# บทที่ 7

## 7.1 ฟังก์ชันลอการิธึมธรรมชาติ (The Natural Logarithmic Function)

ในการที่จะศึกษาเรื่องของ Logarithmic Function นั้นต้องมีความรู้พื้นฐานเกี่ยวกับเรื่องเลขดรรชนีด้วย เพราะว่าในการพิสูจน์กฎของ logarithmic function บางข้อจะต้องอาศัย คุณสมบัติของเลขดรรชนี ซึ่งได้ศึกษามาแล้วในชั้นมัธยมศึกษา ดังนั้นในที่นี้ขอนำคุณสมบัติต่าง ๆ มารวบรวมไว้ดังนี้คือ

1) ถ้าให้ a เป็นเลขจำนวนจริง

x และ y เป็นเลขจำนวนเต็มบวก แล้ว

$$a^x . a^y = a^{x+y}$$

2) $a^o = 1$

3) ถ้า n เป็นเลขจำนวนเต็มบวก แล้ว $-n$ จะเป็นเลขจำนวนเต็มลบ

และ $a^{-n} = \frac{1}{a^n}$

4) ถ้าให้ $\frac{m}{n}$ เป็นเลขจำนวนตักยะ และ $a > 0$ แล้ว

$$a^{m/n} = (\sqrt[n]{a})^m$$

5) ถ้า a เป็นเลขจำนวนจริง x และ y เป็นเลขจำนวนเต็มบวก แล้ว

$$\frac{a^x}{a^y} = a^{x-y}$$

นิยามของ logarithmic function เกี่ยวข้องกับเลขดรรชนี กล่าวคือ

ถ้า a เป็นเลขจำนวนจริงบวกใด ๆ และ x เป็นเลขจำนวนจริงใด ๆ แล้ว

$a^x$ จะต้องมีค่าที่เป็นไปได้ สมมติให้ค่าที่เป็นไปได้นั้น คือ N

ดังนั้นถ้า $a^x = N$ แล้ว

$$x = \log_a N \qquad (7.1.1)$$

a เรียกว่าฐานของ log ซึ่งโดยทั่ว ๆ ไปนิยมใช้ฐาน $a = 10$

การพิสูจน์กฎต่าง ๆ ของ logarithmic function ใช้คุณสมบัติของเลขดรรชนี ดังนี้ คือ

**กฎข้อที่ 1.** $\log_a MN = \log_a M + \log_a N$

**พิสูจน์** ให้ $a^x = M$ (7.1.2)

$\therefore \quad x = \log_a M$ (จากนิยาม) (7.1.3)

ให้ $a^y = N$ (7.1.4)

$\therefore \quad y = \log_a N$ (จากนิยาม) (7.1.5)

บวก (7.13) กับ (7.1.5) ได้ $x + y = \log_a M + \log_a N$ (7.1.6)

คูณ (7.1.2) กับ (7.1.4) ได้ $a^x . a^y = MN$

หรือ $a^{x+y} = MN$ (จากคุณสมบัติของเลขดรรชนี ข้อ 1)

นั่นคือ $x + y = \log_a MN$ (จากนิยาม) (7.1.7)

ดังนั้น $\log_a MN = \log_a M + \log_a N$

**กฎข้อที่ 2.** $\log_a \frac{M}{N} = \log_a M - \log_a N$

**พิสูจน์** ให้ $a^x = M$ (7.1 8)

$\therefore \quad x = \log_a M$ (จากนิยาม) (7.1.9)

ให้ $a^y = N$ (7.1.10)

$\therefore \quad y = \log_a N$ (7.1.11)

หาร (7.1.8) ด้วย (7.1.10) ได้

$$\frac{a^x}{a^y} = \frac{M}{N} \quad (7.1.12)$$

หรือ $a^{x-y} = \frac{M}{N}$ (จากคุณสมบัติของเลขดรรชนีข้อ 5)

$$x - y = \log_a \frac{M}{N} \quad \text{(จากนิยาม)} \quad (7.1.13)$$

แทนค่า x และ y จาก (7.1.9) และ (7.1.11)

$$\therefore \log_a M - \log_a N = \log_a \frac{M}{N}$$

**กฎข้อที่ 3.** $\log_a 1 = 0$

จาก a เป็นเลขจำนวนบวกใด ๆ จะได้ว่า

$a^0 = 1$ (จากคุณสมบัติของเลขดรรชนี ข้อ 2)

$0 = \log_a 1$ (จากนิยาม)

**กฎข้อที่ 4.** $\log_a M^n = n \log_a M$

**พิสูจน์** ให้ $a^x = M$

$\therefore x = \log_a M$ (จากนิยาม)

$a^x \cdot a^x = a^{2x} = M^2$ (จากคุณสมบัติของเลขดรรชนี ข้อ 1)

$\vdots$

$\underbrace{a^x \cdot a^x \,\_\_\_\_\_\_\_\_\, a^x}_{n \text{ ครั้ง}} = M^n$

$\therefore a^{nx} = M^n$ (จากคุณสมบัติของเลขดรรชนี ข้อ 1)

$nx = \log_a M^n$ (จากนิยาม)

แทนค่า x จะได้

$n \log_a M = \log M^n$

**กฎข้อที่ 5.** $\log_a a = 1$

**พิสูจน์** จาก $a^1 = a$

$\therefore 1 = \log_a a$

นอกจากนิยามของ logarithmic function ในรูปแบบซึ่งสัมพันธ์กับเลขดรรชนีแล้วก็มีนิยามของ logarithmic function ที่เกี่ยวกับเรื่องแคลคูลัส ซึ่งจะพิจารณาจากสูตรของการอินทิเกรต ต่อไปนี้คือ

$$\int t^n \, dt = \frac{t^{n+1}}{n+1} + C$$

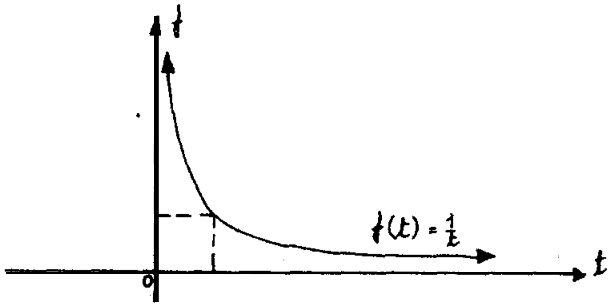
เมื่อ $n \neq -1$ และ C เป็นค่าคงที่

ถ้ากำหนดให้ f (t) เป็นฟังก์ชันซึ่งนิยามโดย

$f(t) = t^{-1}$ เมื่อ t เป็นเลขจำนวนจริงบวกในที่นี้ต้องการให้ t เป็นเลขจำนวนจริงบวกดังนั้น ถ้าวาดรูปกราฟของ f (t) จะกำหนดค่าของ t ตั้งแต่จุด o ไปทางขวามือ

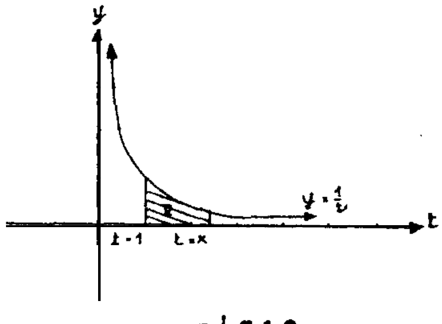
| $t =$ | $\frac{1}{3}$ | $\frac{1}{2}$ | 1 | $\frac{3}{2}$ | 2 | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $f(t) =$ | 3 | 2 | 1 | $\frac{2}{3}$ | $\frac{1}{2}$ | |

จากที่กำหนดค่าของ t จะได้ค่าของ f (t) ซึ่งสมนัยกัน และนำค่าที่สมนัยกันนี้มาเขียนกราฟของ f (t) จะได้ลักษณะของกราฟดังรูป 7.1.1




รูป 7.1.1

ถ้าให้ R เป็นส่วน ซึ่งขอบเขตบนกำหนดโดยเส้น $y = \frac{1}{t}$ ส่วนขอบเขตล่างกำหนดโดยแกน t ส่วนทางซ้ายมือกำหนดโดยเส้น $t = 1$, ทางขวากำหนดโดยเส้น $t = x$ เมื่อ $x > 1$ ดังนั้นส่วนของ R จะมีขอบเขตดังในรูป 7.1.2

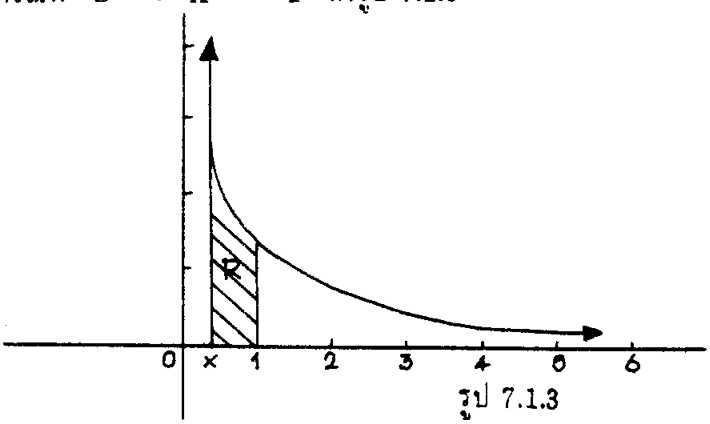



รูป 7.1.2

พื้นที่ของ R ในที่นี้จะอยู่ในรูปฟังก์ชันของ x ซึ่งถ้าให้เป็น A (x) จะได้ว่า

$$A(x) = \int_1^x \frac{1}{t}\,dt$$

ในกรณีที่ $0 < x < 1$ ดังรูป 7.1.3




รูป 7.1.3

จากคุณสมบัติของการอินทิเกรตที่ว่า

$$\int_1^x \frac{1}{t}\,dt = -\int_x^1 \frac{1}{t}\,dt$$

ซึ่งค่าของ $\int_x^1 \frac{1}{t}\,dt$ ก็คือพื้นที่ของ R ในรูป 7.1.3 นั่นเอง ดังนั้น $\int_1^x \frac{1}{t}\,dt$ ก็คือค่าลบของพื้นที่ของ R ในรูป 7.1.3

ในกรณีที่ $x = 1$ จะสังเกตเห็นได้ว่าไม่มีส่วนของ R เกิดขึ้น
ดังนั้นพื้นที่ของ R เมื่อ $x = 1$ คือ $A(x) = 0$

จึงสามารถจะสรุปได้ว่า ค่าของอินทิกรัล $\int_1^x \left(\frac{1}{t}\right) dt$ สำหรับ $x > 0$ ก็คือพื้นที่ของบริเวณใดบริเวณหนึ่ง

ต่อไปจะให้นิยามของ natural logarithmic function โดยอาศัยเรื่องของแคลคูลัสมาเกี่ยวข้อง

**นิยาม 7.1.1** natural logarithmic function คือฟังก์ชัน ln x ซึ่งกำหนดโดย

$$\ln x = \int_1^x \frac{1}{t}\,dt \quad , \quad x > 0$$

สำหรับโดเมน (Domain) ของ natural logarithmic function คือเซ็ตของเลขจำนวนจริงบวก

$\ln x$ อ่านว่า natural logarithm ของ $x$

สำหรับ natural logarithmic function นี้จะเป็นฟังก์ชันซึ่งสามารถจะหาค่าอนุพันธ์ได้ และจะได้ว่า

$$\frac{d(\ln x)}{dx} = \frac{d}{dx}\left(\int_1^x \frac{1}{t}\,dt\right) = \frac{1}{x}$$

จะเห็นได้ว่าค่าอนุพันธ์ของ $\ln x$ มีค่าเท่ากับ $\frac{1}{x}$ ซึ่งในที่นี้เรากำหนดให้ $x > 0$ ดังนั้นค่าของ

$$\frac{d}{dx}(\ln x) = \frac{1}{x} \qquad (7.1.4)$$

นี้จะเป็นไปได้ทุก ๆ ค่าของ $x$

จากสูตรอนุพันธ์ของ $\ln x$ และจากกฎลูกโซ่ (Chain rule)

ถ้า $u$ เป็นฟังก์ชันซึ่งสามารถจะหาค่าอนุพันธ์ เมื่อเทียบกับ $x$ ได้ และ $u(x) > 0$ แล้ว

$$\frac{d}{dx}(\ln u) = \frac{1}{u}\frac{du}{dx} \qquad (7.1.15)$$

**ตัวอย่างที่ 7.1.1** กำหนดให้ $y = \ln(8x^2 - 2x + 6)$

จงหาค่าของ $\frac{dy}{dx}$

**วิธีทำ** ให้ $u(x)$ เป็นฟังก์ชันของ $x$ ซึ่ง

$$u(x) = 8x^2 - 2x + 6$$

$\therefore \frac{du}{dx} = 16x - 2$ ซึ่งค่านี้เป็นไปได้สำหรับทุก ๆ ค่าของ $x$ เมื่อ $x$ เป็นเลขจำนวนจริง

$\therefore$ $u(x)$ เป็น ฟังก์ชันซึ่งสามารถจะหาค่าอนุพันธ์เมื่อเทียบกับ $x$ ได้

จากโจทย์กำหนดให้

$$y = \ln(8x^2 - 2x + 6)$$

$$y = \ln(u)$$

$$\therefore \quad \frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}\ln(u) = \frac{1}{u}\frac{du}{dx} \qquad \text{(จากสูตร 7.1.14)}$$

$$= \frac{1}{8x^2 - 2x + 6}(16x - 2) \quad \left(\text{แทนค่า } u \text{ และ } \frac{du}{dx}\right)$$

$$= \frac{2(8x-1)}{8x^2 - 2x + 6}$$

**ตัวอย่างที่ 7.1.2** กำหนดให้ $y = \ln\left[(7x^2+5)(3x-4)\right]$

จงหาค่าของ $\frac{dy}{dx}$

**วิธีทำ** กำหนดให้ $u(x) = (7x^2 + 5)(3x - 4)$

$$\frac{du}{dx} = (7x^2 + 5)\frac{d(3x-4)}{dx} + (3x-4)\frac{d(7x^2+5)}{dx}$$

$$= (7x^2 + 5)(3) + (3x-4)(14x)$$ ซึ่งมีค่าที่เป็นไปได้

สำหรับทุก ๆ ค่าของ X อยู่ใน R

$$= 63x^2 - 56x + 15$$

ดังนั้น $u(x)$ เป็น ฟังก์ชันซึ่งสามารถจะหาค่าอนุพันธ์เมื่อเทียบกับ $x$ ได้

จากโจทย์ $y = \ln\left[(7x^2+5)(3x-4)\right]$

$\therefore \quad y = \ln(u)$ (แทนค่า $u$)

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}\ln(u) = \frac{1}{u}\frac{du}{dx} \qquad \text{(จากสูตร 7.1.15)}$$

$$= \frac{1}{(7x^2+5)(3x-4)}(63x^2 - 56x + 15) \quad \left(\text{แทนค่า } u \text{ และ } \frac{du}{dx}\right)$$

$$= \frac{63x^2 - 56x + 15}{(7x^2+5)(3x-4)}$$

**ตัวอย่างที่ 7.1.3** กำหนดให้ $y = \ln\left(\frac{x}{x^3+1}\right)$ เมื่อ $x \pm -1$

จงหาค่าของ $\frac{dy}{dx}$

**วิธีทำ** ให้ $u(x) = \frac{x}{x^3+1}$

$$\therefore \quad \frac{du}{dx} = \frac{(x^3+1)\frac{d(x)}{dx} - x\frac{d}{dx}(x^3+1)}{(x^3+1)^2}$$

$$= \frac{(x^3+1) - x\,(3x^2)}{(x^3+1)^2}, \quad x \neq -1$$

$$= \frac{(x^3+1) - 3x^3}{(x^3+1)^2} = \frac{-2x^3+1}{(x^3+1)^2}, \quad x \neq -1$$

$\therefore$ u (x) เป็นฟังก์ชันซึ่งหาค่าอนุพันธ์เมื่อเทียบกับ x ได้

จากโจทย์

$$y = \ln\left(\frac{x}{x^3+1}\right) \quad \text{เมื่อ } x \neq -1$$

$$y = \ln(u) \quad (\text{แทนค่า } u)$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{u}\frac{du}{dx} \quad (\text{จากสูตร } 7.1.15)$$

$$= \frac{1}{\frac{x}{x^3+1}} \; \frac{(-2x^3+1)}{(x^3+1)^2}$$

$$= \frac{x^3+1}{x} \; \frac{(-2x^3+1)}{(x^3+1)^2} = \frac{(-2x^3+1)}{x\,(x^3+1)}, \quad \text{เมื่อ } x \neq -1$$

**ทฤษฎี 7.1.1** ถ้า a และ b เป็นเลขจำนวนจริงใด ๆ ซึ่ง $a > 0$, $b > 0$ แล้ว

$$\int_a^{ab} \frac{1}{t}\,dt = \int_1^{b} \frac{1}{t}\,dt$$

**พิสูจน์** ในที่นี้ a และ b เป็นตัวคงที่ ส่วน t เป็นตัวแปรค่า

ให้ $t = au$ เมื่อ u เป็นตัวแปรค่า

$$\therefore u = \frac{t}{a}$$

$$dt = a\,du$$

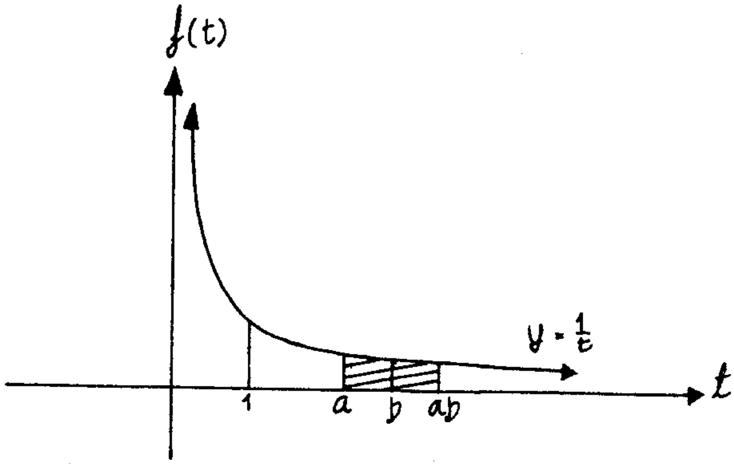
เมื่อ $t = a$, $u = 1$ และเมื่อ $t = ab$, $u = \frac{ab}{a} = b$

$$\therefore \int_a^{ab} \frac{1}{t}\,dt = \int_1^{b} \frac{1}{au}\,(a\,du) \quad (\text{แทนค่า } t \text{ ในเทอมของ } u)$$

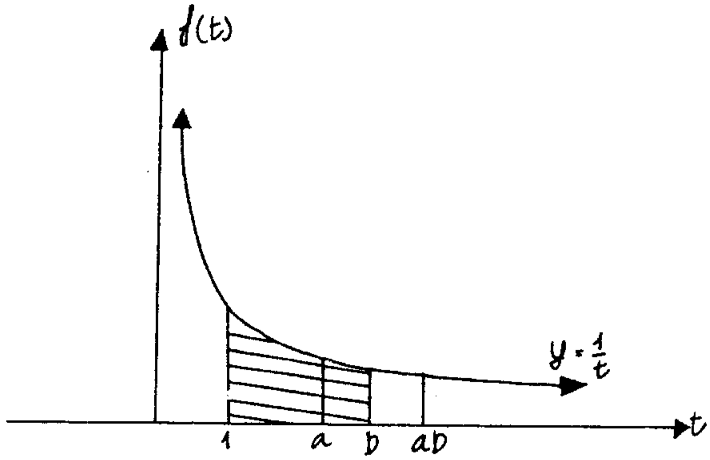
$$= \int_1^{b} \frac{1}{u}\,du$$

$$= \int_1^{b} \frac{1}{t}\,dt$$

จากทฤษฎี 7.1.1 ถ้าพิจารณาในเชิงเรขาคณิต ทฤษฎีนี้จะบอกว่า พื้นที่ของบริเวณซึ่งแสดงในรูป 7.1.4 เท่ากับพื้นที่ของบริเวณในรูป 7.1.5




รูป 7.1.4




รูป 7.1.5

จากนิยามของ natural logarithmic function คือ

$$\ln(x) = \int_1^x \frac{1}{t}\,dt \quad , \; x > 0$$

ถ้าให้ $x = 1$

$$\ln(1) = \int_1^1 \frac{1}{t}\,dt = 0$$

ซึ่งเป็นไปตามกฎข้อที่ 3 ของ logarithm

**ทฤษฎี 7.1.2** ถ้าให้ a, b เป็นเลขจำนวนจริง ซึ่ง $a > 0,\ b > 0,$ แล้ว

$$\ln(ab) = \ln a + \ln b$$

**พิสูจน์** จาก $\ln(ab) = \int_1^{ab} \frac{1}{t}\,dt \quad , \quad ab > 0$ (จากนิยาม 7.1.1)

$$= \int_1^a \frac{1}{t}\,dt + \int_a^{ab} \frac{1}{t}\,dt$$ (จากคุณสมบัติของ integration

$$= \int_1^a \frac{1}{t}\,dt + \int_1^b \frac{1}{t}\,dt$$ (จาก ทบ. 7.1.1)

$$= \ln(a) + \ln(b),\ a > 0,\ b > 0$$

**ทฤษฎี 7.1.3** ถ้า a, b เป็นเลขจำนวนจริงใดๆ ซึ่ง $a>0,\ b>0$ แล้ว

$$\ln\frac{a}{b} = \ln a - \ln b$$

**พิสูจน์** จาก $a = \frac{a}{b} \cdot b$

$$\therefore \ln a = \ln\left(\frac{a}{b} \cdot b\right)$$

$$\ln a = \ln\frac{a}{b} + \ln b$$ (จาก ทบ. 7.1.2)

$$\therefore \ln\frac{a}{b} = \ln a - \ln b$$

**ทฤษฎี 7.1.4** ถ้า a เป็นเลขจำนวนจริงใด ๆ ซึ่ง $a>0$ และ r เป็นเลขจำนวนตักยะใด ๆ แล้ว

$$\ln a^r = r \ln a$$

**พิสูจน์** ถ้า r เป็นเลขจำนวนตักยะใด ๆ และ $x>0$ เราจะได้จากสูตรว่า

$$\frac{d}{dx}\left(\ln x^r\right) = \frac{1}{x^r}\,\frac{d\,(x^r)}{dx} = \frac{1}{x^r}\, rx^{r-1}$$

$$= \frac{r}{x}$$

และ $$\frac{d}{dx}(r \ln x) = r\,\frac{d}{dx}(\ln x) = r \cdot \frac{1}{x}\,\frac{dx}{dx}$$

$$= \frac{r}{x}$$

ดังนั้น $$\frac{d}{dx}(\ln x^r) = \frac{d}{dx}(r \ln x)$$

จาก แคลคูลัส จะได้ว่าจะมีค่าคงที่ K ซึ่งทำให้

$$\ln x^r = r \ln x + K \quad \forall\, x > 0$$

ในการหาค่า K แทนค่า $x = 1$

$\therefore \ln 1^r = r\ln 1 + K$

$\therefore O = O + K \qquad (\because \ln 1 = O)$

แทนค่า K ใน (2)

$\therefore \ln x^r = r\ln x \quad \forall\, x > 0$

ดังนั้นถ้าให้ $x = a$ เมื่อ a เป็นเลขจำนวนจริงบวกใด ๆ แล้ว

$$\ln a^r = r \ln a$$

ใน ท.บ. 7.1.2, 7.1.3 และ 7.1.4 ที่พิสูจน์มาแล้วนี้ก็เป็นคุณสมบัติต่าง ๆ ของ log ซึ่งได้กล่าวมาแล้วทั้งสิ้น แต่ใน ท.บ. เหล่านี้พิสูจน์โดยใช้แคลคูลัส

**ตัวอย่างที่ 7.1.4** กำหนดให้ $y = \ln (3x-2)^5$ จงหาค่าของ $\frac{dy}{dx}$

**วิธีทำ** จาก $y = \ln (3x-2)^5 = \left[5\ln (3x-2)\right]$ (จาก ทบ. 7.1.4)

$$\therefore \frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx} 5\ln (3x-2)$$

$$= 5 \frac{d}{dx} \left[\ln (3x-2)\right] \quad \text{(5 เป็นตัวคงที่)}$$

$$= 5 \cdot \frac{1}{(3x-2)} \frac{d}{dx} (3x-2) \quad \text{(จากสูตรที่ 2)}$$

$$= \frac{5}{3x-2} \cdot 3 = \frac{15}{3x-2}$$

ในการเขียนกราฟของ natural logarithmic function จะต้องพิจารณาคุณสมบัติของพังก์ชันต่อไปนี้ก่อน

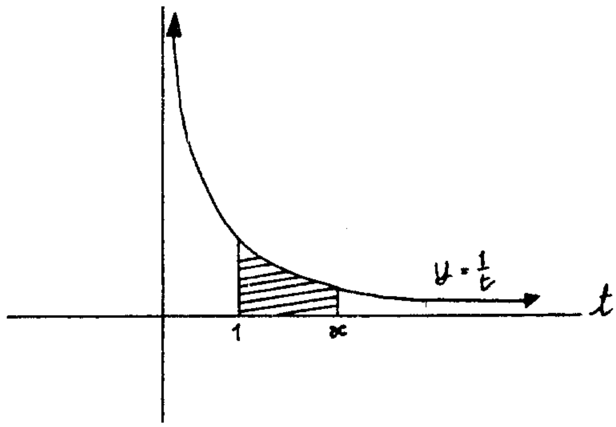
ให้ f เป็นพังก์ชัน ซึ่ง

$$f(x) = \ln x = \int_1^x \frac{1}{t}\, dt \;,\; x > 0$$

โดเมนของ f จะเป็นเซ็ตของเลขจำนวนจริงบวก และ f จะมีค่าอนุพันธ์สำหรับทุก ๆ ค่าของ x ซึ่งอยู่ในโดเมน และ $f'(x) = \frac{1}{x}$ จะเป็นพังก์ชันต่อเนื่องสำหรับทุก ๆ ค่าของ $x > 0$ และค่าของ $f'(x) = \frac{1}{x} > 0 \; \forall \; x > 0$ ดังนั้นจึงสรุปได้ว่า f เป็นพังก์ชันซึ่งมีค่าเพิ่มขึ้นเรื่อย ๆ เมื่อ x มีค่าเพิ่มขึ้น (increasing function)

จาก $f''(x) = -\frac{1}{x^2}$ จะเห็นได้ว่า $f''(x) < 0$ ( เพราะว่า $x > 0$) ดังนั้นกราฟของ $f(x)$ จะโค้งเว้าลง

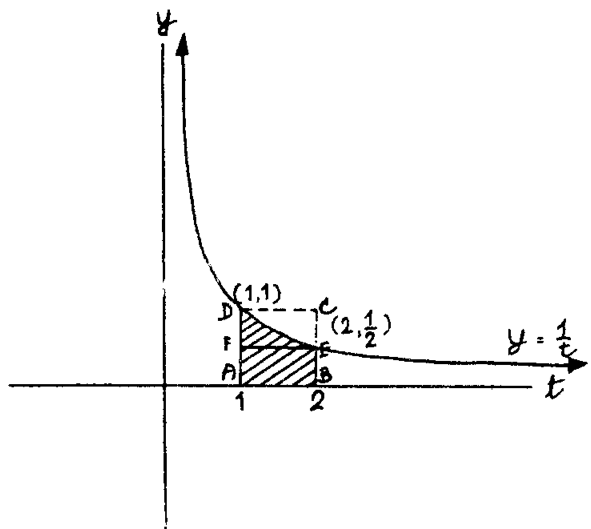
จาก $f(1) = \ln(1) = 0 \; \therefore$ x-intercept ของกราฟคือ 1




รูป 7.1.6 พื้นที่ในเงาคือ ln x

จากนิยาม $f(2) = \ln(2) = \int_1^2 \frac{1}{t}\, dt$

ในการหาค่าของ ln(2) ออกมาโดยประมาณ สามารถจะหาได้โดยการหาพื้นที่ของบริเวณซึ่งแสดงไว้ในรูปที่ 7.1.7




รูปที่ 7.1.7 พื้นที่แรเงาคือ ln 2

จากรูปที่ 7.1.7 จะเห็นได้ว่า ln (2) นี้จะมีค่าอยู่ระหว่างพื้นที่สี่เหลี่ยมผืนผ้า ABEF และพื้นที่สี่เหลี่ยมผืนผ้า ABCD

สำหรับสี่เหลี่ยมผืนผ้า ABEF มีความยาว 1 หน่วย และมีความกว้าง $\frac{1}{2}$ หน่วย

$\therefore$ พื้นที่สี่เหลี่ยมผืนผ้า ABEF $= 1 \times \frac{1}{2} = 0.5$ หน่วย

สำหรับสี่เหลี่ยมผืนผ้า ABCD มีความยาว 1 หน่วย และมีความกว้าง 1 หน่วย

$\therefore$ พื้นที่สี่เหลี่ยมผืนผ้า ABCD $= 1 \times 1 = 1$ หน่วย ดังนั้น

$$0.5 < \ln 2 < 1$$

ในการหาค่าของ $\ln x,\ x > 0$ นั้นสามารถจะทำได้โดยการใช้เรื่องของอนุกรมอนันต์ (infinite series) แต่ในที่นี้จะไม่กล่าวถึง ดังนั้นถ้านำค่าของ ln 2 ซึ่งมีทศนิยม 5 ตำแหน่งมาพิจารณาคือ

$$\ln 2 \approx 0.69315$$

จากค่าของ ln 2 และ ทบ. 7.1.5 สามารถจะหาค่าโดยประมาณของ natural logarithm ของเลข 2 ยกกำลังได้ดังนี้คือ

$$\ln 4 = \ln 2^{2} = 2 \ln 2 \approx 2 \times 0.69315 = 1.38630$$

$$\ln 8 = \ln 2^{3} = 3 \ln 2 \approx 3 \times 0.69315 = 2.07045$$

$$\ln \tfrac{1}{2} = \ln 2^{-1} = -1 \ln 2 \approx -1 \times 0.69315 = -0.69315$$

$$\ln \tfrac{1}{4} = \ln 2^{-2} = -2 \ln 2 \approx -2 \times 0.69315 = -1.38630$$

ในท้ายของหนังสือเล่มนี้จะมีตารางของ natural logarithms ในทศนิยม 4 ตำแหน่ง ต่อจากนี้จะพิจารณาค่าของ ln x เมื่อ $x \to \infty$ นั่นคือพิจารณา

$$\lim_{x \to +\infty} \ln x$$

จากที่ได้พิจารณามาแล้ว จะเห็นว่า natural logarithmic function เป็นฟังก์ชันที่จะมีค่าเพิ่มขึ้นเมื่อ x เพิ่มขึ้น (increasing function) ถ้าให้ p เป็นเลขจำนวนจริงบวกใด ๆ แล้ว

$$\ln x > \ln 2^{p} \quad \text{เมื่อ} \quad x > 2^{p}$$

$$\ln 2^{p} = p \ln 2 \quad \text{(จากทบ. 7.1.5)}$$

$\therefore \ln x > p \ln 2$ เมื่อ $x > 2^p$

จากการหาค่าโดยประมาณของ $\ln 2$ ได้ว่า

$\ln 2 > \frac{1}{2}$

$\therefore \ln x > \frac{1}{2} p$ เมื่อ $x > 2^p$

ถ้ากำหนดให้ $p = 2n$ เมื่อ $n > 0$ จะได้ว่า

$\ln x > n$ เมื่อ $x > 2^{2n}$

ดังนั้น $\ln x$ สามารถจะทำให้ใหญ่กว่าเลขจำนวนจริงบวก $n$ ใด ๆ ได้โดยให้ $x > 2^{2n}$ ดังนั้น จะสรุปได้ว่า

$$\lim_{x \to +\infty} \ln x = +\infty \qquad (1)$$

ต่อไปจะพิจารณาค่าของ $\ln x$ เมื่อ $x \to 0$ นั่นคือพิจารณา $\lim_{x \to 0^+} \ln(x)$

$\because \ln x = \ln (x^{-1})^{-1}$

$\therefore \ln x = -\ln (\frac{1}{x})$ ( $x^{-1} = \frac{1}{x}$ และใช้ ทบ. 7.1.5)

$\therefore$ เมื่อ $x \to 0^+$ จะได้ว่า $\frac{1}{x} \to +\infty$

$$\therefore \lim_{x \to 0^+} \ln x = -\lim_{\frac{1}{x} \to +\infty} \ln \left(\frac{1}{x}\right) \qquad (2)$$

$$\lim_{\frac{1}{x} \to +\infty} \ln \frac{1}{x} = +\infty \qquad \text{(จาก ①)} \qquad (3)$$

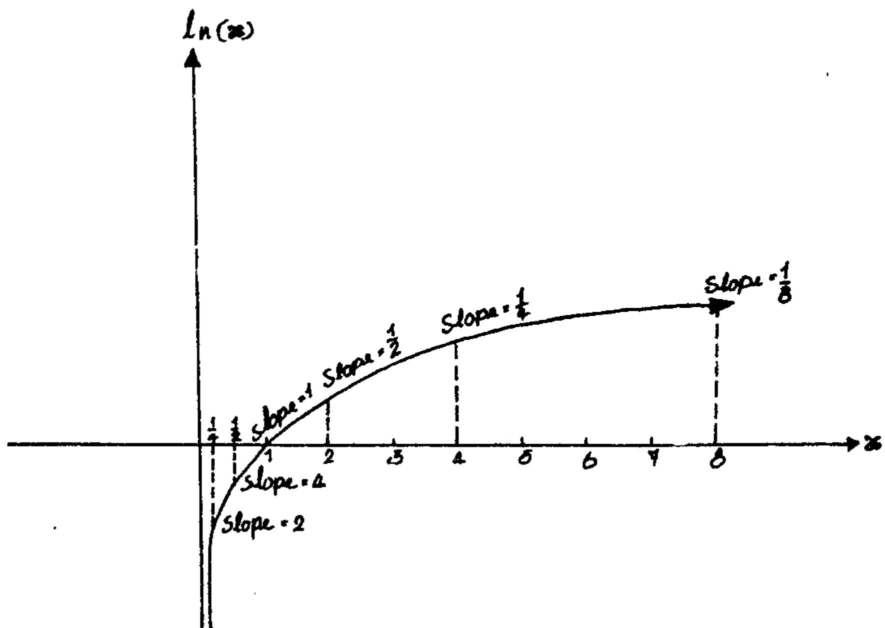
จาก ② $\therefore \lim_{x \to 0^+} \ln x = -\infty$ (จาก (2) และ (3) )

**สรุป** คุณสมบัติของ natural logarithm มีดังต่อไปนี้คือ

1) โดเมนของฟังก์ชันนี้ คือ เซ็ตของเลขจำนวนจริงบวก
2) พิสัยของฟังก์ชันนี้ คือ เซ็ตของเลขจำนวนจริงทั้งหมด
3) ฟังก์ชันจะมีค่าเพิ่มขึ้นเมื่อ x มีค่าเพิ่มขึ้น (increasing function)
4) ฟังก์ชันนี้ ต่อเนื่องที่ทุก ๆ จุด ของ x ซึ่งอยู่ในโดเมน
5) กราฟของฟังก์ชันจะเว้าเข้าจากบนลงมาล่าง

โดยการใช้คุณสมบัติต่าง ๆ ของ natural logarithms ซึ่งได้กล่าวมาแล้ว และเขียนจุดต่าง ๆ ของ x และ ln x จำนวน 2—3 จุด ก็สามารถจะเขียนกราฟของ natural logarithm ได้ดังรูป 7.18

| x | $\frac{1}{4}$ | $\frac{1}{2}$ | 1 | 2 | 4 | 8 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| lnx | —1.38 | —.69 | 0 | .69 | 1.39 | 2.08 |

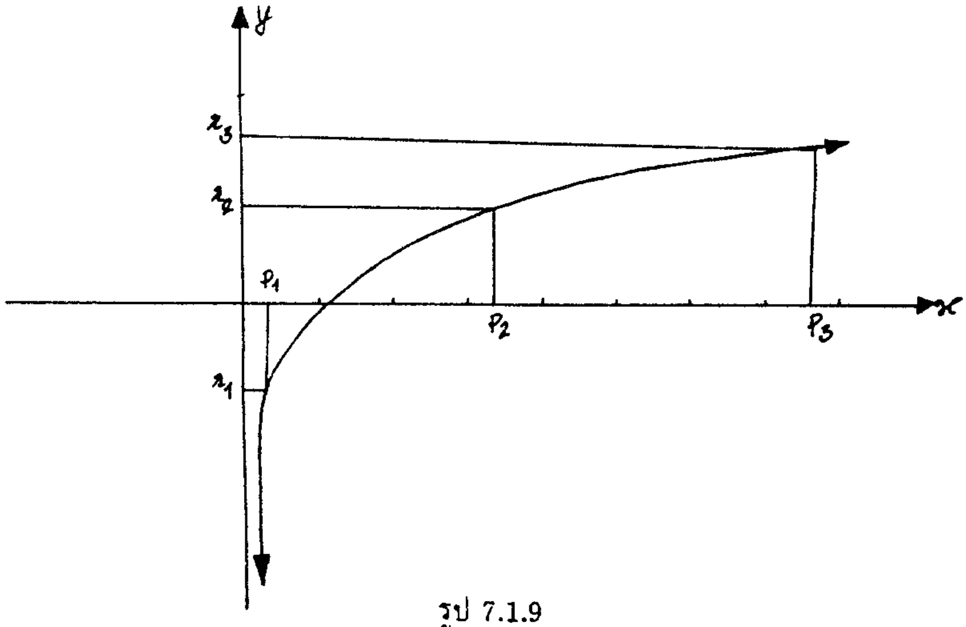



รูป 7.1.8

นอกจากนี้ก็สามารถจะหาความชันที่แต่ละจุดได้ ซึ่งความชันที่แต่ละจุดนี้จะหาได้จาก $\frac{d}{dx} \ln (x) = \frac{1}{x}$ จากคุณสมบัติของ natural logarithm ซึ่งได้ศึกษามาแล้วนี้ สามารถ

จะกล่าวได้ว่า สำหรับเลขจำนวนจริงใด ๆ จะมีเลขจำนวนบวก ซึ่งค่าของ natural logarithm ของเลขจำนวนจริงบวกนั้นมีค่าเท่ากับเลขจำนวนจริงใด ๆ เหล่านั้น ดังรูป 7.1.9

ให้ $r_1$, $r_2$, $r_3$, เป็นเลขจำนวนจริงใด ๆ ซึ่งอยู่บนแกน y จะเห็นจากรูปว่ามีเลขจำนวนจริงบวก $p_1$, $p_2$, $p_3$ อยู่บนแกน x ซึ่งค่าของ




รูป 7.1.9

$$r_1 = \ln (p_1)$$

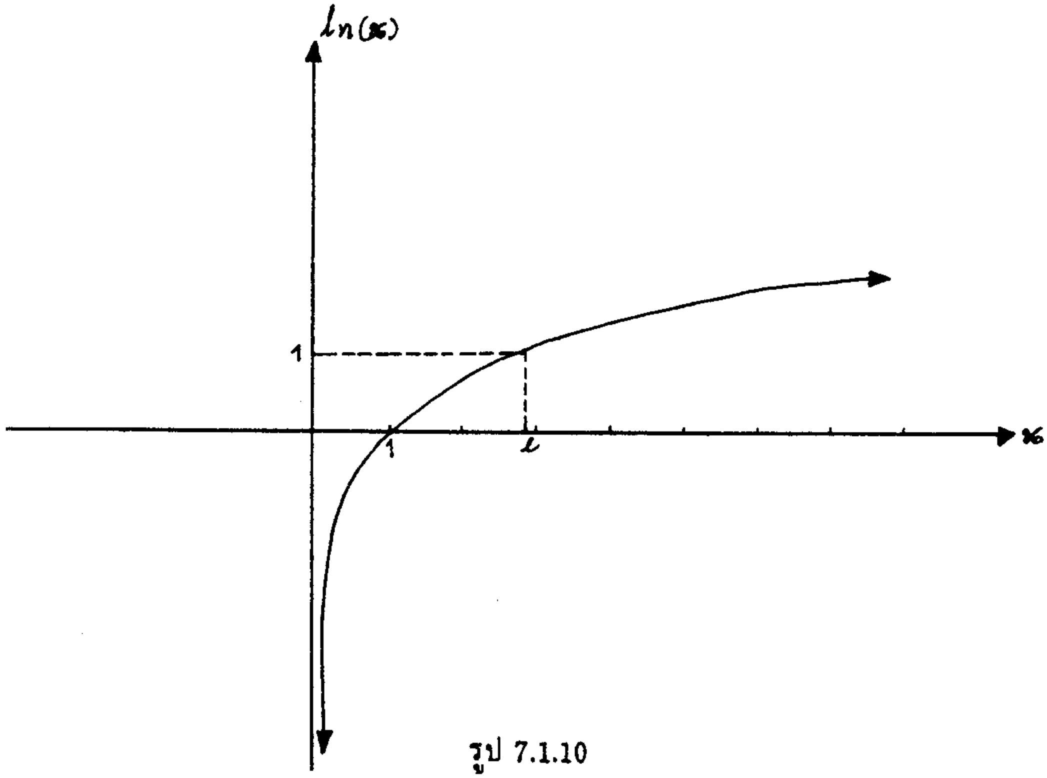
$$r_2 = \ln (p_2)$$

$$r_3 = \ln (p_3)$$

จากคุณสมบัติข้อนี้ ทำให้ Leonhard Euler ซึ่งเป็นทั้งนักคณิตศาสตร์ และฟิสิคส์ชาวสวิตเซอร์แลนด์ (1707—1783) ได้คิดเลขขึ้นมาตัวหนึ่ง ตั้งชื่อว่า "e" โดยให้นิยามของเลขจำนวน e นี้ว่า

**นิยาม 7.1.2** เลขจำนวน e นี้เป็นเลขตัวเดียวเท่านั้นที่ทำให้

$$\ln (e) = 1$$




รูป 7.1.10

จากรูป 7.1.10 จะได้ค่า e ซึ่งเป็นเลขตรรกยะบวกอยู่บนแกน x และสมนัยกับค่าของ $y = 1$ ค่าของ e ในทศนิยม 7 ตำแหน่งนั้น จะมีค่าประมาณ

$$e \approx 2.7182818$$

ในท้ายของหนังสือเล่มนี้จะมีตารางแสดงค่าของ $e^x$ เมื่อ x เป็นเลขจำนวนจริง ใด ๆ

# แบบฝึกหัด 7.1

ข้อ 1 ถึงข้อ 14 จงหาอนุพันธ์ของฟังก์ชันที่กำหนดให้

1. $f(x) = \ln(7x-4)$

2. $g(x) = \ln(8-2x)$

3. $h(x) = \ln\sqrt{7x-4}$

4. $f(x) = \ln(8-2x)^5$

5. $f(x) = \ln(1+4x^2)$

6. $f(x) = \ln\sqrt{1+4x^2}$

7. $g(x) = \ln\sqrt{4-x^2}$

8. $g(x) = \ln(\ln x)$

9. $h(x) = \ln(n^2 \ln^x)$

10. $F(x) = \ln\sqrt{\frac{x^2-1}{x^2+1}}$

11. $f(x) = \ln|x+1|$

12. $f(x) = \sqrt[3]{\ln x^3}$

13. $F(x) = \sqrt{x+1} - \ln(1+\sqrt{x+1})$

14. $G(x) = x\ln(x+\sqrt{1+x^2}) - \sqrt{1+x^2}$

ข้อ 15 ถึงข้อ 18 จงหาค่าของ $\frac{dy}{dx}$

15. $\ln xy + x + y = 2$

16. $\ln \frac{y}{x} + xy = 1$

17. $x = \ln(x + y + 1)$

18. $\ln(x + y) - \ln(x - y) = 4$

19. จงเขียนกราฟของ $y = \ln x$ โดยเขียนจุดซึ่งมีค่า x เป็น $\frac{1}{9}, \frac{1}{3}, 1, 3, 9$ โดยการใช้ $\ln 3 \approx 1.09861$ และใน 5 จุดนี้จงหาความชันของเส้นสัมผัสของแต่ละจุดพร้อมทั้งวาดรูปเส้นสัมผัสในแต่ละจุดด้วย

ข้อ 20 ถึง 27 จงวาดรูปกราฟของเส้นโค้งซึ่งมีสมการดังต่อไปนี้

20. $x = \ln y$

21. $y = \ln(-x)$

22. $y = \ln |x|$

23. $y = \ln(x + 1)$

24. $y = \ln(x - 1)$

25. $y = x - \ln x$

26. $y = x\ln x$

27. $y = \ln \frac{1}{x}$

28. จงหาสมการของเส้นสัมผัสซึ่งสัมผัสกับเส้นโค้ง $y = \ln x$ ณ ที่จุดซึ่งมีค่า $x = 2$

29. จงสมการของเส้นสัมผัส ซึ่งสัมผัสกับเส้นโค้ง $y = \ln \frac{1}{x}$ และมีความชันเป็น $-\frac{1}{2}$

30. สมการอุปสงค์ของสินค้าชนิดหนึ่ง คือ

$x = \ln 10 - \ln p$

เมื่อ x หน่วยเป็นปริมาณของอุปสงค์ และ p บาท เป็นราคาต่อหน่วย

ก) จงหาเส้นอุปสงค์

ข) จงหาราคาสูงสุดที่ทุกคนจะจ่ายสำหรับสินค้า

31. สมการของอุปทานของสินค้าชนิดหนึ่ง คือ

$p = 20 + 10 \ln (1 + x)$

เมื่อ x หน่วยเป็นปริมาณของอุปทาน p บาท เป็นราคาต่อหน่วย

ก) จงหาเส้นอุปทาน

ข) จงหาราคาต่ำสุดของสินค้าที่มีการเสนอขาย

32. บริษัทแห่งหนึ่งได้กำหนดค่าใช้จ่ายสำหรับการโฆษณาต่อหนึ่งสัปดาห์เท่ากับ x บาท ถ้ารายได้จากการขายต่อหนึ่งสัปดาห์ของบริษัทเท่ากับ S บาท จากสมการ $S = 4000 \ln x$

ก) จงหาอัตราการเปลี่ยนแปลงของรายได้จากการขายที่เกิดขึ้น เนื่องจากค่าใช้จ่ายของการโฆษณา เมื่อค่าโฆษณาต่อหนึ่งสัปดาห์เท่ากับ 800 บาท

ข) ถ้าค่าใช้จ่ายสำหรับการโฆษณาต่อสัปดาห์เพิ่มขึ้นเป็น 950 บาท รายได้จากการขายต่อหนึ่งสัปดาห์จะเพิ่มขึ้นเป็นปริมาณเท่าไร

33. สมการของอุปสงค์ของน้ำปรุงสลัดชนิดหนึ่ง คือ $x = 20 - 10 \ln p$ เมื่อมีอุปสงค์เป็น x ขวด และ p บาท เป็นราคาต่อขวด

ก) จงหาอัตราการยืดหยุ่นของอุปสงค์ที่มีต่อราคา เมื่อราคาเท่ากับ 1 บาทต่อขวด

ข) ให้ใช้คำตอบจากข้อ ก) หาการเปลี่ยนแปลงของอุปสงค์ เมื่อราคา 1 บาท เพิ่มขึ้นไปอีก 10 เปอร์เซ็นต์

34. บริษัทผู้ผลิตเครื่องกำเหนิดไฟฟ้า เริ่มดำเนินการ เมื่อวันที่ 1 มกราคม 1968 ในระหว่างปีแรกไม่มียอดขาย เนื่องจากบริษัทอยู่ในระหว่างทำการวิจัยและพัฒนาสินค้า ปีต่อมายอดรายได้เพิ่มขึ้นตามสมการ $y = x \ln x$ เมื่อ x เป็นจำนวนปีที่บริษัทดำเนินงาน และ y เป็นยอดขายคิดเป็นล้านบาท จงเขียนกราฟของสมการข้างบน. และจงหาอัตราการเปลี่ยนแปลงของยอดขายที่เพิ่มขึ้นในวันที่ 1 มกราคม 1972 และ ในวันที่ 1 มกราคม 1978

## 7.2 การหาอนุพันธ์ และอินทิกรัลในเชิงลอการิธึม

ในการหาค่าของ $\frac{d}{dx}(\ln|x|)$ นั้น สามารถจะทำได้โดยการแทนค่า

$|x| = \sqrt{x^2}$

ดังนั้นจะได้ $\frac{d}{dx}(\ln|x|) = \frac{d}{dx}(\ln\sqrt{x^2})$

$$= \frac{1}{\sqrt{x^2}}\frac{d}{dx}\sqrt{x^2} \quad \text{(จากสูตร 7.1.15)}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{x^2}}\frac{x}{\sqrt{x^2}} = \frac{x}{x^2}$$

$$\therefore \frac{d}{dx}(\ln|x|) = \frac{1}{x} \qquad (7.2.1)$$

ถ้าให้ u เป็นฟังก์ชันของ x ซึ่งมีค่าอนุพันธ์เมื่อเทียบกับ x โดย (7.2.1) และกฎลูกโซ่ (chain rule) จะได้ว่า

$$\frac{d}{dx}(\ln|u|) = \frac{1}{u}\frac{du}{dx} \qquad (7.2.2)$$

**ตัวอย่างที่ 7.2.1** กำหนดให้ $y = \sqrt{x^2+1}\ \ln(x^2-1)$ จงหาค่าของ $\frac{dy}{dx}$

**วิธีทำ** จาก $y = \sqrt{x^2+1}\ \ln(x^2-1)$

$$\therefore |y| = \left|\sqrt{x^2+1}\ \ln(x^2-1)\right| = \left|\sqrt{x^2+1}\right|\ \left|\ln(x^2-1)\right|$$

ใส่ ln ทั้ง ๒ ข้างจะได้

$$\ln|y| = \ln\left|\sqrt{x^2+1}\right|\ \left|\ln(x^2-1)\right| = \ln\left|\sqrt{x^2+1}\right| + \ln\left|\ln(x^2-1)\right|$$

$$\ln|y| = \frac{1}{2}\ln|x^2+1| + \ln|\ln(x^2-1)|$$

หาค่าอนุพันธ์เทียบกับ x ทั้ง 2 ข้างจะได้

$$\frac{1}{y}\frac{dy}{dx} = \frac{1}{2(x^2+1)}\frac{d(x^2+1)}{dx} + \frac{1}{\ln(x^2-1)}\frac{d\ln(x^2-1)}{dx}$$

$$= \frac{2x}{2(x^2+1)} + \frac{1}{\ln(x^2-1)} \quad \frac{1}{(x^2-1)} \quad \frac{d(x^2-1)}{dx}$$

$$= \frac{2x}{2(x^2+1)} + \frac{1}{\ln(x^2-1)} \quad \frac{2x}{(x^2-1)}$$

$$\frac{dy}{dx} = y. \quad \frac{2x(x^2-1)\ln(x^2-1) + 4x(x^2+1)}{2(x^2+1)(x^2-1)\ln(x^2-1)}$$

$$= \frac{\sqrt{x^2+1}\ln(x^2-1)\ (2x(x^2-1)\ln(x^2-1) + 4x(x^2+1))}{2(x^2+1)(x^2-1)\ln(x^2-1)}$$

$$= \frac{x\ln(x^2-1)}{\sqrt{x^2+1}} + \frac{2x\sqrt{x^2+1}}{x^2-1}$$

การหา $\frac{dy}{dx}$ โดยวิธีในตัวอย่างที่ 7.2.1 นี้ เรียกว่า การหาอนุพันธ์เชิงลอการิธึม (*logarithmic differentiation*)

ซึ่งได้ค้นพบในปี 1697 โดย Johann Bernonlli (1667—1748)

จากสูตรที่ 3 คือ $\frac{d}{dx}(\ln|u|) = \frac{1}{u}\frac{du}{dx}$

จะได้สูตรของอินทิเกรซันต่อไปนี้คือ

$$\int \frac{1}{u}\,du = \ln|u| + C \qquad (7.23)$$

จากสูตร (7.2.3) และสูตรอินทิเกรต รวมกันจะได้สูตรว่า

$$\int a'du = \begin{cases} \frac{u^{n+1}}{n+1} + C & \text{ถ้า } n \neq -1 \\ \ln|u| c + C & \text{ถ้า } n = -1 \end{cases} \qquad (7.2.4)$$

**ตัวอย่างที่ 7.2.2** จงหาค่าของ $\int \frac{x}{2-x^2}\,dx$

**วิธีทำ** ให้ $u = 2-x^2 \quad \therefore \quad du = -2xdx$

$$xdx = -\frac{1}{2}du$$

$$\int \frac{xdx}{2-x^2} = -\frac{1}{2}\int \frac{du}{u}$$

$$= -\frac{1}{2} \ln |u| + C$$

$$= -\frac{1}{2} \ln |2-x^2| + C$$

**ตัวอย่างที่ 7.2.3** จงหาค่าของ $\int_1^3 \frac{2x+3}{x+1} dx$

**วิธีทำ** $\frac{2x+3}{x+1} = \frac{2(x+1)+1}{x+1} = 2 + \frac{1}{x+1}$

$$\int_1^3 \frac{2x+3}{x+1} dx = \int_1^3 2\, dx + \int_1^3 \frac{dx}{x+1}$$

$$= 2x]_1^3 + \ln |x+1| ]_1^3$$

$$= (G-2) + (\ln |4| - \ln |2|)$$

$$\int_1^3 \frac{2x+3}{G-i} dx = 4 + 2 \ln 2 - \ln 2$$

$$= 4 + \ln 2$$

**ตัวอย่างที่** 7.2.4 จงหาค่าของ $\int \frac{\ln x}{x} dx$

, ลึ m ให้ $u = \ln x$

$$du = \frac{1}{x} dx$$

$$\therefore \int \frac{\ln x}{x} dx = \int u\,du \quad \text{(แทนค่า } u \text{ และ } du\text{)}$$

$$= \frac{u^2}{2} + C$$

$$= \frac{(\ln x)^2}{2} + C$$

# แบบฝึกหัด 7.2

ข้อ 1 ถึงข้อ 10 จงหาค่าของ $\frac{dy}{dx}$ โดยวิธี logarithmic differentiation

1. $y = x^2(x^2-1)^3(x+1)^4$

2. $y = \frac{x^5(x+2)}{x-3}$

3. $y = \frac{x(x\ 1)(x+2)}{(x-4)^3}$

4. $y = (5x-4)(x^2+3)(3x^2-5)$

5. $y = \frac{x^3+2x}{\sqrt[5]{x^7+1}}$

6. $y \frac{x\quad x+1}{\sqrt[3]{x-1}}$

7. $y = \frac{3x}{\sqrt{(x+1)(x+2)}}$

8. $y = \frac{\sqrt{1-x^2}}{(x+1)^{2/3}}$

9. $y = \frac{\sqrt[3]{x}\ t\ 1}{(x+2)\sqrt{x+3}}$

10. $y = \frac{x^3\sqrt{4+3x}}{\sqrt{3+2x}}$

ข้อที่ 11 ถึงข้อ 20 จงหาค่าของอินทิกรัลต่อไปนี้

11. $\int \frac{dx}{3-2x}$

12. $\int \frac{x^2dx}{x^3+1}$

13. $\int \frac{3x}{5x2-1}\ dx$

14. $\int \frac{2x-1}{x(x-1)}\,dx$

15. $\int \frac{2x^3}{x^2-4}\,dx$

16. $\int \frac{5-4x^2}{3-2x}\,dx$

17. $\int \frac{dx}{x\ln x}$

18. $\int \frac{dx}{\sqrt{x}\,(1+\sqrt{x})}$

19. $\int \frac{\ln^2 3x}{x}\,dx$

20. $\int \frac{(2+\ln^2 x)}{n(1-h)}\,dx$

ข้อ 21 ถึงข้อ 28 จงหาค่าของ definite integral ต่อไปนี้

21. $\int_1^{e^2} \frac{dx}{x}$

22. $\int_e^{e^3} \frac{dx}{x}$

23. $\int_3^5 \frac{2x}{x^2-5}\,dx$

24. $\int_4^5 \frac{x}{4-x^2}\,dx$

25. $\int_0^2 \frac{x^2+2}{x+1}\,dx$

26. $\int_1^5 \frac{4x3-1}{2x-1}\,dx$

27. $\int_1^e \frac{\ln x}{x}\,dx$

28. $\int_e^{e^2} \frac{1}{x(\ln x)^2}\,dx$

29. จงหา พ.ท. ของบริเวณหนึ่ง ซึ่งล้อมรอบโดย เส้น $y = \frac{2}{(x-3)}$, แกน x และเส้น $x = 4$ และ $x = 5$

30. จงหา พ.ท. ของบริเวณหนึ่ง ซึ่งล้อมรอบโดย เส้น $y = \frac{(x^2+1)}{(x+1)}$ และเส้น $x + 3y = 7$

31. กำหนดให้ฟังก์ชั่น รายได้ส่วนเพิ่มของสินค้าชนิดหนึ่ง คือ $R^1(x) = \frac{12}{(x+2)}$ เมื่อ R (x) บาท เป็นรายได้รวม เมื่อยอดขายเท่ากับ x หน่วย จงหาสมการของอุปสงค์

32. สมการของอุปสงค์ของสินค้าชนิดหนึ่ง คือ $p = \frac{10}{(x+1)}$ มีอุปสงค์ของสินค้าเท่ากับ x หน่วย และมีราคาเท่ากับ p บาท ต่อหน่วย จงหาส่วนเกินของผู้บริโภคเมื่อราคาตลาดเท่ากับ 4 บาท

33. สมการของอุปสงค์และอุปทาน ของสินค้าชนิดหนึ่ง คือ $p = \frac{600 - 2x}{x + 100}$ และ $200p = 300 + x$ ตามลำดับ ปริมาณของอุปสงค์และอุปทานเท่ากับ x หน่วย เมื่อราคาเท่ากับ p บาทต่อหน่วย ถ้าราคาตลาดอยู่ที่ระดับดุลยภาพ จงหาส่วนเกินของผู้บริโภคคิดเป็นบาท

## 7.3 ฟังก์ชันเอกซ์โพเนนเชียล (The Exponential Function)

จากคุณสมบัติของ natural logarithm ได้ทราบแล้วว่า สำหรับเลขจำนวนจริงใด ๆ จะมีเลขจำนวนจริงบวกหนึ่งตัวเท่านั้น ซึ่งมีเลขจำนวนจริงนั้นเป็น natural logarithm ของเลขจำนวนจริงบวก ดังนั้น จึงให้นิยามต่อไปนี้ คือ

**นิยาม 7.3.1** ถ้า $x$ เป็นเลขจำนวนจริงใด ๆ แล้วจะมีเลขจำนวนจริงบวก $y$ หนึ่งตัวเท่านั้น ซึ่ง $\ln y = x$, สำหรับเลข $y$ นี้คือค่าของ exponential function ที่ $x$ และใช้สัญญลักษณ์ว่า $\exp(x)$

ดังนั้น $y = \exp(x)$ ก็ต่อเมื่อ $x = \ln y$

$\exp(x)$ อ่านว่า exponential function ที่ $x$

จากที่ได้ศึกษาถึงเรื่อง natural logarithm ได้ทราบแล้วว่า พิสัย (Range) ของ natural logarithmic function เป็นเซ็ตของเลขจำนวนจริงทั้งหมด ดังนั้นโดเมน (Domain) ของ exponential function จึงเป็นเซ็ตของเลขจำนวนจริงทั้งหมด และพิสัยของ exponential function ก็จะเป็นเซ็ตของเลขจำนวนจริงบวก เพราะว่าเซ็ตของเลขจำนวนจริงบวกนี้ เป็นโดเมนของ natural logarithmic function

จากนิยามของ exponential function

$$y = \exp(x) \quad \text{ก็ต่อเมื่อ} \quad x = \ln y \qquad (7.3.1)$$

$$\ln y = \ln(\exp(x)) \qquad (7.3.2)$$

$$\therefore \quad x = \ln(\exp(x)) \qquad (7.3.3)$$

จาก (1) $\quad y = \exp(\ln y) \quad$ (แทนค่า $x = \ln y$) $\qquad (7.3.4)$

จาก (7.3.3) และ (7.3.4) พบว่ามี 2 ฟังก์ชัน $f$ และ $g$ ซึ่ง $f o g$ เป็น Identity function

ในที่นี้ถ้าให้ $f(x) = \ln(x)$, $g(x) = \exp(x)$

$$f o g(x) = f(g(x)) = \ln(\exp(x)) = x$$

$$g o f(x) = g(f(x)) = \exp(\ln(x)) = x$$

$$\therefore \quad f o g(x) = g o f(x) = x$$

และจะเรียก f ว่าเป็นฟังก์ชันผกผัน (inverse function) ของ g ส่วน g ก็จะเรียกว่าเป็นฟังก์ชันผกผันของ f

จึงสรุปได้ว่า natural logarithmic function เป็นฟังก์ชันผกผันของ exponential function และ exponential function เป็นฟังก์ชันผกผันของ natural logarithmic function

**นิยาม 7.3.2** ถ้า a เป็นเลขจำนวนจริงบวกใด ๆ และ x เป็นเลขจำนวนจริงใด ๆ แล้วจะกำหนดให้

$$a^x = \exp(x\ln a)$$

**ทฤษฎี 7.3.1** ถ้า a เป็นเลขจำนวนจริงบวกใด ๆ และ x เป็นเลขจำนวนจริงใด ๆ แล้ว

$$\ln a^x = x\ln a$$

**พิสูจน์** จากนิยาม 7.3.2

$$a^x = \exp(x\ln a)$$

$$\therefore \ln a^x = \ln\left[\exp(x\ln a)\right]$$

$$\ln a^x = x\ln a \quad \text{(จากนิยาม 7.3.1)}$$

จากนิยาม 7.3.2 จะได้ว่า

$$a^x = \exp(x\ln a)$$

ถ้าให้ $a = e$

$$\therefore e^x = \exp(x\ln e)$$

$$e^x = \exp(x) \qquad (\because \ln e = 1)$$

และจากนิยาม 7.3.1 จะได้ว่า

$$e^x = y \text{ ก็ต่อเมื่อ } x = \ln y$$

$$\therefore \ln(e^x) = x \text{ และ } e^{\ln x} = x$$

$$\therefore a = e \quad \text{สำหรับทุก ๆ ค่าของ } a > 0$$

จากสมการ $a^x = e^{x\ln a}$ และตารางยกกำลังของ e สามารถจะคำนวณหาค่าของ $a^x$ เมื่อ x เป็นเลขจำนวนอตักยะใด ๆ ได้

**ตัวอย่างที่ 7.3.1** จงหาค่าของ $2^{\sqrt{3}}$ ในทศนิยม 2 ตำแหน่ง

**วิธีทำ**

$$
\begin{aligned}
2^{\sqrt{3}} &= e^{\sqrt{3}\,\ln 2} \\
&= e^{1.732\,(0.6931)} \\
&= e^{1.2} \\
&\sim 3.32
\end{aligned}
$$

**ทฤษฎี 7.3.2** ถ้า $a$ และ $b$ เป็นเลขจำนวนจริงใด ๆ แล้ว

$$e^{a} \cdot e^{b} = e^{a+b}$$

**พิสูจน์** ให้ $A = e^{a}$ และ $B = e^{b}$

$$
\begin{aligned}
\therefore \ln A &= \ln (e^{a}) \\
&= a \quad (\because \ln \text{ เป็น inverse function ของ exp})
\end{aligned}
$$

ในทำนองเดียวกัน

$$
\begin{aligned}
\ln B &= b \\
\ln AB &= \ln A + \ln B \quad (\text{จากคุณสมบัติของฟังก์ชัน } \ln) \\
\ln AB &= a + b \\
\therefore e^{\ln AB} &= e^{a+b} \\
AB &= e^{a+b} \\
e^{a} \cdot e^{b} &= e^{a+b} \quad (\text{แทนค่า } A \text{ และ } B)
\end{aligned}
$$

**ทฤษฎี 7.3.3** ถ้า $a$ และ $b$ เป็นเลขจำนวนจริงใด ๆ, แล้ว

$$e^{a} + e^{b} = e^{a-b}$$

**พิสูจน์** จาก

$$
\begin{aligned}
\frac{e^{a}}{e^{b}} &= e^{a} \cdot \frac{1}{e^{b}} = e^{a} \cdot e^{-b} \\
&= e^{a+(-b)} \quad (\text{จาก ทบ. } 7.3.2) \\
&= e^{a-b}
\end{aligned}
$$

**ทฤษฎี 7.3.4** ถ้า a และ b เป็นเลขจำนวนจริงใด ๆ แล้ว

$$(e^{a})^{b} = e^{ab}$$

**พิสูจน์** $(e^{a})^{b} = \left(e^{\ln e^{a}}\right)^{b}$ $\left(\text{จาก } a = \ln e^{a}\right)$

$$= e^{b\ln (e^{a})}$$

$$= e^{ba} = e^{ab}$$

$$\therefore (e^{a})^{b} = e^{ab}$$

หลังจากที่ได้ทราบคุณสมบัติของ exponential function แล้วต่อไปนี้ก็จะหาสูตรสำหรับค่าอนุพันธ์

ให้ $y = e^{x}$

$\therefore x = \ln y$ (จากนิยาม)

diff เทียบกับ x, $\therefore \frac{dx}{dx} = \frac{1}{y} \frac{dy}{dx}$

$$1 = \frac{1}{y} \frac{dy}{dx}$$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = y$$

$\therefore$ จะได้สูตรว่า

$$\frac{d}{dx}(e^{x}) = e^{x} \quad (\text{แทนค่า } y = e^{x}) \qquad (7.3.5)$$

ถ้าให้ u (x) เป็นฟังก์ชันซึ่งมีค่าอนุพันธ์ เมื่อเทียบกับ x แล้วจะได้สูตรว่า

$$\frac{d}{dx}(e^{u}) = e^{u} \frac{du}{dx} \qquad (7.3.6)$$

**ตัวอย่างที่ 2** กำหนดให้ $y = e^{1/x^2}$ จงหาค่าของ $\frac{dy}{dx}$

**วิธีทำ** ให้ $u(x) = \frac{1}{x^2}$

$$\therefore \frac{du}{dx} = -\frac{2}{x^3}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}\left(e^{1/x^2}\right) = \frac{d}{dx}(e^{u}) \quad (\text{แทนค่า } u)$$

$$= e^u \frac{du}{dx} = e^{1/x^2}\left(-\frac{2}{x^3}\right) \text{ (แทนค่า u และ } \frac{du}{dx} \text{ ในเทอมของ x)}$$

$$= -\frac{2e^{1/x^2}}{x^3}$$

จากสูตรที่ 7.3.5 จะได้สูตรสำหรับการอินทิเกรต ดังต่อไปนี้คือ

$$\int e^u du = e^u + c \qquad (7.3.7)$$

**ตัวอย่างที่ 8** จงหาค่าของ $\int \frac{e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}\, dx$

**วิธีทำ** ให้ $u = \sqrt{x}$ $\therefore du = \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}dx$ $\therefore du = 2x^{\frac{1}{2}}\, du$

$$\int \frac{e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}\, dx = 2\int \frac{e^u}{\sqrt{x}}\sqrt{x}\, du = 2\int e^u du$$

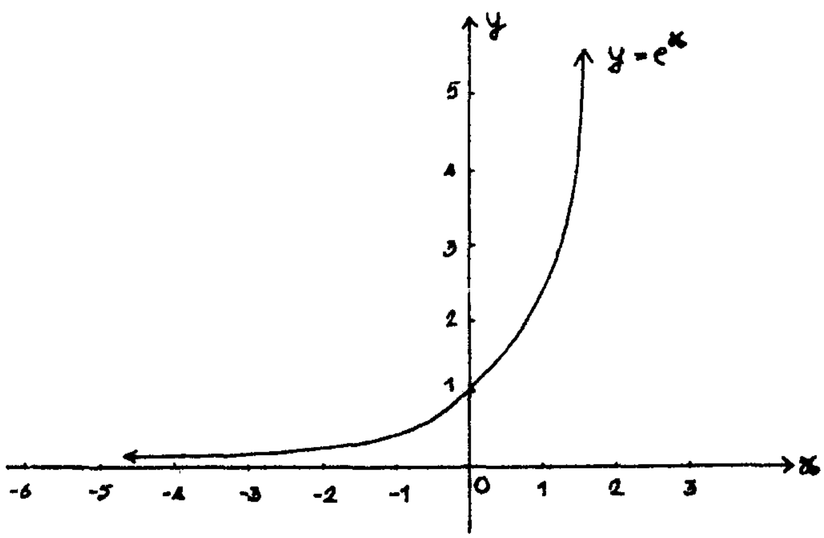
$$= 2e^u + C \quad \text{(จากสูตรที่ 7.3.7)}$$

$$= 2e^{\sqrt{x}} + C$$

จากนิยามของ logarithmic function ได้ว่า

$e^x = y$ ก็ต่อเมื่อ $x = \ln y$

ดังนั้นกราฟของ $e^x$ ก็เหมือนกับกราฟของ $x = \ln y$ เพียงแต่เปลี่ยนแกน x เป็นแกน y เท่านั้น ดังนั้นจะได้กราฟของ $y = e^x$ ดังในรูป 7.3.1




รูป 7.3.1

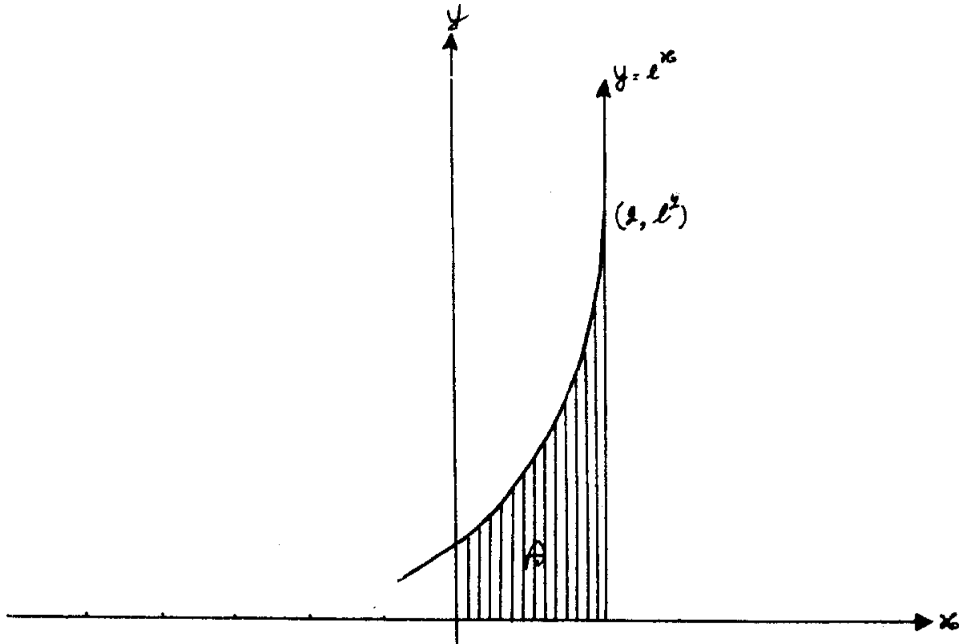
จาก $y = e^x$ พิสัยของ exponential function จะเป็นค่าบวกเท่านั้น

$\therefore$ $e^x > 0$ สำหรับทุก ๆ ค่าของ $x$ ดังนั้นกราฟจะอยู่เหนือแกน $x$ ขึ้นไป และค่าของฟังก์ชัน จะมีค่าเพิ่มขึ้น เมื่อ $x$ เพิ่มขึ้น กราฟจะเป็นรูปเว้าเข้า และหงายขึ้น และจะได้ว่า

$$\lim_{x\to\infty} e^x = +\infty \quad \text{และ} \quad \lim_{x\to\infty} e^x = 0$$

**ตัวอย่างที่ 7.3.4** จงหาพื้นที่ของบริเวณหนึ่งซึ่งล้อมรอบโดยเส้น $y = e^2$, เส้นโคออร์ดิเนต และเส้น $x = 2$

**วิธีทำ** จากโจทย์ ถ้าวาดรูปบริเวณนี้จะได้ดังรูป 7.3.2




รูป 7.3.2

ให้ A เป็นพื้นที่ของบริเวณที่ต้องการจะหา

$$A = \int_0^2 e^x dx = e^x \Big]_0^2 = e^2 - e^0$$

$$= e^2 - 1$$

จากตารางท้ายหนังสือ $e^2 = 7.39$

$\therefore$ A $= 7.39 - 1 = 6.39$ ตารางหน่วย

**ตัวอย่างที่ 5** ให้ $y = e^{2x+\ln x}$ จงหาค่าของ $\frac{dy}{dx}$

**วิธีทำ** จาก $y = e^{2x+\ln x}$

$$= e^{2x} x$$

$$\frac{dy}{dx} = x \frac{de^{2x}}{dx} + e^{2x} \frac{dx}{dx}$$

$$= 2xe^{2x} + e^{2x}$$

จาก natural logarithmic function และ exponential function ซึ่งได้ให้นิยามของเลขจำนวน e นี้ว่าเป็นเลขซึ่ง $\ln e = 1$ จะสามารถให้นิยามของเลขจำนวน e นี้อีกวิธีหนึ่งได้โดยพิจารณาฟังก์ชัน

$$f(x) = \ln(x)$$

$$f'(x) = \frac{1}{x}$$

ดังนั้น $f'(1) = 1$

ถ้าหาค่าของ $f'(1)$ โดยใช้นิยามของอนุพันธ์จะได้ว่า

$$f'(1) = \lim_{\Delta x\to 0} \frac{f(1+\Delta x)-f(1)}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x\to 0} \frac{f(1+\Delta x)-\ln 1}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x\to 0} \frac{1}{\Delta x} \ln(1+\Delta x) = 1$$

ให้ $\Delta x = h$ และจากทฤษฎี4.3.3 สมการข้างบนนี้จะได้ว่า

$$\lim_{h\to 0} \ln(1+h)^{1/h} = 1 \qquad (7.3.8)$$

แต่จาก exponential function เป็นพึงก์ชันผกผันของ natural logarithmic function จึงได้ว่า

$$\lim_{h\to 0} (1+h)^{1/h} = \lim_{h\to 0} \exp\left[\ln(1+h)^{1/h}\right] \qquad (7.3.9)$$

และจาก exponential function เป็นฟังก์ชันต่อเนื่อง และ $\lim_{h\to 0} \ln (1+h)^{1/h}$

มีค่าที่เป็นไปได้

$$\therefore \lim_{h\to 0} \exp \left[ \ln (1+h)^{1/h} \right] = \exp \left[ \lim_{h\to 0} \ln (1+h)^{1/h} \right]$$

$$= \exp 1 = e \quad (\text{เพราะว่า } \lim_{h\to 0} \ln (1+h)^{1/h} = 1)$$

แทนค่าลงใน (7.3.9) จะได้

$$\lim_{h\to 0} (1+h)^{1/h} = e \qquad (7.3.10)$$

ซึ่งอาจจะใช้สมการ (7.3.10) นี้ในการให้นิยามของเลขจำนวน e นี้ได้ จากตาราง ต่อไปนี้เราสามารถจะพิจารณาได้ว่าค่าของ e จะอยู่ระหว่าง 2.7169 และ 2.7196

ให้ $F(h) = (1+h)^{1/h}$

| h | 1 | 0.5 | 0.05 | 0.01 | 0.001 | -0.001 | -0.01 | -0.05 | -0.5 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $F(h) = (1+h)^{1/h}$ | 2 | 2.25 | 2.65 | 2.70 | 2.7169 | 2.7196 | 2.73 | 2.79 | ‘4 |

## แบบฝึกหัด 7.3

1. จงเขียนกราฟของ $y = e^{-x}$
2. จงเขียนกราฟของ $y = e^{|x|}$

จากข้อ 3 ถึงข้อ 14 จงหาค่าของ $\frac{dy}{dx}$

3. $y = 2e^{-4x}$
4. $y = e^{5x}$
5. $y = e^{-3x^2}$
6. $y = \frac{e^x}{x}$
7. $y = \frac{e^{2x}}{x^2}$
8. $y = e^{e^x}$
9. $y = \frac{e^x + e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$
10. $y = \ln \frac{e^{4x}-1}{e^{4x}+1}$
11. $y = x^5 e^{-3\ln x}$
12. $y = \ln (e^x + e^{-x})$
13. $y = e^{x\ln x}$
14. $y = e^{x/\sqrt{4+x^2}}$

จากข้อ 15 ถึงข้อ 18 จงหาค่าของ $\frac{dy}{dx}$ โดยวิธี Impli r't differentiation

15. $e^x + e^y = e^{x+y}$
16. $ye^{Lx} + xe^{2y} = 1$
17. $y^2 e^{2x} + xy^3 = 1$
18. $e^y = \ln (x^3 + 3y)$

จากข้อ 19 ถึงข้อ 26 จงหาค่าของ indefinite integral

19. $\int e^{2-5x} \, ds$

20. $\int e^{2x+1} \, dx$

21. $\int \frac{1 + e^{2x}}{e^{x}} \, d \; s$

22. $\int e^{3x} \; e^{2x} \, dx$

23. $\int \frac{e^{3x}}{(I - 2e^{3x})^2} \, dx$

24. $\int x^{2} e^{2x^{3}} \, dx$

25. $\int \frac{e^{2x}}{e^{x} + 3} \, dx$

26. $\int \frac{dx}{1 + e^{x}}$

จากข้อ 27 ถึงข้อ 30 จงหาค่าของ definite integral

27. $\int_0^1 e^{2x} \, dx$

28. $\int_1^2 \frac{e^{2x}}{e^{x} + e} \, dx$

29. $\int_0^2 xe^{4-x^2} \, dx$

30. $\int_0^3 \frac{e^{x} + e^{-x}}{2} \, dx$

## 7.4 พังก์ชันลอการิธึม และเอกซ์โพเนนเชียลอื่น ๆ

จากเรื่องของ **natural** logarithmic function และ exponential function เราจะได้ว่า

$$a^x = e^{x \ln a}$$

จะให้นิยามต่อไปนี้คือ

**นิยาม 7.4.1** ถ้า a เป็นเลขจำนวนจริงบวกใด ๆ และ x เป็นเลขจำนวนจริงใด ๆ แล้ว จะนิยามพังก์ชัน f เมื่อ $f(x) = a^x$ ว่าเป็น exponential function ซึ่งมีฐาน a

exponential function ซึ่งมีฐาน a นี้จะมีคุณสมบัติเหมือนกับ exponential function ซึ่งมีฐาน e นั่นคือ

$$a^x a^y = a^{x+y}$$

$$a^x \div a^y = a^{x-y}$$

$$(a^x)^y = a^{xy}$$

$$(ab)^x = a^x b^x$$

$$a^0 = 1$$

ในการหาค่าอนุพันธ์ของ exponential function ฐาน a นั้นจะเขียน

$$a^x = e^{x \ln a}$$

$$\frac{d}{dx}(a^x) = \frac{d}{dx}(e^{x \ln a})$$

$$= e^{x \ln a} \frac{d}{dx}(x \ln a) \quad \text{ใช้ chain rule}$$

$$= e^{x \ln a}(\ln a) \quad \left(\frac{dx}{dx} = 1\right)$$

$$\frac{d}{dx}(a^x) = a^x \ln a \qquad (7.4.1)$$

ถ้าให้ u เป็นพังก์ชันของ x ซึ่งหาอนุพันธ์ได้แล้ว

$$\frac{d}{dx}(a^u) = a^u \ln a \frac{du}{dx} \qquad (7.4.2)$$

เช่น ถ้าให้ $y = 3^{x^2}$

$\therefore \frac{dy}{dx} = 3^{x^2} \ln 3 \frac{d(x^2)}{dx}$ (ใช้สูตร 7.4.2 เมื่อ $n = x^2$, $a = 3$)

$\frac{dy}{dx} = 3^{x^2} \ln 3 \ (2x)$

และจากสูตร 7.4.2 จะได้สูตร 7.4.3 ว่า

$$\int a^u du = \frac{a^u}{\ln a} + C \qquad (7.4.3)$$

**ตัวอย่างที่** 7.4.1 จงหาค่าของ $\int \sqrt{10^{3x}}\, dx$

**วิธีทำ** $\int \sqrt{10^{3x}}\, dx = \int 10^{\frac{3x}{2}}\, dx$

**จะใช้สูตร 3 ในที่นี้** $a = 10$, $u = \frac{3x}{2}$ $\therefore du = \frac{3}{2}\, dx$ $\therefore dx = \frac{2}{3}\, du$

$\therefore \int 10^{\frac{3x}{2}}\, dx = \frac{2}{3} \int 10^u du$ (แทนค่า u)

$= \frac{2}{3} \frac{10^x}{\ln 10} + C$ (จากสูตร 7.4.3)

$= \frac{2}{3} \cdot \frac{10^{\frac{3x}{2}}}{\ln 10} + C$ (แทนค่า x)

**ตัวอย่างที่** 7.4.2 จงเขียนกราฟของ $y = 2^x$ และ $y = 2^{-x}$ บนแกน x,y เดียวกัน และจงหาพื้นที่ของบริเวณซึ่งล้อมรอบโดยกราฟทั้ง 2 เส้นนี้ และเส้น $x = 2$

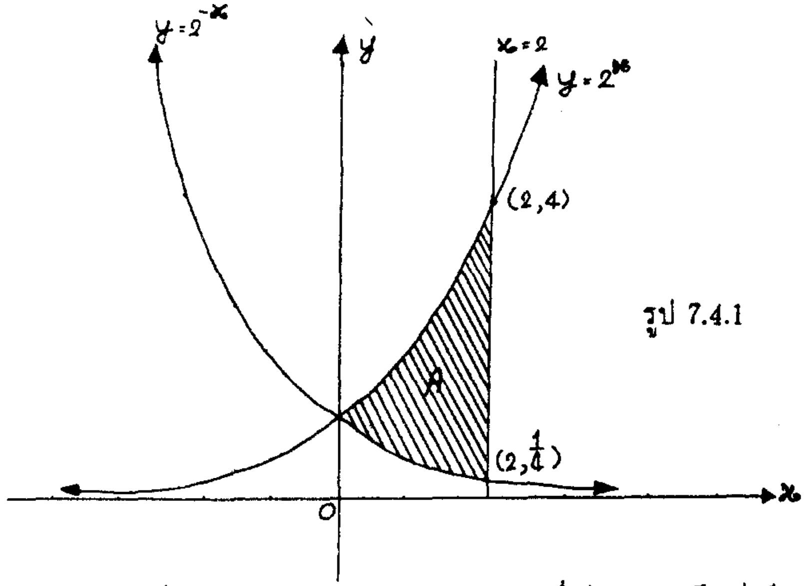
**วิธีทำ** ให้ A เป็น พ.ท. ของบริเวณ ที่เราต้องการจะหา

$\therefore A = \int_0^2 (2^x - 2^{-x})\, dx$

$= \frac{2^x}{\ln 2} + \frac{2^{-x}}{\ln 2} \Big]_0^2$

$= \frac{4}{\ln 2} + \frac{\frac{1}{4}}{\ln 2} - \frac{1}{\ln 2} - \frac{1}{\ln 2}$

$= \frac{9}{4 \ln 2} \sim 3.25$




รูป 7.4.1

จากกราฟจะเห็นได้ว่า exponential function ซึ่งมีฐาน a เป็นฟังก์ชัน ต่อเนื่อง และเป็นฟังก์ชัน ซึ่งมีค่าเพิ่มขึ้น เมื่อ x มีค่าเพิ่มขึ้นตลอดในช่วงโดเมนทั้งหมด, ดังนั้น สำหรับ x ซึ่งเป็นเลขจำนวนบวกใด ๆ จะมีเลขจำนวนจริง y หนึ่งตัวเท่านั้น ซึ่งทำให้

$$x = a^y$$

จากคุณสมบัติที่จึงจะให้นิยามของ logarithmic function ซึ่งมีฐาน a เมื่อ a เป็นเลขจำนวนบวกใด ๆ ซึ่งไม่เท่ากับ 1

**นิยาม 7.4.2** ให้ a เป็นเลขจำนวนจริงบวกใด ๆ ซึ่ง $a \neq 1$ ถ้า x เป็นเลขจำนวนจริงบวกใด ๆ จะมีเลขจำนวนจริง y เพียง 1 ตัวเท่านั้น ซึ่ง $a^y = x$, y นี้จะเป็นค่าของ logarithmic function ซึ่งมีฐาน a ที่ x และใช้สัญลักษณ์ว่า $\log_a x$ ดังนั้น

$y = \log_a x$ ก็ต่อเมื่อ $a^y = x$

$\log_a x$ อ่านว่า logarithm ของ x ซึ่งมีฐาน a

คุณสมบัติของ $\log_a x$ ก็คล้ายกับ $\ln x$ นั่นคือ

$$\log_a (xy) = \log_a x + \log_a y$$

$$\log_a (x \div y) = \log_a x - \log_a y$$

$$\log_a 1 = 0$$

$$\log_a x^y = y \log_a x$$

ต่อไปนี้จะหาความสัมพันธ์ระหว่าง $\log_a x$ และ $\ln a$

ให้ $\quad y = \log_a x$

ดังนั้น $\quad a^y = x \qquad$ (จากนิยาม)

$\ln a^y = \ln x \qquad$ (ใส่ ln ทั้ง 2 ข้างของสมการ)

$y \ln a = \ln x$

$$y = \frac{\ln x}{\ln a}$$

$$\log_a x = \frac{\ln x}{\ln a} \qquad \text{(แทนค่า } y = \log_a x) \qquad (7.4.4)$$

จากสูตรที่ 7.4.4 ถ้าให้ $x = e$

$$\therefore \log_a e = \frac{\ln e}{\ln a} = \frac{1}{\ln a} \qquad (7.4.5)$$

จาก (7.4.4) หาอนุพันธ์ทั้ง 2 ข้างเทียบกับ x

$$\therefore \frac{d}{dx}(\log_a x) = \frac{1}{\ln a}\frac{d}{dx}(\ln x)$$

$$\frac{d}{dx}(\log_a x) = \frac{1}{\ln a}\cdot\frac{1}{x}$$

$$= \log_a e \cdot \frac{1}{x} \qquad \text{(แทนค่า } \log_a e \text{ จาก 7.4.5)}$$

ถ้าให้ u เป็นฟังก์ชันของ x ซึ่งหาอนุพันธ์ได้แล้ว

$$\frac{d}{dx}(\log_a n) = \frac{\log_a e}{u}\frac{d(u)}{dx} \qquad \text{————} \qquad (7.4.6)$$

**ตัวอย่างที่ 7.4.3** กำหนดให้ $y = \log_{10}\frac{x+1}{x^2+1}$ จงหาค่าของ $\frac{dy}{dx}$

**วิธีทำ** จาก $y = \log_{10}\frac{x+1}{x^2+1}$

หรือ 4' = log,, $(x+1) - \log_{10}(x^2+1)$

ดังนั้น $\frac{dy}{dx} = \frac{\log_{10} e}{x+1}\frac{d(x+1)}{dx} - \frac{\log_{10} e}{x^2+1}\frac{d(x^2+1)}{dx}$ (จากสูตร 7.4.6)

$$= \frac{\log_{10} e}{x+1} - \frac{2x \log_{10} e}{x^2+1}$$

$$= \log_{10} e \left[\frac{1}{(x+1)} - \frac{2x}{x^2+1}\right]$$

$$= \frac{\log_{10} e \ (1-2x-x^2)}{(x+1)(x^2+1)}$$

**ทฤษฎี 7.4.1** ถ้า n เป็นเลขจำนวนจริงใด ๆ และฟังก์ชัน f นิยามโดย

$f(x) = x^n$ เมื่อ $x > 0$

แล้ว $f'(x) = nx^{n-1}$ (7.4.7)

**พิสูจน์** ให้ $y = x^n$

$y = e^{n\ln x}$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = e^{n\ln x}\left(\frac{n}{x}\right) = x^n \frac{n}{x} = nx^{n-1}$$

**ตัวอย่างที่ 7.4.4** กำหนดให้ $y = x^x$ จงหาค่าของ $\frac{dy}{dx}$

**วิธีทำ** จาก $y = x^x$

ดังนั้น $|y| = |x^x|$

$$\ln|y| = \ln|x^x|$$

$$\ln|y| = x\ln|x|$$

$$\frac{1}{y}\frac{dy}{dx} = \ln|x| + x\frac{1}{x}$$ (ใส่อนุพันธ์ทั้ง 2 ข้าง)

$$\frac{dy}{dx} = y(\ln|x| + 1)$$

$$= x^x(\ln|x| + 1)$$

# แบบฝึกหัด 7.4

จากข้อ 1 ถึงข้อ 22 จงหาค่าของ $f'(x)$

1. $f(x) = 10^x$
2. $f(x) = 2^{3x}$
3. $f(x) = 3^{5x}$
4. $f(x) = 6^{-3x}$
5. $f(x) = 8^{x^2}$
6. $f(x) = 10^{x^3}$
7. $f(x) = 2^{5x}3^{4x^2}$
8. $f(x) = (x^3 + 3)\,2^{-7x}$
9. $f(x) = \frac{\log_{10} x}{x}$
10. $f(x) = \log_{10} \frac{x}{x+1}$
11. $f(x) = \sqrt{\log_a x}$
12. $f(x) = \log_{10} \frac{1+x}{1-x}$
13. $f(x) = \log_{10}$ [ log,, $(x+1)$ ]
14. $f(x) =$ log:, [ log, $(\log_a x)$ ]
15. $f(x) = x^{\sqrt{x}}$
16. $f(x) = x^{\ln x}$
17. $f(x) = x^{e^x}$
18. $f(x) = x^{x^2}$

19. $f(x) = (e^x)^x$

20. $f(x) = (\ln x)^{\ln x}$

21. $f(x) = (\ln x)^x$

22. $f(x) = (4e^x)^{3x}$

จากข้อ 23 ถึงข้อ 32 จงหาค่าของ indefinite integral

23. $\int 3^{2x}\, dx$

24. $\int a^{nx}\, dx$

25. $\int a^x e^x\, dx$

26. $\int (e^{3x} + a^{3x})\, dx$

27. $\int x^2\, 10^{x^3}\, dx$

28. $\int 5^{x^4+2x}\, (2x^3 + 1)\, dx$

29. $\int \dfrac{10^{\ln x^2}}{x}\, dx$

30. $\int a^{x \ln x}\, (\ln x + 1)\, dx$

31. $\int e^x\, 2^{e^x}\, 3^{e^x}\, dx$

32. $\int \dfrac{4^{\ln (1/x)}}{x}\, dx$.

33. จงเขียนกราฟของ $y = \log_{10} x$ และ $y = \ln x$ บนแกนโคออร์ดิเนตเดียวกัน

34. จงหาสมการของเส้นสัมผัสเส้นโค้ง $y = x^{x-1}$ ที่จุด (2, 2)

35. สมการของอุปสงค์ของสินค้าชนิดหนึ่ง คือ $p = 10.4^{-x/2}$ เมื่อ $x$ หน่วยเป็นปริมาณของอุปสงค์ และ $p$ บาท เป็นราคาต่อหน่วย ถ้าราคาตลาดเท่ากับ 5 บาท จงหาส่วนเกินของผู้บริโภค พร้อมทั้งวาดรูปแสดงถึงเส้นอุปสงค์ และแสดงส่วนของพื้นที่ ซึ่งเป็นส่วนเกินของผู้บริโภค

36. สมการของอุปทานของสินค้าชนิดหนึ่งคือ $p = 5.3^{x/4}$ เมื่อ x หน่วยเป็นปริมาณของการเสนอขาย และ p บาท เป็นราคาต่อหน่วย จงหาส่วนเกินของผู้ผลิต เมื่อราคาตลาดเท่ากับ 3 บาท ให้แสดงรูปของเส้นอุปทาน และแสดงส่วนของพื้นที่ซึ่งเป็นส่วนเกินของผู้ผลิต

37. รูปภาพทางประวัติศาสตร์ที่สำคัญรูปหนึ่ง ซึ่งซื้อมาเมื่อปี 1918 ในราคา 200 บาท มูลค่าของรูปจะเพิ่มขึ้นเป็น 2 เท่าของราคาที่ซื้อมาในทุก ๆ 10 ปี ถ้าให้ y บาท เป็นมูลค่าของรูปภาพในเวลา t ปี ที่ซื้อมา

   a) แสดง y ในรูปของ t

   b) มูลค่าของรูปจะเป็นเท่าไรในปี 1978

   c) จงหาอัตราการเพิ่มขึ้นของมูลค่าของรูปภาพในปี 1978

38. บริษัทหนึ่งคาดคะเนว่าในเวลา t ปี ปริมาณของคนงานจะเท่ากับ N, เมื่อ $N = 1000\ (0.8)^{t/2}$

   a) จงหาว่าปริมาณของคนงานจะเป็นเท่าไรใน 4 ปี

   b) และอัตราการเปลี่ยนแปลงของคนงานจะเป็นเท่าไรใน 4 ปี

39. บริษัทแห่งหนึ่งทราบว่า เมื่อมีการเริ่มแข่งขันทางด้านการขายใหม่ขึ้น ปริมาณของการขายจะเพิ่มขึ้น ต่อวัน แต่อย่างไรก็ตาม ปริมาณของการขายที่เพิ่มขึ้นแต่ละวันจะลดลง เนื่องจากอิทธิพลของการแข่งขันค่อย ๆ หมดไป ในการแข่งขันครั้งหนึ่งบริษัทกำหนดให้ว่า ถ้า S เป็นปริมาณของการขายที่เพิ่มขึ้นในแต่ละวัน เนื่องจากการแข่งขัน และ x เป็นจำนวนวัน นับจากการแข่งขันสิ้นสุดลง เมื่อ $S = 100.3^{-x/2}$ จงหาอัตราของการลดลงของยอดขายที่เพิ่มขึ้น เมื่อ

   a) $x = 4$ b) $x = 10$

40. บริษัทผู้ผลิตสินค้าชนิดหนึ่งได้กำหนดให้ว่า ถ้า x เป็นร้อยหน่วยของผลผลิตที่ผลิตได้ต่อหนึ่งสัปดาห์ มีต้นทุนส่วนเพิ่มเท่ากับ $2^{x/2}$ และรายได้ส่วนเพิ่มเท่ากับ $8.2^{-x/2}$ โดยให้ค่าใช้จ่าย และรายได้จากการผลิตคิดเป็นพันบาท ถ้าต้นทุนคงที่ต่อสัปดาห์เท่ากับ 2,000 บาท จงหาผลกำไรสูงสุดต่อหนึ่งสัปดาห์ที่จะได้รับ

## 7.5 กฎการเจริญเติบโตและการสลายตัว(Laws of Growth And Decay)

จากที่ได้ศึกษาถึงเรื่อง exponential function มาแล้วสามารถจะใช้นำมาช่วยในด้านธุรกิจ เศรษฐศาสตร์ และวิทยาศาสตร์ ทั้งในสาขาวิชา ชีววิทยา, เคมี, ฟิสิคซ์ เป็นต้น เช่นตัวอย่างของปัญหาต่อไปนี้

1. อัตราการเจริญเติบโตของจำนวนประชากรในนิคมหนึ่งเป็นสัดส่วนกับจำนวนประชากรในขณะนั้น
2. ภายในสิ่งแวดล้อมอันหนึ่ง อัตราการเจริญเติบโตของแบคทีเรียเป็นสัดส่วนกับจำนวนของแบคทีเรียในเวลาที่กำหนดให้
3. ในการทดลองอันหนึ่งพบว่าอัตราการสลายตัวของเรเดียมเป็นสัดส่วนกับจำนวนของเรเดียมในขณะนั้นในระยะเวลาที่กำหนดให้

ถ้าให้ $t$ หน่วย แทนเวลา

$A$ หน่วย แทนปริมาณ

$$\frac{dA}{dt} = kA \qquad (7.5.1)$$

เมื่อ $k$ เป็นค่าคงที่ ถ้า $A$ เพิ่มขึ้น ขณะที่ $t$ เพิ่มขึ้น แล้ว $k > 0$

เราจะได้ (7.5.1) เป็นกฎการเติบโตโดยธรรมชาติ (Law of natural growth)

ถ้า $A$ ลดลง ขณะที่ $t$ เพิ่มขึ้น แล้ว $k < 0$

เราจะได้ (7.5.1) เป็นกฎการสลายตัวโดยธรรมชาติ (Law of natural decay)

**ตัวอย่างที่ 7.5.1** อัตราการเพิ่มของประชากรของเมือง ๆ หนึ่งเป็นสัดส่วนกับจำนวนประชากร ถ้าจำนวนประชากรในปี 1930 มี 50,000 คน และในปี 1960 มี 75,000 อยากทราบว่าในปี 1990 จะมีประชากรจำนวนเท่าใด

**วิธีทำ** ให้ปี 1930 เป็นปีเริ่มต้น

$t$ เป็นจำนวนปี

$A$ เป็นจำนวนของประชากรในเวลา $t$ ปี

| $t$ | 0 | 30 | 60 |
|---|---|---|---|
| $A$ | 50,000 | 75,000 | $A_{60}$ |

จาก $\frac{dA}{dt} = kA$

$$\frac{dA}{A} = k\,dt$$

$$\int \frac{dA}{A} = k\int dt$$

$$\ln|A| = kt + C_1$$

$$|A| = e^{kt+C_1} = e^{C_1}\cdot e^{kt}$$

ให้ $e^{C_1} = C$

$\therefore$ $|A| = Ce^{kt}$

$$A = Ce^{kt} \qquad \text{——— (7.5.2)}$$

จาก $t = 0$, $A = 50,000$

แทนค่าใน (7.5.2) จะได้

$$50,000 = c$$

แทนค่า $c$ ใน (7.5.2.) จะได้

$$A = 50,000\, e^{kt} \qquad \text{——— (7.5.3)}$$

จาก $A = 75,000$ , $t = 30$

$\therefore$ $75,000 = 50.000\, e^{30k}$

$$e^{30k} = \frac{3}{2}$$

เมื่อ $t = 60$, $A = A_{,}$, (จำนวนประชากรในเวลา 60 ปี) แทนใน (7.5.3)

$$A_{60} = 50,000\ e^{60k} = 50,000\ (e^{30k})^2$$

$$= 50,000\ (\tfrac{3}{2})^2 = 50,000 \times \tfrac{9}{4}$$

$$A_{60} = 112,500$$

$\therefore$ จำนวนประชากรที่คาดว่าจะมีในปี 1990 = 112,500 คน

**ตัวอย่างที่ 7.5.2 ในการเพาะพันธุ์แบคทีเรียชนิดหนึ่ง อัตราการเจริญเติบโตของแบคทีเรียเป็นสัดส่วนกับจำนวนของแบคทีเรียในขณะนั้น ถ้ามีจำนวนแบคทีเรีย 1,000 ในเวลาเริ่มต้นของการทดลอง และมีเพิ่มขึ้นเป็น 2 เท่าในเวลา 12 นาที จะต้องใช้เวลานานเท่าไร เพื่อที่จะให้มีแบคทีเรียจำนวน 1,000,000**

| t | 0 | 12 | T |
|---|---|---|---|
| A | 1,000 | 2,000 | 1,000,000 |

ให้ A เป็นจำนวนของแบคทีเรียในเวลา t นาที
t เป็นเวลาคิดเป็นนาที

จากโจทย์ $\dfrac{dA}{dt} = kA$

โดยการแยกตัวแปรค่าเราจะได้รากของสมการทั่ว ๆ ไปคือ

$$A = Ce^{kt} \quad (1)$$

จากตาราง เมื่อ $t = 0$, $A = 1,000$ แทนค่าใน (1)

$\therefore$ $1,000 = C$

$\therefore$ จาก (1) $A = 1,000e^{kt}$ (2)

จากตาราง $t = 32$, $A = 2,000$

$\therefore$ $2,000 = 1,000e^{12k}$

$\therefore e^{12k} = 2$. $\therefore$ $k = \frac{1}{12}\ln 2 = 0.05776$

$$A = 1,000\ e^{0.05776t} \quad (3)$$

จากตาราง $t = T$, $A = 1,000,000$

แทนใน (3)

$$1,000,000 = 1.000\ e^{0.05776T}$$

$$\therefore e^{0.05776T} = 1,000$$

$$0.05776T = \ln 1,000$$

$$T = \frac{\ln 1,000}{0.05776} = 119.6$$

∴ ถ้าให้มีจำนวนแบคทีเรีย 1,000,000 จะต้องใช้เวลา 1 ชม. 59 นาที 36 วินาที ตอบ

**ตัวอย่างที่ 7.5.3** อัตราการสลายตัวของเรเดียมเป็นสัดส่วนกับจำนวนของเรเดียมในเวลาใด ๆ ถ้าปัจจุบันมีเรเดียมจำนวน 60 มิลลิกรัม และสารนี้จะสลายตัวไปครึ่งหนึ่งจากจำนวนปัจจุบันเมื่อเวลาผ่านไป 1,690 ปี จงหาว่าเมื่อเวลาผ่านไป 100 ปี จะเหลือเรเดียมเท่าใด

| t | 0 | 1690 | 100 |
|---|---|---|---|
| A | 60 | 30 | $A_{100}$ |

ให้ t ปี เป็นจำนวนของปี
A มิลลิกรัม เป็นจำนวนของเรเดียม

$$\frac{dA}{dt} = kA$$

จากตัวอย่างที่ 1

$$A = Ce^{kt} \qquad \text{——— (1)}$$

จากตาราง $t = 0$, $A = 60$ แทนใน (1)

$$60 = C$$

จาก (1) $$A = 60e^{kt} \qquad \text{——— (2)}$$

จากตาราง $A = 30$, $t = 1690$ แทนใน (2)

$$30 = 60e^{1690k}$$

$$0.5 = e^{1690k}$$

$$\therefore \ln 0.5 = 1690k$$

$$k = \frac{\ln 0.5}{1690} = -\frac{0.6931}{1690} = -0.000410$$

แทนค่า k ใน (2)

$$A = 60\, e^{-0.000410\,t}$$

เมื่อ $t = 100$, $A = A_{100}$

$$A_{100} = 60e^{-0.0410} = 57.6$$

$\therefore$ จะมีเรเดียม 57.6 มิลลิกรัม ในเวลา 100 ปี

**ตัวอย่างที่ 7.5.4** ในอ่างเก็บน้ำแห่งหนึ่งมีน้ำผสมกับฟลูออร์ไรด์อยู่ 100 ล้านแกลลอน ซึ่งมีฟลูออร์ไรด์อยู่ 700 ปอนด์. เพื่อที่จะให้ปริมาณของฟลูออร์ไรด์ลดน้อยลงได้ทำการปล่อยน้ำบริสุทธิ์เข้าไปในอ่างเก็บน้ำด้วยอัตรา 3 ล้านแกลลอนต่อวัน และปริมาณของส่วนผสมระหว่างน้ำกับฟลูออร์ไรด์จะไหลออกจากอ่างเก็บน้ำด้วยอัตรา 3 ล้านแกลลอนต่อวัน อยากทราบว่าจะมีจำนวนฟลูออร์ไรด์กี่ปอนด์อยู่ในอ่างเก็บน้ำ หลังจากปล่อยน้ำบริสุทธิ์เข้าไปในอ่างเก็บน้ำได้ 60 วัน

**วิธีทำ** ให้ $t$ เป็นจำนวนวันที่เริ่มปล่อยน้ำบริสุทธิ์เข้าไปในอ่างเก็บน้ำ

$x$ ปอนด์ เป็นปริมาณของฟลูออร์ไรด์ซึ่งอยู่ในอ่างเก็บน้ำหลังจากปล่อยน้ำบริสุทธิ์เข้าไปเป็นเวลา $t$ วัน

จากโจทย์ จะได้ตารางว่า

| | | |
|---|---|---|
| $t$ | 0 | 60 |
| $x$ | 700 | $x_{60}$ |

ในเวลา $t$ วัน ในอ่างจะมีฟลูออร์ไรด์อยู่ $x$ ปอนด์

ในน้ำผสมกับฟลูออร์ไรด์ 100 ล้านแกลลอนจะมีฟลูออร์ไรด์อยู่ $x$ ปอนด์

,, ———— ,, 1 ล้าน ,, ———— ,, $\frac{x}{100}$ ,,

แต่ใน 1 วัน ส่วนผสมจะไหลออกจากอ่างด้วยอัตรา 3 ล้านแกลลอนต่อวัน

$\therefore$ ส่วนผสม 1 ล้านแกลลอนมีฟลูออร์ไรด์ $\frac{x}{100}$ ปอนด์

,, 3 ,, ———— ,, $\frac{3x}{100}$ ,,

$\therefore$ ใน 1 วัน ฟลูออร์ไรด์จะลดลงจากในอ่างเป็นปริมาณ $\frac{3x}{100}$ ปอนด์

$\frac{dx}{dt}$ เป็นอัตราการเปลี่ยนแปลงของ $x$ เมื่อเทียบกับ $t$

ในที่นี้ เมื่อ $t$ เพิ่มขึ้น $x$ จะลดลง ดังนั้นจะได้ว่า

$$\frac{dx}{dt} = -\frac{3x}{100}$$

$$\therefore \int \frac{dx}{x} = -\frac{3}{100}\int dt$$

$$\ln |x| = -0.03t + C_1$$

$$x = Ce^{-0.03t} \qquad (1)$$

จากตาราง เมื่อ $t = 0,\ x = 700$ แทนค่าใน (1)

$$\therefore 700 = c$$

จาก (1) แทนค่า $c$, $x = 700e^{-0.03t}$ (2)

จากตาราง $t = 60,\ x = x_{60}$ แทนค่าใน (2)

$$x_{60} = 700e^{-0.03(60)} = 700e^{-1.8}$$

$= 700(0.1653)$ (จากตารางของ exponential function)

$= 115.71$

$\therefore$ จะมีปริมาณของฟลูออร์ไรด์อยู่ 115.71 ปอนด์ หลังจากปล่อยน้ำบริสุทธิ์เข้าไปในอ่างเก็บน้ำได้ 60 วัน

**ตัวอย่างที่ 7.5.5** กฎของนิวตันเกี่ยวกับการถ่ายเทอุณหภูมิของร่างกายกล่าวไว้ว่าอัตราการเปลี่ยนแปลงอุณหภูมิของร่างกาย เป็นสัดส่วนกับผลต่างระหว่างอุณหภูมิของร่างกายกับอุณหภูมิโดยรอบ ถ้าร่างกายอยู่ในบรรยากาศซึ่งมีอุณหภูมิ 35° และร่างกายเย็นลงจาก 120° เป็น 60° ในเวลา 40 นาที จงหาอุณหภูมิของร่างกาย หลังจากผ่านไป 100 นาที ในบรรยากาศนั้น

**วิธีทำ** ให้ t นาที เป็นเวลาที่ใช้ตั้งแต่ร่างกายเริ่มลดอุณหภูมิลง

$x$ องศา เป็นอุณหภูมิของร่างกาย เมื่อเวลาผ่านไป t นาที จากกฎของนิวตันจะได้ว่า

$$\frac{dx}{dt} = k\,(x-35)$$

$$\int \frac{dx}{x-35} = \int k\,dt$$

$$\ln\left|x-35\right| = kt + C_1$$

$$x = Ce^{kt} + 35 \qquad \text{———— (1)}$$

จากโจทย์เราจะได้ตารางว่า

| t | 0 | 40 | 100 |
|---|---|---|---|
| x | 120 | 60 | x 100 |

จากตาราง เมื่อ $t = 0,\ x = 120$ แทนใน (1)

$$\therefore\ 120 = c + 35$$

$$\therefore\ C = 85$$

แทนค่า c ใน (1)

$$x = 85e^{kt} + 35 \qquad \text{———— (2)}$$

จากตาราง เมื่อ $t = 40,\ x = 60$

$$\therefore\ 60 = 85\,e^{40k} + 35$$

$$40k = \ln\frac{5}{17}$$

$$k = \frac{1}{40}(\ln 5 - \ln 17)$$

$$= \frac{1}{40}(1.6094-2.8332)$$ (ln 51,ln 17 ดูจากตารางท้ายบท)

แทนค่า k ใน (2) $= -0.0306$

$$\therefore\ x = 85e^{-0.0306t} + 35$$

$\therefore\ x\,100 = 85\ e^{-0.0306\,(100)} + 35 = 39$

$\therefore$ ร่างกายจะมีอุณหภูมิเป็น 39° เมื่อเวลาผ่านไป 100 นาที

**ตัวอย่างที่ 7.5.6** สมมติให้ GNP (ปริมาณการผลิตต่อปี) ของเมืองๆ หนึ่ง มีอัตราการเปลี่ยนแปลงเพิ่มขึ้นเป็นสัดส่วนกับ GNP ของเมืองๆ นั้น ถ้า GNP ของเมืองนั้น ในวันที่ 1 มกราคม 1973 เป็น 80 พันล้านบาท และในวันที่ 1 มกราคม 1977 GNP ของเมืองนั้นเป็น 96 พันล้านบาท จงหาเวลาที่จะมี GNP เป็น 128 พันล้านบาท

**วิธีทำ** ให้ $t$ ปี เป็นเวลานับเริ่มต้นตั้งแต่วันที่ 1 มกราคม 1973

$x$ พันล้านบาท เป็นจำนวนของ GNP เมื่อเวลาผ่านไป $t$ ปี

จากโจทย์เราจะได้ตาราง

| t | 0 | 4 | T |
|---|---|---|---|
| x | 80 | 96 | 128 |

$$\frac{dx}{dt} = kx$$

$$\int \frac{dx}{x} = \int k\,dt$$

$$\ln|x| = kt + c_1$$

$$x = e^{kt} \cdot e^{c_1}$$

ให้ $e^{c_1} = c$

$$\therefore\ x = ce^{kt} \qquad (1)$$

จากตาราง เมื่อ $t = 0,\ x = 80$ แทนค่าใน (1)

$$80 = c$$

แทนค่า $c$ ใน (1) จะได้

$$x = 80\,e^{kt} \qquad (2)$$

จากตาราง เมื่อ $t = 4$, $x = 96$

$$96 = 80\,e^{4k}$$

$$e^{4k} = \frac{96}{80} = 1.2$$

$$\ln 1.2 = 4k$$

$$k = \frac{1}{4}\ln 1.2 = \frac{1}{4}(0.1823) \text{ (จากตารางของ ln ท้ายบท)}$$

$$= 0.0456$$

แทนค่า k ใน (2) จะได้

$$x = 80\,e^{0.0456t} \qquad \text{——————} \qquad (3)$$

จากตารางเมื่อ แทนใน $x = 128$, $t = T$ แทนใน (3)

$$128 = 80\,e^{0.0456T}$$

$$e^{0.0456T} = \frac{128}{80} = 1.6$$

$$0.0456\,T = \ln 1.6$$

$$T = \frac{\ln 1.6}{0.0456} = \frac{0.4700}{0.0456} = 10.3$$

∴ GNP คาดว่าจะเป็น 128 พันล้านบาท ต้องใช้เวลา 10.3 ปีนับแต่วันที่ 1 มกราคม 1973 10.3 ปีนี้จะเป็นเวลาประมาณ 10 ปี 4 เดือน ∴ GNP จะเป็น 128 พันล้านบาทในวันที่ 1 พฤษภาคม 1983

## แบบฝึกหัด 7.5

1. อัตราการเพิ่มขึ้นของประชากรในเมือง ๆ หนึ่ง เป็นสัดส่วนกับจำนวนประชากรในเมือง ๆ นั้น ถ้าจำนวนประชากรเพิ่มขึ้นจาก 40,000 เป็น 60,000 ในเวลา 40 ปี อยากทราบว่า เมื่อไรจะมีประชากรเป็น 80,000

2. จำนวนประชากรของเมือง ๆ หนึ่ง เพิ่มขึ้นเป็น 2 เท่า ในระยะเวลา 60 ปี จากปี 1890 ถึงปี 1950 ถ้าอัตราการเพิ่มขึ้นของประชากรในเวลาใดก็ตามเป็นสัดส่วนกับจำนวนประชากรในเวลานั้น และถ้าประชากรในปี 1950 มี 60,000 จงคำนวณจำนวนประชากรในปี 2000

3. อัตราการเจริญเติบโตของแบคทีเรียชนิดหนึ่งในอุณหภูมิขณะหนึ่งเป็นสัดส่วนกับจำนวนแบคทีเรีย ในขณะนั้นและอุณหภูมินั้น ถ้าในระยะเริ่มแรกมีจำนวนแบคทีเรียในขณะนั้น เป็นจำนวน 1,000 และจำนวนแบคทีเรียนี้จะเพิ่มจำนวนเป็น 2 เท่าของระยะเริ่มแรก โดยใช้เวลาใน 1 ชม. อยากทราบว่าจะมีจำนวนแบคทีเรียเท่าไหร่ ในเวลา $3\frac{1}{2}$ ชม ?

4. ในอุณหภูมิที่แน่นอนแห่งหนึ่งอัตราการเจริญเติบโตของแบคทีเรียเป็นสัดส่วนกับจำนวนของแบคทีเรียในขณะนั้น ถ้าใน 3 ชม. มีจำนวนแบคทีเรียเป็น 3 เท่า ของจำนวนแบคทีเรีย เมื่อเริ่มตั้งต้น และเมื่อใช้เวลา 12 ชม. จะมีจำนวนแบคทีเรียเป็น 10 ล้าน อยากทราบว่า เมื่อเริ่มแรกมีจำนวนแบคทีเรียเป็นเท่าไหร่

5. หลังจากที่ใช้รถจักรยานยนต์ 1 ปี, อัตราของการเสื่อมราคาในระยะเวลาใด ๆ เป็นสัดส่วนกับราคาในเวลานั้น ถ้ารถจักรยานยนต์คันหนึ่งมีราคาในวันที่ 1 มิถุนายน 1975 เป็นเงิน 3,500 บาท และในวันที่ 1 มิถุนายน 1977 เป็น 2,900 บาท อยากทราบว่าวัน 1 มิถุนายน 1981 รถคันนี้จะมีราคาเป็นเท่าไหร่

6. อัตราการสลายตัวของน้ำตาลในน้ำ เป็นสัดส่วนกับปริมาณของน้ำตาล ซึ่งยังไม่สลายตัว เมื่อเริ่มใส่น้ำตาล 50 ปอนด์ลงในน้ำ ไปได้ 5 ชม. จะเหลือน้ำตาลอยู่ 20 ปอนด์ ถ้าต้องการจะให้น้ำตาลละลายไปถึง 90 % จะต้องใช้เวลานานเท่าไร ?

## 7.6 ดอกเบี้ยเชิงเดียว ดอกเบี้ยทบต้น และดอกเบี้ยทบต้นแบบต่อเนื่อง

**(Interest : Simple, Compound, And Compound Continuously)**

ในการยืมเงินกันโดยอัตราดอกเบี้ย 8% ต่อปีแล้ว เงินจำนวน 1 บาท จะต้องได้ดอกเบี้ย .08 บาท ในแต่ละปี ดังนั้นถ้ายืมเงินมา 1 บาท เมื่อครบ 1 ปี จะต้องใช้คืน 1.08 บาท

โดยทั่วๆ ไป ถ้าอัตราดอกเบี้ยเป็น $100i\%$ ต่อปีแล้ว ถ้าเรายืมเงิน 1 บาท เมื่อครบกำหนด 1 ปี จะต้องจ่ายให้เจ้าหนี้ $(1+i)$ บาท และถ้ายืมเงินมา $P$ บาท เมื่อครบกำหนด 1 ปี จะต้องใช้คืนเจ้าหนี้ถึง $P(1+i)$ บาท

ในการคิดอัตราดอกเบี้ย สำหรับการกู้ยืมนั้นมีหลายชนิด ชนิดที่ง่ายที่สุด เราเรียกว่าดอกเบี้ยเชิงเดียว (Simple interest) ซึ่งคิดจากเงินต้นที่ยืมเท่านั้น เช่น ยืมเงิน 100 บาท อัตราดอกเบี้ยเชิงเดียว 6% ต่อปี ในแต่ละปีผู้ยืมจะต้องเสียดอกเบี้ย 6 บาท และถ้ายืมเงิน $P$ บาท โดยอัตราดอกเบี้ยเชิงเดียว $100i\%$ ต่อปี เมื่อครบ 1 ปี ผู้ยืมจะต้องเสียดอกเบี้ย $Pi$ บาท ถ้ายืมเป็นเวลา $n$ ปี ผู้ยืมจะต้องเสียดอกเบี้ยถึง $Pni$ บาท

ถ้าให้ $A$ บาท เป็นจำนวนเงินที่ผู้ยืมส่งคืนให้เจ้าหนี้ทั้งต้นและดอกโดยผู้ยืมยืมเงินมา $P$ บาท อัตราดอกเบี้ยเชิงเดียว $100i\%$ ต่อปี ในระยะเวลา $n$ ปี

$$\therefore A = P + Pni \quad \text{บาท}$$

$$\boxed{A = P(1+ni) \quad \text{บาท}} \qquad \text{———} \qquad (7.6.1)$$

ในการคิดดอกเบี้ยแบบเชิงเดียวนี้ ส่วนมากจะเป็นการยืมเงินในระยะสั้นอาจจะ 30, 60, 90 วัน ในการคำนวณ เราจะคิด 1 ปี มี 360 วัน และ 1 เดือนมี 30 วัน

**ตัวอย่างที่ 7.6.1** นาย ก. ยืมเงินจากนาย ข. 500 บาท เป็นเวลา 90 วัน โดยคิดอัตราดอกเบี้ยเชิงเดียว 10% ต่อปี เมื่อครบกำหนด 90 วัน นาย ก. จะต้องคืนเงินนาย ข. เป็นจำนวนเท่าไหร่

**วิธีทำ** จากสูตร (7.6.1) $A = P(1 + ni)$

เมื่อ $A$ เป็นจำนวนเงินทั้งหมดที่จะต้องจ่ายคืน

$P$ คือเงินต้น

$n$ เป็นจำนวนปี ที่ยืมเงินไป

$i$ เป็นอัตราดอกเบี้ย เชิงเดียว

ในที่นี้ $n = \frac{90}{360}$ ปี $= \frac{1}{4}$ ปี

$i = \frac{10}{100}$ $P = 500$ บาท

$\therefore A = 500\left(1 + \frac{1}{4} \times \frac{1}{10}\right) = 500 + 12.5$

$\therefore$ เมื่อครบกำหนดนาย ก. จะต้องคืนเงินให้นาย ข. $=$ 512.50 บาท

นอกจากดอกเบี้ยเชิงเดียว แล้วก็มีการคิดดอกเบี้ยอีกชนิดหนึ่งซึ่งเรียกดอกเบี้ยชนิดนี้ว่าเป็นดอกเบี้ยทบต้น (Compound interest) ซึ่งเป็นการคิดดอกเบี้ยในแต่ละคาบเวลาเมื่อครบกำหนดคาบเวลาหนึ่ง ก็นำดอกเบี้ยรวมกับเงินต้น แล้วคิดดอกเบี้ยในเวลาต่อไปจากเงินที่รวมกันนี้ไปเรื่อย ๆ ตัวอย่างเช่น ถ้าเรายืมเงินมา 100 บาท โดยอัตราดอกเบี้ยทบต้น 4% ต่อปี คิดดอกเบี้ยทบต้น $\frac{1}{4}$ ปีต่อครั้ง ซึ่งก็คือการคิดดอกเบี้ย 3 เดือนต่อครั้ง เพราะว่า $\frac{1}{4} \times 12 = 3$ เดือน ดังนั้นเมื่อครบกำหนด ๓ เดือน เงินที่ยืม + ดอกเบี้ยจะเป็นเงิน $= 100\left(1 + \frac{.04}{4}\right)$ $= 100\,(1.01)$ ถ้ายังไม่ใช้คืน เมื่อครบกำหนด 6 เดือน เงินที่เป็นหนี้จะกลายเป็น $= 100\,(1.01)\left(1 + \frac{.04}{4}\right) = 100\,(1.01)\,(1.01)$ ถ้ายังไม่คืนอีก 9 เดือน มีหนี้ $= (100)\,(1.01)\,(1.01)\,(1.01)$ ต่อไปเรื่อย ๆ จึงสามารถจะกล่าวเป็นทฤษฎีบทได้ว่า

**ทฤษฎี 7.6.1** ถ้าฝากเงินธนาคาร P บาท โดยธนาคารคิดอัตราดอกเบี้ย 100i% ทบต้นแบบ m ครั้งต่อปี และถ้า An เป็นจำนวนเงินทั้งหมดในบัญชี เมื่อครบเวลากำหนดเวลาคิดดอกเบี้ย n ครั้ง แล้ว

$$A_n = P\left(1 + \frac{i}{m}\right)^n \qquad (7.6.2)$$

**พิสูจน์** ในการพิสูจน์ ใช้การอุปนัยทางคณิตศาสตร์ (Mathematical Induction)

ให้ $n = 1$

จะได้ $A_1 = P\left(1 + \frac{i}{m}\right)$

$$A_2 = A_1\left(1 + \frac{i}{m}\right) = \left[P\left(1 + \frac{i}{m}\right)\left(1 + \frac{i}{m}\right)\right] = P\left(1 + \frac{i}{m}\right)^2$$

ถ้า $n = k$ เป็นจริง

$$\therefore A_k = P\left(1 + \frac{i}{m}\right)^k$$

$$\therefore A_{k+1} = A_k\left(1 + \frac{i}{m}\right) = \left[P\left(1 + \frac{i}{m}\right)^k\right]\left(1 + \frac{i}{m}\right)$$

$$A_{k+1} = P\left(1 + \frac{i}{m}\right)^{k+1}$$

$\therefore$ จึงสรุปจาก การอุปนัยทางคณิตศาสตร์ว่า เป็นจริงสำหรับทุก ๆ ค่าของ n ซึ่งเป็นเลขจำนวนเต็มบวกใด ๆ

ถ้าให้ t เป็นจำนวนปี ที่เราฝากเงินไว้กับธนาคาร ด้วยเงินต้น P อัตราดอกเบี้ย 100 i % คิดดอกเบี้ยทบต้น m ครั้งต่อปี จำนวนครั้งที่เราคิดดอกเบี้ย $(n) = mt$ ให้ A เป็นจำนวนเงินทั้งหมด เมื่อครบกำหนด t ปีแล้ว

$$\boxed{A = P\left(1 + \frac{i}{m}\right)^{mt}} \qquad (7.6.3)$$

ในท้ายบทนี้จะมีตารางซึ่งแสดงค่าของ $(1 + j)^n$ ซึ่งเป็นจำนวนเงินของเงินฝาก 1 บาท หลังจากคิดดอกเบี้ย n ครั้ง ด้วยอัตราดอกเบี้ย 100 j% ต่อหนึ่งคาบเวลา

**ตัวอย่างที่ 7.6.2** นายปรีชาฝากเงินธนาคาร 400 บาท อัตรา ดอกเบี้ย 6% ธนาคารคิดดอกเบี้ยทบต้นครึ่งปีต่อครั้ง ถ้า นายปรีชาไม่ได้ฝากเพิ่มหรือถอนเงินออกเป็นระยะเวลา 3 ปี อยากทราบว่าเมื่อครบ 3 ปี นายปรีชาจะมีเงินในบัญชีเท่าไหร่

**วิธีทำ** ในที่นี้ ธนาคารคิดดอกเบี้ย 2 ครั้ง ต่อ 1 ปี

$\therefore \quad m = 2$

ฝาก 3 ปี $t = 3$ จำนวนครั้งทั้งหมดที่คิดดอกเบี้ย $= 2 \times 3 = 6$ ครั้ง

$\therefore$ จากสูตร $A = P\left(1+\frac{i}{m}\right)^{mt}$

แทนค่าได้ $A = 400\left(1+\frac{.06}{2}\right)^{6} = 400\,(1.03)^{6}$

จากตารางจะได้ $(1.03)^{6} = 1.1941$

$\therefore$ $A = 400\,(1.1941) = 477.64$ บาท

$\therefore$ เมื่อครบ 3 ปี นายปรีชาจะมีเงินในธนาคาร $= 477.64$ บาท

แคลคูลัสสามารถใช้ในการแก้ปัญหาในทางเศรษฐศาสตร์ได้ เช่นในการตกลงใจที่จะลงทุนทำการค้า จะสามารถคำนวณหาผลกำไรในการค้าว่าจะคุ้มกับเงินทุนที่จะลงทุนหรือไม่ ถ้าใช้หลักวิชาในการคำนวณจะทำให้สามารถตัดสินใจได้ถูกต้องยิ่งขึ้น แต่ในการใช้เรื่องแคลคูลัสนั้น จะต้องพิจารณาให้ฟังก์ชันเป็นฟังก์ชันต่อเนื่องด้วย เช่นในสูตร (7.6.3)

$$A = P\left(1+\frac{i}{m}\right)^{mt}$$

เมื่อ A บาทเป็นจำนวนเงินที่จะได้รับคืน เมื่อลงทุนไป P บาท ด้วยอัตราดอกเบี้ย 100 i % คิดอัตราดอกเบี้ยทบต้น m ครั้งต่อปี ลงทุนไปเป็นเวลา t ปี ในที่นี้ถ้ากำหนดให้คิดดอกเบี้ยทบต้นต่อเนื่องไปเรื่อย ๆ จนถึง t ปี

$\therefore$ เมื่อให้ $m \to \infty$ จะได้ว่า

$$A = P\lim_{m\to\infty}\left(1+\frac{i}{m}\right)^{mt}$$

หรือ $$A = P\lim_{m\to\infty}\left[\left(1+\frac{i}{m}\right)^{m/i}\right]^{it} \qquad \text{——— (7.6.4)}$$

พิจารณาเทอม $\lim\limits_{m\to\infty}\left(1+\frac{i}{m}\right)^{m/i}$

ให้ $z = \frac{i}{m}$ $\quad\therefore\ \frac{m}{i} = \frac{1}{z}$ เมื่อ $m \to +\infty$ , $z \to 0^{+}$

$$\therefore \lim_{m\to\infty}\left(1+\frac{i}{m}\right)^{m/i} = \lim_{z\to 0^{+}}(1+z)^{\frac{1}{z}} = e$$

$$\therefore \lim_{m\to\infty}\left[\left(1+\frac{i}{m}\right)^{m/i}\right]^{it} = \left[\lim_{m\to\infty}\left(1+\frac{i}{m}\right)^{m/i}\right]^{it} = e^{it}$$

$\therefore$ จะได้สมการ (7.6.4) เป็น

$$\boxed{A = Pe^{it}} \qquad (7.6.5)$$

ถ้าพิจารณาอีกแบบหนึ่งคือกำหนดให้ P บาท เป็นจำนวนเงินที่ลงทุน ให้อัตรารายได้เพิ่มขึ้นเป็นสัดส่วนกับขนาดของรายได้ ดังนั้นจะได้ว่า

$$\frac{dA}{dt} = kA$$

$$\int \frac{dA}{A} = k \int dt$$

$$\ln |A| = kt + C_1$$

$$A = Ce^{kt}$$

เมื่อ $t = 0,\ A = P$ แทนค่าข้างบนจะได้ว่า

$$P = C$$

$$\therefore \quad A = Pe^{kt} \qquad (7.6.6)$$

จาก (7.6.5) และ (7.6.6) เมื่อเปรียบเทียบกันแล้วก็เป็นสมการเดียวกันเมื่อ $j = k$ ดังนั้นจึงกล่าวได้ว่า ถ้ามีการลงทุน อัตรารายได้ที่เพิ่มขึ้นเป็นสัดส่วนกับขนาดของรายได้แล้วจะกล่าวได้ว่า ดอกเบี้ยคิดแบบทบต้นต่อเนื่องกันไป, และอัตราดอกเบี้ยที่เกิดก็คือตัวคงที่ของสัดส่วนนั้นเอง

**ตัวอย่างที่ 7.6.3** ถ้านายแดงให้นายดำยืมเงินไป 900 บาท โดยอัตราดอกเบี้ยทบต้น 8% ไปได้ระยะเวลาหนึ่ง นายดำนำเงินมาคืนนายแดง 1,400 บาท อยากทราบว่านายดำยืมนายแดงไปเป็นระยะเวลาเท่าไร

**วิธีทำ** จากสูตร (7.6.5) $A = Pe^{it}$

ในที่นี้ $P = 900,\ A = 1{,}400,\ i = 0.08$ แทนค่าในสูตร

$$1{,}400 = 900e^{.08t}$$

$$\therefore \quad e^{.08t} = \frac{1{,}400}{900} = \frac{14}{9}$$

$$\ln (e^{.08t}) = \ln \frac{14}{9} = \ln 14 - \ln 9$$

$$.08t = \ln 14 - \ln 9$$

$$t = \frac{1}{.08}(2.6391-2.1972) \quad \text{(จากตารางของ natural log)}$$

$$= 5.53$$

∴ นายดำยืมนายแดงไปเป็นระยะเวลา 5.53 ปี

บางครั้งปัญหาของการลงทุนต้องการทราบจำนวนเงินที่จะลงทุนในปัจจุบัน เพื่อที่จะได้รับเงินในอีก t ปีข้างหน้า ด้วยอัตราดอกเบี้ยทบต้น 100j % คิดอัตราดอกเบี้ย m ครั้งต่อปี ปัญหานี้ก็ได้จากการหาค่า p ในสูตรที่ (7.6.3) ซึ่งจะใช้สูตรได้ว่า

$$P = A\left(1 + \frac{i}{m}\right)^{-mt} \qquad (7.6.7)$$

ในกรณีที่ดอกเบี้ยคิดทบต้นโดยต่อเนื่องจะได้สูตรเป็น

$$P = Ae^{-it} \qquad (7.6.8)$$

**ตัวอย่างที่ 7.6.4** เมื่อลงทุนเงินจำนวนหนึ่งเป็นเวลา 3 ปี จะได้เงินคืนมา 1,000 บาท ในการลงทุนครั้งนี้ได้อัตราดอกเบี้ยทบต้น 6% คิดอัตราดอกเบี้ย 2 ปีต่อครั้ง อยากทราบว่าลงทุนไปเป็นจำนวนเงินเท่าไร

**วิธีทำ** จากสูตร (7.6.7) $P = A\left(1 + \frac{i}{m}\right)^{-mt}$

ในที่นี้ $A = 1{,}000$ , $i$ $0.06$, $m = 2$, $t = 3$ แทนค่าจะได้

$$P = 1{,}000\left(1 + \frac{0.06}{2}\right)^{-6}$$

$$P = 837.50 \text{ บาท}$$

# แบบฝึกหัด 7 . 6

1. ถ้าให้กู้ยืมเงินไป 1,000 บาท ด้วยอัตราดอกเบี้ย 6 % เป็นระยะเวลา 4 ปี จงคำนวณหาเงินทั้งหมดที่จะได้เมื่อครบ 4 ปีแล้ว
   a) เมื่อคิดดอกเบี้ยเชิงเดียว
   b) เมื่อคิดดอกเบี้ยทบต้น ปีละครั้ง
   c) เมื่อคิดดอกเบี้ยทบต้นครึ่งปีครั้ง
   d) เมื่อคิดดอกเบี้ยทบต้นต่อเนื่องกัน
2. ถ้าให้กู้ยืมเงินไป 500 บาท เป็นระยะเวลา 2 ปี ด้วยอัตราดอกเบี้ย 4% จงคำนวณหาดอกเบี้ยที่จะได้รับหลังจาก 2 ปีแล้ว
   a) เมื่อคิดดอกเบี้ยเชิงเดียว
   b) เมื่อคิดดอกเบี้ยทบต้นปีละครั้ง
   c) เมื่อคิดดอกเบี้ยทบต้น 4 ครั้งต่อปี
   d) เมื่อคิดดอกเบี้ยทบต้นต่อเนื่องกัน
3. ในการฝากเงินธนาคารแห่งหนึ่ง ธนาคารคิดดอกเบี้ยให้ 5 % ถ้าเราต้องการจะมีเงิน 500 บาท ในบัญชีใน 5 ปีข้างหน้า เราจะต้องฝากเงินปัจจุบันเป็นจำนวนเงินเท่าไร
   a) คิดอัตราดอกเบี้ยทบต้นปีละครั้ง
   b) คิดอัตราดอกเบี้ยทบต้น 4 ครั้งต่อปี
4. เงินจำนวนหนึ่ง ได้ลงทุนไปเป็นเวลา 10 ปี จะได้เงินเป็น 2 เท่า โดยได้อัตราดอกเบี้ยทบต้นต่อเนื่องกัน อยากทราบว่า ถ้าต้องการจะได้เงินเป็น 3 เท่า จะใช้เวลานานเท่าไร
5. ฝากเงินธนาคารแห่งหนึ่ง 500 บาท ธนาคารคิดอัตราดอกเบี้ยทบต้นต่อเนื่อง 6 % อยากทราบว่าจะใช้เวลานานเท่าไหร่ ถึงจะได้เงิน 900 บาท ในบัญชี
6. นาย ก. ฝากเงินทรัสต์แห่งหนึ่ง โดยทรัสต์ได้จ่ายอัตราดอกเบี้ย 8 % ถ้านาย ก. ต้องการจะได้เงินเป็น 2 เท่าของเงินฝาก อยากทราบว่า นาย ก. จะต้องใช้เวลานานเท่าไร

a) ทรัสต์คิดดอกเบี้ยทบต้นปีละครั้ง

b) ทรัสต์คิดดอกเบี้ยทบต้น 4 ครั้งต่อปี

c) ทรัสต์คิดดอกเบี้ยทบต้นต่อเนื่องกัน

7. จงหาค่าของเงินปัจจุบัน เมื่อ 10 ปี เงินจำนวนนี้จะเป็น 10,000 บาท ถ้าเงินนี้คิดอัตราดอกเบี้ย 8 % และคิดดอกเบี้ยทบต้น

a) ปีละครั้ง

b) ต่อเนื่องกัน

8. ถ้าค่าของเงินบาทลดค่าลงด้วยอัตรา 8 % ต่อปี คิดแบบดอกเบี้ยทบต้นต่อเนื่องกัน อยากทราบว่าอีกนานเท่าไร ค่าของเงินบาท จึงจะเหลือเป็น 50 สตางค์