y_o) ก็ต่อเมื่อ (iff) เป็นไปตามสภาพทั้งสามดังต่อไปนี้

(1) $f(x_o,y_o)$ หาค่าได้ (exists)

(2) $\lim\limits_{(x,y)\to(x_o,y_o)} f(x,y)$ หาค่าได้

(3) $\lim\limits_{(x,y)\to(x_o,y_o)} f(x,y) = f(x_o,y_o)$

ทฤษฎี 9.3.1 ถ้า f และ g เป็นฟังก์ชันซึ่งต่อเนื่องที่จุด (x_o,y_o) แล้ว

(1) $f+g$ ต่อเนื่องที่จุด (x_o,y_o)

(2) $f-g$ ต่อเนื่องที่จุด (x_o,y_o)

(3) fg ต่อเนื่องที่จุด (x_o,y_o)

(4) f/g ต่อเนื่องที่จุด(x_o,y_o)และ $g(x_o,y_o) \neq 0$

ทฤษฎี 9.3.2 ฟังก์ชันโพลีโนเมียล (polynomial function) ของตัวแปรค่า 2 ตัว จะต่อเนื่องที่ทุก ๆ จุดใน R^2

ทฤษฎี 9.3.3 ฟังก์ชันเรชันนัล (rational function) ของตัวแปรค่า 2 ตัว จะต่อเนื่องที่ทุก ๆ จุดในโดเมนของมัน

นิยาม 9.3.8 ฟังก์ชัน fของตัวแปรค่า n ตัว ถูกกล่าวได้ว่าต่อเนื่องบนลูกกลมเปิด ถ้า f ต่อเนื่องที่ทุก ๆ จุดของลูกกลมเปิด

ทฤษฎี 9.3.4 สมมติว่า f เป็นฟังก์ชันของตัวแปรค่าตัวเดียว และ g เป็นฟังก์ชันของตัวแปรค่า 2 ตัว และสมมติว่า g ต่อเนื่องที่(x_o,y_o) และ f

ต่อเนื่องที่ $g(x_o, y_o)$ แล้วฟังก์ชันประกอบ $f.g$ ก็จะต่อเนื่องที่ (x_o, y_o)

ตัวอย่าง 9.3.4 ให้ฟังก์ชัน f ถูกนิยามโดย

$$f(x, y) = \begin{cases} \dfrac{xy}{x^2 + y^2} & \text{ถ้า } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{ถ้า } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

จงตรวจสอบว่า f จะต่อเนื่องที่ $(0, 0)$หรือไม่ ?

วิธีทำ ตรวจสอบสภาพทั้งสามตามนิยาม

(1) $f(0,0) = 0$ เป็นไปตามสภาพข้อที่ (1)

(2) เมื่อ $(x, y) \neq (0, 0)$, $f(x, y) = xy/(x^2 + y^2)$

ในตัวอย่าง 2 เราทราบว่า $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} xy/(x^2 + y^2)$ หาค่าไม่ได้

และดังนั้น $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$ หาค่าไม่ได้

เพราะฉะนั้น ไม่เป็นไปตามสภาพข้อที่ (2)

เพราะฉะนั้น f ไม่ต่อเนื่องที่ $(0, 0)$

แบบฝึกหัด

ข้อ 1 ถึงข้อ 18 จงหาค่าของลิมิต

1. $\lim\limits_{(x,y)\to(3,2)} (3x-4y)$

2. $\lim\limits_{(x,y)\to(1,4)} (5x-3y)$

3. $\lim\limits_{(x,y)\to(1,1)} (x^2+y^2)$

4. $\lim\limits_{(x,y)\to(5,3)} (2x^2-y^2)$

5. $\lim\limits_{(x,y)\to(-2,-4)} (x^2+2x-y)$

6. $\lim\limits_{(x,y)\to(3,-1)} (x^2+y^2-4x+2y)$

7. $\lim\limits_{(x,y)\to(-2,2)} y\sqrt[3]{x^3+4y}$

8. $\lim\limits_{(x,y)\to(5,2)} \sqrt{\dfrac{x^2+12y}{x-y^2}}$

9. $\lim\limits_{(x,y)\to(1,1)} \dfrac{x^2-y^2}{x-y}$

10. $\lim\limits_{(x,y)\to(2,-1)} \dfrac{x^3+8y^3}{x+2y}$

11. $\lim\limits_{(x,y)\to(1,1)} \dfrac{e^x+e^y}{e^{-x}+e^{-y}}$

12. $\lim\limits_{(x,y)\to(3,1)} \dfrac{x-3y}{9y^2-x^2}$

13. $\lim\limits_{(x,y)\to(1,3)} \dfrac{3x-y}{27x^3-y^3}$

14. $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{y^2+4y}{2xy-3y}$

15. $\lim\limits_{(x,y)\to(3,2)} \dfrac{2x^2+xy-6y^2}{4x^2-8xy+3y^2}$

16. $\lim\limits_{(x,y)\to(1,-1)} \dfrac{x^3-2x^2y-2xy^2+y^3}{x^2-y^2}$

17. $\lim\limits_{(x,y)\to(0,1)} \dfrac{\sqrt{x+y}-\sqrt{y}}{x}$

18. $\lim\limits_{(x,y)\to(1,1)} \dfrac{\sqrt[3]{x}-\sqrt[3]{y}}{x-y}$

ข้อ 19 ถึงข้อ 22 จงพิสูจน์ว่า ฟังก์ชัน f ที่กำหนดให้ $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$ หาค่าไม่ได้ (not exist)

19. $f(x,y) = \dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2}$

20. $f(x,y) = \dfrac{x+y}{x^2+y^2}$

21. $f(x,y) = \dfrac{x^2}{x^2+y^2}$

22. $f(x,y) = \dfrac{x^4y^4}{(x^2+y^4)^3}$

9.4 อนุพันธ์ย่อย (PARTIAL DERIVATIVES)

นิยาม 9.4.1 ถ้าให้ f เป็นฟังก์ชันของ 2 ตัวแปร x และ y อนุพันธ์ย่อยของ f เทียบกับ x คือ ฟังก์ชันซึ่งมีค่าที่จุด (x,y) ใด ๆ ในโดเมนของ f และกำหนดอนุพันธ์นี้ด้วย

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x, y) - f(x,y)}{\Delta x} \qquad (9,4.1)$$

ในทำนองเดียวกันสำหรับอนุพันธ์ย่อยของ f เทียบ y จะกำหนดได้ด้วย

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{f(x, y+\Delta y) - f(x,y)}{\Delta y} \qquad (9.4.2)$$

สัญกรณ์อื่น ๆ ของอนุพันธ์ย่อย $\frac{\partial f}{\partial x}$ ที่ใช้กันโดยทั่วไปคือ $f'_x(x,y)$
f'_x, $D_1 f$, f_1, f_x และ $D_1 f(x,y)$ เช่นเดียวกัน
สัญกรณ์ของอนุพันธ์ย่อย $\frac{\partial f}{\partial y}$ คือ f'_y, $D_2 f$, f_2, f_y, $f'_y(x,y)$
ดังนั้น ถ้า

$$z = f(x, y)$$

อนุพันธ์ย่อยของฟังก์ชัน z เทียบกับ x และอนุพันธ์ย่อยของฟังก์ชัน z เทียบกับ y เมื่อใช้สัญกรณ์จะได้

z'_x และ z'_y ตามลำดับ

ตัวอย่าง 9.4.1

กำหนดให้

$$z = f(x, y) = 3x^2 - 2xy^2$$

จงหา z'_x และ z'_y

วิธีทำ โดยใช้นิยาม (9.4.1)

$$z'_x = \lim_{x \to 0} \frac{3(x+\Delta x)^2 - 2(x+\Delta x)y^2 - (3x^2 - 2xy^2)}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{3x^2 + 6x\Delta x + 3(\Delta x)^2 = 2xy^2 - 2y^2\Delta x - 3x^2 + 2xy^2}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{6x\Delta x + 3(\Delta x)^2 - 2y^2\Delta x}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} 6x + 3\Delta x - 2y^2$$

$$= 6x - 2y^2$$

โดยใช้นิยาม (4.9.2)

$$z'_y = \lim_{\Delta g \to 0} \frac{3x^2-2x(y+\Delta y)^2-(3x^2-2xy^2)}{\Delta y}$$

$$= \lim_{\Delta y \to 0} \frac{3x^2-2xy^2-4xy\Delta y-2x(\Delta y)^2-3x^2+2xy^2}{\Delta y}$$

$$= \lim_{\Delta y \to 0} \frac{-4xy\Delta y-2x(\Delta y)^2}{\Delta y}$$

$$= \lim_{\Delta y \to 0} -4xy-2x\Delta y$$

$$= -4xy$$

ถ้ากำหนดให้ (x_o, y_o) เป็นจุดเฉพาะจุดหนึ่งในโดเมนของ f แล้วโดยใช้นิยาม (9.4.1) และ (9.4.2) จะได้ว่าค่าอนุพันธ์ย่อยของ f เทียบกับ x และค่าอนุพันธ์ย่อยของ f เทียบกับ y ที่จุด (x_o, y_o) มีค่าเป็น

$$f'_x(x_o, y_o) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_o+\Delta x, y_o) - f(x_o, y_o)}{\Delta x} \qquad (9.4.3)$$

และ

$$f'_y(x_o, y_o) = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{f(x_o, y_o+\Delta y) - f(x_o, y_o)}{\Delta y} \qquad (9.4.4)$$

ตัวอย่าง 9.4.2

กำหนดให้

$$z = f(x, y) = 3x^2-2xy^2$$

จงหาค่าของ z'_x และ z'_y ที่จุด $(2, -3)$

วิธีทำ โดยใช้ (9.4.3) ได้

$$z'_x(2, -3) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(2+\Delta x, -3) - f(2,-3)}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{3(2+\Delta x)^2-2(2+\Delta x)(-3)^2-(12-36)}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{12+12\Delta x+3(\Delta x)^2-36-18\Delta x+24}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} 12+3\Delta x-18$$

$$= -6$$

โดยใช้ (9.4.4) ได้

$$z'_y(2, -3) = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{f(2, -3+\Delta y)-f(2, -3)}{\Delta y}$$

$$= \lim_{\Delta y \to 0} \frac{3(2)^2-2(2)(-3+\Delta y)^2-[3(2)^2-2(2)(-3)^2]}{\Delta y}$$

$$= \lim_{\Delta y \to 0} \frac{12-36+24\Delta y-4(\Delta y)^2+24}{\Delta y}$$

$$= \lim_{\Delta y \to 0} 24-4\Delta y$$

$$= 24$$

ข้อสังเกต การหา $z'_x(2,-3)$ และ $z'_y(2,-3)$ โดยใช้ (9.4.3) และ (9.4.4) นั้น อาจใช้ (9.4.1) และ (4.9.2) หาได้เช่นเดียวกัน โดยหา z'_x และ z'_y ตามนิยามแล้วแทนค่า (x, y) ที่จุด (2, −3) ดังเช่นในตัวอย่าง 9.4.1

ซึ่งมี $z'_x(x, y) = 6x-2y^2$

และมี $z'_y(x, y) = -4xy$

เมื่อแทนค่า $x = 2$ และ $y = -3$ จะเห็นว่าทำให้ได้

$$z'_x(2, -3) = -6$$

และ

$$z'_y(2, -3) = 24$$

ซึ่งเป็นค่าที่เท่ากับค่าที่หาได้ในตัวอย่าง 9.4.2 เมื่อใช้ (9.4.3) และ (9.4.4)

การหาอนุพันธ์ย่อยของฟังก์ชัน f จะง่ายมากขึ้น เมื่อพิจารณาและเปรียบเทียบ (9.4.1) และ (9.4.2) กับนิยามของการหาอนุพันธ์ของฟังก์ชันหนึ่งตัวแปรในบทที่ 3 กล่าวคือ

อนุพันธ์ย่อยของฟังก์ชัน f เทียบกับ x หรือ $f'_x(x,y)$ จะเท่ากับ $\frac{df}{dx}$ ถ้าในการหาอนุพันธ์ย่อยของ f เทียบกับ x เรากำหนดว่า f เป็นฟังก์ชันของตัวแปร x เท่านั้น (นั่นคือ กำหนดให้ y เป็นค่าคงที่) แนวคิดเช่นนี้ใช้ได้ในทำนองเดียวกันเมื่อต้องการหา $f'_y(x,y)$ ดังตัวอย่างต่อไปนี้

ตัวอย่าง 9.4.3

จงหา $f'_x(x, y)$ และ $f'_y(x, y)$ ถ้ากำหนดให้ว่า

$$f(x, y) = 2x^4-4x^3y+3xy^2$$

วิธีทำ ถ้ากำหนดว่า f เป็นฟังก์ชันของ x เท่านั้น (นั่นคือ y เป็นค่าคงที่) จะได้ว่าอนุพันธ์ย่อยของ f เทียบกับ x คือ

$$f'_x(x, y) = 8x^3-12x^2y+3y^2$$

และในทำนองเดียวกัน ถ้ากำหนดว่า f เป็นฟังก์ชันของ y เท่านั้น (นั่นคือ x เป็นค่าคงที่) จะได้ว่าอนุพันธ์ย่อยของ f เทียบกับ y คือ

$$f'_y(x, y) = -4x^3+6xy$$

ตัวอย่าง 9.4.4.

ถ้ากำหนดให้ $z = \frac{y+2}{x}$

จงหา z'_x และ z'_y

วิธีทำ โดยถือว่า y เป็นค่าคงที่ได้

$$z'_x = -\frac{(y+2)}{x^2}$$

และโดยถือว่า x เป็นค่าคงที่

$$z'_y = \frac{1}{x}$$

ตัวอย่าง 9.4.5

ถ้ากำหนดให้ $z = \text{Sin } (x-y)$

จงหา z'_x และ z'_y

วิธีทำ ถ้ากำหนดให้ y เป็นค่าคงที่จะได้

$$z'_x = \text{Cos } (x-y)$$

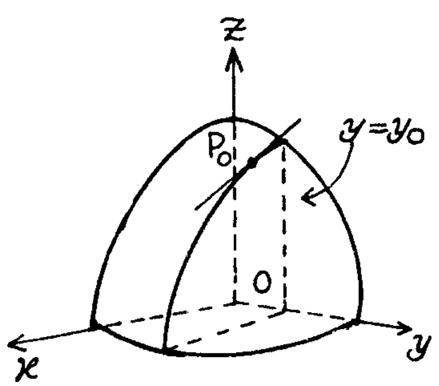
และถ้ากำหนดให้ x เป็นค่าคงที่จะได้

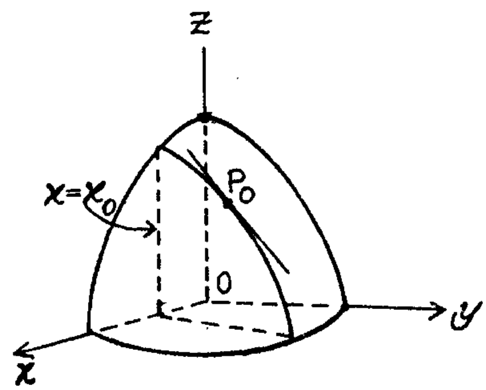
$$z'_y = -\text{ Cos } (x-y)$$

ความหมายในเชิงเรขาคณิตของอนุพันธ์ย่อย สามารถกล่าวได้ดังนี้คือ สำหรับกราฟของฟังก์ชัน 2 ตัวแปร f ที่มีผิว (Surface) ในรูปสมการ $z = f(x,y)$ ถ้ากำหนดให้ $y = y_o$ เป็นค่าคงที่ จะได้ว่า $z = f(x,y_o)$ คือ สมการของรอย (trace) ผิวนี้ในระนาบ $y = y_o$ และเส้นโค้ง (curve) ที่เกิดจากการตัดระหว่างผิวทั้งสองเขียนได้ในรูปสมการ

$$y = y_o \text{ และ } z = f(x,y) \qquad (9.4.5)$$

ดังนั้น $f'_x(x_o,y_o)$ คือ ความชันของเส้นสัมผัสโค้งที่กำหนดด้วย (9.4.5) ที่จุด P_o $(x_o,y_o,f(x_o,y_o))$ ในระนาบ $y = y_o$ ในทำนองเดียวกัน $f'_y(x_o,y_o)$ คือ ความชันของเส้นสัมผัสโค้งที่กำหนดด้วยสมการ $x = x_o$ และ $z = f(x,y)$ ที่จุด $P_o(x_o,y_o,f(x_o, y_o))$ ในระนาบ $x = x_o$ (ดังรูป)





ตัวอย่าง 9.4.6

จงหาความชันของเส้นสัมผัสโค้งที่เกิดจากการตัดระหว่างผิว $z = \frac{1}{4}(7-x^2-2y^2)^{\frac{1}{2}}$ กับระนาบ $y = 2$ ที่จุด (1, 1, 2)

วิธีทำ

ความชันที่ต้องการคือ ค่าของ $z'_x(x,y)$ ที่จุด (1, 1, 2)

$$\text{เนื่องจาก} \quad z'_x(x, y) = -\frac{x}{4(7-x^2-2y^2)^{\frac{1}{2}}} = -\frac{1}{8}$$

อนุพันธ์ย่อยเป็นอัตราการเปลี่ยนแปลง หรือ ทุกอนุพันธ์เป็นเครื่องวัดอัตราการเปลี่ยนแปลง กล่าวคือ f เป็นฟังก์ชันของ 2 ตัวแปร x และ y, อนุพันธ์ของ f เทียบกับ x ที่จุด $P_o(x_o,y_o)$ จะให้อัตราการเปลี่ยนแปลงโดยทันทีของ f(x, y) ต่อการเปลี่ยนแปลงหนึ่งหน่วยใน x (x เท่านั้นที่แปรค่า ส่วน y ให้คงที่ไว้ที่ y_o) ในทำนองเดียวกัน อนุพันธ์ของ f เทียบกับ y ที่จุด $P_o(x_o,y_o)$ จะให้อัตราการเปลี่ยนแปลงโดยทันทีของ f(x,y) ต่อการเปลี่ยนแปลงหนึ่งหน่วยใน y

เช่นถ้าต้นทุนในการผลิตสินค้าประเภทหนึ่งขึ้นอยู่กับแรงงานและค่าวัสดุ และถ้ากำหนดให้

z เป็นต้นทุนการผลิต

x เป็นค่าแรงรายชั่วโมง

y เป็นค่าวัสดุต่อปอนด์

โดยมี

$$z = 500 + 40x + 7y$$

เนื่องจาก

$$z'_x = 40$$

จึงกล่าวได้ว่าเมื่อค่าวัสดุคงที่ ถ้าเพิ่มค่าแรง 1 บาทต่อชั่วโมง จะทำให้ต้นทุนการผลิตเพิ่มขึ้น 40 บาท

และเนื่องจาก

$$z'_y = 7$$

แสดงว่าเมื่อกำหนดค่าแรงคงที่ การเพิ่มค่าวัสดุ 1 บาทต่อปอนด์ จะทำให้ต้นทุนการผลิตสูงขึ้น 7 บาท

ตัวอย่าง 9.4.7

จากสถิติการขายโทรทัศน์ชนิดหนึ่งได้พบว่า ถ้า x เป็นจำนวนของการโฆษณาประจำวัน, y เป็นจำนวนนาทีของการโฆษณาในแต่ละครั้ง, และ z เป็น

จำนวนการขายในแต่ละวัน แล้ว

$$z = 2xy^2 + x^2 + 15,000$$

ถ้าปรากฏว่ามีการโฆษณาใช้เวลา 1 นาที เป็นจำนวน 12 ครั้งต่อวัน

ก. จงหาอัตราการเปลี่ยนแปลงของจำนวนการขายต่อการเปลี่ยนแปลง 1 หน่วย ใน x เมื่อให้ค่า y คงที่และเท่ากับ 1

ข. จงใช้ผลจากข้อ ก. หาการเปลี่ยนแปลงของจำนวนการขายโดยประมาณในแต่ละวัน ถ้าเพิ่มจำนวนการโฆษณาที่ใช้เวลา 1 นาทีนี้อีก 25 เปอร์เซ็นต์

ค. จงหาอัตราการเปลี่ยนแปลงของจำนวนการขายต่อการเปลี่ยนแปลง 1 หน่วย ใน y เมื่อให้ค่า x คงที่ และเท่ากับ 12

ง. จงใช้ผลจากข้อ ค. หาการเปลี่ยนแปลงของจำนวนการขายโดยประมาณในแต่ละวัน ถ้าเพิ่มช่วงเวลาการโฆษณาอีก 25 เปอร์เซ็นต์

วิธีทำ

ก. อนุพันธ์ย่อยของ z เทียบกับ x คือ

$$z'_x(x, y) = 2y^2 + 2x$$

แทนค่า x = 12และ y = 1 ได้

$$z'_x(12, 1) = 2 + 24 = 26$$

เป็นคำตอบที่ต้องการ

ข. 25 เปอร์เซ็นต์ของ 12 คือ $\dfrac{12 \times 25}{100} = 3$

ดังนั้นเมื่อจำนวนการโฆษณาในแต่ละวันเพิ่มจาก 12 ครั้ง เป็น 15 ครั้ง จำนวนการขายโดยประมาณในแต่ละวัน คือ

$$26 \times 3 = 78$$

ค. อนุพันธ์ย่อยของ z เทียบกับ y คือ

$$z'_y(x, y) = 4xy$$

ที่ x = 12, y = 1 ได้

$$z'_y(12, 1) = 48$$

เป็นคำตอบที่ต้องการ

ข. 25 เปอร์เซ็นต์ของ 1 คือ $\frac{1 \times 25}{100} = \frac{1}{4}$

ดังนั้นเมื่อเพิ่มช่วงเวลาการโฆษณาอีก 25 เปอร์เซ็นต์ คือ เพิ่มจาก 1 นาที เป็น $1\frac{1}{4}$ นาที จำนวนการขายที่เพิ่มขึ้นในแต่ละวันโดยประมาณจะเท่ากับ

$\frac{1}{4} \times 48 = 12$

นิยาม 9.4.2 ถ้า f เป็นฟังก์ชันของ n ตัวแปร $x_1, x_2, \ldots, x_n$ อนุพันธ์ย่อยของ f เทียบกับ x_k คือ ฟังก์ชันซึ่งมีค่าที่จุด $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ ใด ๆ ในโดเมนของ f และกำหนดอนุพันธ์นี้ด้วย

$$f'_{x_k}(x_1,x_2,\ldots,x_n) = \lim_{\Delta x_k \to 0} f(x_1,x_2,\ldots x_{k-1},x_k+\Delta x_k,x_{k+1},\ldots,x_n)$$

$$f'_{x_k}(x_1,x_2,\ldots,x_n) = \lim_{\Delta x_k \to 0} \frac{f(x_1,\ldots,x_{k-1},x_k+\Delta x_k,x_{k+1},\ldots,x_n)-f(x_1,\ldots,x_n)}{\Delta x_k}$$

โดยนิยามนี้ ถ้า f เป็นฟังก์ชันของ 3 ตัวแปร x,y และ z แล้ว

$$f'_x(x,y,z) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x,y,z) - f(x,y,z)}{\Delta x} \qquad (9.4.5)$$

$$f'_y(x,y,z) = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{f(x,y+\Delta y,z) - f(x,y,z)}{\Delta y} \qquad (9.4.6)$$

$$f'_z(x,y,z) = \lim_{\Delta z \to 0} \frac{f(x,y,z+\Delta z) - f(x,y,z)}{\Delta z} \qquad (9.4.7)$$

เป็นอนุพันธ์ย่อยของ f เทียบกับ x, เทียบกับ y, และเทียบกับ z ตามลำดับ

ตัวอย่าง 9.4.8

กำหนดให้

$$f(x,y,z) = x^2 + y^2 + 2z^2$$

จงแสดงให้เห็นว่า

$$yzf'_x(x,y,z) + zxf'_y(x,y,z) - xyf'_z(x,y,z) = 0$$

วิธีทำ โดยใช้ (9.4.5) , (9.4.5) และ (9.4.7) ตามลำดับจะได้

$$f'_x(x,y,z) = 2x$$

$$f'_y(x,y,z) = 2y$$

$$f'_z(x,y,z) = 4z$$

ดังนั้น

$$yzf'_x(x,y,z) = 2xyz$$

$$zxf'_y(x,y,z) = 2xyz$$

และ

$$xyf'_z(x,y,z) = 4xyz$$

ด้วยเหตุนี้

$$yzf'_x(x,y,z) + zxf'_y(x,y,z) - xyf'_z(x,y,z) = 0$$

อนุพันธ์ย่อยที่มีอันดับสูงกว่าหนึ่ง

ถ้า f เป็นฟังก์ชันของ 2 ตัวแปรแล้ว โดยทั่วไปอนุพันธ์ย่อยอันดับหนึ่ง f'_x, กับ f'_y จะเป็นฟังก์ชันของ 2 ตัวแปรด้วย และถ้าสามารถหาอนุพันธ์ของฟังก์ชัน f'_x กับ f'_y ต่อไปได้อีก อนพันธ์เหล่านี้ เรียกว่า อนุพันธ์ย่อยอันดับสอง ซึ่งมีอยู่ 4 แบบ (สำหรับ f ที่เป็นฟังก์ชันของ 2 ตัวแปร x กับ y) คือ

$$f''_{xx} = \lim_{\Delta x \to o} \frac{f'_x(x+\Delta x,y) - f'_x(x,y)}{\Delta x}$$

$$f''_{yy} = \lim_{\Delta y \to o} \frac{f'_y(x,y,+\Delta y) - f'_y(x,y)}{\Delta y}$$

$$f''_{xy} = \lim_{\Delta x \to o} \frac{f'_y(x+\Delta x, y) - f'_y(x,y)}{\Delta x}$$

และ

$$f''_{yx} = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{f'_x(x,y+\Delta y) - f'_x(x,y)}{\Delta y}$$

การหาอนุพันธ์ย่อยอันดับสาม, สี่ และอันดับอื่นที่สูงขึ้น สามารถหาได้ในทำนองเดียวกัน เมื่อฟังก์ชันมีลิมิต และในการหาอนุพันธ์ย่อยอันดับสูงกว่าหนึ่งในแบบที่ง่ายขึ้นนั้น ก็ใช้หลักการหาอนุพันธ์ของฟังก์ชันหนึ่งตัวแปร ดังที่ได้อธิบายมาแล้ว นั่นคือ เมื่อจะหาอนุพันธ์ย่อยของฟังก์ชันโดยเทียบกับตัวแปรใด ก็ให้ตัวแปรอื่น ๆ คงที่ แล้วใช้สูตรหรือหลักการหาอนุพันธ์เช่นเดียวกับในเรื่องอนุพันธ์ของฟังก์ชันหนึ่งตัวแปร ดังตัวอย่างต่อไปนี้

ตัวอย่าง 9.4.9

ถ้ากำหนดให้ $f(x,y) = x^2y^3 - \mathrm{Sin}(y^{\frac{3}{2}} - \ln y)^{\frac{1}{2}}$

จงหา $f'_x(x,y)$, $f''_{xx}(x,y)$ และ f'''_{yxx}

วิธีทำ

$$f'_x(x,y) = 2xy^3$$

$$f''_{xx}(x,y) = 2v^3$$

และ

$$f'''_{yxx}(x,y) = 6y^2$$

ตัวอย่าง 9.4.10

ถ้ากำหนดให้ $z(x,y) - \ln(x^2+y)$

จงหา $z'_x(x,y)$ และ $z''_{yx}(x,y)$

วิธีทำ $z'_x(x,y) = \frac{1}{x^2+y}(2x)$

และ

$$z'_{yx}(x,y) = -\frac{2x}{(x^2+y)^2}$$

ตัวอย่าง 9.4.11

ถ้า $f(x,y) - y^2e^x + \ln(xy)$

จงหา $f''_{xx}(x,y)$, f''_{yx}, และ f''_{xyy}

วิธีทำ $$f'_x(x,y) = y^2e^x + \frac{1}{xy}(y) = y^2e^x + \frac{1}{x}$$

$$f''_{xx}(x,y) = y^2e^x - \frac{1}{x^2}$$

และเนื่องจาก

$$f'_y(x,y) = 2ye^x + \frac{1}{y}$$

$$f''_{yy}(x,y) = 2e^x - \frac{1}{y^2}$$

ดังนั้น $$f'''_{xyy}(x,y) = 2e^x$$

ตัวอย่าง 9.4.12

ถ้า $$z = x^7y^{\frac{7}{2}}$$

จงหา z''_{xy}, z''_{yx}, z'''_{xyy} และ z'''_{yyx}

วิธีทำ $$\because \quad z'_x = 7x^6y^{\frac{7}{2}}$$

$$z'_y = \frac{7x^7y^{\frac{5}{2}}}{2}$$

$$\therefore \quad z'_{yx} = \frac{49}{2}x^6y^{\frac{5}{2}}$$

และ $$z'_{xy} = \frac{49}{2}x^6y^{\frac{5}{2}}$$

ในทำนองเดียวกัน

$$z''_{yy} = \frac{35}{4}x^7y^{\frac{3}{2}}$$

ดังนั้น $$z'''_{xyy} = \frac{245}{4}x^6y^{\frac{3}{2}}$$

และ $$z'''_{yyx} = \frac{245}{4} x^6 y^{\frac{3}{2}}$$

จากตัวอย่าง 9.4.12 จะเห็นได้ว่าอนุพันธ์ย่อย

$$z''_{xy} = z''_{yx}$$

และ $$z'''_{xyy} = z'''_{yyx}$$

แสดงว่าลำดับของการหาอนุพันธ์ไม่เปลี่ยนแปลงผลลัพท์ของอนุพันธ์ย่อย ซึ่งผลลัพท์เช่นนี้เป็นจริงเสมอ ถ้าอนุพันธ์ย่อยมีความต่อเนื่อง

แบบฝึกหัด 9.4

1. จงหาอนุพันธ์ย่อยอันดับหนึ่ง z'_x และ z'_y ของฟังก์ชันที่กำหนดให้ต่อไปนี้

1.1 $z = x^2+2xy+y^2$ 1.2 $z = (x+2)(y+3)$

1.3 $z = \frac{x+y}{2}$ 1.4 $z = x^{\frac{1}{5}} + y^{\frac{1}{5}} - (xy)^{\frac{1}{2}}$

1.5 $z = \frac{1}{x^2y^2}$ 1.6 $z = \frac{(x^2-y^2)^{\frac{1}{2}}}{2xy}$

1.7 $z = \ln(x^2y)$ 1.8 $z = \sin(x^2+2\cos y)$

1.9 $z = e^{x^2+2xy}$ 1.10 $z = e^{\ln x}e^{\ln y}$

2. จงหาอนุพันธ์ย่อยอันดับสอง z''_{xx}, z''_{yy} และ z''_{xy} ของฟังก์ชันต่อไปนี้

2.1 $z = \frac{1}{x^2y^2}$ 2.2 $z = 2x+2y+y^2+3x^2+5$

2.3 $z = 25-(x-y)^4+(y-1)^4$ 2.4 $z = \frac{x+y}{(y^2-x^2)^{\frac{1}{2}}}$

2.5 $z = e^{\frac{y}{x}} \ln\left(\frac{x}{y}\right)$

3. จงหาอนุพันธ์ย่อยตามที่กำหนดไว้ของฟังก์ชันต่อไปนี้

3.1 ถ้า $f(x,y,z) = e^{xyz} + \ln\left(\frac{xy}{z}\right)$ จงหา f''_{yy}

3.2 ถ้า $f(x,y,z) = xyz + \ln(xyz)$ จงหา f'''_{zzz}

3.3 ถ้า $f(x,y) = xy^{9-\frac{4}{3}}$ จงหา f'''_{xxx} และ f'''_{xyy}

3.4 ถ้า $f(x,y) = \ln(x^2y^2)$ จงหา f'''_{yyy} f'''_{yxx}

3.5 ถ้า $f(x,y) = e^{xy}$ จงหา f''_{xxy}, f''_{xyx} และ f''_{yxx}

4. ถ้ากำหนดให้

$$z(r, t) = e^{r/t} + \ln\left(\frac{t}{r}\right)$$

จงแสดงให้เห็นว่า

$$t\, z'_t(r, t) + r\, z'_r(r, t) = 0$$

5. ฟังก์ชัน $z = f(x, y)$ เรียกว่า ฮาร์โมนิคฟังก์ชัน (Harmonic function) ถ้า

$$z''_{xx} + z''_{yy} = 0$$

จงแสดงว่าฟังก์ชันที่กำหนดให้ต่อไปนี้เป็นฮาร์โมนิคฟังก์ชัน

5.1 $z = f(x,y) = x^2-y^2$

5.2 $z = f(x,y) = \ln(x^2+y^2)$

5.3 $z = f(x,y) = \ln(x^2+y^2)^{\frac{1}{2}}$

5.4 $z = f(x,y) = e^{\frac{y}{x}} + \frac{x}{x^2+y^2}$

6. กำหนดให้

$$f(x,y,z) = x^2y + y^2z + z^2x$$

จงแสดงให้เห็นว่า

$$f'_x(x,y,z) + f'_y(x,y,z) + f'_z(x,y,z) - (x+y+z)^2 = 0$$

7. จงหาความชันของเส้นสัมผัสโค้งที่เกิดจากการตัดกันระหว่างผิวโค้ง $z = x^2+y^2$ กับระนาบ $y = 1$ ที่จุด $(2, 1, 5)$

8. จงหาความชันของเส้นสัมผัสโค้งที่เกิดจากการตัดระหว่างรูปทรงกลม $x^2+y^2+z^2 = 9$ กับระนาบ $x=1$ ที่จุด (1, 2, 2)

9. สมการของลาปลาซ คือ

$$u''_{xx} + u''_{yy} + u''_{zz} = 0$$

จงแสดงให้เห็นว่า

$$u(x,y,z) = (x^2+y^2+z^2)^{-\frac{1}{2}}$$

เป็นคำตอบของสมการลาปลาซ

10. จากสูตรในเรื่องก๊าซ

$$P.V = kT$$

ซึ่ง P เป็นความดันของก๊าซ

V เป็นปริมาตร

T เป็นอุณหภูมิ

และ k เป็นค่าคงที่

จงแสดงให้เห็นว่า

$$\left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)\left(\frac{\partial T}{\partial P}\right)\left(\frac{\partial P}{\partial V}\right) = -1$$

11. ถ้า x เป็นค่าสินค้าในคลังเก็บ, y เป็นจำนวนเจ้าหน้าที่ประจำคลังเก็บ, P เป็นกำไรต่อสัปดาห์ และ

$$P = 3,000+240y+20y(x-2y)-10(x-12)^2$$

โดย $150,000 \leqslant x \leqslant 250,000$

และ $5 \leqslant y \leqslant 12$

ถ้ากำหนดว่าค่าสินค้าเป็น 180,000 บาท และมีเจ้าหน้าที่ 8 คน

ก. จงหาอัตราการเปลี่ยนแปลงของ P สำหรับการเปลี่ยนแปลง, ต่อหน่วยใน x ถ้ากำหนดให้ y คงที่ และเท่ากับ 8

ข. จงใช้ผลจากข้อ ก. หาการเปลี่ยนแปลงของกำไรต่อสัปดาห์ ถ้าค่าสินค้าเปลี่ยนแปลงจาก 180,000 บาท เป็น 200,000 บาท และ $y = 8$

ค. จงหาอัตราการเปลี่ยนแปลงของ P สำหรับการเปลี่ยนแปลงต่อหน่วยใน y ถ้า $x =$ 180,000 บาท

ง. จงใช้ผลจากข้อ ค. หาการเปลี่ยนแปลงของกำไรต่อสัปดาห์ ถ้าจำนวนเจ้าหน้าที่เปลี่ยนจาก 8 เป็น 10 และ $x = 180{,}000$ บาท

ถ้า z เป็นจำนวนโต๊ะที่ผลิตได้ใน 1 วัน โดยโรงงานเฟอร์นิเจอร์

x เป็นจำนวนเครื่องจักรที่ใช้ผลิตในวันนั้น

y เป็นจำนวนคนงานที่ใช้แรงงานในวันนั้น

และถ้า

$$z = 3x^2+4xy+y^2$$

โดยที่ $3 \leqslant x \leqslant 10$, $4 \leqslant y \leqslant 25$

ก. จงหาจำนวนโต๊ะที่ผลิตใน 1 วัน เมื่อใช้เครื่องจักร 5 เครื่องและคนงาน 10 คน

ข. จงหาจำนวนโต๊ะเพิ่มโดยประมาณที่ผลิตได้ใน 1 วัน ถ้าจำนวนเครื่องจักรเพิ่มจาก 5 เครื่องเป็น 6 เครื่อง และจำนวนคนงาน $y = 10$

ค. จงหาจำนวนโต๊ะเพิ่มโดยประมาณที่ผลิตได้ใน 1 วัน ถ้าเพิ่มจำนวนคนงานจาก 10 คน เป็น 11 คน และจำนวนเครื่องจักร $x = 5$

9.5 ค่าปลายสุดของฟังก์ชัน 2 ตัวแปร

(EXTREMA FOR FUNCTIONS OF TWO VARIABLES)

ประโยชน์ของอนุพันธ์ของฟังก์ชัน 1 ตัวแปร คือ ในเรื่องการศึกษาค่าปลายสุดของฟังก์ชันที่นำไปสู่ปัญหาต่าง ๆ เกี่ยวกับค่าสูงสุด และค่าต่ำสุด ในบทที่ 4 ซึ่งผ่านมาแล้วได้ใช้ทฤษฎีเกี่ยวกับอนุพันธ์อันดับหนึ่งและอันดับสองพิจารณาหาค่าสูงสุดและค่าต่ำสุดสัมพัทธ์ของฟังก์ชันหนึ่งตัวแปร สำหรับกรณีของทฤษฎีสำหรับฟังก์ชันสองตัวแปรก็มีลักษณะคล้ายคลึงกันในเรื่องของฟังก์ชันหนึ่งตัวแปร

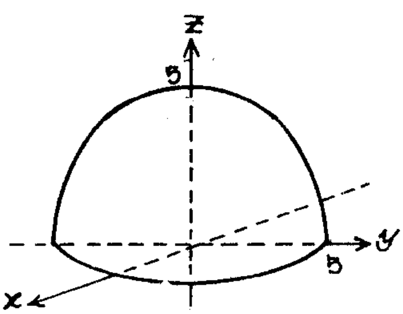
นิยาม 9.5.1

ฟังก์ชัน f ของสองตัวแปร เรียกว่า มีค่าสูงสุดสัมพัทธ์ที่จุด(x_o,y_o) ถ้ามีเขตเปิด $P((x_o,y_o)\ ;\ r)$ ที่ทำให้ $f(x_o,y_o) \leqslant f(x,y)$ สำหรับทุก ๆ (x,y) ที่อยู่ใน P

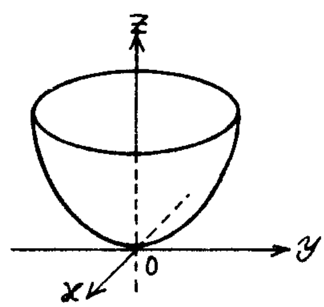
นิยาม 9.5.2

ฟังก์ชัน f ของสองตัวแปร เรียกว่า มีค่าต่ำสุดสัมพัทธ์ที่จุด (x_o,y_o) ถ้ามีเขตเปิด $P((x_o,y_o)\ ;\ r)$ ที่ทำให้ $f(x_o,y_o) \leqslant f(x,y)$ สำหรับทุก ๆ (x,y) ที่อยู่ใน P

นิยามทั้งสองนี้ อธิบายให้เห็นชัดเจนได้ดังนี้



รูป 9.5.1



รูป 9.5.2

ในรูป 9.5.1 เป็นกราฟของฟังก์ชัน f ที่กำหนดด้วย

$$f(x,y) = (25-x^2-y^2)^{\frac{1}{2}}$$

ซึ่งถ้า P เป็นเขตเปิด $((0,0);r)$ ที่ $r \leqslant 5$ จะทำให้ได้ว่าตามนิยาม 9.5.1 f มีค่าสูงสุดสัมพัทธ์เป็น 5 ที่จุด (0, 0)

รูป 9.5.2 เป็นกราฟของฟังก์ชัน g ซึ่งกำหนดด้วย

$$g(x,y) = x^2+y^2$$

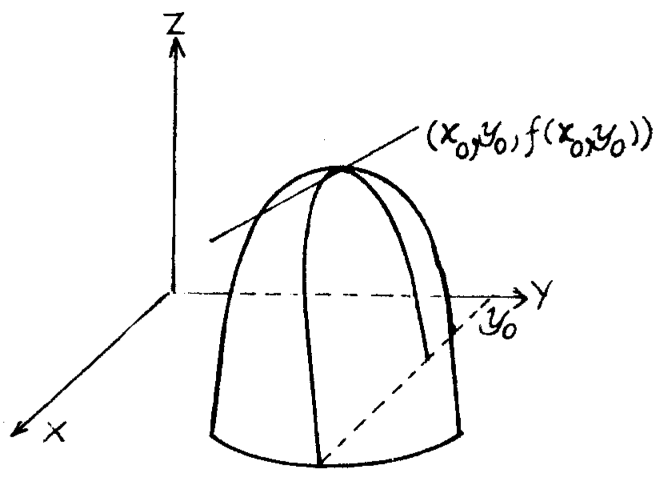
ถ้า P เป็นเขตเปิด((0, 0) ; r) แล้วโดยนิยาม 9.5.2 ฟังก์ชัน f มีค่าต่ำสุดสัมพัทธ์เป็นศูนย์ที่จุด (0, 0)

ทฤษฎี 9.5.1

ถ้ากำหนดให้มี $f(x,y)$ สำหรับทุก ๆ จุดในเขต $P((x_o,y_o) ; r)$ และถ้า f มีค่าปลายสุดสัมพัทธ์ที่ (x_o,y_o) ค่าอนุพันธ์ย่อยที่หาได้ที่จุด (x_o,y_o) คือ

$$f'_x(x_o,y_o) = f'_y(x_o,y_o) = 0$$

ข้อพิสูจน์ของทฤษฎีนี้โดยวิธีทางเรขาคณิต คือ เนื่องจาก f มีค่าสูงสุดสัมพัทธ์ที่จุด $((x_o,y_o, f(x_o,y_o))$ ดังนั้น เส้นโค้งที่เกิดจากการตัดกันระหว่างระนาบ $y = y_o$ กับผิว $z = f(x,y)$ จะมีเส้นสัมผัสแนวนอน ในระนาบ $y = y_o$ ที่จุด $(x_o,y_o, f(x_o,y_o))$ (ดังรูป 9.5.3)



และเพราะว่าความชันของเส้นสัมผัสนี้คือ $f'_x(x_o,y_o)$ ดังนั้น

$$f'_x(x_o,y_o) = 0$$

ในทำนองเดียวกัน เส้นโค้งที่เกิดจากการตัดกันระหว่างระนาบ $x = x_o$

กับผิว $z = f(x,y)$ จะมีความชันของเส้นสัมผัสโค้งเป็น $f'_y(x_o,y_o)$
และ

$$f'_y(x_o,y_o) = 0$$

นิยาม 9.5.3 จุด (x_o,y_o) ซึ่งทำให้ $f'_x(x_o,y_o) = f'_y(x_o,y_o) = 0$ เรียกว่า จุดวิกฤต

ทฤษฎีบท 9.5.1 กำหนดเงื่อนไขที่จำเป็นของฟังก์ชันสองตัวแปรที่มีจุดปลายสัมพัทธ์ ซึ่งมีอนุพันธ์ย่อยอันดับหนึ่งว่าจุดนั้นคือ จุดวิกฤต อย่างไรก็ดีบทกลับของทฤษฎีนี้ไม่จริง นั่นคือ การที่อนุพันธ์ย่อยอันดับหนึ่งของฟังก์ชันสองตัวแปรมีค่าเป็นศูนย์ไม่เป็นเงื่อนไขที่เพียงพอที่จะทำให้ฟังก์ชันมีค่าปลายสุดสัมพัทธ์ที่จุดนั้น ดังเช่นในกรณีของฟังก์ชัน

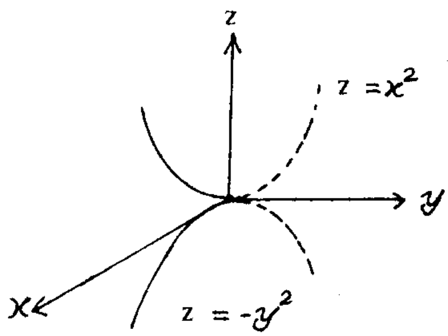
$$f(x,y) = x^2-y^2$$

จะเห็นว่า

$$f'_x(x,y) = 2x$$

และ

$$f'_y(x,y) = -2y$$



รูป 9.5.4

ซึ่งที่ $x = 0, y = 0$

$$f'_x(0, 0) = f'_y(0, 0) = 0$$

แต่ f ไม่มีค่าปลายสุดสัมพัทธ์ที่จุด (0, 0) เพราะว่า $f(0,0) = 0$
แต่ $f(x,0) > 0$ เมื่อ $x \to 0$ และ $f(0,y) < 0$ เมื่อ $y \to 0$
เมื่อพิจารณาจากรูป 9.5.4 จะเห็นว่า ตามแกน x (ในระนาบ $y = 0$) กราฟมีรูปเหมือน $z = x^2$ ซึ่งมีค่าต่ำสุดที่ $x=0$ แต่ตามแกน y (ในระนาบ $x=0$) กราฟมีรูปเหมือน $z = -y^2$ ซึ่งมีค่าสูงสุดที่ $y = 0$

อย่างไรก็ตาม อาจใช้ทฤษฎี 9.5.1 นิยาม 9.5.1 และนิยาม 9.5.2 เพื่อหาจุดปลายสุดสัมพัทธ์ของฟังก์ชันได้ เช่นในกรณีของฟังก์ชัน

$$f(x,y) = 6x-4y-x^2-2y^2$$

จะเห็นว่า f มีอนุพันธ์ย่อยอันดับหนึ่งที่ทุกจุด (x,y) ใน R^2

จึงใช้ทฤษฎี 9.5.1 ได้ ซึ่งเมื่อหาอนุพันธ์คือ

$$f'_x(x,y) = 6-2x$$
$$f'_y(x,y) = -4-4y$$

แล้วกำหนดให้

$$f'_x(x,y) = 0$$

และ

$$f'_y(x,y) = 0$$

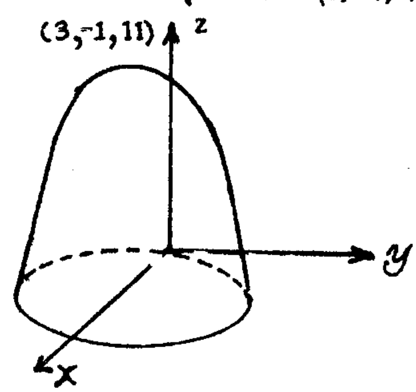
จะทำให้ได้ $x = 3$ และ $y = -1$ แทนค่าในสมการ

$$z = 6x-4y-x^2-2y^2$$

ได้ $z = 11$

ด้วยการวาดรูปของสมการนี้จะได้รูปพาราโบลอยด์คว่ำ มีจุดยอดที่ (3, -1, 11) ดังรูป 9.5.5

ซึ่งสรุปได้ว่า
$f(x,y) \leqslant f(3, -1)$
สำหรับทุก ๆ จุด (x,y)
ดังนั้น โดยนิยาม 9.5.1
$f(3, -1) = 11$
เป็นค่าสูงสุดสัมพัทธ์



รูป 9.5.5

ทฤษฎี 9.5.2 (การทดสอบด้วยอนุพันธ์ย่อยอันดับสอง)

ถ้า f เป็นฟังก์ชันสองตัวแปร มีอนุพันธ์ย่อยอันดับสอง และมีความต่อเนื่องในเขตเปิด $P((a, b), r)$ และถ้า

$$f'_x(a, b) = f'_y(a, b) = 0$$

แล้วจะได้ว่า

ก. f มีค่าต่ำสุดสัมพัทธ์ที่จุด (a, b) ถ้า

$$f''_{xx}(a,b)f''_{yy}(a,b) - \left[f''_{xy}(a,b)\right]^2 > 0$$

และ

$$f''_{xx}(a,b) > 0$$

ข. f มีค่าสูงสุดสัมพัทธ์ที่จุด (a,b) ถ้า

$$f''_{xx}(a,b)\ f''_{yy}(a,b) - \left[f''_{xy}(a,b)\right]^2 > 0$$

และ

$$f''_{xx}(a,b) < 0$$

ค. f(a,b) ไม่มีจุดปลายสุดสัมพัทธ์ ถ้า

$$f''_{xx}(a,b)\ f''_{yy}(a,b) - \left[f''_{xy}(a,b)\right]^2 < 0$$

ง. สรุปอะไรไม่ได้ ถ้า

$$f''_{xx}(a,b)\ f''_{yy}(a,b) - \left[f''_{xy}(a,b)\right]^2 = 0$$

ตัวอย่าง 9.5.1

ถ้าให้

$$f(x,y) = 2x^4+y^2-x^2-2y$$

จงหาจุดปลายสุดสัมพัทธ์ (ถ้ามี)

วิธีทำ

$$f'_x(x,y) = 8x^3-2x$$

$$f'_y(x,y) = 2y-2$$

ถ้า $f'_x(x,y) = 0$ จะได้ $x = -\frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2}$

ถ้า $f'_y(x,y) = 0$ ได้ $y = 1$

ดังนั้นที่จุด $(-\frac{1}{2}, 1), (0, 1)$ และ $(\frac{1}{2}, 1)$

$$f'_x(x,y) = f'_y(x,y) = 0$$

เพื่อทดสอบด้วยอนุพันธ์ย่อยอันดับสอง หาอนุพันธ์อีกครั้งได้

$$f''_{xx}(x,y) = 24x^2-2$$

$$f''_{xy}(x,y) = 0$$

$$f''_{yy}(x,y) = 2$$

และ

$$f''_{xx}(-\tfrac{1}{2}, 1)\ f''_{yy}(-\tfrac{1}{2}, 1) - \left[f''_{xy}(-\tfrac{1}{2}, 1)\right]^2 = 8 > 0$$

ดังนั้นโดยทฤษฎี 9.5.2 f มีค่าต่ำสุดสัมพัทธ์ที่ $(-\frac{1}{2}, 1)$ ที่จุด $(0, 1)$

$$f''_{xx}(0,1)\ f''_{yy}(0,1) - \left[f''_{xy}(0,1)\right]^2 = -4 < 0$$

ดังนั้นโดยทฤษฎี 9.5.2 f ไม่มีค่าปลายสุดสัมพัทธ์ที่$(0,1)$ ที่จุด $(\frac{1}{2}, 1)$

$$f''_{xx}(\tfrac{1}{2},1)\ f''_{yy}(\tfrac{1}{2}, 1) - \left[f''_{xy}(\tfrac{1}{2}, 1)\right]^2 = 8 > 0$$

แสดงว่า f มีค่าต่ำสุดสัมพัทธ์ที่ $(\frac{1}{2}, 1)$

สรุปได้ว่า f มีค่าต่ำสุดสัมพัทธ์เป็น $-\frac{9}{8}$ ที่จุด$(-\frac{1}{2}, 1)$ และ $(\frac{1}{2}, 1)$

ตัวอย่าง 9.5.2

จงหาจุดปลายสัมพัทธ์ของฟังก์ชัน

$$z = (x-1)^2 - (y-2)^2$$

วิธีทำ $z'_x(x,y) = 2(x-1)$

$z'_y(x,y) = -2(y-2)$

โดยให้ $z'_x(x,y) = 0$

และ $z'_y(x,y) = 0$

ได้ $x = 1,\ y = 2$

แสดงว่าค่าจุดปลายสัมพัทธ์ควรจะเกิดที่จุด (1, 2)

แต่เมื่อใช้อนุพันธ์ย่อยอันดับสองทดสอบ พบว่า

$$z''_{xx}(x,y) = 2$$

$$z''_{yy}(x,y) = -2$$

และ

$$z''_{xy}(x,y) = 0$$

ดังนั้นที่จุด (1, 2)

$$\left[z''_{xx}(x,y)\right]\left[z''_{yy}(x,y)\right] - \left[z''_{xy}(x,y)\right]^2 = (2)(-2)-(0)^2=-4<0$$

สรุปได้ว่า z ไม่มีค่าสูงสุดหรือต่ำสุด

ตัวอย่าง 9.5.3

จงหาจุดปลายสัมพัทธ์ของฟังก์ชัน

$$z = 2xy-5y^2-2x^2+4x+4y-4$$

วิธีทำ หาอนุพันธ์ย่อยอันดับหนึ่งได้

$$z'_x(x,y) = 2y-4x+4$$

$$z'_y(x,y) = 2x-10y+4$$

กำหนดให้อนุพันธ์ย่อยเท่ากับศูนย์

$$2y-4x+4 = 0$$

$$2x-10y+4 = 0$$

แก้สมการทั้งสองได้

$$x = \frac{4}{3}$$

และ

$$y = \frac{2}{3}$$

หาอนุพันธ์ย่อยอันดับสองได้

$$z''_{xx}(x,y) = -4$$

$$z''_{yy}(x,y) = -10$$

และ

$$z''_{xy}(x,y) = 2$$

ดังนั้น

$$\left[z''_{xx}(x,y)\right]\left[z''_{yy}(x,y)\right] - \left[z''_{xy}(x,y)\right]^2 = (-4)(-10)-(2)^2 = 36$$

เนื่องจาก

$$z''_{xx}(x,y) < 0$$

ดังนั้น ตามทฤษฎี 9.5.2

z มีค่าสูงสุดสัมพัทธ์ที่จุด $\left(\frac{4}{3}, \frac{2}{3}\right)$

ค่าปลายสุดสัมบูรณ์ของฟังก์ชันสองตัวแปร

นิยาม 9.5.4

ฟังก์ชัน f ของสองตัวแปรมีค่าสูงสุดสัมบูรณ์บนโดเมน D ในระนาบ xy ถ้ามีจุด (x_o,y_o)ใน D ที่ทำให้ $f(x_o,y_o) \geqslant f(x,y)$, สำหรับจุด (x,y) ทั้งหมดใน D, และค่าสูงสุดสัมบูรณ์ของ f บน D คือ $f(x_o,y_o)$

นิยาม 9.5.5

ฟังก์ชัน fของสองตัวแปรมีค่าต่ำสุดสัมบูรณ์บนโดเมน D ในระนาบ xy ถ้าสำหรับทุก ๆ จุด (x,y) ที่อยู่ใน D มีจุด (x_o,y_o) ใน D ที่ทำให้ $f(x_o,y_o) \leqslant f(x,y)$ และค่าต่ำสุดสัมบูรณ์ของ f บน D คือ $f(x_o,y_o)$

ทฤษฎี 9.5.3 ถ้ากำหนดให้ R เป็นเขตปิด (เขตที่รวมเส้นรอบขอบเขตด้วย) และ f เป็นฟังก์ชันของ 2 ตัวแปร ที่มีความต่อเนื่องบน R แล้ว (จะได้ว่า) มีจุด

อย่างน้อย 1 จุดใน R ที่ f มีค่าสูงสุดสัมบูรณ์ และมีจุดอย่างน้อย 1 จุดใน R ที่ f มีค่าต่ำสุดสัมบูรณ์

ถ้า f เป็นฟังก์ชันตามทฤษฎีบท 9.5.3 และมีอนุพันธ์ $f'_x(x,y)$ กับ $f'_y(x,y)$ ที่จุดทั้งหลายของ R แล้ว (จะได้ว่า) ค่าปลายสุดสัมบูรณ์ของ f จะเกิดที่จุด(x_o,y_o) คือ $f'_x(x_o,y_o) = f'_y(x_o,y_o) = 0$ หรือไม่ก็เกิดที่จุดบนเส้นขอบเขตของ R

ตัวอย่าง 9.5.4

โรงงานแห่งหนึ่งผลิตหลอดไฟ 2 ชนิด จากประสบการณ์โรงงานได้กำหนดว่า ถ้าผลิตหลอดไฟชนิดที่หนึ่งจำนวน x ดวง และหลอดไฟชนิดที่สองจำนวน y ดวง โรงงานจะสามารถขายได้ในราคาดวงละ (100-2x) บาท และ (125-3y) บาท ตามลำดับ โรงงานรู้ว่าต้นทุนในการผลิตหลอดไฟชนิดที่หนึ่งและชนิดที่สอง คือ (12x+11y+4xy) บาท ดังนั้น โรงงานควรจะผลิตหลอดไฟแต่ละชนิดเป็นจำนวนเท่าไร เพื่อให้ได้กำไรสูงสุด และกำไรสูงสุดนั้นเท่ากับเท่าใด

วิธีทำ

รายได้จากการขายหลอดไฟชนิดที่หนึ่ง คือ $x(100-2x)$

รายได้จากการขายหลอดไฟชนิดที่สอง คือ $y(125-3y)$

ดังนั้น ถ้า $f(x,y)$ เป็นกำไรของโรงงาน

$$f(x,y) - x(100-2x)+y(125-3y)-(12x+11y+4xy)$$

$$= 88x+114y-2x^2-3y^2-4xy$$

เนื่องจาก x และ y เป็นจำนวนหลอดไฟ

เพราะฉะนั้น $x \geqslant 0$ และ $y \geqslant 0$

และเพราะว่าราคาขายของหลอดไฟชนิดที่หนึ่งเป็น 100-2x

ราคาขายของหลอดไฟชนิดที่สองเป็น 125-3y

ดังนั้นต้องได้ว่า $100-2x \geqslant 0$

$125-3y \geqslant 0$

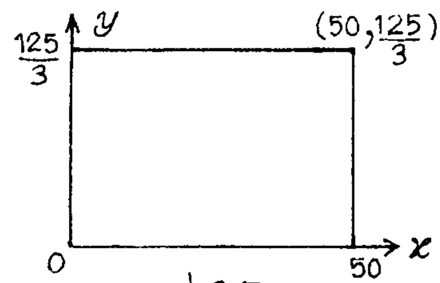
นั่นคือ $x \leqslant 50$ และ $y \leqslant \frac{125}{3}$

ด้วยค่าของ x, y ดังกล่าวข้างต้น โดเมนของฟังก์ชัน f คือเขตปิดซึ่งถูกกำหนดด้วยเซ็ต

$$\left\{f(x,y) \;\middle|\; 0 \leqslant x \leqslant 50,\ 0 \leqslant y \leqslant \frac{125}{3}\right\}$$

โดเมนของ f เป็นเขตรูปสี่เหลี่ยมผืนผ้า (ดังรูป 9.5.6)

ซึ่งรวมเส้นรอบรูปด้วย และเนื่องจาก f เป็นฟังก์ชันโพลิโนเมียล จึงมีความต่อเนื่องที่ทุก ๆ จุด บนเขตปิดที่กำหนดด้วยเซ็ตนี้ และใช้ทฤษฎีหาค่าปลายสุดได้



รูป 9.5.6

ขั้นแรกหาจุดวิกฤตของ f โดยกำหนด

$$f'_x(x,y) = 0$$

และ

$$f'_y(x,y) = 0$$

ได้

$$f'_x(x,y) = 88-4x-4y = 0$$
$$f'_y(x,y) = 114-6y-4x = 0$$

หรือ

$$x+y = 22$$
$$2x+3y = 57$$

แก้สมการทั้งสองนี้ได้ $x = 9$ และ $y = 13$

ขั้นที่สอง เพื่อใช้การทดสอบด้วยอนุพันธ์ย่อยอันดับสอง ซึ่งมี

$$f''_{xx}(x,y) = -4$$
$$f''_{yy}(x,y) = -6$$

และ

$$f''_{xy}(x,y) = -4$$

ใช้สูตรการทดสอบด้วยอนุพันธ์อันดับสองได้ว่าที่จุด (9, 13)

$$\left[f''_{xx}(9,13)\right]\left[f''_{yy}(9,13)\right] - \left[f''_{xy}(9,13)\right]^2 = (-4)(-6)-(-4)^2$$