บทที่ 8
เทคนิคของการอินทิเกรต

8.1 นำเรื่อง จากบทที่ 6 เราทราบว่า $\int_a^b f(x)dx = \lim_{\|\Delta\| \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(\mathcal{E}_i)\Delta_i x$

เป็นอินทิกรัลจำกัดเขต (definite integral) ของฟังก์ชัน f จาก a ถึง b ซึ่งหาลิมิตได้ ถ้า f เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องบน $[a,b]$ ค่าของอินทิกรัลจำกัดเขต (definite integral) สามารถคำนวณหาค่าที่แน่นอนได้ โดยอาศัยทฤษฎีกฎหลักมูลของแคลคูลัส และ สามารถหาปฏิยานุพันธ์ (antiderivative) ของตัวถูกอินทิเกรตได้ การหาปฏิยาอนุพันธ์ของตัวถูกอินทิเกรต เรียกว่า การอินทิเกรตโดยไม่จำกัดเขต (indefinite integration)

ดังนั้น การอินทิเกรตโดยไม่จำกัดเขต หมายถึง การหาปฏิยาอนุพันธ์ของตัวถูกอินทิเกรตที่กำหนดให้ ในทางปฏิบัติ เราไม่สามารถหาค่าของอินทิเกรตโดยไม่จำกัดเขต (indefinite integral) ได้เสมอไป แสดงว่าฟังก์ชันถูกอินทิเกรต ไม่มีปฏิยานุพันธ์ ซึ่งสามารถแสดงในเทอมของฟังก์ชันอย่างง่ายได้ อย่างไรก็ตามมีอินทิกรัลจำกัดเขตอีกมากมาย ซึ่งสามารถหาปฏิยานุพันธ์ของฟังก์ชันถูกอินทิเกรตได้โดยใช้เทคนิคของการอินทิเกรต ซึ่งอาศัยสูตรในบทก่อน ดังต่อไปนี้

$$\int du = u + C$$

$$\int a\,du = au + c \quad \text{เมื่อ } a \text{ เป็นค่าคงที่}$$

$$\int [f(u) + g(u)]\,du = \int f(u)\,du + \int g(u)du$$

$$\int u^n du = \frac{u^{n+1}}{n+1} + c \quad , n \neq -1$$

$$\int \frac{du}{u} = \ln|u| + C$$

$$\int a^u du = \frac{a^u}{\ln a} + C$$

$$\int e^u du = e^u + C$$

8.2 การอินทิเกรตทีละส่วน (Integration by parts) เป็นวิธีหนึ่งของการอินทิเกรต การหาสูตร ได้จากการหาอนุพันธ์ของผลคูณของฟังก์ชัน

$$d(uv) = udv + vdu$$

หรือ $$udv = d(uv) - vdu \qquad (8.2.1)$$

โดยการอินทิเกรตทั้งสองข้าง

$$\therefore \quad \boxed{\int udv = uv - \int vdu} \qquad (8.2.2)$$

สมการ 8.2.2 เป็นสูตรที่ใช้ในการอินทิเกรตทีละส่วน

วิธีการใช้สูตร 8.2.2 **นี้** โดยการเลือก u และ dv **ที่**เหมาะสมนั่นคือ สมมุติ dv โดยให้อินทิเกรตหาค่า v ได้ง่าย

และ สมมุติ u ให้เป็นฟังก์ชัน ซึ่งสามารถหาอนุพันธ์เป็นรูปอย่างง่ายได้

ดังตัวอย่างต่อไปนี้

ตัวอย่าง 8.2.1 จงหาค่าของ $\int x^3 e^{x^2} dx$

(สังเกตการสมมุติ u และ dv)

วิธีทำ ให้ $dv = xe^{x^2} dx$ และ $u = x^2$

$$v = \frac{1}{2} e^{x^2} + C_1 \qquad du = 2xdx$$

จากสูตร 8.2.2 จะได้ว่า

$$\begin{aligned}
\int x^3 e^{x^2} dx &= x^2\left(\frac{1}{2} e^{x^2} + C_1\right) - \int \left(\frac{1}{2} e^{x^2} + C_1\right) 2xdx \\
&= \frac{1}{2} x^2 e^{x^2} + C_1 x^2 - \int xe^{x^2} dx - 2C_1 \int xdx \\
&= \frac{1}{2} x^2 e^{x^2} + C_1 x^2 - \frac{1}{2} e^{x^2} - C_1 x^2 + C_2 \\
&= \frac{1}{2} e^{x^2} (x^2 - 1) + C_2
\end{aligned}$$

ข้อสังเกต จากตัวอย่าง 8.2.1 นี้จะเห็นได้ว่าค่าคงที่ที่ได้จากการอินทิเกรตครั้งแรกเป็นแต่ไม่ปรากฏในคำตอบ และเป็นจริงในรูปทั่ว ๆ ไป สามารถพิสูจน์ได้ โดยแทนค่า $v = v + C_1$ ในสูตร 8.2.2 จะได้

$$\begin{aligned}
\int udv &= u(v + C_1) - \int (v + C_1) du \\
&= uv + C_1 u - \int vdu - C_1 \int du \\
&= uv + C_1 u - \int vdu - C_1 u \\
&= uv - \int vdu
\end{aligned}$$

เพราะฉะนั้นไม่จำเป็นต้องเขียน C_1 เมื่อหาค่า v จาก dv

ตัวอย่าง 8.2.2 จงหาค่าของ $\int x \sin 2x\, dx$

วิธีทำ ให้ $u = x,\ dv = \sin 2x\, dx = \frac{1}{2} \sin 2x\, d(2x)$

$du = dx \quad v = -\frac{1}{2} \cos 2x$

จากสูตร $\int u dv = uv - \int v du$

$$\therefore \int x \sin 2x dx = -\frac{1}{2} x \cos 2x + \frac{1}{2} \int \cos 2x\, dx$$

$$= -\frac{x}{2} \cos 2x + \frac{1}{4} \int \cos 2x\, d(2x)$$

$$= -\frac{x}{2} \cos 2x + \frac{1}{4} \sin 2x + C$$

ในการอินทิเกรตทีละส่วน สำหรับบางอินทิกรัล เราสมมุติ u และ dv คู่หนึ่ง ก็สามารถอินทิเกรตได้แต่บางคู่ของ u และ dv ไม่สามารถอินทิเกรตได้ ดังเช่นตัวอย่าง 8.2.2

ถ้าให้ $u = \sin 2x,\quad dv = xdx$

$\therefore\ du = 2 \cos 2x\, dx,\quad v = \frac{x^2}{2}$

$$\therefore \int x \sin 2x dx = \frac{x^2}{2}\sin 2x - \int \frac{x^2}{2} \cdot 2 \cos 2x\, dx$$

$$= \frac{x^2}{2} \sin 2x - \int x^2 \cos 2x dx$$

จะเห็นได้ว่าอินทิกรัลทางขวา ซับซ้อนกว่าอินทิกรัลที่กำหนดให้ จึงจำเป็นต้องเลือก u และ dv ให้เหมาะสม

ถ้าดำเนินการอินทิเกรตทีละส่วนครั้งหนึ่งแล้ว ยังมีบางส่วนอยู่ในรูป $\int v du$ อีก ก็ให้ดำเนินการอินทิเกรตทีละส่วนซ้ำอีกจนกระทั่งเป็นผลสำเร็จ ดังตัวอย่างต่อไปนี้

ตัวอย่าง 8.2.3 จงหาค่าของ $\int x^2 e^{3x} dx$

วิธีทำ ให้ $u = x^2,\quad dv = e^{3x} dx$

$du = 2xdx,\quad v = \frac{1}{3} e^{3x}$

จากสูตร $\int u dv = uv - \int v du$

$$= \frac{1}{3} x^2 e^{3x} - \int \frac{1}{3} e^{3x}\ 2xdx$$

$$= \frac{1}{3} x^2 e^{3x} - \frac{2}{3} \int x e^{3x} dx$$

หาค่าของ $\int x\, e^{3x}dx$ อีกครั้งหนึ่ง

ให้ $u = x, \quad dv = e^{3x}dx$

$du = dx \quad v = \frac{1}{3}\int e^{3x}d(3x)$

$= \frac{1}{3}e^{3x}$

$$\therefore \int x\, e^{3x}dx = \frac{1}{3}xe^{3x} - \frac{1}{3}\int e^{3x}dx$$

$$= \frac{1}{3}x\, e^{3x} - \frac{1}{9}e^{3x}$$

$$\therefore \int x^2e^{3x}dx = \frac{1}{3}x^2e^{3x} - \frac{2}{9}x\, e^{3x} + \frac{2}{27}e^{3x} + c$$

การอินทิเกรตทีละส่วน มักใช้กับฟังก์ชันถูกอินทิเกรต (integrand) ที่อยู่ในรูปผลคูณของฟังก์ชันสองฟังก์ชัน เช่น โพลีโนเมียลฟังก์ชันคูณกับ ลอการิทมิค ฟังก์ชัน โพลีโนเมียลฟังก์ชันคูณกับเอกซ์โพเนนเชียล ฟังก์ชัน (exponential function) หรือ คูณกับ ฟังก์ชันตรีโกณมิติ เป็นต้น

ตัวอย่าง 8.2.4 จงหาสูตรของ $\int x^r \ln x dx$ เมื่อ r เป็นจำนวนจริงใด ๆ

วิธีทำ เราแยกเป็น 2 กรณีด้วยกัน คือ เมื่อ $r \neq -1$

และ $r = -1$

กรณีที่ 1 : เมื่อ $r \neq -1$ ให้ $u = \ln x, \; dv = x^r dx$

$du = \frac{1}{x}dx \;, \; v = \frac{x^{r+1}}{r+1}$

จะได้ $\int x^r \ln x dx = \frac{x^{r+1}}{r+1}\ln x - \frac{1}{r+1}\int x^r dx$

$$= \frac{x^{r+1}}{r+1}\ln x - \frac{x^{r+1}}{(r+1)^2} + c$$

กรณีที่ 2 : เมื่อ $r = -1$ อินทิกรัลจะเป็น

$$\int \frac{\ln x}{x}dx = \int w dw \qquad \text{เมื่อ } w = \ln x$$

$$\therefore \int \frac{\ln x}{x}dx = \frac{1}{2}w^2 + C$$

$$= \frac{1}{2}(\ln x)^2 + C$$

เมื่อรวมกรณีที่ 1 และ 2 เข้าด้วยกัน

จะได้สูตร

$$\int x^r \ln x dx = \begin{cases} \frac{x^{r+1}}{r+1} \ln x - \frac{x^{r+1}}{(r+1)^2} + C & \text{ถ้า } r \neq -1 \\ \frac{1}{2} (\ln x)^2 + C & \text{ถ้า } r = -1 \end{cases}$$

ตัวอย่าง 8.2.5 ในการลงทุนทำธุรกิจอย่างหนึ่ง จะมีรายได้ 2.000 t บาทต่อปี เมื่อ t เป็นจำนวนปีนับจากปัจจุบัน ถ้านำรายได้ไปฝากธนาคารด้วยอัตราดอกเบี้ย 8 % จงหาจำนวนเงินฝากเมื่อสิ้นปีที่ 6

วิธีทำ จากสูตรในหัวข้อ 7.7 $A = \int_0^{\pi} f(t)\, e^{i(T-t)} dt$

$$f(t) = 2000\, t, \quad i = 0.08, \quad T = 6$$

ถ้าให้ A บาท เป็นจำนวนเงินฝากเมื่อสิ้นปีที่หก

$$A = 2000 \int_0^6 t\, e^{0.08(6-t)}\, dt$$

หาค่าอินทิกรัลโดยการอินทิเกรตทีละส่วน

ให้ $u = t,\ dv = e^{0.08(6-t)}$

$$du = dt,\ v = \frac{-e^{0.08(6-t)}}{0.08}$$

$$\therefore A = 2000 \left. \frac{-e^{0.08(6-t)}}{0.08} t \right|_0^6 + \frac{1}{0.08} \int_0^6 e^{0.08(6-t)} dt$$

$$= 2000 \left[\frac{-e^{0.08(6-t)}\, t}{0.08} - \frac{e^{0.08(6-t)}}{0.0064} \right]_0^6$$

$$= 2000 \left(-\frac{6}{0.08} - \frac{1}{0.0064} + \frac{e^{0.48}}{0.0064} \right)$$

$$= 2000 \left(-0.48 - \frac{1 + 1.6161)}{0.0064} \right.$$

$$= 312500\ (0.1361)$$

$$= 42531$$

$\therefore$ จำนวนเงินในบัญชี เมื่อสิ้นปีที่ 6 คือ 42,531 บาท

แบบฝึกหัดที่ 8.2

ข้อ 1 - 14 จงหาค่าของอินทิกรัลไม่จำกัดเขต (indefinite integral)ต่อไปนี้

1. $\int xe^{3x}dx$ 2. $\int x\,3^{x}dx$ 3. $\int \ln x\,dx$

4. $\int x^2\ln x\,dx$ 5. $\int (\ln x)^2 dx$ 6. $\int xa^{x}dx$

7. $\int \frac{x\,e^{x}}{(x+1)^2}\,dx$ 8. $\int (\ln x)^3 dx$ 9. $\int \frac{\ln (x+1)}{\sqrt{x+1}}\,dx$

10. $\int \frac{\ln x}{x^2}\,dx$ 11. $\int \frac{x^3 dx}{\sqrt{1-x^2}}$ 12. $\int x^3\sqrt{1-x^2}\,dx$

13. $\int e^{\sqrt[3]{x}}\,dx$ 14. $\int (2^{x}+x)^2 dx$

ข้อ 15 - 18 จงหาค่าของอินทิกรัลจำกัดเขตต่อไปนี้

15. $\int_0^2 x\,3^{2x}dx$ 16. $\int_0^1 x^2 e^{-2x}dx$ 17. $\int_{-1}^{2} \ln(x+2)\,dx$

18. $\int_1^3 x^2(\ln x)^2 dx$

19. จงหาพื้นที่ซึ่งล้อมรอบด้วยโค้ง $y = \ln x$, แกน x และเส้น $x = e^2$

20. สมการอุปทาน (supply equation) สำหรับโภคภัณฑ์อย่างหนึ่ง เป็น $p - 2\ln(x+2) = 0$, x หน่วยเป็นอุปทาน (supply) เมื่อ p บาท เป็นราคาต่อหนึ่งหน่วย ถ้าราคาเป็น 4 บาท จงหาส่วนเกินของผู้ผลิต (producer's surplus)

21. จงหาจำนวนจากการลงทุนติดต่อกันเป็นระยะเวลา 5 ปี ด้วยทุน 10,000 t บาทต่อปี เมื่อ t เป็นจำนวนปีนับจากปัจจุบัน อัตราดอกเบี้ย 6 %

(Hint : ใช้สูตร $A = \int_0^T f(t)\;e^{i(T-t)}dt$

22. ในการลงทุนทำธุรกิจอย่างหนึ่ง มีรายได้ 500 t บาทต่อปี เมื่อ t เป็นจำนวนปีนับจากปัจจุบัน ถ้านำรายได้ในระยะ 5 ปีแรก ไปฝากธนาคารด้วยอัตราดอกเบี้ย 10 % จงหารายได้ปัจจุบัน

(Hint : ใช้สูตร $V = \int_0^T f(t)\,e^{-it}dt$)

8.3 การอินทิเกรตฟังก์ชันตรรกยะโดยทำให้เป็นเศษส่วนย่อย

(Integration of Rational Fractions by partial fractions)

เราเคยทราบแล้วว่าฟังก์ชันตรรกยะ คือ ผลหารของโพลิโนเมียล ฟังก์ชัน 2 ฟังก์ชัน ให้ H เป็นฟังก์ชันตรรกยะ ถ้าเมื่อ$P(x)$และ$Q(x)$ เป็นโพลิโนเมียลฟังก์ชัน ถ้ากำลัง (degree) สูงสุดของ x ตัวแปรของเศษมากกว่ากำลังสูงสุดของตัวแปรของส่วน เราเรียกฟังก์ชันตรรกยะนี้ว่าเศษส่วนไม่แท้ (improper fraction) $H(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$

ในกรณีที่เป็นเศษส่วนไม่แท้ ต้องทำให้เป็นเศษส่วนแท้ (proper fraction) เสียก่อนโดยหารเศษด้วยส่วน นั่นคือ กำลังสูงสุดของเศษจะน้อยกว่ากำลังสูงสุดของส่วน เช่น

$$\frac{x^4-10x^2+3x+1}{x^2-4} = x^2-6+\frac{3x-23}{x^2-4}$$

$$\therefore \int \frac{x^4-10x^2+3x+1}{x^2-4}\,dx = \int (x^2-6)\,dx + \int \frac{3x-23}{x^2-4}\,dx$$

รูปทั่วไปของการอินทิเกรตของฟังก์ชันตรรกยะเขียนได้เป็น $\int \frac{P(x)}{Q(x)}\,dx$ เมื่อ กำลังสูงสุดของ $P(x)$ น้อยกว่ากำลังสูงสุดของ $Q(x)$

ก่อนทำการอินทิเกรตฟังก์ชันตรรกยะ ให้เขียน $P(x)/Q(x)$ เป็นผลรวมของเศษส่วนย่อย (the sum of partial fractions) เสียก่อน โดยแยก $Q(x)$ ออกเป็นผลคูณของตัวประกอบเชิงเส้นและตัวประกอบกำลังสอง บางครั้งก็เป็นการยากที่จะหาตัวประกอบของ $Q(x)$ แต่ในทางทฤษฎีเราสามารถแยกตัวประกอบได้เสมอ

ทฤษฎี 8.3.1 โพลิโนเมียลฟังก์ชันใด ๆ ซึ่งมีสัมประสิทธิ์เป็นจำนวนจริง จะแยกเป็นผลคูณของตัวประกอบเชิงเส้นและตัวประกอบกำลังสองได้ ซึ่งแต่ละตัวประกอบมีสัมประสิทธิ์เป็นจำนวนจริง

เมื่อแยก $Q(x)$ ออกเป็นผลคูณของตัวประกอบเชิงเส้น และตัวประกอบกำลังสองแล้ว ขั้นต่อไปก็ทำเป็นเศษส่วนย่อย วิธีการทำเป็นเศษส่วนย่อยขึ้นอยู่กับลักษณะของตัวประกอบเหล่านี้ ซึ่งจะแยกกล่าวเป็นกรณีต่าง ๆ โดยไม่ต้องพิสูจน์

เป็นที่ทราบแล้วว่า ถ้า $Q(x)$ เป็นโพลิโนเมียลกำลัง n แล้วสัมประสิทธิ์ของ x^n เป็น 1 เพราะว่า

$$Q(x) = C_o x^n + C_1 x^{n-1} + \ldots\ldots + C_{n-1} x + C_n$$

ถ้า $C_o \neq 1$ หารเศษและส่วนของ $\frac{P(x)}{Q(x)}$ ด้วย C_o

กรณี 1 ถ้าแต่ละตัวประกอบของ $Q(x)$ เป็นตัวประกอบเชิงเส้นทั้งหมด และไม่ซ้ำกัน

คือ $Q(x) = (x-a_1)(x-a_2)\ldots(x-a_n)$ โดยที่ไม่มีสองจำนวนของ a_i ใด ๆ เท่ากัน แล้ว เขียนผลรวมของเศษส่วนย่อยได้ดังนี้

$$\frac{p(x)}{Q(x)} \equiv \frac{A_1}{x-a_1} + \frac{A_2}{x-a_2} + \ldots\ldots\ldots + \frac{A_n}{x-a_n} \qquad (8.3.1)$$

เมื่อ $A_1, A_2 \ldots, A_n$ เป็นค่าคงที่ที่ไม่เท่ากับศูนย์ทั้งหมด และคำนวณหาค่าได้ เช่น

$$\frac{x+1}{(x+2)(2x-3)} \equiv \frac{A}{x+2} + \frac{B}{2x-3}$$ เมื่อ A, B เป็นค่าคงที่ที่ไม่เท่ากับศูนย์พร้อมกัน

หมายเหตุ เราใช้ " $\equiv$ " (อ่านว่า "identical equal") แทน " $=$ " ในสมการ 8.3.1 เพราะว่า สมการ 8.3.1 เป็นเอกลักษณ์สำหรับแต่ละค่าของ A_i

วิธีการหา A_i มีอยู่ 2 วิธี

1. โดยอาศัยหลักการเทียบสัมประสิทธิ์ (principle of undetermined coefficients) ใช้หลักนี้เทียบหาสมการที่สัมพันธ์กับค่าคงที่แล้วแก้สมการหาค่าคงที่ (A_i) เหล่านั้นออกมา หลักการเทียบสัมประสิทธิ์มีดังต่อไปนี้

"ถ้า $p(x) \equiv Q(x)$ แล้ว สัมประสิทธิ์ของ x ที่มีกำลังเท่ากันจะเท่ากัน"

เช่น ถ้า $3x^2-6x+21 \equiv (A+B)x^2+(B-C)x+A$ แล้ว

$A+B = 3,\ B-C = -6,\ A = 21$

2. โดยการกำหนดค่าของตัวแปร เรากำหนดค่า (สมมุติ) mu X ที่เหมาะสม เพื่อให้ได้ค่าคงที่ (A_i) แต่ละตัว

เช่น $x+16 \equiv A(x+2) + B(2x-3)$ สมมุติค่า x ที่เหมาะสม

ให้ $x = -2$ จะได้ $-2 + 16 = 0-7B$

$B = -2$

ให้ $x = \frac{3}{2}$ จะได้ $\frac{3}{2} + 16 = \frac{7A}{2}$ $\therefore$ A - 5

ตัวอย่าง 8.3.1 จงหาค่าของ $\int \frac{(x-1)}{x^3-x^2-2x}\,dx$

วิธีทำ นำส่วนไปแยกตัวประกอบ

$$\frac{x-1}{x^3-x^2-2x} \equiv \frac{x-1}{x(x-2)(x+1)}$$

ดังนั้น $\frac{x-1}{x(x-2)(x+1)} \equiv \frac{A}{x} + \frac{B}{x-2} + \frac{C}{x+1}$ (8.3.2)

สมการ 8.3.2 จะเป็นเอกลักษณ์ (identity) สำหรับทุก ๆ ค่าของ x (ยกเว้น x = 0, 2, -1)

จากสมการ 8.3.2 ทำส่วนให้หมดไป

$$\therefore\ x-1 \equiv A(x-2)(x+1)+Bx(x+1)+Cx(x-2) \qquad (8.3.3)$$

จะเห็นว่าสมการ 8.3.3 เป็นเอกลักษณ์สำหรับทุก ๆ ค่าของ x รวมทั้ง x = 0, 2, -1

หาค่า A, B, C โดยการสมมุติค่า x แล้วนำไปแทนในสมการ 8.3.3

ให้ x=3 $\therefore$ -1 = - 2A

$$A = \frac{1}{2}$$

แทนค่า x = 2 ในสมการ 8.3.2

$$\therefore\ 1 = 6B,\ B = \frac{1}{6}$$

แทนค่า x = -1 ในสมการ 8.3.2

$$\therefore\ -2 = 3C,\ C = -\frac{2}{3}$$

แทนค่า A, B, C ในสมการ 8.3.1

$$\therefore\ \frac{x-1}{x(x-2)(x+1)} = \frac{\frac{1}{2}}{x} + \frac{\frac{1}{6}}{x-2} + \frac{\frac{-2}{3}}{x+1}$$

$$\therefore \int \frac{x-1}{x^3-x^2-2x}\,dx = \frac{1}{2}\int\frac{dx}{x} + \frac{1}{6}\int\frac{dx}{x-2} - \frac{2}{3}\int\frac{dx}{x+1}$$

$$= \frac{1}{2}\ln|x| + \frac{1}{6}\ln|x-2| - \frac{2}{3}\ln|x+1| + \frac{1}{6}\ln C$$

$$= \frac{1}{6}(3\ln|x| + \ln|x-2| - 4\ln|x+1| + \ln C$$

$$= \frac{1}{6}\ln\left|\frac{Cx^2(x-2)}{(x+1)^4}\right|$$

การหาค่า A, B, C โดยการเทียบสัมประสิทธิ์

จากตัวอย่าง 8.3.1

รวมเทอมเหมือนในสมการ 8.3.3

$$\therefore\ x-1 \equiv (A+B+C)x^2+(-A+B-2C)x-2A$$

สัมประสิทธิ์ทางซ้ายและทางขวาที่สมนัยกันจะเท่ากัน

ดังนั้น
$$\begin{aligned} A+B+C &= 0 \\ -A+B-2C &= 1 \\ -2A &= -1 \end{aligned}$$

แก้สมการหาค่า A, B, C ได้ $A = \frac{1}{2}$, $B = \frac{1}{6}$, $C = -\frac{2}{3}$

แล้วนำค่า A,B,C ไปแทนในสมการ 8.3.2

กรณี 2 ถ้าตัวประกอบของ Q(x) เป็นกำลังหนึ่งทั้งหมด และมีบางตัวประกอบซ้ำกัน สมมุติว่า ตัวประกอบ $(x-a_i)$ ซ้ำกัน p ครั้ง แล้วเขียนผลรวมของเศษส่วนย่อยได้ดังนี้

$$\frac{A_1}{(x-a_i)^p} \quad \frac{A_2}{(x-a_i)^{p-1}} + \cdots + \frac{A_{p-1}}{(x-a_i)^2} + \frac{A_p}{x-a_i}$$

เมื่อ $A_1, A_2, \ldots\ldots\ldots\ldots A_p$ เป็นค่าคงที่ และ $A_i \neq 0$ พร้อมกัน

เช่น
$$\frac{2x+1}{(x+4)^2} \equiv \frac{A_1}{x+4} + \frac{A_2}{(x+4)^2}$$

$$\frac{3x^2-1}{x^3(x+1)^2} \equiv \frac{A_1}{x} + \frac{A_2}{x^2} + \frac{A_3}{x^3} + \frac{A_4}{x+1} + \frac{A_5}{(x+1)^2}$$

$$\frac{3x^2-1}{(2x+3)(2x-5)^2} \equiv \frac{A}{2x+3} + \frac{B}{2x-5} + \frac{C}{(2x-5)^2}$$

ตัวอย่าง 8.3.2 จงหาค่าของ $\int \frac{(x^3-1)}{x^2(x-2)^3}\,dx$

<u>วิธีทำ</u> เขียนส่วนของตัวถูกอินทิเกรต เป็นผลรวมของเศษส่วนย่อย

$$\frac{x^3-1}{x^2(x-2)^3} \equiv \frac{A}{x^2} + \frac{B}{x} + \frac{C}{(x-2)^3} + \frac{D}{(x-2)^2} + \frac{E}{x-2} \qquad (8.3.4)$$

สมการ 8.3.4 มีความเป็นเอกลักษณ์ สำหรับทุก ๆ ค่าของ x (ยกเว้นเมื่อ x = 0, 2)

คูณทั้งสองข้างของสมการ 8.3.4 ด้วย $x^2(x-2)^3$ ได้

$$x^3-1 \equiv A(x-2)^3 + Bx(x-2)^3 + Cx^2 + Dx^2(x-2) + Ex^2(x-2)^2$$

$$x^3-1 \equiv A(x^3-6x^2+12x-8) + Bx(x^3-6x^2+12x-8) + Cx^2+Dx^3-2Dx^2+Ex^2(x^2-4x+4)$$

$$x^3-1 \equiv (B+E)x^4+(A-6B+D-4E)x^3 + (-6A+12B+C-2D+4E)x^2+(12A-8B)x-8A$$

โดยการเทียบสัมประสิทธิ์

$\therefore \quad B+E = 0$

$A-6B+D-4E = 1$

$-6A+12B+C-2D+4E = 0$

$12A-8B = 0$

$-8A = -1$

$A = \frac{1}{8}$

$B = \frac{3}{16}, \quad C = \frac{7}{4}, \quad D = \frac{5}{4}, \quad E = \frac{-3}{16}$

แทนค่า A, B, C, D ในสมการ 8.3.4

$$\frac{x^3-1}{x^2(x-2)^3} \equiv \frac{\frac{1}{8}}{x^2} + \frac{\frac{3}{16}}{x} + \frac{\frac{7}{4}}{(x-2)^3} + \frac{\frac{5}{4}}{(x-2)^2} + \frac{\frac{-3}{16}}{x-2}$$

ดังนั้น $\displaystyle\int \frac{x^3-1}{x^2(x-2)^3}\,dx = \frac{1}{8}\int\frac{dx}{x^2} + \frac{3}{16}\int\frac{dx}{x} + \frac{7}{4}\int\frac{dx}{(x-2)^3} + \frac{5}{4}\int\frac{dx}{(x-2)^2} - \frac{3}{16}\int\frac{dx}{x-2}$

$$= -\frac{1}{8x} + \frac{3}{16}\ln|x| - \frac{7}{8(x-2)^2} - \frac{5}{4(x-2)} - \frac{3}{16}\ln|x-2| + C$$

$$= \frac{-11x^2+17x-4}{8x(x-2)^2} + \frac{3}{16}\ln\left|\frac{x}{x-2}\right| + C$$

ตัวอย่าง 8.3.3 จงหาค่าของ $\displaystyle\int \frac{du}{u^2-a^2}$

วิธีทำ $\frac{1}{u^2 - a^2} = \frac{A}{u-a} + \frac{B}{u+a}$ (8.3.5)

คูณสมการ 8.3.5 ตลอดด้วย $(u-a)(u+a)$

$\therefore \quad 1 \equiv A(u+a) + B(u-a)$

$1 \equiv (A+B)u+Aa-Ba$

โดยการเทียบสัมประสิทธิ์

$\therefore \quad A+B = 0, \quad Aa-Ba = 1$

แก้สมการได้ $A = \frac{1}{2a}$, $B = \frac{-1}{2a}$

$$\therefore \int \frac{du}{u^2-a^2} = \frac{1}{2a}\int \frac{du}{u-a} - \frac{1}{2a}\int \frac{du}{u+a}$$

$$= \frac{1}{2a}\ln|u-a| - \frac{1}{2a}\ln|u+a| + C$$

$$= \frac{1}{2a}\ln\left|\frac{u-a}{u+a}\right| + c$$

ดังนั้นสรุปเป็นสูตรได้ว่า

$$\boxed{\int \frac{du}{u^2-a^2} = \frac{1}{2a}\ln\left|\frac{u-a}{u+a}\right| + c}$$

ในทำนองเดียวกัน ถ้าหาค่าของ $\int \frac{du}{a^2-u^2}$

เขียนได้ว่า $\int \frac{du}{a^2-u^2} = -\int \frac{du}{u^2-a^2}$

$$= \frac{-1}{2a}\ln\left|\frac{u-a}{u+a}\right| + c$$

$$= \frac{1}{2a}\ln\left|\frac{u+a}{u-a}\right| + c$$

ดังนั้นสรุปเป็นสูตรได้ว่า

$$\boxed{\int \frac{du}{a^2-u^2} = \frac{1}{2a}\ln\left|\frac{u+a}{u-a}\right| + c}$$

กรณี 3 ถ้า ax^2+px+q เป็นตัวประกอบหนึ่งของ $Q(x)$ โดยที่ ax^2+px+q แยกเป็นตัวประกอบกำลังหนึ่งไม่ได้แล้ว จะมีเศษส่วนย่อยอยู่ในรูป

$\frac{Ax+B}{ax^2+px+q}$ ซึ่งสมนัยกับตัวประกอบ ax^2+px+q นั้น โดยที่ A,B เป็นค่าคงที่ที่ไม่เป็นศูนย์พร้อมกัน เช่น

$$\frac{x^2-3}{(x-2)(x^2+4)} \equiv \frac{A}{x-2} + \frac{Bx+C}{x^2+4}$$

$$\frac{2x^3-5}{x(2x^2+3x-8)\ (x^2+x+1)} \equiv \frac{A}{X} + \frac{Bx+C}{2x^2+3x+8} + \frac{Dx+E}{x^2+x+1}$$

ตัวอย่าง 8.3.4 จงหาค่าของ $\int \frac{(2x^2+3x+9)\,dx}{x^3-27}$

วิธีทำ ส่วนของตัวถูกอินทิเกรต สามารถแยกตัวประกอบได้ดังนี้

$$x^3-27 = (x-3)(x^2+3x+9)$$

เขียนส่วนของตัวถูกอินทิเกรต เป็นผลรวมของเศษส่วนย่อย

$$\frac{2x^2+3x+9}{(x-3)(x^2+3x+9)} \equiv \frac{Ax+B}{x^2+3x+9} + \frac{C}{x-3} \qquad (8.3.6)$$

ทำส่วนให้หมดไป

$$2x^2+3x+9 \equiv (Ax+B)(x-3) + C(x^2+3x+9)$$
$$2x^2+3x+9 \equiv (A+C)x^2 + (B-3A+3C)x+(9C-3B)$$

โดยการเทียบสัมประสิทธิ์ ได้

$$A+C = 2$$
$$B-3A+3C = 3$$
$$9C-3B = 9$$

แก้สมการ หาค่า A,B,C ได้ $A = \frac{2}{3}$, $B = 1$, $C = \frac{4}{3}$
แทนค่า A,B,C ในสมการ 8.3.6

$$\frac{2x^2+3x+9}{(x-3)\quad(x^2+3x+9)} \equiv \frac{\frac{2}{3}x+1}{x^2+3x+9} + \frac{\frac{4}{7}}{x-3}$$

$$\therefore \int \frac{(2x^2+3x+9)}{(x-3)\ (x^2+3x+9)}dx = \frac{1}{3}\int \frac{(2x+3)\ dx}{x^2+3x+9} + \frac{4}{3}\int \frac{dx}{x-3}$$

สำหรับตัวถูกอินทิเกรตตัวแรก เศษเป็นอนุพันธ์ของส่วน ดังนั้นอินทิเกรตตัวแรกได้

$\frac{1}{3}\ln\left|x^2+3x+9\right|$

$$\therefore \int \frac{(2x^2+3x+9)dx}{(x-3)\ (x^2+3x+9)} = \frac{1}{3}\ln\left|x^2+3x+9\right| + \frac{4}{3}\ln|x-3| + \frac{1}{3}\ln C$$

$$= \frac{1}{3}\ln\left|C(x-3)^4(x^2+3x+9)\right|$$

กรณี 4 ถ้า ax^2+px+q เป็นตัวประกอบหนึ่งของ $Q(x)$ โดยที่ ax^2+px+q แยกเป็นตัวประกอบกำลังหนึ่ง (ตัวประกอบเชิงเส้น) ไม่ได้แล้ว จะเขียนเศษส่วนย่อยในรูป

$$\frac{A_1x+B_1}{(ax^2+px+q)} + \frac{A_2x+B_2}{(ax^2+px+q)^2} + \cdots + \frac{A_nx+B_n}{(ax^2+px+q)^n}$$

ที่สมนัยกับตัวประกอบ $(ax^2+px+q)^n$ เมื่อ A_i และ B_i เป็นค่าคงที่ที่ไม่เป็นศูนย์พร้อมกัน เมื่อพิจารณา dug ๆ เช่น

$$\frac{x^2-5x+1}{(x^2+1)^2(x^2+x+1)} \equiv \frac{Ax+B}{x^2+1} + \frac{Cx+D}{(x^2+1)^2} + \frac{Ex+F}{x^2+x+1}$$

$$\frac{3x-7}{(x^2-5x+2)^3} \equiv \frac{Ax+B}{(x^2-5x+2)^3} + \frac{Cx+D}{(x^2-5x+2)^2} + \frac{Ex+F}{x^2-5x+2}$$

ตัวอย่าง 8.3.5 จงหาค่าของ $\int \frac{(8x^4+8x^2+1)\ dx}{x(2x^2-x+1)^2}$

วิธีทำ

$$\frac{8x^4+8x^2+1}{x(2x^2-x+1)^2} \equiv \frac{A}{x} + \frac{Bx+C}{(2x^2-x+1)^2} + \frac{Dx+E}{2x^2-x+1} \qquad (8.3.7)$$

$$\therefore 8x^4+8x^2+1 \equiv A(2x^2-x+1)^2 + (Bx+C)x + (Dx+E)(2x^2-x+1)$$

$$8x^4+8x^2+1 \equiv 4Ax^4+Ax^2+A-4Ax^3+4Ax^2-2Ax+Bx^2+Cx+2Dx^3$$
$$-Dx^2+Dx+2Ex^2-Ex+E$$

$$8x^4+8x^2+1 \equiv 4Ax^4+(-4A+2D)x^3+(5A+B-D+2E)x^2$$
$$+(-2A+C+D-E)x+(A+E)$$

โดยการเทียบสัมประสิทธิ์ และแก้สมการ จะได้

$$A = 2,\ B = 4,\ C = -1,\ D = 4,\ E = -1$$

$$\int \frac{(8x^4+8x^2+1)\,dx}{x(2x^2-x+1)^2} = 2\int \frac{dx}{x} + \int \frac{4x-1}{(2x^2-x+1)^2}\,dx + \int \frac{(4x-1)\,dx}{2x^2-x+1}$$

ถ้าให้ $u = 2x^2-x+1$ แล้ว $du = (4x-1)\,dx$

$$\therefore \int \frac{(4x-1)\,dx}{(2x^2-x+1)^2} = \int \frac{du}{u^2}$$

$$\int \frac{(8x^4+8x^2+1)\,dx}{x(2x^2-x+1)^2} = 2\ln|x| - \frac{1}{2x^2-x+1} + \ln\left|2x^2-x+1\right| + \ln C$$

$$= \ln Cx^2(2x^2-x+1) - \frac{1}{2x^2-x+1}$$

ตัวอย่าง 8.3.6 บริษัทแห่งหนึ่งได้ดำเนินธุรกิจมาตั้งแต่วันที่ 1 เมษายน 2520 คาดคะเนได้ว่าการลงทุนในระยะ 6 ปีแรก จะมีรายได้จากการขายเพิ่มขึ้นด้วยอัตรา

$\dfrac{t^3+t^2+3t+1}{t^2+1}$ ล้านบาท เมื่อ t เป็นจำนวนปีของการดำเนินธุรกิจ ถ้ารายได้ทั้งหมดจากการขายเมื่อสิ้นวันที่ 31 มีนาคม 2521 เป็น 8 ล้านบาท จงคาดคะเนรายได้ทั้งหมดเมื่อสิ้นวันที่ 31 มีนาคม 2525

ตาราง 8.3.1

t	1	5
B	8	B_5

วิธีทำ ให้ B บาท เป็นยอดรายได้จากการขาย เมื่อสิ้น t ปี จากวันที่ 1 เมษายน 2520

$$\frac{dB}{dt} = \frac{t^3+t^2+3t+1}{t^2+t}$$

$$B = \int \frac{t^3+t^2+3t+1}{t^2+t}\,dt \tag{8.3.8}$$

จะเห็นว่า จำนวนถูกอินทิเกรต เป็นเศษส่วนไม่แท้ ทำให้เป็นเศษส่วนแท้

$$\therefore \quad \frac{t^3+t^2+3t+1}{t^2+t} \equiv t+\frac{3t+1}{t^2+t} \tag{8.3.9}$$

จากสมการ 8.3.8 และ 8.3.9 ได้

$$B = \int t\,dt + \int \frac{3t+1}{t^2+t}\,dt \tag{8.3.10}$$

หาค่าอินทิกรัลตัวที่สองได้โดยการแยกออกเป็นผลรวมของเศษส่วนย่อย

$$\frac{3t+1}{t(t+1)} \equiv \frac{A_1}{t} + \frac{A_2}{t+1}$$

$$\therefore \quad 3t+1 \equiv A_1(t+1) + A_2 t$$

$$3t+1 \equiv (A_1+A_2)t + A_1$$

โดยการเทียบสัมประสิทธิ์

$$A_1+A_2 = 3 \qquad \text{และ} \qquad A_1 = 1$$

$$\therefore \quad A_1 = 1,\ A_2 = 2$$

$$\therefore \quad \frac{3t+1}{t(t+1)} \equiv \frac{1}{t} + \frac{2}{t+1} \tag{8.3.11}$$

จากสมการ 8.3.10 และ 83.11 ได้

$$B = \int t\,dt + \int \frac{dt}{t} + 2\int \frac{dt}{t+1}$$

$$B = \frac{1}{2}t^2 + \ln|t| + 2\ln|t+1| + C$$

$$B = \frac{1}{2}t^2 + \ln|t(t+1)^2| + C \tag{6.3.12}$$

$$B = 8 \quad \text{เมื่อ } t = 1 \quad \text{แทนค่าในสมการ} \tag{8.3.12}$$

$$8 = \frac{1}{2} + \ln 4 + C$$

$$\therefore \quad C = 7.5 - \ln 4$$

แทนค่า C ในสมการ (8.3.12)

$$B = \frac{1}{2}t^2 + \ln | t(t+1)^2 \Big| + 7.5 - \ln 4$$

$\therefore$ $B = B_5$ เมื่อ $t = 5$ จะได้

$$B_5 = \frac{1}{2}(25) + \ln(5)(36) + 7.5 - \ln 4$$

$$= 20 + \ln \frac{(5)(36)}{4}$$

$$= 20 + \ln 45$$

$$= 20 + 3.8067$$

$$= 23.8067$$

$\therefore$ ยอดรายได้ที่คาดคะเนไว้เมื่อสิ้นวันที่ 31 มีนาคม 2525 เป็น 23,806,700 บาท

แบบฝึกหัด 8.3

ข้อ 1 - 22 จงหาค่าของอินทิกรัลไม่จำกัดเขต (indefinite integral)

1. $\int \frac{dx}{x^2-4}$

2. $\int \frac{x^2\,dx}{x^2+x-6}$

3. $\int \frac{5x-2}{x^2-4}\,dx$

4. $\int \frac{(4x-2)dx}{x^3-x^2-2x}$

5. $\int \frac{6x^2-2x-1}{4x^3-x}\,dx$

6. $\int \frac{x^2+x+2}{x^2-1}\,dx$

7. $\int \frac{dx}{x^3+3x^2}$

8. $\int \frac{3x^2-x+1}{x^3-x^2}\,dx$

9. $\int \frac{dx}{(x+2)^3}$

10. $\int \frac{dt}{(t+2)^2(t+1)}$

11. $\int \frac{x^2-3x-7}{(2x+3)(x+1)^2}\,dx$

12. $\int \frac{2x^4-2x+1}{2x^5-x^4}\,dx$

13. $\int \frac{dx}{16x^4-8x^2+1}$

14. $\int \frac{dx}{2x^3+x}$

15. $\int \frac{2-x}{x^3+8}\,dx$

16. $\int \frac{(x+3)\,dx}{4x^4+4x^3+x^2}$

17. $\int \frac{x\,dx}{x^4+6x^2+5}$

18. $\int \frac{z^5\,dz}{z^4+8z^2+16}$

19. $\int \frac{dx}{(x^2+4)(x+2)^2}$ 20. $\int \frac{dx}{x(x^2+1)^2}$ 21. $\int \frac{(x^2-4x-4)\,dx}{x^3-2x^2+4x-8}$

22. $\int \frac{(4x^4-15x^3+36x^2-40x+27)}{x(x^2-2x+3)^2}\,dx$

ข้อ 23 - 33 จงหาค่าของอินทิกรัลจำกัดเขต (definite integral)

2 $\int_1^2 3\ \frac{x-3}{x^3+x^2}\,dx$ 24. $\int_0^4 \frac{(x-2)}{2x^2+7x+3}\,dx$

25. $\int_1^3 \frac{x^2-4x+3}{x(x+1)^2}\,dx$ 26. $\int_1^4 \frac{(2x^2+13x+18)\,dx}{x^3+6x^2+9x}$

27. $\int_1^2 \frac{5x^2-3x+18)\,dx}{9x-x^3}$ 28. $\int_1^3 \frac{(4t^2+6)}{t^3+3t}\,dt$

29. $\int_1^4 \frac{(4+5x^2)\,dx}{x^3+4x}$ 30. $\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{(x+1)\,dx}{x^3+1}$

31. $\int_3^4 \frac{(5x^3-4x)}{x^4-16}\,dx$ 32. $\int_3^4 \frac{(x-3)\,dx}{(x-2)(x^2+2x+1)}$

33. $\int_0^2 \frac{(t^3+3t)}{(t^2+1)^2}\,dt$

34. จงหาพื้นที่ซึ่งล้อมรอบด้วยโค้ง $y = \frac{x-1}{x^2-5x+6}$ แกน x และเส้น $x = 4$, $x = 6$

35. ผู้ประกอบหัตถกรรมผู้หนึ่งดำเนินกิจการมาได้ 4 ปีแล้ว รายได้จากการขายของของเขาเพิ่มขึ้นด้วยอัตราเดียวกันในอีก 2 ปีข้างหน้า ถ้าผลรวมของรายได้จากการขาย เมื่อสิ้นปีเป็น 6 ล้านบาท จงคาดคะเนรายได้จากการขายเมื่อสิ้น 1 ปี นับจากปัจจุบัน

8.4 การหาค่าประมาณของการอินทิเกรต (Approximate Integration)

เราพบในบทก่อน ๆ มาแล้วว่ามีหลายปัญหาที่สามารถแก้ไข โดยหาค่าของอินทิกรัลจำกัดเขต ในการหาค่าของอินทิกรัลจำกัดเขตก็อาศัยทฤษฎีกฎหลักมูลของแคลคูลัส และจำเป็นที่จะต้องหาอินทิกรัลไม่จำกัดเขต หรือปฏิยาอนุพันธ์ (antiderivative) แต่มีหลายฟังก์ชัน ซึ่งเราไม่สามารถหาอินทิกรัลไม่จำกัดเขตได้ อย่างไรก็ตามถ้าฟังก์ชัน f ต่อเนื่องในช่วงปิด $[a,b]$ เราสามารถหาค่า $\int_a^b f(x)\,dx$ ได้ และมีเพียงค่าเดียวเท่านั้น ในหัวข้อนี้ เราจะกล่าวถึงการคำนวณค่าประมาณของอินทิกรัลจำกัดเขตสองวิธีด้วยกัน ซึ่งทั้งสองวิธี ให้ค่าประมาณที่ใกล้เคียงพอสมควร

วิธีแรกเรียกว่ากฎสี่เหลี่ยมคางหมู (trapezoidal rule)
เรารู้ว่า f เป็นฟังก์ชันที่ต่อเนื่องในช่วง $[a,b]$ อินทิกรัลจำกัดเขต

$\int_a^b f(x)\,dx$ คือ ลิมิตของผลรวมรีมานน์ (Riemann sum)

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{\|\Delta\|\to 0} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\,\Delta_i x$$

ผลรวมรีมานน์ $\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta_i x$ นี้ ในแง่เรขาคณิต คือ ผลรวมของพื้นที่สี่เหลี่ยมผืนผ้า ซึ่งอยู่เหนือแกน x บวกด้วยค่าลบของพื้นที่สี่เหลี่ยมผืนผ้าที่อยู่ใต้แกน x ดังรูป 6.4.1

การประมาณค่านี้ เราใช้สี่เหลี่ยมคางหมู แทนที่จะเป็นสี่เหลี่ยมผืนผ้า โดยการแบ่งช่วงปิด $[a,b]$ ออกเป็นส่วน ๆ เท่า ๆ กัน และหาค่าของฟังก์ชัน ณ จุดแบ่งที่อยู่ห่างเท่า ๆ กันเหล่านั้น

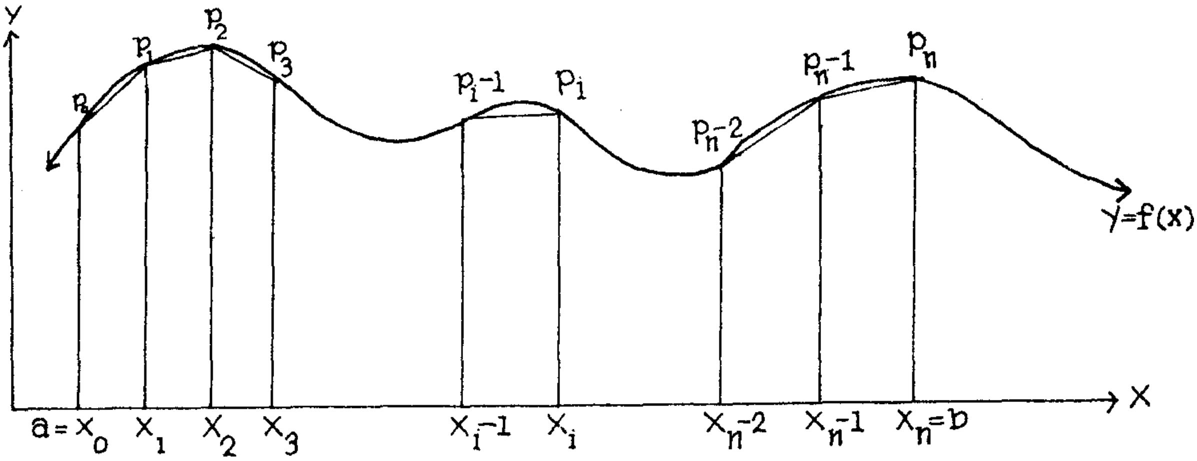
ดังนั้น ถ้าเราพิจารณาอินทิกรัลจำกัดเขต $\int_a^b f(x)\,dx$ เราแบ่งช่วง $[a,b]$ ออกเป็น n ช่องเท่า ๆ กัน แต่ละช่องมีความยาว $\Delta x = \frac{(b-a)}{n}$ และมีทั้งหมด n+1 จุด

ให้ $x_0 = a$, $x_1 = a + \Delta x$, $x_2 = a+2\Delta x$, ...,

$x_i = a+i\Delta x$, ... $x_{n-1} = a+(n-1)\Delta x$, $x_n = b$

แล้วอินทิกรัลจำกัดเขต $\int_a^b f(x)\,dx$ แสดงด้วยผลบวกของ n อินทิกรัลจำกัดเขตดังนี้

$$\int_a^b f(x)\ dx = \int_a^{x_1} f(x)dx + \int_{x_1}^{x_2} f(x)dx + \ldots + \int_{x_{i-1}}^{x_i} f(x)dx + \ldots + \int_{x_{n-1}}^{b} f(x)dx \qquad (8.4.1)$$



รูป 8.4.1

พิจารณาสมการ 8.4.1 ในแง่เรขาคณิต จากรูป 8.4.1

ให้ $f(x) \geqslant 0$ สำหรับทุก ๆ x ใน $[a,b]$ สมการ (8.4.1) เป็นจริงสำหรับทุก ๆ ฟังก์ชันที่ต่อเนื่องในช่วง $[a,b]$ ดังนั้น ค่าของ

$\int_a^{x_1} f(x)dx$ คือ พื้นที่ซึ่งล้อมรอบด้วยแกน x เส้นตรง $x = a$ และ $x = x_1$ และส่วนของเส้นโค้งจาก P_0 ถึง P_1 อินทิกรัลนี้ หาค่าได้โดยประมาณ โดยใช้พื้นที่ของสี่เหลี่ยมคางหมู ที่เกิดจากเส้นตรง

$x = a$, $x = x_1$, $P_0 P_1$ และแกน x

จากสูตรพื้นที่ของสี่เหลี่ยมคางหมู คือ $\frac{1}{2}\left[f(x_0) + f(x_1)\right] \Delta x$

ในทำนองเดียวกันอินทิกรัลอื่น ๆ ทางขวาของสมการ 8.4.1 สามารถประมาณค่าได้โดยการหาพื้นที่ของสี่เหลี่ยมคางหมู เราใช้เครื่องหมาย " $\approx$ " แทน "ค่าเท่ากับโดยประมาณ" แล้วเราจะมีอินทิกรัลที่ i

คือ $$\int_{x_{i-1}}^{x_i} f(x)dx \approx \frac{1}{2}\left[f(x_{i-1}) + f(x_i)\right] \Delta x \qquad (8.4.2)$$

ดังนั้นเราใช้ (8.4.2) สำหรับทุก ๆ อินทิกรัลทางขวาของสมการ 8.4.1

จะได้ $\int_a^b f(x)dx \approx \frac{1}{2}\left[f(x_o)+f(x_1)\right]\Delta x + \frac{1}{2}\left[f(x_1)+f(x_2)\right]\Delta x + \ldots$

$$+\ldots+ \frac{1}{2}\left[f(x_{n-2}) + f(x_{n-1})\right]\Delta x$$

$$+ \frac{1}{2}\left[f(x_{n-1}) + f(x_n)\right]\Delta x$$

นั่นคือ

$$\boxed{\int_a^b f(x)dx \approx \frac{1}{2}\Delta x\left[f(x_o)+2f(x_1)+2f(x_2)+\ldots\ldots + 2f(x_{n-1}) + f(x_n)\right] \qquad (8.4.3)}$$

เป็นสูตรของกฎสี่เหลี่ยมคางหมู

ตัวอย่าง 8.4.1 จงหาค่าของ $\int_0^3 \frac{dx}{16+x^2}$ โดยใช้กฎสี่เหลี่ยมคางหมู เมื่อ $n = 6$ (ตอบทศนิยม 3 ตำแหน่ง)

วิธีทำ $\because$ $[a, b] = [0,3]$ และ $n = 6$

$$\Delta x = \frac{b-a}{n} = \frac{3}{6} = 0.5$$

$$\therefore \int_0^3 \frac{dx}{16+x^2} \approx \frac{0.5}{2}\left[f(x_o)+2f(x_1)+2f(x_2) +2f(x_3)+2f(x_4)+2f(x_5)+f(x_6)\right]$$

เมื่อ $f(x) = \frac{1}{(16+x^2)}$

ผลบวกในวงเล็บแสดงด้วยตาราง 8.4.1

ตาราง 8.4.1

i	x_i	$f(x_i)$	K_i	$K_i\ f(x_i)$
0	0	4.0625	1	0.0625
1	0.5	0.0615	2	0.1230
2	1	0.0588	2	0.1176
3	1.5	0.0548	2	0.1096
4	2	0.0500	2	0.1000
5	2.5	0.0450	2	0.0900
6	3	0.0400	1	0.0400
				$\sum_{i=0}^{6} K_i f(x_i) = 0.6427$

$$\int_0^3 \frac{dx}{16+x^2} \approx 0.25(0.6427)$$

$$\approx 0.1607$$

ต้องการทศนิยม ๓ ตำแหน่ง

$$\therefore \int_0^3 \frac{dx}{16+x^2} \approx 0,161$$

การหาค่าที่แน่นอนของอินทิกรัลจำกัดเขต โดยใช้ฟังก์ชัน tangent ผกผัน (the inverse tangent function) จะได้ค่าที่แน่นอนทศนิยม 4 ตำแหน่ง เท่ากับ 0.1609

พิจารณาความใกล้เคียงของค่าประมาณของอินทิกรัลจำกัดเขตโดยใช้กฎสี่เหลี่ยมคางหมู เราพิสูจน์ได้ว่า เมื่อ Δx เข้าใกล้ศูนย์ และ n เพิ่มขึ้นโดยไม่มีขอบเขต แล้วลิมิตของค่าประมาณโดยกฎสี่เหลี่ยมคางหมู คือ ค่าที่แน่นอนของอินทิกรัลจำกัดเขต

ให้ $T = \frac{1}{2} \Delta x \left[f(x_o) + 2f(x_1) + \dots + 2f(x_{n-1}) + f(x_n) \right]$ แล้ว

$$T = \left[f(x_1)+f(x_2)+\dots+f(x_n) \right] \Delta x + \frac{1}{2} \left[f(x_o)-f(x_n) \right] \Delta x$$

หรือ $$T = \sum_{i=1}^{n} f(x_i) \Delta x + \frac{1}{2} \left[f(a)-f(b) \right] \Delta x$$

$\therefore$ ถ้า $n \longrightarrow +\infty$ และ $\Delta x \longrightarrow 0$ จะได้

$$\lim_{\Delta x \to 0} T = \lim_{\Delta x \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(x_i) \Delta x + \lim_{\Delta x \to 0} \frac{1}{2} \left[f(a)-f(b) \right] \Delta x$$

$$= \int_a^b f(x)\,dx + 0$$

ดังนั้น เราสามารถทำให้ผลต่างระหว่าง T กับค่าของอนุพันธ์จำกัดเขตเล็กลง ได้เท่าที่เราต้องการ โดยกำหนดให้ ค่าของ n มากพอ (และให้ Δx น้อยลงอย่างเพียงพอ) บทพิสูจน์หาทฤษฎีต่อไปนี้ จะหาได้ใน Advanced calculus เป็นวิธีหนึ่งที่ใช้ประมาณค่าคลาดเคลื่อน (error) เมื่อใช้กฎสี่เหลี่ยมคางหมู สัญลักษณ์ที่ใช้แทนค่าคลาดเคลื่อน (ค่าผิดพลาด) คือ ε_T

ทฤษฎี 8.4.1

ให้ f เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องบนช่วงปิด $[a, b]$ และ f' และ f'' ซึ่งหาค่าได้ (exist) บนช่วงปิด $[a, b]$

ถ้า $\varepsilon_T = \int_a^b f(x)\,dx - T$

เมื่อ T เป็นค่าประมาณของ $\int_a^b f(x)\,dx$ ซึ่งหาได้โดยกฎสี่เหลี่ยมคางหมู แล้วจะมีจำนวน η บางจำนวนบน $[a,b]$ ซึ่ง

$$\varepsilon_T = -\frac{1}{12} (b-a) f''(\eta) (\Delta x)^2 \qquad (8.4.4)$$

ตัวอย่าง 8.4.2 จงหาขอบเขตของความคลาดเคลื่อนในตัวอย่างที่ 1

วิธีทำ หาค่าต่ำสุดสัมบูรณ์ (absolute minimum)

และค่าสูงสุดสัมบูรณ์ (absolute maximum)

ของ $f'''(x)$ บน $[0, 3]$

$$f(x) = (16+x^2)^{-1}$$

$$f'(x) = -2x(16+x^2)^{-2}$$

$$f''(x) = 8x^2(16+x^2)^{-3} - 2(16+x^2)^{-2}$$

$$= (6x^2-32)(16+x^2)^{-3}$$

$$f'''(x) = -6x(6x^2-32)(16+x^2)^{-4} + 12x(16+x^2)^{-3}$$

$$= 24x(16-x^2)(16+x^2)^{-4}$$

$\because f'''(x) > 0$ สำหรับทุก ๆ x บนช่วง $(0,3)$ แล้ว

f'' เป็นฟังก์ชันเพิ่มขึ้นบนช่วง (0.3)

$\therefore$ ค่าต่ำสุดสัมบูรณ์ของ f'' บน $[0,3]$ คือ $f''(0)$

และค่าสูงสุดสัมบูรณ์ของ f'' บน $[0,3]$ คือ $f''(3)$

$f''(0) = \frac{-1}{128}$ และ $f''(3) = \frac{22}{15,625}$

ให้ $\eta = 0$ แทนในสมการ 8.4.4 จะได้

$$\frac{-3}{12}\left(-\frac{1}{128}\right)\frac{1}{4} = \frac{1}{2048}$$

ให้ $\eta = 3$ แทนในสมการ 8.4.4 จะได้

$$\frac{-3}{12}\left(\frac{22}{15,625}\right)\frac{1}{4} = \frac{-11}{45,000}$$

$$\frac{-11}{45,000} \leq \varepsilon_T \leq \frac{1}{2048}$$

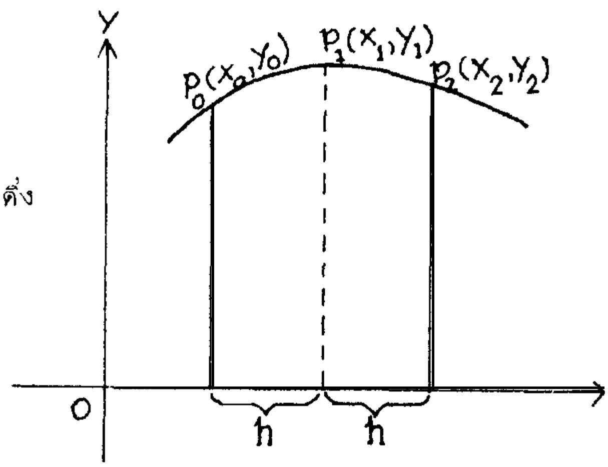
$$-0.0002 \leq \varepsilon_T \leq 0.0005$$

อีกวิธีหนึ่งของการประมาณค่าของอินทิกรัลจำกัดเขต คือ กฎซิมสัน (simpson's rule หรือ parabolic rule) ซึ่งให้ค่าประมาณได้ดีกว่าการหาค่าโดยใช้กฎสี่เหลี่ยมคางหมู ในกฎสี่เหลี่ยมคางหมู จุดต่าง ๆ บนกราฟ $y = f(x)$ เชื่อมกันด้วยส่วนของเส้นตรง ในขณะที่จุดต่าง ๆ ในกฎซิมสันเชื่อมด้วยส่วนโค้งของพาราโบลา ทฤษฎีสำคัญที่ใช้ในกฎซิมสัน มีดังนี้

ทฤษฎี 8.4.2 ถ้า $P_o(x_o, y_o)$, $P_1(x_1, y_1)$ และ $P_2(x_2, y_2)$ เป็นจุด 3 จุดที่ไม่อยู่บนเส้นตรงเดียวกันบนพาราโบลา ซึ่งมีสมการ $y = Ax^2+Bx + C$ เมื่อ $y_o \geqslant 0$, $y_1 \geqslant 0$, $y_2 \geqslant 0$, $x_1 = x_o+h$ และ $x_2 = x_o+ 2h$ แล้วพื้นที่ของขอบเขต ซึ่งล้อมรอบด้วยพาราโบลา แกน x และเส้นตรง $x = x_0$ และ $x = x_2$ กำหนดโดย

$$\frac{1}{3} h (y_o+ 4y_1+ y_2) \tag{8.4.5}$$

พิสูจน์



รูป 8.4.2

พาราโบลา ซึ่งมีสมการ

$y = Ax^2+ Bx + C$ มีแกนในแนวดิ่ง จากรูป 8.4.2. แสดงบริเวณ ซึ่งล้อมรอบด้วยพาราโบลา แกน x เส้นตรง $x = x_o$ และ $x = x_2$

$\because$ P_o, P_1 และ P_2 เป็นจุดอยู่บนพาราโบลา ดังนั้นจุด Co-ordinate ของมันจะสอดคล้องกับสมการของพาราโบลา

เมื่อเปลี่ยน x_1 เป็น x_o+h

x_2 เป็น x_o+2h จะได้

$$y_o = Ax_o^2 + Bx_o + C$$

$$\begin{aligned} y_1 &= A(x_o+h)^2 + B(x_o+h) + C \\ &= A(x_o^2+ 2hx_o+h^2) + B(x_o+h) + C \end{aligned}$$

$$y_2 = A(x_o+2h)^2 + B(x_o+2h) + C$$
$$= A(x_o^2 + 4hx_o + 4h^2) + B(x_o + 2h) + C$$
$$\therefore y_o + 4y_1 + y_2 = A(6x_o^2 + 12hx_o + 8h^2)$$
$$+ B(6x_o + 6h) + 6C \qquad (8.4.6)$$

ถ้าให้ K ตารางหน่วย เป็นพื้นที่ของบริเวณนี้ แล้วสามารถคำนวณหาค่า K โดยลิมิตของผลรวมรีมานน์ จะได้

$$K = \lim_{\Delta x \to 0} \sum_{i=1}^{n} (A\varepsilon_i^2 + B\varepsilon_i + C)\,\Delta x$$

$$= \int_{x_0}^{x_o+2h} (Ax^2 + Bx + C)\,dx$$

$$= \frac{1}{3}Ax^3 + \frac{1}{2}Bx^2 + Cx \Big|_{x_0}^{x_o+2h}$$

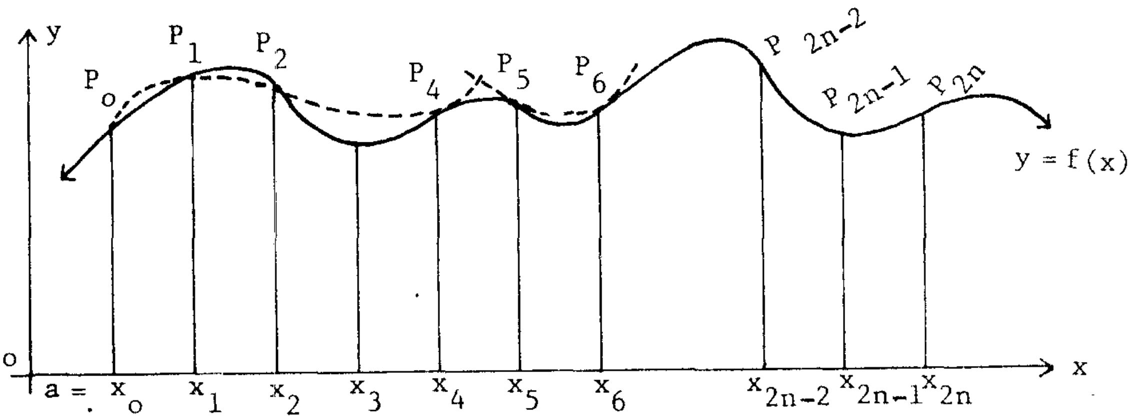
$$= \frac{1}{3}A(x_o+2h)^3 + \frac{1}{2}B(x_o+2h)^2 + C(x_o+2h)$$
$$- \left(\frac{1}{3}Ax_o^3 + \frac{1}{2}Bx_o^2 + Cx_o\right)$$

$$= \frac{1}{3}h\left[A(6x_o^2 + 12hx_o + 8h^2) + B(6x_o + 6h) + 6C\right] \qquad (8.4.7)$$

จากสมการ 8.4.6 และ 13.4.7 ได้

$$K = \frac{1}{3}h\left[y_o + 4y_1 + y_2\right]$$

ให้ f เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องบนช่วง $[a,b]$ พิจารณาการแบ่งช่วง $[a,b]$ ออกเป็น 2n ส่วน (ใช้ 2n แทน n เพราะว่าเราต้องการให้จำนวนช่วงแบ่งเป็นเลขคู่) ความยาวของแต่ละช่วง คือ $\Delta x = (b-a)/2n$ กำหนดให้จุดต่าง ๆ อยู่บนโค้ง $y = f(x)$ และจุดเหล่านี้ เป็น abscissas แทนด้วย $P_o(x_o, y_o), P_1(x_1, y_1), \ldots, P_{2n}(x_{2n}, y_{2n})$ ดังรูป 8.4.3 เมื่อ $f(x) \geq 0$ สำหรับทุก ๆ x บน $[a, b]$



รูป 8.4.3

เราประมาณส่วนของโค้ง $y = f(x)$ จาก P_o ถึง P_2 ด้วยส่วนโค้งของพาราโบลากับแกนตั้งของมัน โดยผ่าน P_o P_1 และ P_2 จากทฤษฎี 8.4.2 พื้นที่ที่ล้อมรอบด้วยพาราโบลานี้ แกน x และเส้นตรง $x = x_o$ และ $x = x_2$ กับ $h = \Delta x$ กำหนดโดย

$\frac{1}{3} \Delta x \ (y_o+4y_1+y_2)$ หรือ $\frac{1}{3} \Delta x \ [\, f(x_o) + 4\, f(x_1)+f(x_2)\,]$

ในทำนองเดียวกัน เราสามารถประมาณส่วนของโค้ง $y = f(x)$ จาก P_2 ถึง P_4 ด้วยส่วนของพาราโบลากับแกนตั้งของมันที่ผ่านจุด P_2, P_3 และ P_4 พื้นที่ที่ล้อมรอบด้วยพาราโบลานี้ แกน x และเส้น $x = x_2$ และ $x = x_4$ กำหนดโดย

$\frac{1}{3} \Delta x \ (y_2+4y_3+y_4)$ หรือ $\frac{1}{3} \Delta x \left[f(x_2)+4f(x_3)+f(x_4) \right]$

กระบวนการนี้ใช้ได้เรื่อยไป จนถึงบริเวณของรูปที่ n พื้นที่ของบริเวณสุดท้าย กำหนดโดย $\frac{1}{3} \Delta x \ (y_{2n-2} + 4y_{2n-1} + y_{2n})$

หรือ $\frac{1}{3} \Delta x \left[f(x_{2n-2}) + 4f(x_{2n-1}) + f(x_{2n}) \right]$

ผลรวมของพื้นที่ของบริเวณนี้ประมาณค่าได้ด้วยพื้นที่ ซึ่งล้อมรอบด้วยโค้งที่มีสมการเป็น $y = f(x)$ แกน x และเส้น $x = a, x = b$ พื้นที่บริเวณนี้กำหนดโดยอินทิกรัลจำกัดเขต $\int_a^b f(x)\, dx$ ซึ่งเป็นค่าประมาณของพื้นที่จำกัดเขต

$\frac{1}{3} \Delta x \ \left[f(x_o)+4f(x_1)+f(x_2)+\frac{1}{3} \Delta x \ \left[f(x_2)+4f(x_3)+f(x_4) \right] \right.$

$+\ldots+\frac{1}{3} \Delta x' [\, f(x_{2n-4})+4f(x_{2n-3})+f(x_{2n-2})\,]$

$$+\frac{1}{3}\Delta x\left[f(x_{2n-2})+4f(x_{2n-1})+f(x_{2n})\right]$$

ดังนั้น $$\int_a^b f(x)\,dx \approx \frac{1}{3}\Delta x\left[f(x_0)+4f(x_1)+2f(x_2)\right.$$

$$+4f(x_3)+2f(x_4)+\ldots+2f(x_{2n-2})$$

$$\left.+4f(x_{2n-1})+f(x_{2n})\right] \quad . \qquad (8.4.8)$$

เมื่อ $\Delta x = (b-a)/2n$

สูตร 8.4.8 นี้ เรียกว่า กฎซิมสัน (Simpson's rule)

ตัวอย่าง 8.4.3 จงใช้กฎซิมสันประมาณค่าของ $\int_0^1 \frac{dx}{x+1}$ ด้วย $2n = 4$

(ตอบทศนิยม 4 ตำแหน่ง)

วิธีทำ จากกฎซิมสัน เมื่อ $2n = 4$

จะได้ $\Delta x = \frac{1}{4}(1-0) = \frac{1}{4}$ และ

$$\int_0^1 \frac{dx}{x+1} \approx \frac{1}{12}\left[f(x_0)+4f(x_1)+2f(x_2)+4f(x_3)+f(x_4)\right] \qquad (8.4.9)$$

คำนวณหาค่าในวงเล็บทางขวาของสมการ (8.4.9) ด้วยตาราง 8.4.2

เมื่อ $f(x) = \frac{1}{x+1}$

ตาราง 8.4.2

i	x_i	$f(x_i)$	K_i	$K_i \cdot f(x_i)$
0	0	1.00000	1	1.00000
1	0.25	0.80000	4	3.20000
2	0.5	0.66667	2	1.33334
3	0.75	0.57143	4	2.28572
4	1	0.50000	1	0.50000
				$\sum_{i=0}^{4} K_i f(x_i) = 8.31906$

แทนค่าผลบวกในสมการ (8.4.9) จะได้

$$\int_0^1 \frac{dx}{x+1} \approx \frac{1}{12}(8.31906) \approx 0.69325$$

ต้องการทศนิยม ๔ ตำแหน่ง

$$\therefore \int_0^1 \frac{dx}{x+1} \approx 0.6933$$

ค่าที่แน่นอนของ $\int_0^1 \frac{dx}{x+1} = \ln\left[|x+1|\right]_0^1$

$$= \ln 2 - \ln 1$$

$$= \ln 2$$

จากตารางล็อกธรรมชาติ (natural logarithms) ค่าของ ln2 ทศนิยม 4 ตำแหน่งเท่ากับ 0.6931 ซึ่งใกล้เคียงกับค่าโดยประมาณใน 3 ตำแหน่งแรก ซึ่งคลาดเคลื่อน(error) จากค่าประมาณเพียง - 0.0002

ในการนำกฎซิมสันไปใช้ ถ้ายิ่งกำหนดค่าของ 2n มาก ค่าของ Δx จะยิ่งน้อย และในทางเรขาคณิตจะเห็นได้ชัดว่า ถ้า 2n มากจะให้ค่าประมาณที่ใกล้เคียงกับค่าที่แน่นอนมาก เพราะว่าพาราโบลาผ่านจุด 3 จุด ของโค้งซึ่งอยู่ใกล้กัน จะอยู่ใกล้โค้งบนช่วงแบ่ง ซึ่งกว้าง $2\Delta x$

บทพิสูจน์ทฤษฎีต่อไปนี้ มีใน Advanced Calculus เป็นวิธีหนึ่งที่ใช้หาค่าคลาดเคลื่อน (error) ในการใช้กฎซิมสัน สัญญลักษณ์ที่ใช้แทนความคลาดเคลื่อนของซิมสัน คือ Σ_s

ทฤษฎี 8.4.3 ให้ f เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องบนช่วงปิด $[a, b]$ และ f', f'', f''' และ $f^{(iv)}$ หาได้ (exist) บนช่วง $[a,b]$ ถ้า

$$\varepsilon_s = \int_a^b f(x)dx - S$$

เมื่อ S คือ ค่าประมาณของ $\int_a^b f(x)dx$ ซึ่งหาได้จากกฎซิมสัน แล้วจะมีบางจำนวน η ใน $[a, b]$ ซึ่ง

$$\varepsilon_s = -\frac{1}{180}(b-a)\, f^{(iv)}(\eta)\, (\Delta x)^4 \qquad (8.4.10)$$

ตัวอย่าง 8.4.4 จงหาขอบเขตของค่าคลาดเคลื่อนของตัวอย่าง 8.4.3

วิธีทำ
$$f(x) = (x+1)^{-1}$$
$$f'(x) = -1(x+1)^{-2}$$
$$f''(x) = 2(x+1)^{-3}$$
$$f'''(x) = -6(x+1)^{-4}$$
$$f^{(iv)}(x) = 24(x+1)^{-5}$$
$$f^{(v)}(x) = -120(x+1)^{-6}$$

∵ $f^{(v)}(x) < 0$ สำหรับทุก ๆ ค่าของ x บน $[0,1]$, $f^{(iv)}$ ลดลงในช่วง $[0,1]$ ดังนั้นค่าต่ำสุดสัมบูรณ์ (&solute minimum value) ของ $f^{(iv)}$ อยู่ที่จุดปลายทางขวา คือ 1 และค่าสูงสุดสัมบูรณ์ (absolute maximum value) ของ $f^{(iv)}$ บน $[0,1]$ อยู่ที่จุดปลายทางซ้ายคือ 0

$$f^{(iv)}(0) = 24 \quad \text{และ} \quad f^{(iv)}(1) = \frac{3}{4}$$

แทนค่า $\eta = 0$ ในสมการ 8.4.10 จะได้

$$-\frac{1}{180}(b-a)\, f^{(iv)}(0)\,(\Delta x)^4 = -\frac{1}{180}(24)\left(\frac{1}{4}\right)^4$$

$$= -\frac{1}{1920} = -0.00052$$

แทนค่า $\eta = 1$ ในสมการ 8.4.10 จะได้

$$-\frac{1}{180}(b-a)\, f^{(iv)}(1)\,(\Delta x)^4 = -\frac{1}{180}\cdot\frac{3}{4}\left(\frac{1}{4}\right)^4$$

$$= -\frac{1}{61,440} = -0.00002$$

เรารวมเข้าด้วยกัน จะได้ว่า

$$\varepsilon_s \quad -0.00052 \leqslant \varepsilon_s \leqslant -0.00002 \qquad (8.4.11)$$

อสมการ (8.4.11) สอดคล้องกันกับตัวอย่าง 8.4.3 เกี่ยวกับค่าคลาดเคลื่อน ในการประมาณค่าของ $\int_0^1 \frac{dx}{x+1}$ โดยกฎซิมสัน เพราะว่า $-0.00052 < -0.0002 < -0.00002$

ถ้า $f(x)$ เป็นโพลิโนเมียลดีกรี 3 หรือน้อยกว่า แล้ว $f^{(iv)}(x) \equiv 0$ และเพราะว่า $\varepsilon_S = 0$ จึงอาจกล่าวได้ว่ากฎซิมสัน จะให้ค่าที่แน่นอนสำหรับโพลิโนเมียลดีกรี 3 หรือต่ำกว่า คำกล่าวนี้เห็นได้ชัดทางเรขาคณิต ถ้า $f(x)$ เป็นดีกรี 2 หรือดีกรี 1 เพราะว่าในกรณีแรกกราฟของ $y = f(x)$ เป็นพาราโบลา และกรณีที่สองกราฟเป็นเส้นตรง ซึ่งทำให้เกิดพาราโบลาเช่นกัน

ตัวอย่าง 8.4.5 จงใช้กฎซิมสัน หาค่าประมาณของ $\int_0^2 e^{-x^2}dx$ ด้วย $2n = 4$ และตอบทศนิยม 3 ตำแหน่ง

($\int_0^2 e^{-x^2} dx$) นี้ใช้มากทางสถิติ เรียกว่า probability integral ไม่สามารถหาค่าที่แน่นอนได้ ในรูปของฟังก์ชันพื้นฐาน)

วิธีทำ โดยใช้กฎซิมสัน ด้วย

$$f(X) = e^{-x^2} \qquad [a, b] = [0, 2]$$

$$2n = 4 \quad \text{และ} \quad \Delta x = \frac{1}{4}(2-0) = \frac{1}{2}$$

$$\int_0^2 e^{-x^2}\,dx \approx \frac{1}{6}\left[f(0)+4f\left(\frac{1}{2}\right)+2f(1)+4f\left(\frac{3}{2}\right)+f(2)\right]$$

$$= \frac{1}{6}\left[e^0+4e^{-\frac{1}{4}} + 2e^{-1}+4e^{-\frac{9}{4}}+e^{-4}\right]$$

$$\approx \frac{1}{6}\left[1.0000 + 4(0.7788)+2(0.3679) + 4(0.1054)+0.0183\right]$$

$$= \frac{1}{6}(5.2909)$$

$$\approx 0.882$$

แบบฝึกหัด 8.5

ข้อ 1 ถึง 10 จงคำนวณหาค่าประมาณของอินทิกรัลจำกัดเขตที่กำหนดให้ โดยใช้กฎสี่เหลี่ยมคางหมู ด้วยค่า n ที่กำหนดให้ตอบทศนิยมสามตำแหน่ง

ข้อ 1 ถึง 4 จงหาค่าที่ถูกต้องของอินทิกรัลจำกัดเขต และเปรียบเทียบค่าประมาณที่หาได้

1. $\int_1^2 \frac{dx}{x}$, $n = 5$
2. $\int_2^{10} \frac{dx}{1+x}$, $n = 8$
3. $\int_0^2 x^3 ax$, $n = 4$
4. $\int_0^2 x\sqrt{4-x^2}\,dx$, $n = 8$
5. $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1+x^2}}$ $n = 5$
6. $\int_2^3 \sqrt{1+x^2}\,dx$, $n = 6$
7. $\int_0^1 e^{x^2}\,dx$, $n = 5$
8. $\int_2^3 \ln(1+x^2)\,dx$, $n = 4$
9. $\int_0^2 \sqrt{1+x^4}\,dx$, $n = 6$
10. $\int_0^1 \sqrt{1+x^2}\,dx$, $n = 4$

ข้อ 11 - 16 จงหาขอบเขตของความคลาดเคลื่อนของค่าประมาณในข้อที่กำหนดให้

11.	ข้อ 1	12.	ข้อ 2	13.	ข้อ 3
14.	ข้อ 6	15.	ข้อ 7	16.	ข้อ 8

ข้อ 17 - 22 จงหาค่าประมาณของอินทิกรัลจำกัดเขตโดยกฎซิมสัน ให้ใช้ค่าของ $2n$ ตามที่กำหนดให้ ต้องการทศนิยม 3 ตำแหน่ง

ข้อ 17, 18 จงหาค่าของอินทิกรัลจำกัดเขตที่แน่นอน และจงเปรียบเทียบกับค่าประมาณที่หาได้

17. $\int_0^2 x^2\,dx$, $2n = 4$
18. $\int_1^2 \frac{dx}{x+1}$, $2n = 8$
19. $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1+x^2}}$, $2n = 4$
20. $\int_{-\frac{1}{2}}^{0} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$, $2n = 4$

21. $\int_0^1 \frac{dx}{x^2+x+1}$, $2n = 4$ 22. $\int_0^1 \frac{dx}{1+x^2}$, $2n = 8$

ข้อ 23, 24 จงหาขอบเขตของความคลาดเคลื่อนในข้อที่กำหนดให้

23. ข้อ 17 24. ข้อ 18

อินทิกรัลจำกัดเขต ในข้อ 25 - 28 ไม่สามารถหาค่าที่แน่นอนในเทอมของฟังก์ชันพื้นฐานได้ จงใช้กฎซิมสัน ด้วยค่า 2n ที่โจทย์กำหนดให้ ต้องการทศนิยม 3 ตำแหน่ง

25. $\int_1^{18} \sqrt{1+x^3}\, dx$, $2n = 4$ 26. $\int_0^2 \sqrt{1+x^4}\, dx$, $2n = 6$

27. $\int_0^2 \frac{dx}{\sqrt{1+x^3}}$, $2n = 8$ 28. $\int_0^1 \sqrt[3]{1-x^2}\, dx$, $2n = 4$

29. จงใช้กฎซิมสัน ด้วย $n = 6$ เพื่อหาค่าประมาณของอินทิกรัลในข้อ 5 ตอบทศนิยม 3 ตำแหน่ง

30. สมการอุปสงค์ (demand equation) สำหรับโภคภัณฑ์อย่างหนึ่ง เป็น $p = 2\sqrt{100-x^2}$ และราคาตลาดเป็น 12 บาท จงเขียนขอบเขตเพื่อพิจารณาส่วนเกินของผู้บริโภค (consumers' surplus) คำนวณค่าอินทิกรัลจำกัดเขต โดยใช้กฎซิมสัน ด้วย $2n = 4$ ตอบทศนิยม 2 ตำแหน่ง

31. จงหาส่วนเกินของผู้ผลิต (producer's surplus) สำหรับโภคภัณฑ์อย่างหนึ่ง ซึ่งมีสมการอุปทาน เป็น $p = \sqrt{x^4+68}$ และราคาตลาดเป็น 18 บาท จงเขียนขอบเขตซึ่งเป็นเนื้อที่พิจารณาส่วนเกินของผู้ผลิต (producers's surplus) หาค่าอินทิกรัลจำกัดเขต โดยกฎซิมสัน ด้วย $2n = 4$ตอบทศนิยม 2 ตำแหน่ง

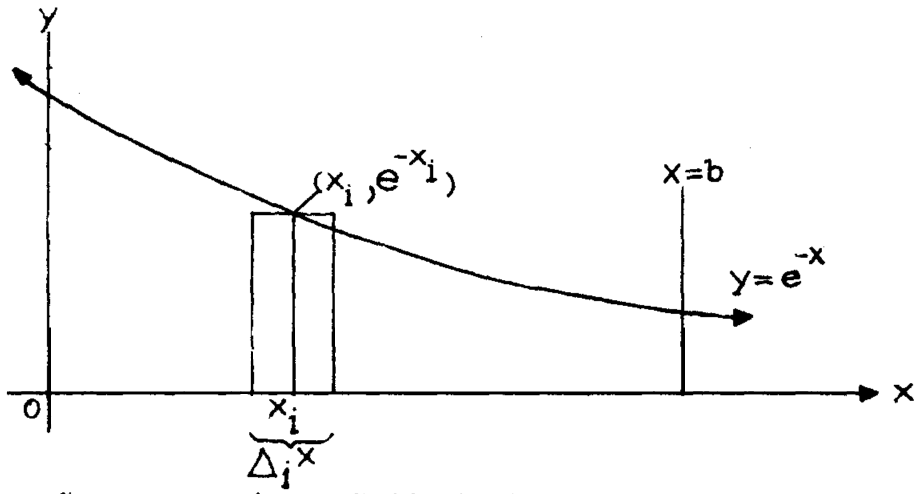
8.5 อิมพรอเปอร์อินทิกรัล (Improper Integrals)

ในการให้ความหมายของอินทิกรัลจำกัดเขต (definite integral) $\int_a^b f(x)\,dx$ เราสมมุติว่า ฟังก์ชัน f อยู่ในช่วงปิด $[a, b]$

ถ้า อินทิกรัลจำกัดเขต (definite integral) อยู่ในช่วงที่ไม่สิ้นสุด (Infinite interval) หรือ ค่าอินทิเกรต (integrand) มีการไม่ต่อเนื่องที่ไม่สิ้นสุด (infinite discontinuity) ในช่วงปิดที่จำกัด

ในแต่ละกรณี เราเรียกอินทิกรัล (integral) เช่นนี้ว่าเป็น อิมพรอเปอร์อินทิกรัล (improper integral)

ตัวอย่าง 8.5.1 จงหาพื้นที่ของพื้นที่ที่ถูกห้อมล้อมโดยเส้นโค้ง $y = e^{-x}$ แกน x , แกน y และเส้นตรง x = b ในเมื่อ b > 0



ให้ A ตารางหน่วยเป็นพื้นที่ที่ถูกห้อมล้อม เราจะได้

$$A = \lim_{|\Delta_i| \to 0} \sum_{i=1}^{n} e^{-x_i} \Delta_i x$$

$$= \int_0^b e^{-x}\,dx$$

$$= -e^{-x} \Big|_0^b$$

$$= 1-e^{-b}$$

ถ้า เราให้ b มีค่า เพิ่มขึ้นโดยปราศจากขอบ เขต แล้ว

$$\lim_{b \to +\infty} \int_0^b e^{-x}dx = \lim_{b \to +\alpha} (1-e^{-b})$$

$$\lim_{b \to +\infty} \int_0^b e^{-x}dx = 1$$

หรือ $$\int_0^{+\alpha} e^{-x}dx = 1$$

นิยาม 8.5.1 ถ้า f ต่อเนื่องในทุก ๆ ค่าของ $x \geqslant a$ แล้ว

$$\int_a^{+\infty} f(x)dx = \lim_{b \to +\infty} \int_a^b f(x)dx$$

ถ้าลิมิตนี้หาค่าได้ (exists)

นิยาม 8.5.2 ถ้า f ต่อเนื่องในทุก ๆ ค่าของ $x \leqslant b$ แล้ว

$$\int_{-a}^b f(x)dx = \lim_{a \to -\alpha} \int_a^b f(x)dx$$

ถ้าลิมิตนี้หาค่าได้ (exists)

นิยาม 8.5.3 ถ้า f ต่อเนื่องในทุก ๆ ค่าของ x แล้ว

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = \lim_{a \to -\infty} \int_a^0 f(x)dx + \lim_{b \to +\infty} \int_0^b f(x)dx$$

ถ้าลิมิตทั้งสองนี้หาค่าได้ (exists)

ใน**นิยาม** 8.5.1 , **นิยาม** 8.5.2 และ **นิยาม** 8.5.3 ถ้าลิมิตหาค่าได้ (exist) เรากล่าวว่า อิมพรอเปอร์อินทิกรัล (improper integral) นั้นเป็นลู่เข้า (convergent) แต่ถ้าลิมิตหาค่าไม่ได้ (not exist) เรากล่าวว่า อิมพรอเปอร์อินทิกรัล (Improper integral) นั้นเป็นลู่ออก (divergent)

ตัวอย่าง 8.5.2 จงหาค่า $\int_{-\infty}^{2} \frac{dx}{(4-x)^2}$ ถ้ามันลู่เข้า (converges)

วิธีทำ ตามนิยาม 8.5.2

$$\int_{-\infty}^{2} \frac{dx}{(4-x)^2} = \lim_{a + -\infty} \int_{a}^{2} \frac{dx}{(4-x)^2}$$

$$= \lim_{a - b -\infty} \left[\frac{1}{4 - x} \right]_a^2$$

$$= \lim_{a \to -\infty} \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{4-a} \right)$$

$$= \frac{1}{2} - 0 = \frac{1}{2}$$

ตัวอย่าง 8.5.3 จงหาค่า (a) $\int_{-\infty}^{+\infty} xdx$

(b) $\lim_{r \to +\infty} \int_{-r}^{r} xdx$

วิธีทำ (a) ตามนิยาม 8.5.3

$$\int_{-\infty}^{+\infty} xdx = \lim_{a-3 -\infty} \int_{a}^{0} xdx + \lim_{b \to +\infty} \int_{0}^{b} xdx$$

$$= \lim_{a \to -\infty} \left[\frac{x^2}{2} \right]_a^0 + \lim_{b \to +\infty} \left[\frac{x^2}{2} \right]_0^b$$

$$= \lim_{a \to -\infty} \left(- \frac{a^2}{2} \right) + \lim_{b \to +\infty} \left(\frac{b^2}{2} \right)$$

เพราะว่าลิมิตทั้งสองหาค่าไม่ได้ (not exist)

เพราะฉะนั้น อิมพรอเปอร์อินทิกรัล (improper integral) นี้เป็นคู่ออก (diverges)

(b) $$\lim_{r \to +\infty} \int_{-r}^{r} x\,dx = \lim_{r \to +\infty} \left[\frac{x^2}{2} \right]_{-r}^{r}$$

$$= \lim_{r \to +\infty} \left(\frac{r^2}{2} - \frac{r^2}{2} \right)$$

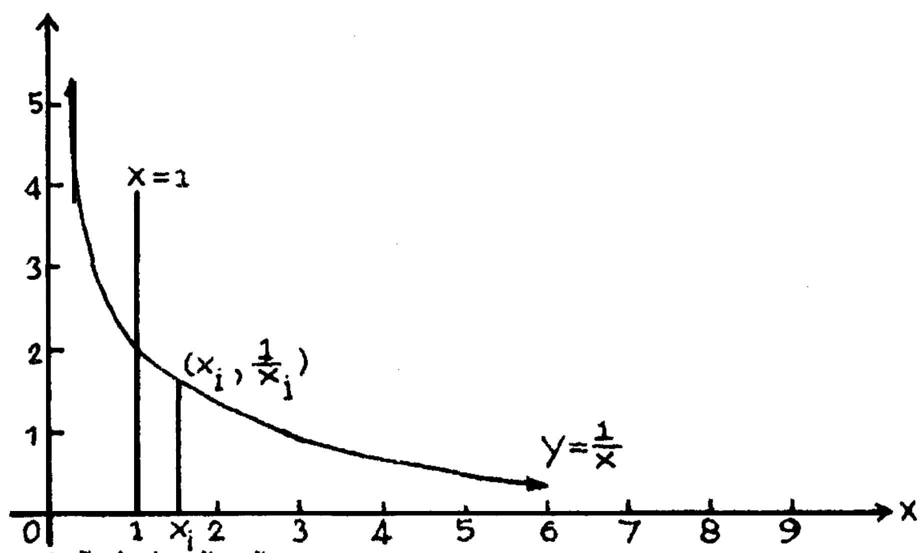
$$= \lim_{r \to +\infty} 0$$

$$= 0$$

ตัวอย่าง 8.5.4 จงหาค่าของพื้นที่ ที่ถูกห้อมล้อมโดยกราฟของสมการ

$y = \frac{1}{x}$, $y = 0$ และ $x = 1$ ว่าจะหาค่าได้หรือไม่

วิธีทำ



ให้ A เป็นพื้นที่ ที่ถูกห้อมล้อมโดยกราฟของสมการ

$Y = \frac{1}{x}$, $y = 0$, $x = 1$ และ $x = b$ เมื่อ $b > 1$

แล้ว

$$A = \lim_{|\Delta_i| \to 0} \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{x_i} \Delta_i x = \int_1^b \frac{dx}{x}$$

ให้ $L = \lim\limits_{b \to +\infty} A$ ถ้าลิมิตนี้หาค่าได้

แต่
$$\lim_{b \to +\infty} A = \lim_{b \to +\infty} \int_1^b \frac{dx}{x}$$
$$= \lim_{b \to +\infty} (\ln b - \ln 1)$$
$$= +\infty$$

เพราะฉนั้น เราไม่สามารถหาค่าของพื้นที่นี้ได้

นิยาม 8.5.4 ถ้า f ต่อเนื่องที่ทุก ๆ ค่าของ x ในช่วงครึ่งเปิด $(a, b]$ และถ้า $\lim\limits_{x \to a^+} f(x) = +\infty$ แล้ว

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\varepsilon \to 0^+} \int_{a+\varepsilon}^b f(x)dx$$

ถ้าลิมิตนี้หาค่าได้ (exists)

นิยาม 8.5.5 ถ้า f ต่อเนื่องที่ทุก ๆ ค่าของ x ในช่วงครึ่ง เปิด $[a, b)$ และถ้า $\lim\limits_{x \to b^-} f(x) = \pm \infty$ แล้ว

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\varepsilon \to 0^+} \int_a^{b-\varepsilon} f(x)dx$$

ถ้าลิมิตนี้หาค่าได้ (exists)

นิยาม 8.5.6 ถ้า f ต่อเนื่องที่ทุก ๆ ค่าของ x ในช่วง $[a, b]$ ยกเว้น c ในเมื่อ $a < c < b$ และถ้า

$$\lim_{x \to c} |f(x)| = +\infty \text{ แล้ว}$$

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\varepsilon \to 0^+} \int_a^{c-\varepsilon} f(x)dx + \lim_{\delta \to 0^+} \int_{c+\delta}^b f(x)dx$$

ถ้าลิมิตทั้งสองนี้หาค่าได้(exists)

ใน **นิยาม** 8.5.4 , **นิยาม** 8.5.5 และ**นิยาม** 8.5.6 ถ้า $\int_a^b f(x)\,dx$ เป็นอิมพรอเปอร์อินทิกรัล (improper integral) มันจะเป็นลู่เข้า (convergent) ถ้าลิมิตหาค่าได้ แต่ถ้าลิมิตหาค่าไม่ได้ มันจะเป็นลู่ออก (divergent)

ตัวอย่าง 8.5.5 จงหาค่า $\int_0^2 \frac{dx}{(x-1)^2}$ ถ้ามัน เป็นลู่เข้า (converges)

วิธีทำ ตามนิยาม 8.5.6 ค่าอินทิกรัล (integrand) นี้ไม่ต่อเนื่องที่ 1)

$$\int_0^2 \frac{dx}{(x-1)^2} = \lim_{\varepsilon \to 0^+} \int_0^{1-\varepsilon} \frac{dx}{(x-1)^2} + \lim_{\delta \to 0^+} \int_{1+\delta}^{2} \frac{dx}{(x-1)^2}$$

$$= \lim_{\varepsilon \to 0^+} \left[-\frac{1}{x-1} \right]_0^{1-\varepsilon} + \lim_{\delta \to 0^+} \left[-\frac{1}{x-1} \right]_{1+\delta}^{2}$$

$$= \lim_{\varepsilon \to 0^+} \left(\frac{1}{\varepsilon} - 1 \right) + \lim_{\delta \to 0^+} \left(-1 + \frac{1}{\delta} \right)$$

เพราะว่าลิมิตทั้งสองหาค่าไม่ได้ (not exist)

เพราะฉนั้นอิมพรอเปอร์อินทิกรัล (improper integral) นี้เป็นลู่ออก (divergent)

ตัวอย่าง 8.5.6 จงหาค่า $\int_0^{+\infty} \frac{e^{-\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}\,dx$ ถ้ามัน converges

วิธีทำ

$$\int_0^{+\infty} \frac{e^{-\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}\,dx = \lim_{\varepsilon \to 0^+} \int_{\varepsilon}^{1} \frac{e^{-\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}\,dx + \lim_{b \to +\infty} \int_1^{b} \frac{e^{-\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}\,dx$$

ให้ $u = -\sqrt{x}$ แล้ว $du = -dx/2\sqrt{x}$ เราจะได้

$$\int \frac{e^{-\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}\,dx = -2\int (e^{-\sqrt{x}}) \left(\frac{-dx}{2\sqrt{x}} \right) = -2\int e^{u}du$$

$$= -2e^{u} + C = -2e^{-\sqrt{x}} + C$$

$$\therefore \int_0^{+\infty} \frac{e^{-\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}\,dx = \lim_{\varepsilon \to 0^+} \Big[-2e^{-\sqrt{x}}\Big]_{\varepsilon}^{1} + \lim_{b \to +\alpha} \Big[-2e^{-\sqrt{x}}\Big]_{1}^{b}$$

$$= \lim_{\varepsilon \to 0^+} (-2e^{-1} + 2e^{-\sqrt{\varepsilon}}) +$$

$$\lim_{b \to +\alpha} (-2e^{-\sqrt{b}} + 2e^{-1})$$

$$= -2e^{-1} + 2 - 0 + 2e^{-1}$$

$$= 2$$

แบบฝึกหัด

จงหาค่าของอิมพรอเปอร์อินทิกรัล (improper integral) ต่อไปนี้ ถ้ามันเป็นลู่เข้า (convergent)

1. $\int_{-\infty}^{1} e^{x}dx$

2. $\int_{5}^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt{x-1}}$

3. $\int_{1}^{+\infty} \ln x \, dx$

4. $\int_{0}^{1} \ln x \, dx$

5. $\int_{0}^{1} \frac{dx}{\sqrt{1-x}}$

6. $\int_{-2}^{0} \frac{dx}{2x+3}$

7. $\int_{1}^{+\infty} 2^{-x}dx$

8. $\int_{-\infty}^{0} x5^{-x^2}dx$

9. $\int_{0}^{2} \frac{dx}{(x-1)^{2/3}}$

10. $\int_{1}^{+\infty} \frac{dx}{x\ln x}$

11. $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-|x|}dx$

12. $\int_{0}^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt{e^{x}}}$

13. $\int_{e}^{+\infty} \frac{dx}{x(\ln x)^2}$

14. $\int_{-\infty}^{+\infty} xe^{-x^2}dx$

15. $\int_{1}^{2} \frac{x\,dx}{\sqrt{x^2-1}}$

16. $\int_{0}^{1} \frac{\ln x}{x} dx$

17. $\int_{-1}^{1} \frac{dx}{x^2}$

18. $\int_{0}^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt{x}\, e^{\sqrt{x}}}$

19. $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{x^2-a^2}$

20. $\int_0^2 \frac{xdx}{1-x}$

21. $\int_0^4 \frac{dx}{x^2-2x-3}$

22. $\int_0^6 \frac{dx}{x^2-6x+8}$

23. $\int_0^{\infty} \frac{dx}{x^2+1}$

24. $\int_0^{\infty} e^{-x}\cos xdx$

25. $\int_0^4 \frac{dx}{\sqrt{4-x}}$

26. $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$

27. $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x}}$

28. $\int_{-1}^1 \frac{dx}{x^{2/3}}$

29. $\int_1^{\infty} \frac{dx}{x^{1.001}}$

30. $\int_0^1 \frac{dx}{x^{0.999}}$