$= 8 > 0$

และเนื่องจาก $f''_{xx}(x,y) < 0$

ดังนั้น ตามทฤษฎี 9.5.3 f มีค่าสูงสุดที่จุด (9, 13)

เพราะว่า $f(x,y) = 88x+114y-2x^2-3y^2-4xy$

ดังนั้น $f(9,13) = 88(9)+114(13)-2(9)^2-3(13)^2-4(9)(13)$

$= 1,137$

เนื่องจากค่าสูงสุดสัมบูรณ์ของ f ต้องเกิดที่จุด (9, 13) หรือไม่ก็เกิดบนขอบเขตของโดเมนf จึงจำเป็นต้องเปรียบเทียบกับค่าของฟังก์ชันบนขอบเขต

สำหรับส่วนของขอบเขตบนแกน x ซึ่ง $0 \leq x \leq 50$

ถ้า $g(x) = f(x,o) = 88x-2x^2$

จะได้ $g'(x) = 88-4x$ และ $g''(x) = -4$

ซึ่ง $x = 22$ เมื่อ $g'(x) = 0$

และ $g''(22) < 0$

ดังนั้น g มีค่าสูงสุดเป็น

$$g(22) = 88(22)-2(22)^2 = 968$$

แต่ $g(22) < f(9,13) = 1,137$

และ $g(o) = 0$, $g(50) < 0$

ดังนั้นค่าสูงสุดสัมบูรณ์ของ f ไม่เกิดบนแกน x $(y = 0)$

สำหรับขอบเขตบนแกน y $(x=0)$ ซึ่ง $0 \leq y \leq \frac{125}{3}$

ถ้า $h(y) = f(o,y) = 114y-3y^2$

จะได้ $h'(y) = 114-6y$ และ $h''(y) = -6$

ซึ่ง $y = 19$ เมื่อ $h'(y) = 0$

และ $h''(19) < 0$

ดังนั้น h มีค่าสูงสุดเป็น

$$h(19) = 114(19)-3(19)^2$$
$$= 1083$$

แต่ $h(19) < f(9,13) = 1,137$

และ $h(o) = 0$, $h(\frac{125}{3}) < 0$

ดังนั้น ค่าสูงสุดสัมบูรณ์ของ f ไม่เกิดบนแกน y

สำหรับขอบเขตบนเส้น $x = 50 \quad (0 \leqslant y \leqslant \frac{125}{3})$

$f(50,y) = y(114-3y)-600-200y$

$f(o,y) = y(114-3y)$

จะเห็นว่า $f(50,y) < f(o,y)$

แต่ $f(o,y) < f(9,13)$ สำหรับ $o \leqslant y \leqslant \frac{125}{3}$

ดังนั้น $f(9,13) > f(50,y)$

แสดงว่าค่าสูงสุดของ f ไม่เกิดบนเส้น $x = 50$

ในทำนองเดียวกันบนเส้น $y = \frac{125}{3}$

$$f(x, \tfrac{125}{3}) = x(88-2x) - \frac{1,375}{3} - \frac{500}{3}x$$

$$f(x,o) = x(88-2x)$$

จะเห็นว่า $f(x,o) > f(x, \frac{125}{3})$

แต่ $f(9,13) > f(x,o)$

ดังนั้น $f(9,13) > f(x, \frac{125}{3})$

แสดงว่าค่าสูงสุดสัมบูรณ์ของ f ไม่เกิดบนเส้น $y = \frac{125}{3}$

จึงได้ว่าค่าสูงสุดสัมบูรณ์ของ f ไม่เกิดบนขอบเขตของ f

ดังนั้น ค่าสูงสุดสัมบูรณ์ต้องอยู่ที่จุด (9, 13)

สรุป โรงงานควรผลิตหลอดไฟชนิดแรกเป็นจำนวน 9 ดวง
และชนิดที่สองเป็นจำนวน 13 ดวง
เพื่อให้ได้กำไรสูงสุด 1,137 บาท

ตัวอย่าง 9.5.5

ร้านค้าแห่งหนึ่งซื้อผงซักฟอก A และ B มาเพื่อจำหน่าย โดยซื้อผงซักฟอก A และ B มาในราคากล่องละ 25 บาท และ 28 บาท ตามลำดับ

ถ้าร้านค้าแห่งนี้กำหนดจะขายผงซักฟอก A ในราคากล่องละ x บาท และขายผงซักฟอก B ในราคากล่องละ y บาท โดยทางร้านรู้ว่าความต้องการผงซักฟอก A กำหนดโดย

$$Q_A = 50-6x+5y$$

และความต้องการผงซักฟอก B กำหนดโดย

$$Q_B = 60+4x-7y$$

จงหาว่าทางร้านควรจะกำหนดค่า x และ y เป็นเท่าใดจึงจะทำให้ได้กำไรสูงสุด

วิธีทำ

เนื่องจาก

กำไร = (กำไรต่อหน่วยของ A) (จำนวนที่ขาย)
+(กำไรต่อหน่วยของ B) (จำนวนที่ขาย)

ดังนั้น ถ้าให้ $P(x,y)$ เป็นฟังก์ชันกำไร

$$P(x,y) = (x-25)(50-6x+5y)+(y-28)(60+4x-7y)$$

เพราะว่า

$$\frac{\partial P}{\partial x} = 88-12x+9y$$

และ

$$\frac{\partial P}{\partial y} = 131+9x-14y$$

เมื่อกำหนดให้ $\frac{\partial P}{\partial x} = 0$ และ $\frac{\partial P}{\partial y} = 0$ จะได้

$$88-12x+9y = 0$$
$$131+9x-14y = 0$$

แก้สมการทั้งสองได้ $x = 28$ และ $y = 27$

โดยใช้อนุพันธ์อันดับสอง

$$\frac{\partial^2 P}{\partial x^2} = -12$$

และ $\frac{\partial^2 P}{\partial y^2} = -14$

$\frac{\partial^2 P}{\partial x \partial y} = 9$

ดังนั้น $\left[\frac{\partial^2 P}{\partial x^2}\right]\left[\frac{\partial P^2}{\partial y^2}\right] - \left[\frac{\partial^2 P}{\partial x \partial y}\right] = (-12)(-14)-(9)^2 = 87 > 0$

และเพราะว่า $\frac{\partial^2 P}{\partial x^2} < 0$

แสดงว่า P มีค่าสูงสุดที่ (28, 27)

$\therefore$ ร้านค้าควรจะขายผงซักฟอก A ในราคา 28 บาท/กล่อง
และขายผงซักฟอก B ในราคา 27 บาท/กล่อง

เพื่อให้ได้กำไรสูงสุด

แบบฝึกหัดที่ 9.5

1. จงหาจุดวิกฤตของฟังก์ชันต่อไปนี้

   1.1 $z(x,y) \quad 5x^2-2y^2+10x+8y-9$

   1.2 $z(x,y) = x^3-2y^3-12x+6y+7$

   1.3 $f(x,y) = 3x^2-5y^2-5xy-27x-20y-2$

   1.4 $f(x,y) = 7x^3+5y^3+3x+5y-2$

   1.5 $f(t,y) = 4t^2+3y^2-ty+10t-4y+1$

2. จงหาค่าปลายสุดสัมพัทธ์ (ถ้ามี) ของฟังก์ชันต่อไปนี้

   2.1 $f(x,y) = 2x^2+y^2-8x-2y+14$

   2.2 $z(x,y) = \frac{1}{x} - \frac{64}{y} + xy$

   2.3 $z(x,y) = \triangle xy^2-2x^2y-x$

   2.4 $g(x,y) = x^3+x^2+y^2-xy+8$

   2.5 $g(x,t) = \frac{2x+2t+1}{x^2+t^2+1}$

3. ถ้าในการผลิตสินค้าชนิดหนึ่ง ซึ่งใช้เครื่องจักรเป็นจำนวน x ชั่วโมง และใช้ y คน/ชั่วโมง จะเสียค่าต้นทุนในการผลิตเป็น

$$f(x,y) = 2x^3-6xy+y^2+500$$

   จงหาจำนวนเครื่องจักร/ชั่วโมง และจำนวนคน/ชั่วโมง ที่จะทำให้ต้นทุนค่าใช้จ่ายต่ำสุด

4. ในการสร้างกล่องสี่เหลี่ยมผืนผ้าแบบไม่มีฝาปิดโดยใช้วัสดุในราคา 10 บาท ถ้าค่าวัสดุในการทำด้านฐานของกล่องเท่ากับ 15 สตางค์/ตารางฟุต และสำหรับด้านข้างของกล่องเท่ากับ 30 สตางค์/ตารางฟุต จงหาขนาดของกล่องที่มีปริมาตรสูงสุด

5. บริษัทแห่งหนึ่งผลิตใบมีดโกนหนวดออกมา 2 แบบ คือ แบบ A กับแบบ B ด้วยราคาต้นทุนใบละ 80 สตางค์ และ 60 สตางค์ ตามลำดับ ถ้า x และ y เป็นราคาขายของใบมีดโกนหนวดแบบ A และแบบ B จะได้ว่าความต้องการ Q_A ของใบมีดโกนหนวดแบบ A และ ความต้องการ Q_B ของใบมีดโกนหนวดแบบ B เป็น

$$Q_A = 160-7x+6y$$
$$Q_B = 140+4x-5y$$

จงหาราคาขายใบมีดโกนหนวดทั้งสองแบบที่จะทำให้บริษัทได้กำไรสูงสุด

6. ร้านเสื้อผ้าขายเสื้อกีฬา 2 ชนิดซึ่งเหมือนกันแต่ทำจากต่างโรงงาน เสื้อกีฬาชนิดที่หนึ่ง และชนิดที่สองทางร้านซื้อมาด้วยราคา 40 บาท และ 50 บาทตามลำดับ จากประสบการณ์ทางร้านรู้ว่าถ้าขายเสื้อกีฬาชนิดที่หนึ่งในราคา x บาท และชนิดที่สองในราคา y บาท จำนวนเสื้อกีฬาชนิดที่หนึ่งจะมียอดขายประจำเดือนเป็น

$$f(x,y) = 3200-50x+25$$

ส่วนยอดขายประจำเดือนของเสื้อกีฬาชนิดที่สองเป็น

$$g(x,y) = 25x-25y$$

จงหาราคาขายของเสื้อกีฬาทั้งสองชนิดที่จะทำให้ได้กำไรสูงสุด

7. บริษัทแห่งหนึ่งผลิตออร์แกนออกมาสองชนิดคือแบบ A และแบบ B ถ้า x และ y เป็นจำนวนของออร์แกนแบบ A และแบบ B ที่จะผลิตออกมาจำหน่าย บริษัทประมาณว่าราคาที่ออร์แกนแบบ A จะขายได้ ถูกกำหนดด้วย

$$f(x,y) = 1,650+x-2y$$

และราคาของออร์แกนแบบ B ถูกกำหนดโดย

$$g(x,y) = 2,200-3x+5y$$

ถ้าต้นทุนทั้งหมดสำหรับการผลิตออร์แกนแบบ A และแบบ B เป็นจำนวน x หน่วยและ y หน่วย คือ

$$3xy+990x+1,100y$$

จงหาว่าควรจะผลิตออร์แกนทั้ง 2 แบบเป็นจำนวนอย่างละเท่าใด เพื่อให้ได้กำไรสูงสุด

9.6 ประโยชน์บางประการของอนุพันธ์ย่อย

นิยาม 9.6.1

ถ้า P เป็นราคาต่อหน่วยของสินค้าประเภทแรกจำนวน x หน่วย

Q เป็นราคาต่อหน่วยของสินค้าประเภทสอง จำนวน y หน่วย

f และ g เป็นฟังก์ชันอุปสงค์ของสินค้าทั้ง 2 ประเภท โดย

$$x = f(p,Q)$$

$$y = g(p,Q)$$

แล้ว

ก. $\frac{\partial x}{\partial P}$ เป็นความต้องการเพิ่มใน x เมื่อเทียบกับ P

ข. $\frac{\partial x}{\partial Q}$ เป็นความต้องการเพิ่มใน x เมื่อเทียบกับ Q

ค. $\frac{\partial y}{\partial P}$ เป็นความต้องการเพิ่มใน y เมื่อเทียบกับ P

ง. $\frac{\partial y}{\partial Q}$ เป็นความต้องการเพิ่มใน y เมื่อเทียบกับ Q

ดังเช่น ถ้าสมการอุปสงค์เป็น

$$x = -2p+3Q+12$$

และ

$$y = -4Q+P+8$$

โดยที่ P เป็นราคาต่อหน่วยของสินค้าจำนวน x หน่วย
และ Q เป็นราคาต่อหน่วยของสินค้าจำนวน y หน่วย
จากนิยาม 9.6.1 ความต้องการเพิ่มทั้ง 4 แบบ คือ

$$\frac{\partial x}{\partial P} = -2 \text{ , } \frac{\partial x}{\partial Q} = 3 \text{ , } \frac{\partial y}{\partial P} = 1 \text{ , } \frac{\partial y}{\partial Q} = -4$$

ความหมายของความต้องการเพิ่มนี้ คือ
สำหรับ $\frac{\partial x}{\partial P} = -2$ แสดงว่าเมื่อ Q คงที่ การเพิ่มราคาต่อหน่วยของสินค้าประเภทแรกเป็นจำนวน 1 บาท จะทำให้ความต้องการสินค้าประเภทแรกลดลงเป็นจำนวน 2 หน่วย

สำหรับ $\frac{\partial x}{\partial Q} = 3$ แสดงว่า ถ้า P คงที่ การเพิ่มราคาต่อหน่วยของสินค้าประเภทสองเป็นจำนวน 1 บาท จะทำให้ความต้องการสินค้าประเภทแรกเพิ่มขึ้น 3 หน่วย

เมื่อ $\frac{\partial y}{\partial P} = 1$ แสดงว่า ถ้า Q คงที่ การเพิ่มราคาต่อหน่วยของสินค้าประเภทแรก เป็นจำนวน 1 บาท จะทำให้ความต้องการสินค้าประเภทสองเพิ่มขึ้น 1 หน่วย และเมื่อ $\frac{\partial y}{\partial Q} = -4$ แสดงว่า ถ้า P คงที่ การเพิ่มราคาต่อหน่วยของสินค้าประเภทสองเป็นจำนวน 1 บาท จะทำให้ความต้องการสินค้าประเภทสองลดลง 4 หน่วย

ตัวอย่าง 9.6.1

ถ้าความต้องการสินค้า A เป็น x หน่วย และความต้องการสินค้า B เป็น y หน่วย เมื่อราคาสินค้า A ต่อหน่วย เป็น P และราคาต่อหน่วยของสินค้า B เป็น Q และถ้าสมการอุปสงค์เป็น

$$x = 4Q^2 - 5PQ$$
$$y = 7P^2 - 3PQ$$

ก. จงหาจำนวนความต้องการของสินค้า A และ B เมื่อราคาขายเป็น 40 บาท และ 60 บาท ตามลำดับ

ข. จงหาความต้องการเพิ่มทั้ง 4 แบบ เมื่อ P = 40 และ Q = 60

ค. จงใช้ผลจากข้อ ข. หาจำนวนความต้องการของสินค้า A และ B ที่เปลี่ยนแปลงไป เมื่อราคาสินค้า A เพิ่มจาก 40 บาท เป็น 41 บาท ส่วนราคาสินค้า B คงที่

ง. จงใช้ผลจากข้อ ข. หาจำนวนความต้องการของสินค้า A และ B ที่เปลี่ยนแปลงไป เมื่อราคาสินค้า B เพิ่มจาก 60 บาท เป็น 61 บาท ส่วนราคาสินค้า A คงที่

วิธีทำ ก. จากสมการอุปสงค์ทั้งสอง เมื่อแทนค่า P = 40และ Q = 60 จะได้

$$x = 4(60)^2-5(40)(60) = 2,400$$

$$y = 7(40)^2-3(40)(60) = 4,000$$

แสดงว่าความต้องการสินค้า A จะเท่ากับ 2,400 หน่วย เมื่อสินค้า A ราคา 40 บาท และความต้องการสินค้า B จะเท่ากับ 4,000 หน่วย เมื่อสินค้า B ราคา 60 บาท

ข. หาความต้องการเพิ่มทั้ง 4 แบบ โดยใช้นิยาม 9.6.1 กับสมการอุปสงค์ จะได้ว่า

$$\frac{\partial x}{\partial P} = -5Q \qquad \frac{\partial x}{\partial Q} = 8Q-5P$$

$$\frac{\partial y}{\partial P} = 14P-3Q \qquad \frac{\partial y}{\partial Q} = -3P$$

ที่ P = 40 , Q = 60 แทนค่าได้

$$\frac{\partial x}{\partial P} = -300 \qquad \frac{\partial x}{\partial Q} = 280$$

$$\frac{\partial y}{\partial P} = 380 \qquad \frac{\partial y}{\partial Q} = -120$$

ค. เนื่องจาก

$$\frac{\partial x}{\partial P} = -300 \quad \text{และ} \quad \frac{\partial y}{\partial P} = 380$$

แสดงว่าเมื่อราคาสินค้า A เพิ่มขึ้นจาก 40 บาท เป็น 41 บาท ในขณะที่ราคาสินค้า B คงที่ ความต้องการสินค้า A จะลดลง 300 หน่วย ในขณะที่ความต้องการสินค้า B จะเพิ่มขึ้น 380 หน่วย

ง. ในทำนองเดียวกัน เพราะว่า

$$\frac{\partial x}{\partial Q} = 280 \quad \text{และ} \quad \frac{\partial y}{\partial Q} = -120$$

แสดงว่าเมื่อราคาสินค้า B เพิ่มขึ้นจาก 60 บาท เป็น 61 บาท ในขณะที่ราคาสินค้า A คงที่ ความต้องการสินค้า B จะลดลง 120 หน่วย ส่วนความต้องการสินค้า A จะเพิ่มขึ้น 280 หน่วย

เมื่อพิจารณาจากสมการอุปสงค์

$$x = f(P,Q)$$

และ

$$y = g(P,Q)$$

ซึ่ง P เป็นราคาต่อหน่วยของสินค้าประเภทแรกจำนวน x หน่วย และ Q เป็นราคาต่อหน่วยของสินค้าประเภทสอง จำนวน y หน่วย โดยปรกติแล้ว ถ้าค่า Q คงที่ x จะลดลงเมื่อ P เพิ่มขึ้น และ x จะเพิ่มขึ้นเมื่อ P ลดลง จึงสรุปได้ว่า $\frac{\partial x}{\partial P} < 0$ และในทำนองเดียวกัน $\frac{\partial y}{\partial Q} < 0$

จากหัวข้อ 9.2 สินค้าสองประเภท เรียกว่า <u>เป็นส่วนเติมเต็มต่อกันและกัน</u> ถ้าความต้องการสินค้าประเภทหนึ่งลดลงอันเนื่องจากราคาเพิ่มขึ้น ได้ทำให้ความต้องการสินค้าอีกประเภทหนึ่งลดลงด้วย ดังนั้นเมื่อสินค้าเป็นส่วนเติมเต็มต่อกันและกัน และ Q คงที่ทั้ง $\frac{\partial x}{\partial P}$ และ $\frac{\partial y}{\partial P}$ จะน้อยกว่าศูนย์ แต่ถ้า P คงที่ ทั้ง $\frac{\partial x}{\partial Q}$ และ $\frac{\partial y}{\partial Q}$ น้อยกว่าศูนย์ จึงสรุปได้ว่า สินค้าสองประเภทจะเป็นส่วนเติมเต็มต่อกันและกัน ก็ต่อเมื่อ $\frac{\partial x}{\partial Q}$ และ $\frac{\partial y}{\partial P}$ น้อยกว่าศูนย์

จาหัวข้อ 9.2 เช่นเดียวกัน สินค้าสองประเภท เรียกว่า <u>เป็นส่วนทดแทนกัน</u> ถ้าความต้องการสินค้าประเภทหนึ่งลดลงอันเนื่องจากราคาเพิ่มขึ้น แต่ได้ทำให้ความต้องการสินค้าอีกประเภทหนึ่งเพิ่มขึ้น ดังนั้น เพราะว่า $\frac{\partial x}{\partial P}$ น้อยกว่าศูนย์เสมอ เมื่อสินค้าทดแทนกันได้ จึงสรุปว่า $\frac{\partial y}{\partial P}$ มากกว่าศูนย์ และเพราะว่า $\frac{\partial y}{\partial Q}$ น้อยกว่าศูนย์เสมอ จะทำให้ได้ $\frac{\partial x}{\partial Q}$ มากกว่าศูนย์ ดังนั้น สินค้าสองประเภทจะเป็นส่วนทดแทนกันและกันก็ต่อเมื่อ $\frac{\partial x}{\partial Q}$ และ $\frac{\partial y}{\partial P}$ มากกว่าศูนย์

ถ้า $\frac{\partial x}{\partial Q}$ และ $\frac{\partial y}{\partial P}$ มีเครื่องหมายตรงกันข้าม สินค้าทั้งสองประเภท

ไม่เรียกว่า เป็นส่วนเติมเต็ม หรือเป็นส่วนทดแทนกัน ตัวอย่างเช่น

ถ้า $\frac{\partial x}{\partial Q} < 0$ และ $\frac{\partial y}{\partial P} > 0$ เนื่องจากโดยปรกติ $\frac{\partial x}{\partial P}$ และ $\frac{\partial y}{\partial Q}$ น้อยกว่าศูนย์เสมอ จึงได้ว่าทั้ง $\frac{\partial x}{\partial Q}$ และ $\frac{\partial y}{\partial Q}$ น้อยกว่าศูนย์ และการลดราคาของสินค้าประเภทที่สองทำให้ความต้องการสินค้าทั้งสองประเภทเพิ่มขึ้น

ถ้า $\frac{\partial x}{\partial P} < 0$ และ $\frac{\partial y}{\partial P} > 0$ การลดราคาสินค้าประเภทที่หนึ่งจะทำให้ความต้องการสินค้าประเภทหนึ่งเพิ่มขึ้น แต่ความต้องการสินค้าประเภทที่สองลดลง

เช่น ถ้าสมการอุปสงค์ เป็น

$$x = -2P+3Q+12$$

และ

$$y = -4Q+P+8$$

เพราะว่า

$$\frac{\partial x}{\partial Q} = 3 > 0 \quad \text{และ} \quad \frac{\partial y}{\partial P} = 1 > 0$$

สินค้าทั้งสองประเภทเป็นส่วนทดแทนกันและกัน

และถ้าสมการอุปสงค์เป็น

$$x = \frac{8}{PQ} \quad \text{และ} \quad y = \frac{12}{PQ}$$

เนื่องจาก

$$\frac{\partial x}{\partial Q} = \frac{-8}{PQ^2} < 0 \quad \text{และ} \quad \frac{\partial y}{\partial P} = -\frac{12}{P^2Q} < 0$$

สินค้าทั้งสองประเภทเป็นส่วนเติมเต็มกันและกัน

นิยามหรือคำจำกัดความของ <u>ความยืดหยุ่นของอุปสงค์บางส่วน</u> เมื่ออุปสงค์เป็นฟังก์ชันของสองตัวแปร (สองราคา) มีลักษณะคล้ายกับนิยามของความยืดหยุ่นของอุปสงค์ต่อราคาสำหรับฟังก์ชันหนึ่งตัวแปรที่ได้ให้ไว้แล้วในหัวข้อ 4.9 ดังนั้น สำหรับสมการอุปสงค์

$$x = f(P, Q)$$

และ

$$y = g(P, Q)$$

ความยืดหยุ่นของอุปสงค์บางส่วนของ **x** เมื่อเทียบกับ P หรือ

$$\frac{Ex}{EP}$$

คือ ความเปลี่ยนแปลงสัมพัทธ์ใน x ต่อหน่วยความเปลี่ยนแปลงสัมพัทธ์ใน P เมื่อ Q คงที่ โดย

$$\frac{Ex}{EP} = \lim_{\Delta P \to 0} \left[\frac{f(P+\Delta P,\ Q) - f(P,\ Q)}{f(P,Q)} \times \frac{P}{\Delta P}\right]$$

$$= \frac{P}{f(P,Q)} \lim_{\Delta P \to 0} \frac{f(P+\Delta P,Q) - f(P,Q)}{\Delta P}$$

$$= \frac{P}{f(P,Q)} \frac{\partial f(P,Q)}{\partial P}$$

$$= \frac{P}{x} \frac{\partial x}{\partial P} \qquad (x = f(P,Q))$$

ในทำนองเดียวกัน ความยืดหยุ่นของอุปสงค์บางส่วนอีก 3 แบบ คือ

$$\frac{Ex}{EQ} = \frac{Q}{x} \cdot \frac{\partial x}{\partial Q}$$

$$\frac{Ey}{EP} = \frac{P}{y} \cdot \frac{\partial y}{\partial P}$$

$$\frac{Ey}{EQ} = \frac{Q}{y} \cdot \frac{\partial y}{\partial Q}$$

ตัวอย่าง 9.6.2

ถ้าให้ x เป็นความต้องการเนยสดเมื่อมีราคา P บาทต่อปอนด์

y เป็นความต้องการเนยเทียมเมื่อมีราคา Q บาทต่อปอนด์

และ สมการอุปสงค์ (ความต้องการ) เป็น

$$x = P^{-0.2} \cdot Q^{0.3}$$

$$y = P^{0.5} \cdot Q^{-1.2}$$

จงแสดงให้เห็นว่าสินค้าทั้งสองนี้ทดแทนกันและกัน และจงหาความยืดหยุ่นของอุปสงค์บางส่วนทั้ง 4 แบบ

<u>วิธีทำ</u>

$$\frac{\partial x}{\partial P} = -0.2P^{-1.2} \cdot Q^{0.3} \qquad \frac{\partial x}{\partial Q} = 0.3P^{-0.2} \cdot Q^{-0.7}$$

$$\frac{\partial y}{\partial P} = 0.5P^{-0.5} \cdot Q^{-1.2} \qquad \frac{\partial y}{\partial Q} = -1.2P^{0.5} \cdot Q^{-2.2}$$

เพราะว่าทั้ง $\frac{\partial x}{\partial Q}$ และ $\frac{\partial y}{\partial P}$ มากกว่าศูนย์ สินค้าทั้งสองชนิดจึงทดแทนกันและกันได้

สำหรับความยืดหยุ่นของอุปสงค์บางส่วนทั้ง 4 แบบคือ

$$\frac{Ex}{EP} = \frac{P}{x} \frac{\partial x}{\partial P} = \frac{P}{P^{-0.2}Q^{0.3}} (-0.2P^{-1.2} Q^{0.3}) = -0.2$$

$$\frac{Ex}{EQ} = \frac{Q}{x} \cdot \frac{\partial x}{\partial Q} = \frac{Q}{P^{-0.2}Q^{0.3}} (0.3P^{-0.2} \cdot Q^{-0.7}) = 0.3$$

$$\frac{Ey}{EP} = \frac{P}{y} \cdot \frac{\partial y}{\partial P} = \frac{P}{P^{0.5}Q^{-1.2}} (0.5P^{-0.5}Q^{-1.2}) = 0.5$$

$$\frac{Ey}{EQ} = \frac{Q}{y} \cdot \frac{\partial y}{\partial Q} = \frac{Q}{P^{0.5}Q^{-1.2}} (-1.2P^{0.5}Q^{-2.2}) = -1.2$$

จากค่าของ $\frac{Ex}{EP}$ และ $\frac{Ey}{EP}$ สรุปได้ว่า ถ้าราคาของเนยเทียมคงที่ และราคาของเนยสดสูงขึ้น 1 เปอร์เซ็นต์ ความต้องการเนยสดจะลดลง 0.2 เปอร์เซ็นต์ ในขณะที่ความต้องการเนยเทียมจะเพิ่มขึ้น 0.5 เปอร์เซ็นต์ ในทำนองเดียวกัน จากค่าของ $\frac{Ex}{EQ}$ และ $\frac{Ey}{EQ}$ จะได้ว่าถ้าราคาเนยสดคงที่ และราคาของเนยเทียมสูงขึ้น 1 เปอร์เซ็นต์ ความต้องการเนยสดจะเพิ่มขึ้น 0.3 เปอร์เซ็นต์ ส่วนความต้องการเนยเทียมจะลดลง 1.2 เปอร์เซ็นต์

ถ้าต้นทุนการผลิตสินค้าชนิดที่หนึ่งและชนิดที่สอง จำนวน x หน่วย และ y หน่วยตามลำดับ คือ C(x,y) ต้นทุนนี้ เรียกว่า ฟังก์ชันต้นทุนร่วม (joint-cost function) และอนุพันธ์ย่อยของฟังก์ชันต้นทุนร่วม จะเรียกว่า ฟังก์ชันต้นทุนเพิ่ม (marginal cost functions)

ถ้าบริษัทแห่งหนึ่งผลิตสินค้าสองชนิดที่มีความเกี่ยวเนื่องกัน และมีสมการ

อุปสงค์เป็น

$$x = f(P, Q)$$

$$Y = g(P, Q)$$

เนื่องจากรายได้ของสินค้าทั้งสองชนิด คือ

$$Px + Qy$$

ดังนั้น

$$B = Px+Qy-C(x, y)$$

ถ้า B คือ รายได้เป็นบาท

เพื่อหารายได้สูงสุด จะใช้สมการอุปสงค์กำหนด B ในเทอมของ P และ Q หรือ x กับ y แล้วใช้วิธีการดังที่อธิบายไว้ในหัวข้อก่อน ตามตัวอย่างต่อไปนี้

ตัวอย่าง 9.6.3

บริษัทผูกขาดแห่งหนึ่งผลิตสินค้าสองชนิดซึ่งทดแทนกันได้ และมีสมการอุปสงค์เป็น

$$x = 8-p+Q$$

และ

$$y = 9+P-5Q$$

โดยที่ถ้าสินค้าชนิดแรกราคา P บาทตอหน่วย ความต้องการจะเป็น 1,000 x หน่วย และถ้าสินค้าชนิดที่สองราคา Q บาทต่อหน่วย ความต้องการจะเป็น 1,000 y หน่วย ถ้าต้นทุนการผลิตสินค้าชนิดที่หนึ่งแต่ละหน่วยเป็น 4 บาท และต้นทุนการผลิตสินค้าชนิดที่สองเป็น 2 บาทต่อหน่วย จงหาจำนวนสินค้าที่บริษัทควรผลิตและราคาขายเพื่อให้มีกำไรสูงสุด

<u>วิธีทำ</u>

$\because$ รายได้จากการขายสินค้าทั้งสองชนิด $= 1000Px+1000Qy$

และต้นทุนการผลิตทั้งหมด $= 4000\,x$

$\therefore$ กำไรทั้งหมด $= (1000Px+1000Qy)-(4000x+2000y)$

แต่ $x = 8-P+Q$ และ $y = 9+P-5Q$

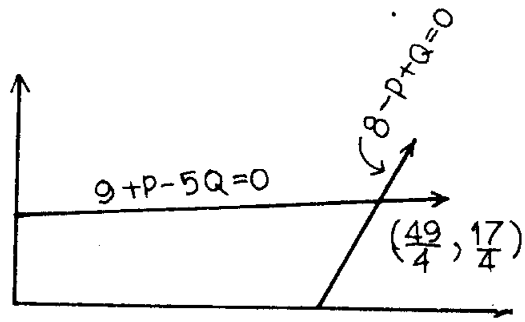
ดังนั้น ถ้า $B(P, Q)$ เป็นกำไรทั้งหมด

$$B(P, Q) = \left[1000P(8-P+Q)+1000Q(9+P-5Q)\right] - \left[4000(8-P+Q)+2000(9+P-5Q)\right]$$
$$= 1000(-P^2+2PQ-5Q^2+10P+15Q-50)$$

และเนื่องจาก x, y, P และ Q ต้องเป็นค่าบวก ทำให้รู้ว่า

$$8-P+Q \geqslant 0$$
$$9+P-5Q \geqslant 0$$

จากอสมการเหล่านี้ เมื่อเขียนกราฟจะทำให้เห็นได้ว่าโดเมนของฟังก์ชัน B เป็นเขตปิด (ดังรูป 9.6.1)



รูป 9.6.1

และเพราะว่า B เป็นฟังก์ชันโพลิโนเมียล ย่อมมีความต่อเนื่องบนเขตปิดนั้น ด้วยเหตุนี้ จึงสามารถใช้ทฤษฎีค่าจุดปลายได้

<u>ขั้นแรก</u> หาจุดวิกฤตของ B ที่ $\frac{\partial B}{\partial P}$ และ $\frac{\partial B}{\partial Q}$ เป็นศูนย์

$$\frac{\partial B}{\partial P} = 1000(-2P+2Q+10)$$
$$\frac{\partial B}{\partial Q} = 1000(2P-10Q+15)$$

แก้สมการ

$$-2P+2Q+10 = 0$$
$$2P-10Q+15 = 0$$

ได้จุดวิกฤต

$$P = \frac{65}{8} \quad \text{และ} \quad Q = \frac{25}{8}$$

<u>ขั้นสอง</u> หาอนุพันธ์อันดับสองของ B ได้

$$B''_{PP} = -2,000$$

$$B''_{QQ} = -10,000$$

$$B''_{PQ} = 2,000$$

และ

$$(B''_{PP})(B''_{QQ})-(B''_{PQ})^2 = (-2,000)(-10,000)-(2,000)^2 > 0$$

นอกจากนั้น

$$B''_{PP} < 0 .$$

ใช้ทฤษฎี 9.5.2 ได้ว่า B มีค่าสูงสุดสัมพัทธ์ที่จุด $(\frac{65}{8}, \frac{25}{8})$

แทนค่า P และ Q ในฟังก์ชัน ได้

$$B(\frac{65}{8}, \frac{25}{8}) = 14,062.5$$

แสดงว่าค่าสูงสุดสัมบูรณ์ของ B ต้องเกิดที่จุด $(\frac{65}{8}, \frac{25}{8})$ หรือบนเส้นรอบเขตของ B ซึ่งพิจารณาดังนี้

<u>บนแกน P</u> (Q เป็นศูนย์)

$B(P, 0) = -1,000(P^2-10P+50)$

แต่ $P^2-10P+50 > 0$

ดังนั้น

$B(P, 0) < 0$ สำหรับทุกค่า P

แสดงว่าค่าสูงสุดของ B ไม่อยู่บนแกน P

<u>บนแกน Q</u> (P เป็นศูนย์)

$B(0, Q) = -5,000(Q^2-3Q+10)$

ซึ่ง $Q^2-3Q+10 > 0$

ทำให้ $B(0, Q) < 0$ สำหรับทุกค่า Q

แสดงว่าค่าสูงสุดของ B ไม่อยู่บนแกน Q

<u>บนเส้น</u> $9+P-5Q = 0$

เนื่องจาก $P = 5Q-9$

แทนค่า P ในฟังก์ชัน $B(P,Q)$ ได้

$B(5Q-9, Q) = 1,000(-20Q^2+137Q-221)$

ถ้าให้ $h(Q) = -20Q^2+137Q=221$

เพราะว่า h มีอนุพันธ์อันดับหนึ่ง และสองเป็น

$$h'(Q) = -40Q+137$$

$$h''(Q) = -40$$

แสดงว่า h มีค่าสูงสุดสัมบูรณ์ที่จุด $Q = \frac{137}{40}$ (จุดที่ $h'(Q) = 0$)

แทนค่า $Q = \frac{137}{40}$ ในสมการ

$$h(Q) = -20Q^2+137Q-221$$

ได้

$$h(\frac{137}{40}) = 13.6125$$

แทนค่า $h(\frac{137}{40})$ ได้ว่าบนเส้น $9+P-5Q = 0$

$$B(5Q-9,Q) = 1,000(13.6125) = 13,612.5$$

น้อยกว่าค่าของ $B(\frac{65}{8}, \frac{25}{8})$ แสดงว่าค่าสูงสุดสัมบูรณ์ไม่อยู่บนเส้น

$9+P-5Q = 0$

ในทำนองเดียวกัน<u>บนเส้น</u> $8-P+Q = 0$

แทนค่า $Q = P-8$ ใน $B(P,Q)$ ได้

$$B(P, P-8) = 1,000(-4P^2+89P-490)$$

ซึ่งโดยวิธีเดียวกันกับการหาค่าสูงสุดบนเส้น $9+P-5Q = 0$

จะพบว่า

$B(P,\ P-8)$ มีค่าสูงสุดเมื่อ $P = \frac{89}{8}$ และ

$B(P,\ P-8) = 5{,}062.5$

ซึ่งก็น้อยกว่าค่าของ $B(\frac{65}{8},\ \frac{25}{8})$ เช่นเดียวกัน

แสดงว่าค่าสูงสุดสัมบูรณ์ไม่เกิดบนเส้นรอบเขตของ B

ดังนั้นค่าสูงสุดสัมบูรณ์เกิดที่จุด $(\frac{65}{8},\ \frac{25}{8})$

และที่จุด $P = \frac{65}{8},\ Q = \frac{25}{8}$ นี้ สมการอุปสงค์

$$x = 8 - \frac{65}{8} + \frac{25}{8} = 3$$

$$y = 9 + \frac{65}{8} - 5\left(\frac{25}{8}\right) = \frac{3}{2}$$

ดังนั้น สรุปได้ว่าถ้าบริษัทนี้ผลิตสินค้าชนิดที่หนึ่งเป็นจำนวน 3,000 หน่วย แล้วขายในราคา 8 บาท $12\frac{1}{2}$ สตางค์ และผลิตสินค้าชนิดที่สองเป็นจำนวน 1,500 หน่วย และขายในราคา 3 บาท $12\frac{1}{2}$ สตางค์ บริษัทจะได้กำไรสูงสุดเป็นจำนวนเงิน 14,062 บาท 50 สตางค์

ตัวอย่าง 9.6.4

ถ้าต้นทุนการผลิตสินค้าชนิดหนึ่งขึ้นอยู่กับจำนวนของวัตถุดิบ 2 ประเภท คือ $100x$ และ $100y$ ซึ่งมีราคา 7 บาท และ 4 บาท ตามลำดับและสินค้าที่ผลิตได้มีจำนวน $100z$ และมีราคา 9 บาทต่อหนึ่งหน่วย จงหากำไรสูงสุด ถ้าฟังก์ชันในการผลิต f มีค่าเป็น

$$z = f(x,\ y) = \frac{x}{3} + \frac{y}{3} + 5 - \frac{1}{x} - \frac{1}{y}$$

วิธีทำ

ถ้าให้กำไรเป็น B บาท จะได้ว่า

$$B(x,y,z) = 9(100z) - 7(100x) - 4(100y)$$

หรือ (แทนค่า $z = f(x,y)$)

$$B(x,y) = 900\left(\frac{x}{3} + \frac{y}{3} + 5 - \frac{1}{x} - \frac{1}{y}\right) - 700x - 400y$$

$$= 4500 - \frac{900}{x} - \frac{900}{y} - 400x - 100y$$

หาอนุพันธ์ย่อยของ B และให้เท่ากับศูนย์ได้

$$B'_x = \frac{900}{x^2} - 400 = 0$$

$$B'_y = \frac{900}{y^2} - 100 = 0$$

แก้สมการทั้งสองหาจุดวิกฤตได้เป็น

$$x = \frac{3}{2} \quad \text{และ} \quad y = 3$$

เนื่องจาก

$$B''_{xx} = -\frac{1,800}{x^3}$$

และ

$$B''_{yy} = -\frac{1,800}{y^3}$$

$$B''_{xy} = 0$$

ทดสอบโดยใช้อนุพันธ์อันดับสองที่จุดวิกฤต $(\frac{3}{2}, 3)$ ได้

$$(B''_{xx})(B''_{yy}) - (B''_{xy})^2 = \left(-\frac{1,800}{\frac{27}{3}}\right)\left(-\frac{1,800}{27}\right) - (0)^2 > 0$$

และเพราะว่าที่จุด $(\frac{3}{2}, 3)$

$$B''_{xx} < 0$$

ดังนั้น B มีค่าสูงสุดสัมพัทธ์ที่จุด $(\frac{3}{2}, 3)$

เนื่องจาก x และ y อยู่ในช่วง $(0, \infty)$ และ B มีค่าน้อยกว่าศูนย์

เมื่อ x กับ y มีค่าเข้าใกล้ศูนย์หรือมีค่าเข้าใกล้อนันต์

จึงสรุปได้ว่า ค่าสูงสุดสัมพัทธ์ของ B คือ ค่าสูงสุดสัมบูรณ์

และเพราะว่า

$$z = f(x,y) = \frac{x}{3} + \frac{y}{3} + 5 - \frac{1}{x} - \frac{1}{y}$$

เพราะฉะนั้นที่จุด $(\frac{3}{2} \quad 3)$

$$z = \frac{1}{2} + 1 + 5 - \frac{2}{3} - \frac{1}{3}$$

$$z = \frac{11}{2}$$

และกำไรสูงสุดที่ต้องการคือ

$$B = 9(100)(\frac{11}{2}) - 7(100)(\frac{3}{2}) - 4(100)(3)$$

$$B = 2,700 \text{ บาท}$$

แบบฝึกหัดที่ 9.6

1. จงหาความต้องการ (อุปสงค์) เพิ่มทั้ง 4 แบบ จากสมการอุปสงค์ที่กำหนดให้ต่อไปนี้

1.1 $x = 5-2P-Q$
$y = 7-P-2Q$

1.2 $x = P^{-(0,6)}\ Q^{(0,2)}$
$y = P^{(0.6)}\ Q^{-(1,2)}$

1.3 $x = a^{-(P+Q)}$
$y = b^{-(PQ)}$

1.4 $x = \frac{Q}{P}$
$y = \frac{P^2}{Q}$

โดย a,b เป็นค่าคงที่

1.5 $x = 3-5P+Q$
$y = 3+6P-2Q$

1.6 $x = 3-6P+Q$
$y = 4+P-3Q$

1.7 $x = 2e^{P-Q}$
$y = 3e^{Q-P}$

1.8 $x = \frac{1}{P^2Q}$
$y = \frac{1}{PQ^2}$

2. จากสมการอุปสงค์ที่กำหนดให้คือ

2.1 $x = 8-4P-3Q$
$y = 7-2P-Q$

2.2 $x = 6-2P+Q$
$y = 12+3P-5Q$

ถ้าสินค้าชนิด A จำนวน x หน่วยมีราคาต่อหน่วยเป็น P บาท และสินค้าชนิด B จำนวน y หน่วยมีราคาต่อหน่วยเป็น Q บาท จงใช้ความต้องการเพิ่มพิจารณาว่าจำนวนความต้องการสินค้าเปลี่ยนแปลงไปอย่างไร สำหรับกรณีที่

ก. Q คงที่และราคาสินค้าชนิด A เพิ่มขึ้น 1 บาท
ข. P คงที่และราคาสินค้าชนิด B เพิ่มขึ้น 1 บาท
ค. Q คงที่และราคาสินค้าชนิด A ลดลง 1 บาท
ง. P คงที่และราคาสินค้าชนิด B ลดลง 1 บาท

3. ถ้าสมการอุปสงค์สำหรับสินค้าชนิด A และ B เป็น

$$x = 5Q^2-2PQ$$

และ

$$y = 7P^2-6PQ$$

โดยที่ x และ y เป็นจำนวนหน่วยของสินค้าชนิด A และ B ที่ต้องการเมื่อราคาต่อหน่วยของสินค้าชนิด A และ B เป็น P บาท และ Q บาทตามลำดับ

ก. จงหาจำนวนความต้องการของสินค้าแต่ละชนิด เมื่อราคาสินค้าชนิด A เป็น 10 บาทต่อหนึ่งหน่วย และราคาสินค้าชนิด B เป็น 8 บาทต่อหนึ่งหน่วย

ข. จงหาความต้องการเพิ่มทั้ง 4 แบบ เมื่อ P = 10และ Q = 8

ค. จงใช้ผลจากข้อ ข. หาจำนวนความต้องการของสินค้าแต่ละชนิดที่เปลี่ยนแปลงไปเมื่อสินค้าชนิด A มีราคาเพิ่มขึ้นจาก 10 บาท เป็น 11 บาท ส่วนสินค้าชนิด B มีราคาคงเดิม (8 บาท)

ง. จงใช้ผลจากข้อ ข. หาจำนวนความต้องการของสินค้าแต่ละชนิดที่เปลี่ยนแปลงไปเมื่อสินค้าชนิด B มีราคาเพิ่มขึ้นจาก 8 บาท เป็น 9 บาท ส่วนสินค้าชนิด A มีราคาคงเดิม (10 บาท)

4. จากสมการอุปสงค์ที่กำหนดให้แต่ละข้อ คือ

4.1 $x = 5-2P+Q$
$y = 6+3P-Q$

4.2 $x = P^{-(0.4)}\ Q^{0.5}$
$y = P^{(0.4)}\ Q^{-(1.5)}$

4.3 $x = 5e^{(Q-P)}$
$y = 3e^{(P-Q)}$

4.4 $x = \dfrac{1}{PQ}$
$y = \dfrac{1}{P^2 Q}$

4.5 $x = 14-P-2Q$
$y = 17-2P-Q$

4.6 $x = 3^{-(P+Q)}$
$y = 2^{-(PQ)}$

ก. จงหาความยืดหยุ่นของอุปสงค์บางส่วนทั้ง 4 แบบ

ข. ที่ $P = 1$ และ $Q = 2$, ถ้า Q คงที่ และ P เพิ่มขึ้น 1%
จงหาเปอร์เซ็นต์เปลี่ยนแปลงใน x และ y

ค. ที่ $P = 1$ และ $Q = 2$ ถ้า P คงที่ และ Q เพิ่มขึ้น 1%
จงหาเปอร์เซ็นต์เปลี่ยนแปลงใน x และ y

ง. ที่ $P=1$ และ $Q=2$ ถ้า Q คงที่ และ P ลดลง 1%
จงหาเปอร์เซ็นต์เปลี่ยนแปลงใน x และ y

จ. ที่ $P=1$ และ $Q=2$ ถ้า P คงที่ และ Q ลดลง 1%
จงหาเปอร์เซ็นต์เปลี่ยนแปลงใน x และ y

5. ถ้าจำนวนผ้าพันคอที่มีผู้ต้องการซื้อเป็น x ผืน เมื่อราคา P บาทต่อหนึ่งผืน และจำนวนเสื้อเชิตที่มีผู้ต้องการซื้อเป็น y ผืน เมื่อราคา Q บาทต่อหนึ่งตัว ถ้าสมการอุปสงค์เป็น

$$x = P^{-(0.5)} Q^{(0.2)}$$
$$y = P^{-(1.3)} Q^{-(0.8)}$$

ก. จงแสดงว่าสินค้าทั้งสองชนิดเป็นสวนเติมเต็มกันและกัน

ข. จงหาความยืดหยุ่นของอุปสงค์บางส่วนทั้ง 4 แบบ

ค. จงหาเปอร์เซ็นต์เปลี่ยนแปลงของความต้องการผ้าพันคอและเสื้อเชิต
ถ้าราคาเสื้อเชิตคงที่แต่ราคาผ้าพันคอเพิ่มขึ้น 1% และ
ถ้าราคาผ้าพันคอคงที่แต่ราคาเสื้อเชิตเพิ่มขึ้น 1%

6. ถ้าร่มมีราคา P บาท จะขายร่มได้ x คัน และถ้าเสื้อฝนมีราคา Q บาท จะขายเสื้อฝนได้ y ตัว ถ้ากำหนดให้สมการอุปสงค์

$$x = 4e^{-P/100Q}$$

และ

$$y = 8e^{-Q/200P}$$

ก. จงแสดงให้เห็นว่าสินค้าทั้งสองชนิดทดแทนกันได้

ข. จงหาความยืดหยุ่นของอุปสงค์บางส่วนทั้ง 4 แบบ

ค. ถ้าร่มมีราคา 100 บาท และสื้อฝนมีราคา 200 บาท
จงหาเปอร์เซ็นต์เปลี่ยนแปลงของความต้องการร่มและเสื้อฝน
เมื่อราคาร่มลดลง 1% และเมื่อราคาเสื้อฝนลดลง 1%

7. ถ้าสมการอุปสงค์ของสินค้าสองชนิดเป็น

$$x = 6-2P+Q$$

และ

$$y = 7+P-Q$$

โดยที่ 100x หน่วยจะเป็นจำนวนที่ลูกค้าต้องการเมื่อสินค้าชนิดแรกมีราคา P บาทต่อหน่วย และ 100y หน่วย เป็นจำนวนที่ลูกค้าต้องการเมื่อสินค้าชนิดที่สองมีราคา Q บาทต่อหน่วย

จงแสดงว่าสินค้าทั้งสองประเภททดแทนกันได้ และถ้าต้นทุนในการผลิตสินค้าชนิดแรกกับชนิดที่สองเป็น 2 บาท และ 3 บาท ตามลำดับ จงหาจำนวนสินค้าทั้งสองประเภทที่จะต้องผลิตและราคาที่จะขาย เพื่อให้ได้กำไรสูงสุด

8. ถ้าบริษัทแห่งหนึ่งผลิตเครื่องเย็บกระดาษ และลวดเย็บกระดาษ ซึ่งมีสมการอุปสงค์เป็น

$$x = \frac{10}{PQ}$$

และ

$$y = \frac{20}{PQ}$$

ซึ่งถ้าเครื่องเย็บกระดาษราคาเครื่องละ P บาท จำนวนที่มีผู้ต้องการจะเป็น 1,000 x เครื่อง และถ้าลวดเย็บกระดาษราคากล่องละ Q บาท จำนวนที่มีผู้ต้องการจะเป็น 1,000 กล่อง ในการผลิตลวดเย็บกระดาษหนึ่งกล่องและเครื่องเย็บกระดาษหนึ่งเครื่อง ต้องใช้ต้นทุนในการผลิต 10 บาท และ 20 บาท ตามลำดับ จงหาราคาขายของสินค้าแต่ละชนิดที่จะทำให้ได้กำไรสูงสุด

9. บริษัทแห่งหนึ่งผลิตสินค้าสองชนิด ซึ่งมีสมการอุปสงค์เป็น

$$x = 16-3P-2Q$$

และ

$$y = 11-2P-2Q$$

โดยที่ x และ y เป็นจำนวนความต้องการสินค้าชนิดที่หนึ่ง และชนิดที่สอง เมื่อสินค้าชนิดแรกมีราคา P บาทต่อหน่วย และสินค้าชนิดที่สองมีราคา Q บาทต่อหน่วย

จงแสดงให้เห็นว่าสินค้าทั้งสองชนิดเป็นส่วนเติมเต็มกันและกัน และถ้าต้นทุนการผลิตสินค้าชนิดที่หนึ่ง และชนิดที่สอง แต่ละหน่วยเป็น 1 บาท และ 3 บาท ตามลำดับ จงหาจำนวนที่จะต้องผลิตสินค้าทั้งสองชนิด และราคาขายเพื่อให้ได้กำไรสูงสุด

10. ฟังก์ชันการผลิตสินค้าชนิดหนึ่งมีค่าฟังก์ชันเป็น

$$z = f(x,y) = x+\frac{5y}{2} - \frac{1}{8}x^2-\frac{1}{4}y^2-\frac{9}{8}$$

จำนวนวัตถุดิบที่จะต้องใช้ในการผลิตคือ 100x และ 100y ซึ่งมีต้นทุนของวัตถุดิบแต่ละหน่วยเป็น 4 บาท และ 8 บาทตามลำดับ ถ้าผลิตสินค้าได้เป็นจำนวน 100z และขายในราคา 16 บาทต่อหน่วย จงหากำไรสูงสุด

9.7 ตัวคูณของลากรานจ์ (Lagrange Multipliers)

จากตัวอย่าง 9.5.1 ซึ่งให้หาค่าปลายสุดสัมพัทธ์ของฟังก์ชัน

$$f(x,y) = 2x^4+y^2-x^2-2y$$

เมื่อเปรียบเทียบกับตัวอย่าง 9.6.4 ซึ่งให้หาค่าสูงสุดของฟังก์ชัน

$$B(x,y,z) = 900z-700x-400y$$

โดย**มีเงื่อนไข**ว่า x,y และ z ทำให้สมการ

$$z = \frac{x}{3}+\frac{y}{3}+5-\frac{1}{x}-\frac{1}{y}$$

เป็นจริง

จะเห็นได้ว่าปัญหาทั้งสองนี้มีความแตกต่างกันที่ตัวอย่างแรกไม่มีเงื่อนไขใดในการหาค่าปลายสุดสัมพัทธ์ แต่ตัวอย่างที่สองมีเงื่อนไข (constraint) ซึ่งในการหาค่าสูงสุดตามตัวอย่าง 9.6.4 ที่ผ่านมาแล้วนั้นเกี่ยวข้องกับการแทนค่า z ในฟังก์ชัน B

สำหรับในหัวข้อนี้ จะแสดงให้เห็นถึงวิธีการหาค่าสูงสุด-ต่ำสุดโดยวิธีที่แตกต่างออกไป ซึ่งเรียกว่าวิธีการหาค่าสูงสุดต่ำสุด โดยใช้ตัวคูณของลากรานจ์ และมีวิธีการโดยสังเขปคือ ถ้าต้องการหาจุดวิกฤตของฟังก์ชัน f ของสามตัวแปร x,y และ z ซึ่งมีเงื่อนไขว่า $g(x,y,z)=0$ จะทำได้โดยนำตัวแปรใหม่ คูณเข้ากับฟังก์ชัน g แล้วสร้างฟังก์ชันช่วย F โดยที่ให้ λ

$$F(x,y,z,\lambda) = f(x,y,z)+\lambda g(x,y,z)$$

แล้วหาจุดวิกฤตของฟังก์ชัน F ของ 4 ตัวแปร x,y,z และ λ ซึ่งค่าของ x,y และ z ที่ให้ค่าจุดปลายของ f จะอยู่ในจุดวิกฤตเหล่านี้

ตัวอย่าง 9.7.1

จงใช้วิธีของลากรานจ์หาคำตอบของตัวอย่าง 9.6.4

วิธีทำ เพื่อหาค่าสูงสุดของฟังก์ชัน B ที่กำหนดด้วย

$$B(x,y,z) = 900z-700x-400y$$

ซึ่งมีเงื่อนไขว่า

$$z = \frac{x}{3}+\frac{y}{3}+5-\frac{1}{x}-\frac{1}{y}$$

โดยวิธีของลากรานจ์

ให้ $g(x,y,z) = z + \frac{1}{x} + \frac{1}{y} - \frac{x}{3} - \frac{y}{3} - 5 = 0$

สร้างฟังก์ชันช่วย F โดยให้

$$F(x,y,z,\lambda) = B(x,y,z) + \lambda\, g(x,y,z)$$

$$= 900z - 700x - 400y + \quad (z + \frac{1}{x} + \frac{1}{y} - \frac{x}{3} - \frac{y}{3} - 5)$$

หาจุดวิกฤตโดยกำหนดให้อนุพันธ์ย่อยของ F เท่ากับศูนย์ นั่นคือ

$$F'_x(x,y,z,\lambda) = -700 - \frac{\lambda}{x^2} - \frac{\lambda}{3} = 0$$

$$F'_y(x,y,z,\lambda) = -400 - \frac{\lambda}{y^2} - \frac{\lambda}{3} = 0$$

$$F'_z(x,y,z,\lambda) = 900 + \lambda = 0$$

$$F'(x,y,z,\lambda) = z + \frac{1}{x} + \frac{1}{y} - \frac{x}{3} - \frac{y}{3} - 5 = 0$$

แก้สมการทั้งสี่หาค่า x,y,z และ λ ได้

$$x = \frac{3}{2}\ ,\ y = 3,\ z = \frac{11}{2}\ ,\ \text{และ}\ \lambda = -900$$

จะเห็นว่าค่าของ x,y และ z เหมือนกับค่าที่หาได้ในตัวอย่าง 9.6.4 และค่าสูงสุดของ B ที่จุด $(\frac{3}{2}, 3, \frac{11}{2})$ คือ 2,700 เช่นกัน

ต่อไปนี้จะเป็นตัวอย่างเชิงเศรษฐศาสตร์ที่เกี่ยวข้องกับฟังก์ชันอรรถประโยชน์ (utility function) ซึ่งใช้วัดความพอใจในปริมาณสินค้าชนิดต่าง ๆ ค่าของฟังก์ชันอรรถประโยชน์ เรียกว่า ดัชนีอรรถประโยชน์ ซึ่งอธิบายขีดขั้นความพอใจที่ลูกค้ามีต่อสินค้าในเชิงตัวเลข

ตัวอย่าง 9.7.2

ถ้า u เป็นฟังก์ชันอรรถประโยชน์ ซึ่ง

$$u(x,y,z) = xyz$$

โดยที่ x, y และ z เป็นจำนวนหน่วยของสินค้า A,B และ C ที่ผู้บริโภคหนึ่งรายต้องการเป็นประจำทุกสัปดาห์ ถ้าราคาต่อหน่วยของสินค้า A,B และ C เป็น 2 บาท 3 บาท และ 4 บาท ตามลำดับ และผู้บริโภคกำหนดว่าค่าใช้จ่ายทั้งหมดประจำสัปดาห์ สำหรับสินค้าทั้ง 3 ชนิดเท่ากับ 90 บาท จงหาว่าในหนึ่งสัปดาห์ผู้บริโภคควรจะซื้อสินค้าแต่ละชนิดเป็นจำนวนเท่าใด เพื่อให้ได้ดัชนีอรรถประโยชน์สูงสุด

วิธีทำ ปัญหาในตัวอย่างนี้คือการหาค่า x, y และ z ที่ทำให้

$u(x,y,z)$ มีค่าสูงสุด โดยมีเงื่อนไขบังคับว่า

$$2x+3y+4z = 90$$

กำหนดให้

$$g(x,y,z) = 2x+3y+4z-90 = 0$$

ดังนั้นฟังก์ชันช่วยคือ

$$F(x,y,z,\lambda) = u(x,y,z) + \lambda g(x,y,z)$$

$$= xyz + \lambda(2x+3y+4z-90)$$

หาจุดวิกฤตโดยให้อนุพันธ์ย่อยของ F เท่ากับศูนย์ กล่าวคือ

$$F'_x(x,y,z,\lambda) = yz+2\lambda = 0$$

$$F'_y(x,y,z,\lambda) = xz+3\lambda = 0$$

$$F'_z(x,y,z,\lambda) = xy+4\lambda = 0$$

$$F'_\lambda(x,y,z,\lambda) = 2x+3y+4z-90 = 0$$

แก้สมการทั้งสี่หาค่า x, y และ z ได้

$$x = 15, \ y = 10 \ \text{ และ } \ z = \frac{15}{2}$$

ดังนั้น $u(15, 10, \frac{15}{2}) = (15)(10)(\frac{15}{2}) = 1,125$

นี่คือค่าสูงสุดของดัชนีอรรถประโยชน์ (utility index)

ดังนั้น จำนวนสินค้าทั้งสามชนิดที่ควรซื้อใน 1 สัปดาห์คือ 10, 15 และ $\frac{15}{2}$

ในกรณีที่มีหลายเงื่อนไข วิธีการของลากรานจ์ก็เพิ่มตัวคูณตามเงื่อนไขที่เพิ่ม เช่น ถ้าต้องการหาจุดวิกฤตของฟังก์ชัน $f(x,y,z)$ ซึ่งมีเงื่อนไข $g(x,y,z) = 0$ และ $h(x,y,z) = 0$ จะหาจากฟังก์ชันช่วย

$$F(x,y,z,\lambda,\mu) = f(x,y,z)+\lambda y(x,y,z)+\mu h(x,y,z)$$

ดังตัวอย่างต่อไปนี้

ตัวอย่าง 9.7.3

จงหาจุดปลายสุดสัมพัทธ์ของฟังก์ชัน f

$$f(x,y,z) = xz+yz$$

มีเงื่อนไข $x^2+z^2 = 2$

$yz = 2$

วิธีทำ

$$F(x,y,z,\lambda,\mu) = xz+yz+\lambda(x^2+z^2-2)+\mu(yz-2)$$

หาอนุพันธ์ย่อยของ F แล้วกำหนดให้เท่ากับศูนย์ เพื่อหาจุดวิกฤต

$F'_x(x,y,z,\lambda,\mu) = z+2\lambda x = 0$ (1)

$F'_y(x,y,z,\lambda,\mu) = z+\mu z = 0$ (2)

$F'_z(x,y,z\lambda,\mu) = x+y+2\lambda z+\mu y = 0$ (3)

$F'_\lambda(x,y,z,\lambda,\mu) = x^2+z^2-2 = 0$ (4)

$F'_\mu(x,y,z,\lambda,\mu) = yz-2 = 0$ (5)

แก้สมการทั้ง 5 ได้

$x = 1 \quad y = 2 \quad z = 1 \quad \lambda = -\frac{1}{2} \quad \mu = -1$

$x = 1 \quad y = -2 \quad z = -1 \quad \lambda = \frac{1}{2} \quad \mu = -1$

$x = -1 \quad y = 2 \quad z = 1 \quad \lambda = \frac{1}{2} \quad \mu = -1$

$x = -1 \quad y = -2 \quad z = -1 \quad \lambda = -\frac{1}{2} \quad \mu = -1$

สำหรับจุดวิกฤต $(1, 2, 1)$ และ $(-1, -2, -1)$

แทนค่าใน $f(x,y,z)$ ได้

$$f(1, 2, 1) = f(-1, -2, -1) = 3$$

ส่วนจุดวิกฤต $(1, -2, -1)$ และ $(-1, 2, 1)$

$$f(1, -2, -1) = f(-1, 2, 1) = 1$$

แสดงว่า f มีค่าฟังก์ชันสูงสุดสัมพัทธ์เป็น 3

และ f มีค่าฟังก์ชันต่ำสุดสัมพัทธ์เป็น 1

แบบฝึกหัดที่ 9.7

1. จงใช้วิธีตัวคูณของลากรานจ์หาจุดวิกฤตของฟังก์ชันที่กำหนดเงื่อนไขต่อไปนี้

1.1 $f(x,y,) = x^2+2xy+y^2$, มีเงื่อนไข $x-y = 3$

1.2 $f(x,y) = x^2+xy+2y^2-2x$, มีเงื่อนไข $x-2y+1 = 0$

1.3 $f(x,y) = 25-x^2-y^2$, มีเงื่อนไข $x^2+y^2-4y = 0$

1.4 $f(x,y) = 4x^2+2y^2+5$, มีเงื่อนไข $x^2+y^2-2y = 0$

1.5 $f(x,y,z) = x^2+y^2+z^2$, มีเงื่อนไข $3x-2y+z-4 = 0$

1.6 $f(x,y,z) = x^2+y^2+z^2$, มีเงื่อนไข $y^2-x^2 = 1$

2. จงใช้วิธีตัวคูณของลากรานจ์หาค่าฟังก์ชันต่ำสุดสัมพัทธ์ของ

2.1 $f(x,y,z) = x^2+3y^2+2z^2$

ซึ่งมีเงื่อนไข

$x-2y-z = 6$ และ

$x-3y+2z = 4$

2.2 $f(x,y,z) = x^2+y^2+z^2$

ซึ่งมีเงื่อนไข

$x+y+2z = 1$ และ

$3x-2y+z = -4$

3. ถ้า $u(x,y,z,s,t) = xyzst$ เกี่ยวข้องกับสินค้า A, B, C, D และ E ซึ่งผู้บริโภคซื้อสินค้า x หน่วยของ A, y หน่วยของ B, z หน่วยของ C, s หน่วยของ D และ t หน่วยของ E เป็นประจำทุกสัปดาห์ ถ้าราคาต่อหน่วยของสินค้า A, B, C, D และ E เป็น 2 บาท, 3 บาท, 4 บาท, 1 บาท และ 5 บาทตามลำดับ ผู้บริโภคกำหนดค่าใช้จ่ายสำหรับสินค้าทั้ง 5 ชนิดไว้สัปดาห์ละ 150 บาท จงหาว่าผู้บริโภคควรจะซื้อสินค้าแต่ละชนิดเป็นจำนวนเท่าใดใน 1 สัปดาห์ เพื่อให้ได้ดัชนีอรรถประโยชน์สูงสุด

4. บริษัทแห่งหนึ่งมีโรงงาน 3 แห่ง ซึ่งแต่ละโรงงานผลิตสินค้าชนิดเดียวกัน ถ้าโรงงาน A ผลิต x หน่วย, โรงงาน B ผลิต y หน่วย และโรงงาน C ผลิต z หน่วย โดยมีต้นทุนการผลิตของแต่ละโรงงานเป็น $(3x^2+200)$ บาท (y^2+400) บาท และ $(2z^2+300)$ บาทตามลำดับและถ้ามีผู้สั่งซื้อสินค้าชนิดนี้เป็นจำนวน 1,100 หน่วย บริษัทควรจะกำหนดให้แต่ละโรงงานผลิตสินค้าเป็นจำนวนเท่าใด เพื่อให้รวมได้เต็มตามจำนวนที่สั่งซื้อ และต้นทุนการผลิตทั้งหมดต่ำสุดด้วย

5. บริษัทแห่งหนึ่งผลิตเครื่องคำนวณไฟฟ้าออกมาจำหน่ายสองแบบ คือ แบบธรรมดา และแบบพิเศษ ถ้า x เป็นจำนวนเครื่องคำนวณไฟฟ้าแบบธรรมดา และ y เป็นจำนวนเครื่องคำนวณไฟฟ้าแบบพิเศษ และต้นทุนการผลิตเครื่องคำนวณไฟฟ้าทั้งสองแบบเป็น

$$C(x,y) = 2x^2-12y+6xy$$

จงหาว่าบริษัทควรจะผลิตเครื่องคำนวณไฟฟ้าทั้งสองแบบออกมาเป็นจำนวนแบบละเท่าใดในหนึ่งวัน เพื่อให้ต้นทุนการผลิตมีค่าต่ำสุด ทั้งนี้กำหนดให้ว่าบริษัทสามารถผลิตเครื่องคำนวณไฟฟ้าได้วันละ 406 เครื่อง

6. บริษัทแห่งหนึ่งผลิตสินค้าสองชนิด A และ B โดยใช้เครื่องจักรอัตโนมัติแบบเดียวกัน ถ้า x เป็นจำนวนเครื่องจักรที่ใช้ผลิตสินค้า A และ y เป็นจำนวนเครื่องจักรที่ใช้ผลิตสินค้า B และต้นทุนการผลิตสินค้า A และ B ต่อวันเป็น

$$C(x,y) = 200+10x+y^2$$

จงหาจำนวน x และ y ที่ควรใช้ผลิตสินค้า A และ B โดยให้ต้นทุนต่ำสุด ถ้ากำหนดว่าเครื่องจักรมีทั้งหมด 12 เครื่อง

7. บริษัทแห่งหนึ่งมีโรงงานสองแห่งไว้ผลิตสินค้าชนิดเดียวกัน ถ้าโรงงานแห่งแรกสามารถผลิตได้ x หน่วย และโรงงานแห่งที่สองผลิตได้ y หน่วย โดยมีต้นทุนการผลิตของโรงงานทั้งสองเป็น

$$C_1(x) = 900+15x_2$$

$$C_2(x) = 700+y^2$$

จงหาว่าแต่ละโรงงานควรจะผลิตสินค้าชนิดนี้เป็นจำนวนเท่าใด จึงจะทำให้ต้นทุนการผลิตต่ำสุด เมื่อมีผู้สั่งซื้อสินค้าเป็นจำนวน 500 หน่วย

8. โรงงานแห่งหนึ่งผลิตตู้เย็นได้ 2 แบบ ถ้าโรงงานผลิตตู้เย็นแบบธรรมดา x ตู้ และผลิตตู้เย็นแบบไม่มีน้ำแข็งจับ y ตู้ โดยมีต้นทุนการผลิตเป็น

$$C(x,y) = 90+4xy-8x+y^2$$

จงหาว่าโรงงานควรจะผลิตตู้เย็นแต่ละแบบเป็นจำนวนเท่าใด เพื่อให้มีต้นทุนการผลิตต่ำสุด และจำนวนตู้เย็นทั้งสองแบบที่ผลิตรวมกันเป็น 19 เครื่อง

9. บริษัทแห่งหนึ่งผลิตสินค้า A และ B เป็นจำนวน x หน่วย และ y หน่วยตามลำดับ ถ้าฟังก์ชันกำไรเป็น

$$P(x,y) = 3x^2-50x+3y^2-20y+5xy$$

จงหาว่าบริษัทควรจะผลิตสินค้าแต่ละชนิดออกมาเป็นจำนวนเท่าใด จึงจะทำให้ได้กำไรสูงสุด ทั้งนี้กำหนดว่าสินค้าทั้งสองชนิดมีจำนวนรวมกันเท่ากับ 50 หน่วย

10. บริษัทแห่งหนึ่งผลิตสินค้า A และ B เป็นจำนวน x หน่วย และ y หน่วยตามลำดับ และเสียค่าต้นทุนการผลิตเป็น

$$C(x,y) = x^2+10x+y^2+10y-xy$$

ถ้าบริษัทมีรายได้เป็น

$$R(x,y) = 3x^2+40x+2y^2$$

จงหาจำนวนสินค้าที่ควรผลิตแต่ละชนิด โดยให้มีจำนวนที่ผลิตรวมกันเท่ากับ 380 หน่วย แล้วให้ได้กำไรสูงสุด