บทที่ 6
อินทิกรัลจำกัดเขต (The Definite Integral)

บทที่ 6 นี้ เกี่ยวข้องกับการหาพื้นที่ในระนาบ โดยวิธีการของแคลคูลัส ซึ่งหลักใหญ่ คือ แบ่งพื้นที่ออกเป็นรูปสี่เหลี่ยมผืนผ้ารูปเล็ก ๆ และนำเอาพื้นที่ของรูปสี่เหลี่ยมผืนผ้าเหล่านั้นมารวมกันพร้อมด้วยวิธีการของลิมิต เราได้นิยามของอินทิกรัลจำกัดเขต หรือพื้นที่ของบริเวณในระนาบ ในบางหัวข้ออาจจะมีที่มาของนิยาม หรือบทพิสูจน์ของทฤษฎีที่อาจจะยุ่งยากและยาว ทั้งนี้ก็เพื่อให้ผู้อ่านที่สนใจทราบที่มาของนิยามหรือทฤษฎีซึ่งอาจจะมีส่วนช่วยในการนำทฤษฎีหรือสมการที่เกี่ยวข้องไปใช้ได้ด้วยความเข้าใจมากขึ้น ในหัวข้อสุดท้าย (6.5) เป็นการนำเรื่องการหาพื้นที่ของบริเวณในระนาบไปใช้ในเรื่อง ส่วนเกินของผู้บริโภคและส่วนเกินของผู้ผลิต

6.1 พื้นที่ (Area)

ก่อนที่เราจะกล่าวถึงการหาพื้นที่ สิ่งที่จะช่วยในการเขียนผลรวมของเทอมหลายเทอมให้สั้นขึ้น คือ การนำเอาเครื่องหมายรวมยอด Σ ซึ่งอ่านว่า ซิกม่า มาใช้เขียนแทนผลรวมของเทอมหลายเทอม เช่น

เราเขียนแทนผลรวม $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+$ ด้วย $\sum\limits_{i=1}^{5} \frac{1}{i}$

หรือ เขียนแทนผลรวม $1^2+2^2+\ldots+5^2+6^2$ ด้วย $\sum\limits_{i=1}^{6} i^2$

เห็นได้ว่า เราใช้เครื่องหมาย Σ นี้แทนผลรวมได้ เมื่อแต่ละเทอมในผลรวมขึ้นอยู่กับค่าของเลขจำนวนเต็ม หรือ โดยทั่วไปเราได้

$$\sum_{i=m}^{n} F(i) = F(m)+F(m+1)+F(m+2)\ldots+F(n-1)+F(n) \qquad (6.1.1)$$

เมื่อ m, n เป็นจำนวนเต็ม และ $m < n$

จากสูตร 6.1.1 นี้ ทางด้านขวามีทั้งหมด $(n-m+1)$ เทอม ซึ่งแต่ละเทอม หาได้โดยเริ่มแทนค่า i ด้วย m ใน $F(i)$ และเพิ่มค่า i ทีละหนึ่ง และแทนใน $F(i)$ จนกระทั่งถึงเทอมสุดท้าย คือ แทน i ด้วย n ใน $F(i)$ ได้ $F(n)$ นั่นเอง

ในสูตร 6.1.1 นี้ เราเรียก m ว่า ขีดจำกัดบน (upper limit) และเรียก n ว่า ขีดจำกัดล่าง (lower limit) ส่วนสัญลักษณ์ i นั้น เราเรียกว่า ดรรชนีของการรวม (index of summation) และเราใช้สัญญลักษณ์ตัวใดเป็นดรรชนีก็ได้นั่นก็คือ

$$\sum_{i=m}^{n} F(i) = \sum_{k=m}^{n} F(k) = \sum_{j=m}^{n} F(j)$$

ตัวอย่าง 6.1.1 การใช้สูตร 6.1.1

$$\sum_{i=1}^{5} 3i = 3.1 + 3.2 + 3.3 + 3.4 + 3.5$$

$$\sum_{k=2}^{7} \frac{1}{k+1} = \frac{\;}{2+1} + \frac{\;}{3+1} + . \qquad + \frac{1}{6+1} + \frac{1}{7+1}$$

$$\sum_{m=-1}^{2} \frac{(-m)}{m^2+2} = \frac{\;}{(-\;1)^2+2} + \frac{0}{(0)^2+2} + \frac{1}{(1)^2+2} + \frac{2}{(2)^2+2}$$

ในบางครั้งเทอมในผลรวมอาจจะเกี่ยวเนื่องกับดรรชนีล่าง (subscript) ดังตัวอย่างต่อไปนี้

ตัวอย่าง 6.1.2

$$\sum_{i=0}^{n} a_i = a_0 + a_1 + a_2 + \cdots\cdots + a_{n-1} + a_n;$$

$$\sum_{i=1}^{5} f(x_i)\ A\ {}_i x = f(x_1)\,\Delta_1 x + f(x_2)\,\Delta_2 x + - \quad - \quad + f(x_5)\,\Delta_5 x$$

คุณสมบัติ หรือสูตรที่เกี่ยวข้องกับเครื่องหมายรวมยอด Σ ที่สำคัญ ๆ และเรานำมาใช้บ่อย ๆ มีดังนี้คือ

(1) $\sum_{i=1}^{n} c = cn$ เมื่อ c เป็นค่าคงที่ (6.1.2)

(2) $\sum_{i=1}^{n} c\,F(i) = c\sum_{i=1}^{n} F(i)$ เมื่อ c เป็นค่าคงที่ (6.1.3)

(3) $\sum_{i=1}^{n} (F(i) + G(i)) = \sum_{i-1}^{n} F(i) + \sum_{i=1}^{n} G(i)$ (6.1.4)

(4) $\sum_{i=1}^{n} [F(i) - F(i-1)] = F(n) - F(0)$ (6.1.5)

สำหรับการพิสูจน์คุณสมบัติ (6.1.2) — (6.1.5) นั้น เราเพียงแต่ใช้สูตร (6.1.1) นั่นก็คือ เขียนแต่ละเทอมในผลรวมยอด Σ ออกมา เราก็จะสามารถสรุปผลได้ตามคุณสมบัติ (6.1.2) — (6.1.5) ได้ ส่วนสูตรที่จะกล่าวถึงต่อไปนี้ สามารถพิสูจน์ได้โดยวิธีการอุปนัยทางคณิตศาสตร์ (Mathematical induction)

n (5) $\sum_{i=1}^{n} i = \frac{n(n+1)}{1}$ (6.1.6)

(6) $\sum_{i=1}^{n} i^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$ (6.1.7)

(7) $\sum_{i=1}^{n} i^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$ (6.1.8)

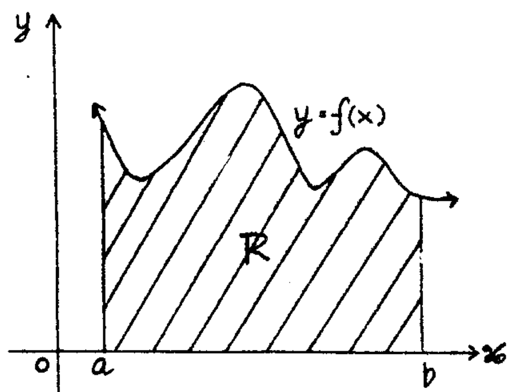
(8) $\sum_{i=1}^{n} i^4 = \frac{n(n+1)(6n^3+9n^2+n-1)}{30}$ (6.1.9)

ตัวอย่าง 6.1.8 จงหาค่าของ $\sum_{i=1}^{n} i(3i-2)$ โดยใช้คุณสมบัติ และสูตรข้างต้น

$$
\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{n} i(3i-2) &= \sum_{i=1}^{n} (3i^2 - 2i) \\
&= \sum_{i=1}^{n} 3i^2 + \sum_{i=1}^{n} (-2i) \\
&= 3\sum_{i=1}^{n} i^2 - 2\sum_{i=1}^{n} i \\
&= 3 \cdot \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} - 2 \cdot \frac{n(n+1)}{2} \\
&= \frac{2n^3 + 3n^2 + n - 2n^2 - 2n}{2} \\
&= \frac{2n^3 + n^2 - n}{2}
\end{aligned}
$$

ต่อไปเราจะพิจารณาการหาพื้นที่ของบริเวณในระนาบ เรามีสูตรสำหรับการหาพื้นที่ของรูปสี่เหลี่ยมผืนผ้า รูปสามเหลี่ยม และรูปอื่น ๆ แต่ในบางครั้ง เราไม่สามารถหาพื้นที่ของรูปบางรูปได้โดยตรง หรือโดยการคิดหาสูตร เช่น รูปหลายเหลี่ยม (polygon) เราอาจจะหาพื้นที่ของรูปหลายเหลี่ยม โดยการแบ่งรูปหลายเหลี่ยมออกเป็นรูปสามเหลี่ยมเสียก่อนแล้วนาเอาพื้นที่ของรูปสามเหลี่ยมซึ่งเราหาได้โดยการใช้สูตร มารวมกันก็จะได้พื้นที่ที่เราต้องการ อย่างไรก็ตามไม่ว่าเราจะแบ่งพื้นที่ของรูปหลายเหลี่ยมในลักษณะใดพื้นที่ของรูปหลายเหลี่ยมต้องเท่าเดิมเสมอ

สำหรับการหาพื้นที่ของบริเวณใด ๆ บนระนาบ เช่น บริเวณ R ซึ่งล้อมรอบด้วยเส้นโค้ง $y = f(x)$ แกน x เส้นตรง $x = a$ และ $x = b$ ดังแสดงในรูป 6.1.1



รูป 6.1.1

เราอาจจะหาพื้นที่ของบริเวณ R โดยหาพื้นที่ของรูปหลายเหลี่ยมที่บรรจุอยู่ในบริเวณ R หรือพื้นที่ของรูปหลายเหลี่ยมที่บรรจุบริเวณ R อยู่ ในที่นี้เราให้ f เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องบนช่วงปิด $[a,b]$ และ $f(x) > 0$ สำหรับทุก ๆ x ในช่วงปิดนี้

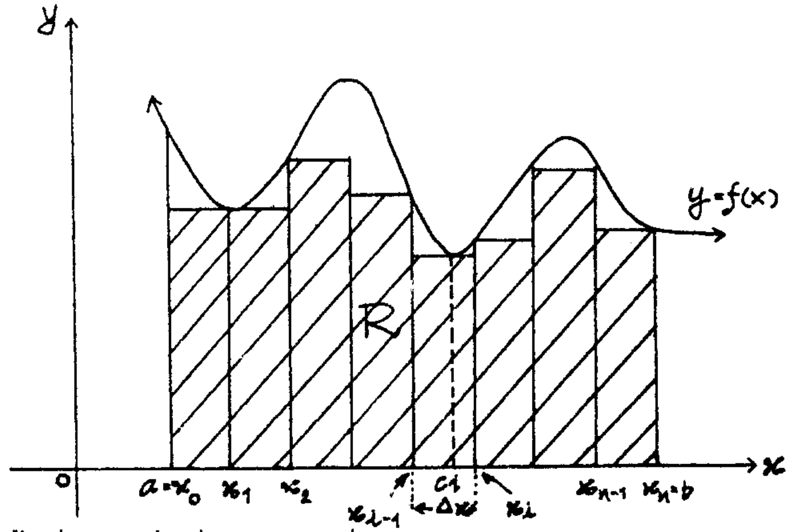
ถ้าสมมุติให้ A เป็นพื้นที่ของบริเวณ R ดังนั้น A จะต้องมีค่าอย่างน้อยที่สุดเท่ากับพื้นที่ของรูปหลายเหลี่ยมที่บรรจุอยู่ใน R และไม่เกินกว่าพื้นที่ของรูปหลายเหลี่ยมที่บรรจุ R

เราจะเริ่มโดยการนิยามพื้นที่ของรูปหลายเหลี่ยมที่บรรจุอยู่ใน R ขั้นแรกแบ่งช่วงปิด $[a,b]$ ออกเป็น n ช่วง แต่ละช่วงยาว $(b-a)/n$ นั่นก็คือความยาวของแต่ละช่วงที่เราแบ่งยาวเท่ากัน ให้ Δx เป็นความยาวของแต่ละช่วงนี้

$$\therefore \ \Delta x = (b-a)/n$$

เราเรียกจุดปลายของแต่ละช่วงว่า $x_o, x_1, \ldots, x_n$ โดยที่ $x_o = a$, $x_1 = a + \Delta x$, $\ldots$, $x_i = a + i\,\Delta x, \ldots, x_{n-1} = a + (n-1)\,\Delta x$, $x_n = b$ และเรียกช่วง $[x_{i-1}, x_i]$ เป็นช่วงที่ i

เพราะว่า f เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องบน $[a,b]$ ดังนั้น f ต่อเนื่องบนแต่ละช่วงทั้ง n ช่วงนี้ด้วย โดยทฤษฎีค่าปลายสุดในบทที่ 4 (Extreme Value Theorem) เราได้ว่า ในแต่ละช่วงแบ่งนั้น จะมีจุดซึ่งให้ค่าต่ำสุดของ f เรียกจุดนี้ว่า c_i ฉะนั้น $f(c_i)$ เป็นค่าต่ำสุดสัมบูรณ์บนช่วง $[x_{i-1}, - x_i]$



รูป 6.1.2

จากรูป 6.1.2 พิจารณา พื้นที่ของรูปสี่เหลี่ยมผืนผ้า ซึ่งมีด้านกว้างของแต่ละรูปเท่ากับ Δx และความสูงเท่ากับค่าต่ำสุดสัมบูรณ์ของ f ในแต่ละช่วง เรามีพื้นที่ของรูปสี่เหลี่ยมผืนผ้าดังกล่าวอยู่ n รูป และแต่รูปมีพื้นที่เท่ากับ

$$f(c_i)\,\Delta x \quad \text{เมื่อ} \quad i = 1,2,3,\ldots,n$$

ให้ Sn เป็นผลรวมของพื้นที่ของรูปสี่เหลี่ยมผืนผ้าทั้ง n รูปนั้น

$$\therefore\; S_n = f(c_1)\,\Delta x + f(c_2)\,\Delta x + \cdots + f(c_i)\,\Delta x + \cdots + f(c_n)\,\Delta x$$

$$S_n = \sum_{i=1}^{n} f(c_i)\,\Delta x \qquad (6.1.1)$$

$\therefore$ Sn เป็นพื้นที่ของรูปหลายเหลี่ยมที่บรรจุอยู่ในบริเวณ R และ $S_n \leqslant A$ ในรูป 6.1.2 บริเวณที่แรเงามีพื้นที่เท่ากับ Sn ตารางหน่วย ดังนั้นถ้าเราต้องการให้ Sn มีค่าเข้าใกล้ A หรือเข้าใกล้พื้นที่ใต้เส้นโค้งมากขึ้น ก็คือเราต้องแบ่งช่วงปิด $[a,b]$ ให้มีจำนวนช่วงที่แบ่งมากขึ้น หรือเพิ่มค่า n นั่นเอง เมื่อเพิ่มค่า n ค่าของ Sn หาจากสมการ (6.1.1) ก็จะเพิ่มขึ้น อย่างไรก็ตามแต่ละค่าของ Sn ที่เพิ่มขึ้น จะเพิ่มขึ้นไปจากเดิมน้อยมาก และมี A เป็นขอบเขตจากทฤษฎีใน advanced calculus เราได้ว่า เมื่อ f เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องบน $[a,b]$

และเมื่อ n เพิ่มขึ้นอย่างไม่มีขอบเขต ค่าของ Sn ซึ่งหาจากสมการ 6.1.1 จะเข้าใกล้ค่าคงที่ค่าหนึ่ง ซึ่งเราเรียกว่า ลิมิต และลิมิตของ Sn นี้เองที่เราใช้นิยามพื้นที่ของบริเวณ R

นิยาม 6.1.1 ให้ f เป็น ฟังก์ชันต่อเนื่องบนช่วงปิด $[a,b]$ และ $f(x) > 0$ สำหรับทุก ๆ ค่าของ x ใน $[a,b]$ และให้ R เป็นบริเวณซึ่งล้อมรอบด้วยเส้นโค้ง $y = f(x)$ แกน x และเส้นตรง $x = a$, $x = b$ แบ่งช่วงปิด $[a,b]$ เป็น n ช่วง โดยที่แต่ละช่วงยาวเท่ากับ $(b-a)/n$ ให้ $[x_{i-1}, x_i]$ เป็นช่วงที่ i และให้ $f(c_i)$ เป็นค่าต่ำสุดสัมบูรณ์ของ f บนช่วงที่ i ดังนั้นพื้นที่ของบริเวณ R คือ

$$A = \lim_{n \to \infty} \sum_{i=1}^{n} f(c_i) \Delta x \qquad (6.1.2)$$

ความหมายของสมการ (6.1.2) คือ เราสามารถทำให้ค่า $\sum_{i=1}^{n} f(c_i) \Delta x - A$ น้อยเท่าที่เราพอใจโดยให้ค่าของ n เพิ่มขึ้นมากพอ

ในทำนองเดียวกัน เราสามารถนิยามพื้นที่ของรูปหลายเหลี่ยมที่บรรจุบริเวณ R โดยใช้ค่าสูงสุดสมบูรณ์ของ f ในแต่ละช่วงที่เราแบ่งเป็นความสูงแทนที่เราจะใช้ค่าต่ำสุดสัมบูรณ์ดังแสดงมาแล้ว และเพิ่มค่า n โดยไม่มีขอบเขต เราจะได้ว่าผลรวมของพื้นที่ของรูปสี่เหลี่ยมผืนผ้าจะเข้าใกล้ค่าคงที่ค่าหนึ่ง นั่นก็คือ

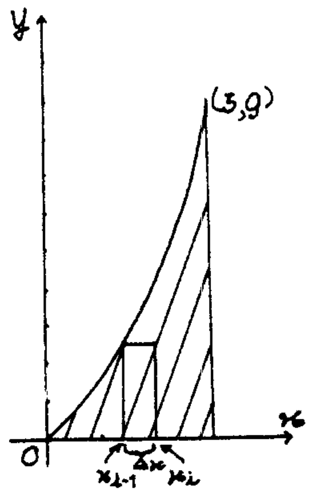
$$A = \lim_{n \to \infty} \sum_{i=1}^{n} f(d_i) \Delta x \qquad (6.1.3)$$

เมื่อ $f(d_i)$ คือ ค่าสูงสุดสัมบูรณ์ของ f บน $[x_{i-1}, x_i]$

แท้ที่จริงแล้ว ความสูงของรูปสี่เหลี่ยมผืนผ้าที่ใช้ไม่จำกัดว่าจะต้องเป็นค่าต่ำสุด สัมบูรณ์หรือค่าสูงสุดสัมบูรณ์ของ f ในแต่ละช่วงแบ่ง แต่เราอาจเลือกใช้ค่าของ f ใด ๆ ในช่วงแบ่งนั้นก็ได้ ทั้งนี้เพราะว่า เมื่อเราเพิ่มค่า n โดยไม่มีขอบเขตผลรวมของพื้นที่ของรูปสี่เหลี่ยมผืนผ้าจะเข้าใกล้ค่าคงที่เดียวกัน หรือมีลิมิตเท่ากันนั่นเอง

ตัวอย่าง 6.1.4 จงหาพื้นที่ของบริเวณซึ่งล้อมรอบด้วยเส้นโค้ง $y = x^2$ แกน x และเส้นตรง $x = 3$ โดยหาพื้นที่ของรูปสี่เหลี่ยมผืนผ้าที่บรรจุอยู่ภายใน

วิธีทำ พื้นที่ของบริเวณที่เราต้องการหาโดยบรรจุรูปสี่เหลี่ยมผืนผ้าภายในแสดงใน



รูป 6.1.3

รูป 6.1.3 เราแบ่งช่วงปิด $[0,3]$ เป็น n ช่วง โดยแต่ละช่วงยาวเท่ากันและให้เท่ากับ Δx

$$\therefore \quad \Delta x = \frac{3-0}{n} = \frac{3}{n}$$

ดังนั้น $x_0 = 0, x_1 = \Delta x, x_2 = 2\Delta x, \ldots, x_i = i\Delta x, \ldots, x_n = 3$ เพราะว่า f เป็นฟังก์ชันที่เพิ่มขึ้นบน $[0,3]$ ดังนั้น ค่าต่ำสุดสัมบูรณ์ของ f บนช่วงที่ i หรือช่วง $[x_{i-1}, x_i]$ คือ $f(x_{i-1})$ จากสมการ (6.1.1) เราได้

$$A = \lim_{n \to \infty} \sum_{i=1}^{n} f(x_{i-1}) \Delta x \qquad (6.1.4)$$

เพราะว่า $x_{i-1} = (i-1)\Delta x$ และ $f(x) = x^2$

$$\therefore \quad f(x_{i-1}) = [(i-1)\Delta x]^2$$

ดังนั้น

$$\sum_{i=1}^{n} f(x_{i-1}) \Delta x = \sum_{i=1}^{n} (i-1)^2 (\Delta x)^3$$

$$= \sum_{i=1}^{n} (i-1)^2 \frac{27}{n^3}$$

$$= \frac{27}{n^3} \sum_{i=1}^{n} (i^2 - 2i + 1)$$

$$= \frac{27}{n^3} \left(\sum_{i=1}^{n} i^2 - 2 \sum_{i=1}^{n} i + \sum_{i=1}^{n} 1 \right)$$

$$= \frac{27}{n^3} \left(\frac{n(n+1)(2n+1)}{6} - 2.\frac{n(n+1)}{2} + n \right)$$

$$= \frac{27}{n^3} \left(\frac{2n^3 + 3n^2 + n - 6n^2 - 6n + 6n}{6} \right)$$

$$= \frac{9}{2} \cdot \frac{2n^2 - 3n + 1}{n^2}$$

จากสมการ 6.1.4 เราได้

$$A = \lim_{n\to\infty} \left[\frac{9}{2} \cdot \frac{2n^2 - 3n + 1}{n^2}\right]$$

$$= \frac{9}{2} \cdot \lim_{n\to\infty} \left(2 - \frac{3}{n} + \frac{1}{n^2}\right)$$

$$= \frac{9}{2} \; (2-0-0)$$

$$= 9$$

$\therefore$ พื้นที่ของบริเวณที่เราต้องการคือ 9 ตารางหน่วย

ตัวอย่างที่ 6.1.5 จงหาพื้นที่ของบริเวณในตัวอย่าง 6.1.4 แต่โดยการหาพื้นที่ของรูปสี่เหลี่ยมผืนผ้าที่บรรจุบริเวณที่เราต้องการหาพื้นที่

วิธีทำ เราเพียงแต่เปลี่ยนความสูงของรูปสี่เหลี่ยมผืนผ้าเป็นค่าสูงสุดสมบูรณ์ของ f ในตัวอย่าง 6.1.4 ดังนั้น สำหรับช่วงที่ i $[x_{i-12}\ x_i]$ ค่าสูงสุดสมบูรณ์คือ f (x_i) ซึ่งเท่ากับ $(i \Delta x)^2$ เพราะว่า $x_i = i \Delta x$

จากสมการ 6.1.3 เราได้

$$A = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f\ (di)\ \Delta x \qquad (6.1.5)$$

ในที่นี้

$$\sum_{i=1}^{n} f\ (di)\ \Delta x = \sum_{i=1}^{n} (i \Delta x)^2\ \Delta x = \sum_{i=1}^{n} i^2 (\Delta x)^3$$

$$= \sum_{i=1}^{n} i^2\ \frac{27}{n^3}$$

$$= \frac{27}{n^3} \left[\frac{n(n+1)\ (2n+1)}{6}\right]$$

$$= \frac{9}{2} \quad \frac{2n^2 + 3n + 1}{n^2}$$

ดังนั้นจากสมการ 6.1.5 เราได้

$$A = \lim_{n\to\infty} \frac{9}{2} \cdot \left(2+\frac{3}{n}+\frac{1}{n^2}\right)$$

$$= \frac{9}{2}\ (2+0+0) = 9$$

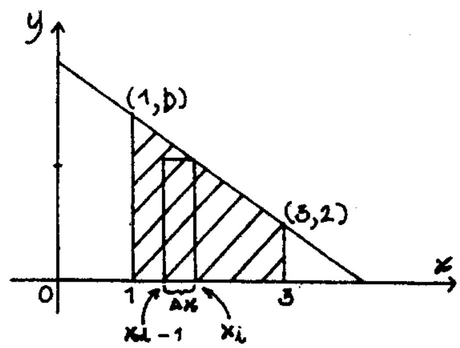
ซึ่งเท่ากับที่เราหาได้ในตัวอย่าง 6.1.4

ตัวอย่างที่ 6.1.6 จงหาพื้นที่ของบริเวณ ซึ่งล้อมรอบเส้นตรง $2x + y = 8$ แกน x และเส้นตรง $x = 1$ และ $x = 3$ โดยใช้พื้นที่ของรูปสี่เหลี่ยมผืนผ้าที่บรรจุภายใน

วิธีทำ บริเวณที่เราต้องการหาพื้นที่ และรูปของสี่เหลี่ยมผืนผ้าที่บรรจุภายใน แสดงใน รูป 6.1.4 เราแบ่งช่วงปิด $[1,3]$ เป็น n ช่วง แต่ละช่วงยาว Δx และเท่ากับ $\frac{3-1}{n} = \frac{2}{n}$

ดังนั้น $x_o = 1,\ x_1 = 1+\Delta x,\ x_2 = 1+2\Delta x, \ldots, x_i = 1 + i\Delta x, \ldots, x_n = 3$

รูป 6.1.4



จากสมการ $2x + y = 8$ เราได้ $y = 8-2x = f(x)$ และเพราะว่า $f(x)$ นี้ เป็นฟังก์ชันลดลงบนช่วงปิด $[1, 3]$ เราได้ว่า $f(x_i)$ เป็นค่าต่ำสุดสัมบูรณ์บนช่วง $[x_{i-1}, x_i]$ เพราะว่า $x_i = 1 + i\Delta x$ และ $f(x) = 8-2x$ ดังนั้น $f(x_i) = 8-2(1 + i\Delta x) = 6-2i\Delta x$

จากสมการ 6.1.4 เราได้

$$A = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f(x_i)\Delta x$$

$$= \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} (6-2i\Delta x)\Delta x$$

$$= \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} \left[6\ \Delta x - 2i\ (\Delta x)^2\right]$$

$$= \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} \left[6\ \left(\frac{2}{n}\right) - 2i\ \left(\frac{2}{n}\right)^2\right]$$

$$= \lim_{n\to\infty} \left[\frac{12}{n}\cdot n - \frac{8}{n^2}\cdot\frac{n\ (n+1)}{2}\right]$$

$$= \lim_{n\to\infty} \left(8 - \frac{4}{n}\right)$$

$$= 8$$

$\therefore$ พื้นที่ของบริเวณที่เราต้องการ $= 8$ ตารางหน่วย

รูปสี่เหลี่ยมคางหมูนี้ เราสามารถใช้สูตรหาพื้นที่ได้โดยตรงคือ

$A = \frac{1}{2}\ h\ (b_1 + b_2)$ เมื่อ h, b_1 และ b_2 เป็นความสูงและด้านคู่ขนานทั้งสองตามลำดับ

จากรูป 6.1.4 เราได้

$\therefore\ A = \frac{1}{2}\ (2)\ (6 + 2) = 8$

ซึ่งเท่ากับพื้นที่ที่เราหาได้โดยใช้นิยาม 6.1.1

แบบฝึกหัด 6.1

จงหาค่าของผลรวมยอดต่อไปนี้

1) $\sum_{i=1}^{6} (3i-2)$

2) $\sum_{i=2}^{5} \frac{i}{i-1}$

3) $\sum_{k=-2}^{3} 2^k$

4) $\sum_{k=1}^{4} \frac{(-1)^{k+1}}{k}$

5) $\sum_{m=0}^{4} \frac{m}{m+1}$

จงหาค่าของผลรวมยอดต่อไปนี้โดยอาศัยคุณสมบัติ 6.1.2—6.1.5 และสูตร 6.1.6 —6.1.9

6) $\sum_{i=1}^{25} 2i\,(i-1)$

7) $\sum_{i=1}^{n} (10^{i+1} - 10^{i})$

8) $\sum_{k=1}^{100} \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}\right)$

จงหาพื้นที่ของบริเวณในข้อต่อไปนี้ โดยแบ่งบริเวณที่ต้องการหาพื้นที่เป็นรูปสี่เหลี่ยมผืนผ้าที่บรรจุภายในหรือล้อมรอบ นั่นก็คือใช้สมการ 6.1.2 หรือสมการ 6.1.3

9) บริเวณซึ่งล้อมรอบด้วย $y = x^2$ แกน x และเส้นตรง $x = 2$ ใช้สี่เหลี่ยมผืนผ้าที่บรรจุภายใน

10) บริเวณซึ่งล้อมรอบด้วย $y = 2x$ แกน x และเส้นตรง $x = 1$ และ $x = 4$ ใช้สี่เหลี่ยมผืนผ้าที่ล้อมรอบ

11) บริเวณซึ่งอยู่เหนือแกน x และอยู่ทางด้านขวาของเส้นตรง $x = 1$ ล้อมรอบด้วยแกน x เส้นตรง $x = 1$ และเส้นโค้ง $y = 4 - x^2$ ใช้สี่เหลี่ยมผืนผ้าที่บรรจุภายใน

12) บริเวณซึ่งล้อมรอบด้วย $y = x^3$ แกน x และเส้นตรง $x = -1$ และ $x = 2$ ใช้สี่เหลี่ยมผืนผ้าที่ล้อมรอบ

จงหาพื้นที่ของบริเวณในข้อต่อไปนี้ โดยให้ความสูงของสี่เหลี่ยมผืนผ้ารูปที่ i คือ $f(m_i)$ เมื่อ m_i คือจุดกึ่งกลางของช่วงแบ่งที่ i นั่นก็คือ $m_i = \frac{1}{2}(x_i + x_{i-1})$

13) บริเวณในข้อ 9

14) บริเวณในข้อ 10

6.1 อินทิกรัลจำกัดเขต (The Definite Integral)

ในหัวข้อ 6.1 เราได้ว่าพื้นที่ของบริเวณที่เราต้องการคือ

$$A = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f(c_i)\,\Delta x \qquad (6.2.1)$$

โดยมีเงื่อนไขว่า $f(x)$ เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องบนช่วงปิด $[a,b]$ และ $f(x) \geq 0$ สำหรับทุก ๆ x ใน $[a,b]$

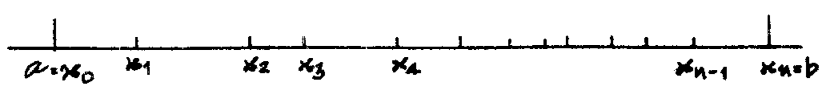
เพื่อนิยามอินทิกรัลจำกัดเขต เราจะพิจารณาวิธีการใหม่ในการหาลิมิต ซึ่งมีลิมิตจากสมการ 6.2.1 เป็นเพียงกรณีพิเศษกรณีหนึ่ง ให้ f เป็นฟังก์ชัน ซึ่งมีนิยามบนช่วงปิด $[a,b]$ แบ่งช่วงปิด $[a,b]$ นี้เป็น n ช่วงโดยมีจุดแบ่งทั้ง $n-1$ จุด เป็นจุดใด ๆ ใน $[a,b]$ ให้ $x_o = a$, $x_n = b$ และ $x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}$ เป็นจุดระหว่างกลางและ

$$x_o < x_1 < x_2 < \cdots < x_{n-1} < x_n$$

เรียก $[x_{i-1}, x_i]$ ว่าเป็นช่วงที่ i และให้ $\Delta_i x$ เป็นความยาวของช่วงที่ i นั่นก็คือ

$$\Delta_i x = x_i - x_{i-1}$$

เราเรียกเซตของช่วงที่เราแบ่งในช่วงปิด $[a,b]$ นี้ว่า ผลแบ่งกั้น (partition) ของ $[a,b]$ ให้ Δ เป็นเซตผลแบ่งกั้น ดังนั้นรูป 6.2.1 แสดงให้เห็นถึงผลแบ่งกั้นของ $[a,b]$



รูป 6.2.1

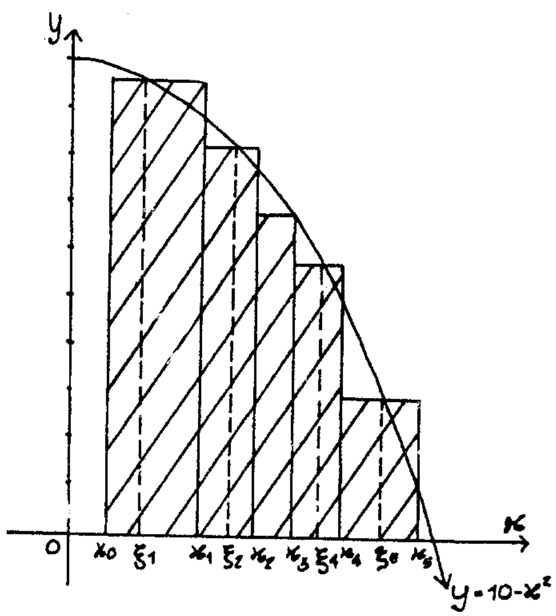
Δ นี้มีช่วงทั้งหมด n ช่วง เราเรียกความยาวของช่วงที่มีความยาวมากที่สุดใน n ช่วงนี้ว่าค่าประจำหรือนอร์ม (Norm) เขียนแทนโดย $\|\Delta\|$ อย่างไรก็ตามช่วงที่มีความยาวมากที่สุดอาจมีมากกว่าหนึ่งช่วง

ต่อไปเราเลือกจุดในแต่ละช่วงของ Δ ให้ ε_i เป็นจุดใด ๆ ที่เราเลือกในช่วง $[x_{i-1}, x_i]$ ดังนั้น $x_{i-1} < \varepsilon_i < x_i$ เมื่อ $i = 1, 2, 3, \ldots, n$ และพิจารณาผลรวม $f(\varepsilon_1)\,\Delta_1 x + f(\varepsilon_2)\,\Delta_2 x + \ldots + f(\varepsilon_i)\,\Delta_i x + \ldots + f(\varepsilon_n)\,\Delta_n x$

$$= \sum_{i=1}^{n} f(\varepsilon_i)\,\Delta_i x \tag{6.2.2}$$

ผลรวมนี้มีชื่อเรียกว่า ผลรวมรีมานน์ (Riemann sum) ตั้งชื่อตามนักคณิตศาสตร์ George Friedrich Bernhard Riemann (1826–1866)

ตัวอย่างที่ 6.2.1 ให้ $f(x) = 10-x^2$ เมื่อ $\frac{1}{4} \leq x \leq 3$ เราจะหาผลรวมรีมานน์สำหรับ f บน $[\frac{1}{4}, 3]$ และมีผลแบ่งกั้น Δ เป็น $x_0 = \frac{1}{4}$, $x_1 = 1$, $x_2 = 1\frac{1}{2}$, $x_3 = 1\frac{3}{4}$, $x_4 = 2\frac{1}{4}$, $x_5 = 3$ และ $\varepsilon_1 = \frac{1}{2}$, $\varepsilon_2 = 1\frac{1}{4}$ $\varepsilon_3 = 1\frac{3}{4}$, $\varepsilon_4 = 2$, $\varepsilon_5 = 2\frac{3}{4}$ รูป 6.2.2 แสดงกราฟของ f บน $[\frac{1}{4}, 3]$ และรูปสี่เหลี่ยมผืนผ้าทั้ง 5 ซึ่งพื้นที่ของแต่ละรูปคือเทอมในผลรวมรีมานน์

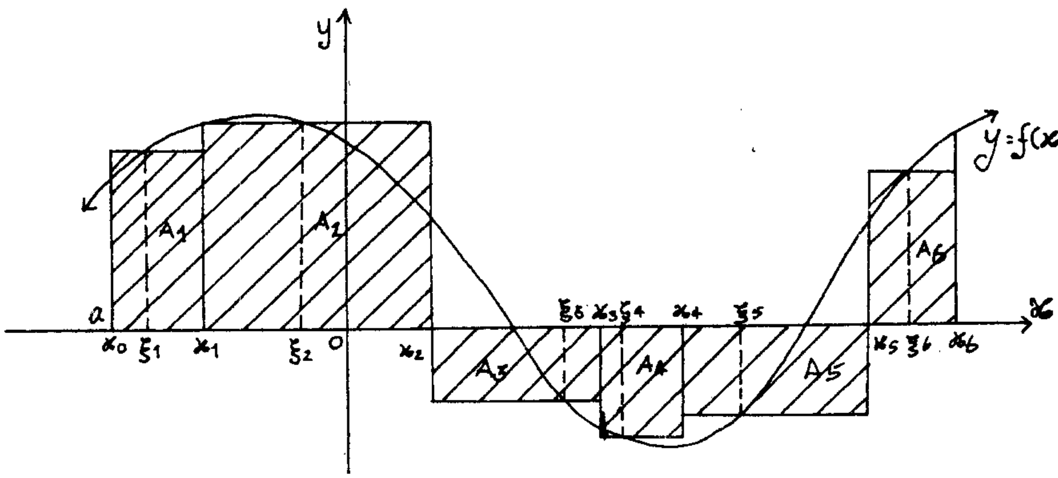


รูป 6.2.2

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{5} f(\varepsilon_i)\,\Delta_i x
&= f(\varepsilon_1)\,\Delta_1 x + f(\varepsilon_2)\,\Delta_2 x + f(\varepsilon_3)\\
&\quad \Delta_3 x + f(\varepsilon_4)\,\Delta_4 x + f(\varepsilon_5)\,\Delta_5 x\\
&= f(\tfrac{1}{2})\,(1-\tfrac{1}{4}) + f(\tfrac{5}{4})\,(1\tfrac{1}{2}-1) + f(\tfrac{7}{4})\\
&\quad (1\tfrac{3}{4}-1\tfrac{1}{2}) + f(2)\,(2\tfrac{1}{4}-1\tfrac{3}{4}) + f(\tfrac{11}{4})\\
&\quad (3-2\tfrac{1}{4})\\
&= (9\tfrac{3}{4})\,(\tfrac{3}{4}) + (8\tfrac{7}{16})\,(\tfrac{1}{2}) + (6\tfrac{15}{16})\,(\tfrac{1}{4})\\
&\quad + (6)\,(\tfrac{1}{2}) + (2\tfrac{7}{16})\,(\tfrac{3}{4})\\
&= 18\tfrac{3}{32}
\end{aligned}$$

นอร์ม ของ $\triangle$ คือ ความยาวของช่วงที่ยาวที่สุด เราได้ $\| \triangle \| = \frac{3}{4}$ ในที่นี้

สำหรับผลรวมรีมานน์นี้ เราไม่ได้จำกัดว่า $f(x) > 0$ ฉะนั้นบางค่าของ $f(\varepsilon_i)$ อาจจะเป็นค่าลบก็ได้ ซึ่งในกรณีนี้ ผลรวมรีมานน์ในแง่เรขาคณิต คือ ผลรวมของพื้นที่ของรูปสี่เหลี่ยมผืนผ้าที่อยู่เหนือแกน x รวมกับค่าลบของพื้นที่ของรูปสี่เหลี่ยมผืนผ้าที่อยู่ใต้แกน x ดังแสดงในรูป 6.2.3



รูป 6.2.3

ในที่นี้

$$\sum_{i=1}^{6} f(\varepsilon_i) \triangle_i x = A_1 + A_2 - A_3 - A_4 - A_5 + A_6$$

เพราะว่า $f(\varepsilon_3)$, $f(\varepsilon_4)$, $f(\varepsilon_5)$ เป็นค่าลบเราจึงได้พื้นที่ของรูปสี่เหลี่ยมผืนผ้าที่สมนัยกันคือ A_3, A_4, A_5 เป็นค่าลบ

ต่อไปเราจะพิจารณาและให้นิยามสำหรับฟังก์ชัน f ที่อินทิเกรตได้ (integrable) บนช่วงปิด $[a, b]$

นิยาม 6.2.1 ให้ f เป็นฟังก์ชัน ซึ่งมีโดเมนที่รวมช่วงปิด $[a, b]$ เรากล่าวว่า f เป็นฟังก์ชันที่อินทิเกรตได้ (integrable function) บนช่วงปิด $[a, b]$ เมื่อมี ค่าคงที่ L ค่าหนึ่ง ซึ่งเราสามารถทำให้ค่าของ $\left| \sum_{i=1}^{n} f(\varepsilon_i) \triangle_i x - L \right|$ น้อย

เท่าที่เราต้องการสำหรับทุก ๆ ผลแบ่งกั้น Δ ซึ่งค่าประจำหรือนอร์ม $\|\Delta\|$ ของมันมีค่าน้อยพอและสำหรับทุก ๆ จุด ε_i ที่เราเลือกในช่วงปิด $[x_{i-1}, x_i]$ เมื่อ $i = 1, 2, \ldots, n$

นิยาม ๖.๒.๑ นี้กล่าวว่า สำหรับฟังก์ชัน f ที่กำหนดมาให้ ซึ่งมีนิยามบนช่วงปิด $[a, b]$ เราสามารถทำให้ผลรวมรีมานน์ของ f เข้าใกล้ L มากเท่าที่เราพอใจโดยให้ $\|\Delta\|$ ของทุก ๆ ผลแบ่งกั้น Δ ของ $[a, b]$ มีค่าน้อยพอ สำหรับทุก ๆ จุดเลือก ε_i ที่เราเลือกได้ มันก็คือ $x_{i=1} \leqslant \varepsilon_i \leqslant x_i$ ถ้านิยาม 6.2.1 เป็นจริง เราเขียน

$$\lim_{\|\Delta\| \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(\varepsilon_i)\, \Delta_i x = L \qquad (6.2.3)$$

นิยาม 6.2.2 ถ้า f เป็นฟังก์ชัน ซึ่งมีนิยามบนช่วงปิด $[a, b]$ ดังนั้น อินทิกรัล จำกัดเขต (definite integral) ของ f จาก a ถึง b เขียนแทนโดย $\int_a^b f(x)\,dx$ และมีค่ากำหนดโดย

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{\|\Delta\| \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(\varepsilon_i)\, \Delta_i x \qquad (6.2.4)$$

ถ้าลิมิตในสมการ 6.2.4 หาค่าได้ (exist)

หมายเหตุ คำกล่าวที่ว่า "f เป็นฟังก์ชันที่อินทิเกรตได้บนช่วงปิด $[a, b]$" นี้มีความหมายเหมือนกันกับคำกล่าวที่ว่า "อินทิกรัลจำกัดเขตของ f จาก a ถึง b หาค่าได้" ในสัญกรณ์ของอินทิกรัลจำกัดเขต $\int_a^b f(x)\,dx$ เราเรียก f (x) ว่าตัวถูก อินทิเกรต (integrand) และเรียก a, b ว่า ขีดจำกัดล่าง (lower limit) และขีดจำกัดบน (upper limit) ตามลำดับ ส่วนสัญลักษณ์ $\int$ นี้เราเรียกว่า เครื่องหมายอินทิกรัล ซึ่งเครื่องหมายนี้เราเคยใช้มาแล้วในเรื่องการหาปฏิยานุพันธ์ในบทที่ 5 เหตุผลที่เราใช้เครื่องหมายเดียวกัน เพราะว่า เราจะเห็นต่อไปในทฤษฎีหลักมูลของแคลคูลัส (fundumental theorem of the calculus) ในหัวข้อ 6.3 ว่า เราหาค่าของอินทิกรัลจำกัดเขตโดยการหาปฏิยานุพันธ์

ปัญหาต่อไปที่เราต้องพิจารณาคือ เมื่อไร ค่า L ซึ่งคล้อยตามนิยาม 6.2.1 จึงจะหาค่าได้ (exist) นั่นก็คือ ภายใต้เงื่อนไขอะไรบ้าง f จึงจะเป็นฟังก์ชันที่อินทิเกรตได้ ซึ่งก็คือทฤษฎีที่เราจะกล่าวถึงต่อไปนี้

ทฤษฎี 6.2.1 ถ้า f เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องบนช่วงปิด $[a, b]$ แล้ว f เป็นฟังก์ชันที่อินทิเกรตได้บน $[a, b]$

พิสูจน์ของทฤษฎีนี้เราจะละไว้ แต่สามารถหาอ่านได้ในหนังสือ advanced calculas ทั่ว ๆ ไป

เราได้กล่าวตั้งแต่แรกของหัวข้อ 6.2 นี้แล้วว่า ลิมิตในสมการ 6.2.1 ซึ่งใช้นิยามพื้นที่ของบริเวณที่เราต้องการ เป็นกรณีพิเศษของลิมิตในนิยาม 6.2.2 ซึ่งใช้นิยามอินทิกรัลจำกัดเขต ในการหาพื้นที่ถ้าช่วงปิด $[a, b]$ ถูกแบ่งเป็น n ช่วงเท่า ๆ กัน ผลแบ่งกั้นของ $[a, b]$ แบบนี้ เราเรียกว่าเป็นแบบสม่ำเสมอ (regular partition) ถ้า Δx เป็นความยาวของแต่ละช่วงแบ่งในผลแบ่งกั้นแบบสม่ำเสมอ แล้ว แต่ละ $\Delta_i x = \Delta x$ และนอร์มมีค่าเท่ากับ Δx ด้วย แทนค่าเหล่านี้ในสมการ 6.2.4 เราได้

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{\Delta x \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(\varepsilon_i)\,\Delta x \qquad (6.2.5)$$

และ
$$\Delta x = \frac{b-a}{n} \qquad (6.2.6)$$

หรือ
$$n = \frac{b-a}{\Delta x} \qquad (6.2.7)$$

จากสมการ 6.2.6 เราได้

$$\lim_{n \to \infty} \Delta x = 0 \qquad (6.2.8)$$

และจากสมการ 6.2.7. เพราะว่า $b > a$ และ Δx เข้าใกล้ศูนย์ทางค่าบวก (เพราะว่า $\Delta x > 0$) ดังนั้นเราได้

$$\lim_{\Delta x \to 0} n = +\infty \qquad (6.2.9)$$

จากลิมิตในสมการ (6.2.8) และ (6.2.9) เราสรุปได้ว่า

$$\Delta x \to 0 \quad \text{สมมูลกับ} \quad n \to \infty \tag{6.2.10}$$

นั่นก็คือถ้าเราแบ่งช่วงปิด $[a, b]$ โดยให้ช่วงแบ่งมีความยาวช่วงน้อยมากจำนวนช่วงที่เราแบ่งก็ต้องมีจำนวนมาก หรือในทางกลับกัน ถ้าจำนวนช่วงแบ่งมีจำนวนมาก ความยาวของแต่ละช่วงแบ่งย่อมมีความยาวน้อยมาก

ดังนั้นจากสมการ 6.2.5 และ 6.2.10 เราได้

$$\int_a^b f(x)\, dx = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f(\varepsilon_i)\ \Delta x \tag{6.2.11}$$

และ ε_i ยังคงเป็นจุดใด ๆ ในช่วง $[x_{i-1}, x_i]$

สมการ 6.2.5 และสมการ 6.2.11 มีความสำคัญมาก เพราะว่าโดยทั่วไป เราใช้ผลแบ่งกั้นแบบสม่ำเสมอในการนำเอาอินทิกรัลจำกัดเขตไปประยุกต์ใช้

ถ้าเราเปรียบเทียบ ลิมิตจากนิยาม 6.1.1 หรือสมการ 6.2.1 ซึ่งคือพื้นที่ของบริเวณกับลิมิตทางด้านขวาจากสมการ 6.2.11 ซึ่งในกรณีแรก เรามี

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f(c_i)\ \Delta x \tag{6.2.12}$$

เมื่อ $f(c_i)$ เป็นค่าต่ำสุดสัมบูรณ์ของฟังก์ชัน f บนช่วงปิด $[x_{i-1}, x_i]$ และในกรณีหลังเรามี

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f(\varepsilon_i)\ \Delta x \tag{6.2.13}$$

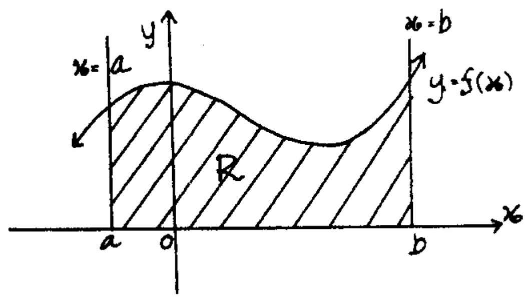
เมื่อ ε_i คือค่าใด ๆ ในช่วงปิด $[x_{i-1}, x_i]$

ด้วยเพราะว่า f เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องบน $[a,b]$ โดยทฤษฎี ๖.๒.๑ $\int_a^b f(x)\, dx$ หาค่าได้ ฉะนั้น อินทิกรัลจำกัดเขต คือ ลิมิตของผลรวมรีมานน์ของ f บน $[a,b]$ รวมทั้งลิมิตจาก (6.2.12) และ (6.2.13) ดังนั้นเราจะนิยามพื้นที่ของบริเวณใหม่ดังต่อไปนี้

นิยาม 6.2.3 ให้ f เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องบนช่วงปิด $[a, b]$ และ $f(x) > 0$ สำหรับทุกๆ x ใน $[a,b]$ ให้ R เป็นบริเวณ ซึ่งล้อมรอบด้วยเส้นโค้ง $y = f(x)$ แกน x และเส้นตรง $x = a$ และ $x = b$ ดังนั้น พื้นที่ของบริเวณ R คือ

$$A = \lim_{\Delta \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(\varepsilon_i) \Delta_i x = \int_a^b f(x)\, dx \qquad (6.2.14)$$

นิยามนี้กล่าวว่า ถ้า $f(x) > 0$ สำหรับทุก ๆ x ใน $[a,b]$ อินทิกรัลจำกัดเขต $\int_a^b f(x)\, dx$ มีความหมายในแง่ของเรขาคณิตว่า คือ ค่าที่วัดพื้นที่ของบริเวณ R ดังแสดงในรูป 6.2.4



รูป 6.2.4

เราจะใช้สมการ 6.2.11 หาค่าของ อินทิกรัลจำกัดเขต ดังแสดงในตัวอย่างต่อไปนี้

ตัวอย่างที่ 6.2.2 จงหาค่าของ อินทิกรัลจำกัดเขต $\int_1^3 x^2 dx$ และอธิบายความหมายของอินทิกรัลนี้ในแง่ของเรขาคณิต

วิธีทำ เราแบ่งช่วง $[1, 3]$ เป็นแบบสม่ำเสมอ โดยแบ่งเป็น n ช่วงแต่ละช่วงยาว $\Delta x = \frac{3-1}{n} = \frac{2}{n}$

ถ้าเราเลือก ε_i ให้เป็นจุดขวาสุดของแต่ละช่วงแบ่ง ดังนั้น $\varepsilon_1 = 1+\frac{2}{n}$, $\varepsilon_2 = 1+2\left(\frac{2}{n}\right)$, $\varepsilon_3 = 1+3\left(\frac{2}{n}\right)$,......,$\varepsilon_i = 1+i\left(\frac{2}{n}\right)$,......, $\varepsilon_n = 1+n\left(\frac{2}{n}\right) = 3$

เพราะว่า $f(x) = x^2$ เราได้

$$f(\varepsilon_i) = \left(1+\frac{2i}{n}\right)^2 = \left(\frac{n+2i}{n}\right)^2$$

โดยใช้ สมการ 6.2.11 เราได้

$$\int_1^3 x^2 dx = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{n+2i}{n}\right)^2 \frac{2}{n}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{2}{n^3} \sum_{i=1}^{n} (n^2 + 4ni + 4i^2)$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{2}{n^3} \left(n^2 \sum_{i=1}^{n} 1 + 4n \sum_{i=1}^{n} i + 4 \sum_{i=1}^{n} i^2\right)$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{2}{n^3} \left(n^2.n + 4n.\frac{n(n+1)}{2} + \frac{4n(n+1)(2n+1)}{6}\right)$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{2}{n^3} \left(n^3 + 2n^3 + 2n^2 + \frac{2n(2n^2+3n+1)}{3}\right)$$

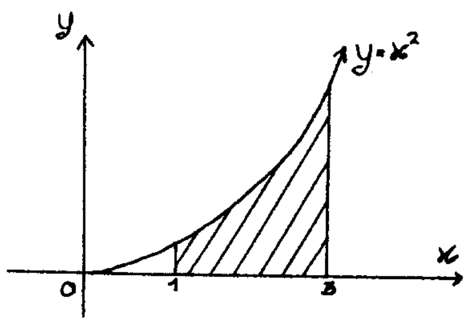
$$= \lim_{n\to\infty} \left(6 + \frac{4}{n} + \frac{8n^2+12n+4}{3n^2}\right)$$

$$= \lim_{n\to\infty} \left(6 + \frac{4}{n} + \frac{8}{3} + \frac{4}{n} + \frac{4}{3n^2}\right)$$

$$= 6 + 0 + \frac{8}{3} + 0 + 0$$

$$= 8\tfrac{2}{3}$$

เพราะว่า $f(x) = x^2 > 0$ บน $[1, 3]$ ค่า $8\frac{2}{3}$ คือพื้นที่ของบริเวณซึ่งล้อมรอบด้วยเส้นโค้ง $y = x^2$ แกน x และเส้นตรง $x = 1$ และ $x = 3$ ดังแสดงในรูป 6.2.5



รูป 6.2.5

ในนิยาม 6.2.2 ช่วงปิด [a, b] ถูกกำหนดมาให้ นั่นก็คือ $a < b$ ในกรณีที่ $a > b$ หรือเมื่อ $a = b$ เราสามารถนิยาม $\int_a^b f(x)dx$ ได้ดังต่อไปนี้

นิยาม 6.2.4 ถ้า $a > b$ แล้ว

$$\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx$$

ถ้า $\int_b^a f(x)dx$ หาค่าได้

นิยาม 6.2.5 $\int_a^a f(x)dx = 0$ ถ้า $f(a)$ หาค่าได้

จากตัวอย่าง 6.2.2 เราเห็นได้ว่าการหาค่าของอินทิกรัลจำกัดเขต ค่อนข้างจะยุ่งยากและยาว เพราะว่าเราต้องหาลิมิตของผลรวม ในหัวข้อ 6.3 เราจะหาวิธีการที่ง่ายกว่านี้โดยอาศัยคุณสมบัติจากทฤษฎีต่อไปนี้

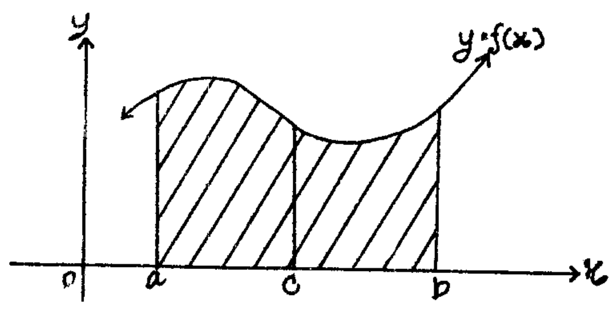
ทฤษฎี 6.2.2 ถ้า f เป็นฟังก์ชันที่อินทิเกรตได้บนช่วงซึ่งรวมจุด a, b, c อยู่ด้วยแล้ว

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$$

โดยไม่คำนึงถึงลำดับ ของ a, b, c

เราจะไม่กล่าวถึงพิสูจน์ของทฤษฎีนี้ แต่ตัวอย่างต่อไปจะแสดงให้เห็นความหมายของทฤษฎีในแง่ของเรขาคณิต เมื่อ $a < c < b$

ตัวอย่างที่ 6.2.3 ถ้า $f(x) > 0$ สำหรับทุก ๆ x ใน [a, b] และ $a < c < b$ แล้ว ทฤษฎี 6.2.2 กล่าวว่า พื้นที่ของบริเวณล้อมรอบด้วยเส้นโค้ง $y = f(x)$ แกน x จาก $x = a$ ถึง $x = b$ เท่ากับผลรวมของพื้นที่จาก a ถึง c และจาก c ถึง b ดังแสดงในรูป 6.2.6



รูป 6.2.6

แบบฝึกหัด 6.2

จงหาผลรวมรีมานน์ สำหรับฟังก์ชันต่อไปนี้บนช่วงปิด โดยใช้ผลแบ่งกั้น Δ และจุด ε_i ที่กำหนดให้ และเขียนกราฟของฟังก์ชันบนช่วงปิดที่กำหนดมาให้นี้ รวมทั้งเขียนรูปสี่เหลี่ยมผืนผ้าที่ i ซึ่งเป็นเทอมหนึ่งในผลรวมรีมานน์

1) $f(x) = x^2,\ 0 < x < 3;$ สำหรับ $\Delta : x_0 = 0,\ x_1 = \frac{1}{2},\ x_2 = 1\frac{1}{4},$

$x_3 = 2\frac{1}{4},\ x_4 = 3;\ \varepsilon_1 = \frac{1}{4},\ \varepsilon_2 = 1,\ \varepsilon_3 = 1\frac{1}{2},\ \varepsilon_4 = 2\frac{1}{2}$

2) $f(x) = \frac{1}{x},\ 1 < x < 3;$ สำหรับ $\Delta : x_0 = 1,\ x_1 = \frac{2}{3},\ x_2 = 2\frac{1}{4},$

$x_3 = 2\frac{2}{3},\ x_4 = 3;\ \varepsilon_1 = 1\frac{1}{4},\ \varepsilon_2 = 2,\ \varepsilon_3 = 2\frac{1}{2},\ \varepsilon_4 = 2\frac{3}{4}$

3) $f(x) = x^2 - x + 1,\ 0 < x < 1;$ สำหรับ $\Delta : x_0 = 0,\ x_1 = 0.2,$

$x_2 = 0.5,\ x_3 = 0.7\ x_4 = 1;\ \varepsilon_1 = 0.1,\ \varepsilon_2 = 0.4,\ \varepsilon_3 = 0.6,\ \varepsilon_4 = 0.9$

จงหาค่าของอินทิกรัลจำกัดเขตในข้อต่อไปนี้ ตามวิธีในตัวอย่าง 6.2.2

4) $\int_0^3 x^2\, dx$

5) $\int_0^1 (x^2 - x + 1)\, dx$

6) $\int_{-2}^{2} (x^3 + 1)\, dx$

จงหาพื้นที่ของบริเวณในข้อต่อไปนี้ โดย ก) เขียนพื้นที่ของบริเวณในรูปของลิมิตของผลรวมรีมานน์โดยใช้ผลแบ่งกั้นแบบสม่ำเสมอ ข) เขียนลิมิตนี้ในรูปของอินทิกรัลจำกัดเขต ข) หาค่าของอินทิกรัลจำกัดเขตนี้ ตามวิธีในตัวอย่าง 6.2.2 โดยเลือก ε_i ที่เหมาะสม และเขียนรูปแสดงบริเวณด้วย

7) ล้อมรอบด้วย เส้นตรง $y = 2x - 1$ แกน x และเส้นตรง $x = 1$ และ $x = 5$

8) ล้อมรอบด้วย เส้นโค้ง $y = 4 - x^2$ แกน x และเส้นตรง $x = 1$ และ $x = 2$

9) ล้อมรอบด้วย เส้นโค้ง $y = 12 - x + x^2$ แกน x และเส้นตรง $x = -3$ และ $x = 2$

10) จงแสดงว่าถ้า f เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องบน $[-1,2]$ แล้ว

$$\int_{-1}^{2} f(x)\, dx + \int_{2}^{0} f(x)\, dx + \int_{0}^{1} f(x)\, dx + \int_{1}^{-1} f(x)\, dx = 0$$

6.3 กฎหลักมูลของแคลคูลัส (The Fundamental Theorem of The Calculus)

กฎหลักมูลนี้สืบเนื่องมาจาก การศึกษาของ Newton และ Leibnitz ซึ่งท่านทั้งสองต่างก็พบว่าสามารถนำหลักการของแคลคูลัสมาใช้ในการหาพื้นที่ของบริเวณล้อมรอบด้วยเส้นโค้งหรือเซตของเส้นโค้งโดยการหาค่าของอินทิกรัลจำกัดเขต หรือการหาปฏิยานุพันธ์ ขบวนนี้ที่เองที่เป็นที่มาของกฎหลักมูลของแคลคูลัส (The fundamental Theorem of The calculus) ก่อนที่เราจะกล่าวถึงทฤษฎีและการพิสูจน์ของกฎหลักมูลนี้เราจะพิจารณา อินทิกรัลจำกัดเขตซึ่งมีขีดจำกัดบนเป็นตัวแปร

ให้ f เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องบนช่วงปิด $[a, b]$ ดังนั้น ค่าของอินทิกรัลจำกัดเขต $\int_a^b f(x)\,dx$ ขึ้นอยู่กับฟังก์ชัน f และค่าของ a และ b เท่านั้น และไม่ขึ้นอยู่กับสัญลักษณ์ x ซึ่งในที่นี้ทำหน้าที่เป็นตัวแปรอิสระ นั่นก็คือ

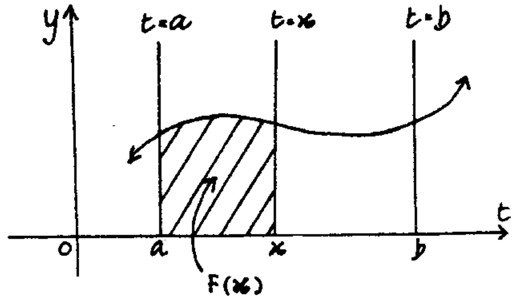
$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^b f(u)\,du = \int_a^b f(t)\,dt$$

เราเรียกตัวแปรอิสระในเครื่องหมายอินทิกรัลนี้ว่า ตัวแปรหุ่น (dummy variable) ถ้า f เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องบนช่วงปิด $[a, b]$ ดังนั้น โดยทฤษฎี 6.2.1 และนิยามของอินทิกรัลจำกัดเขต $\int_a^b f(x)dx$ หาค่าได้ (exist) และค่าของอินทิกรัลจำกัดเขตนี้มีเพียงค่าเดียวเท่านั้น ถ้า x เป็นค่าค่าหนึ่งใน $[a, b]$ แล้ว f ต่อเนื่องบน $[a, x]$ ด้วยเพราะว่า f ต่อเนื่องบน $[a, b]$ ฉะนั้น $\int_a^x f(t)\,dt$ หาค่าได้และมีเพียงค่าเดียวเท่านั้น และค่าค่านี้ขึ้นอยู่กับ x ดังนั้น เราให้ $\int_a^x f(t)\,dt$ เป็นนิยามของฟังก์ชัน F ซึ่งมีโดเมนเป็น $[a, b]$ และค่าของฟังก์ชัน F ที่ค่าใด ๆ ของ x ใน $[a, b]$ คือ

$$F(x) = \int_a^x f(t)\,dt \tag{6.3.1}$$

สังเกตได้ว่า เมื่อขีดจำกัดของอินทิกรัลจำกัดเขตเป็นตัวแปร เราใช้สัญลักษณ์หรือตัวแปรตัวอื่นในตัวถูกอินทิเกรต ในที่นี้ เราใช้ t เป็นตัวแปรอิสระ ในตัวถูกอินทิเกรต

ถ้าในสมการ 6.3.1 $f(t) > 0$ สำหรับทุก ๆ ค่าของ t ใน $[a, b]$ แล้ว ค่าของ $F(x)$ มีความหมายคือ เป็นพื้นที่ของบริเวณซึ่งล้อมรอบโดยเส้นโค้ง $y = f(t)$ แกน t และเส้นตรง $t = a$ และ $t = x$ ดังแสดงในรูป 6.3.1 และ $F(a) = \int_a^a f(t)\,dt$ ซึ่งโดยนิยาม 6.2.5 มีค่าเท่ากับศูนย์



รูป 6.3.1

ต่อไปเราต้องการที่จะแสดงว่า F ซึ่งเป็นฟังก์ชันต่อเนื่องบน [a, b] และมีนิยามดังในสมการ 6.3.1 เป็นฟังก์ชันที่หาอนุพันธ์ได้บน [a, b] ยิ่งไปกว่านั้น เราต้องการที่จะแสดงว่าสำหรับค่าใด ๆ ของ x ใน [a, b]

$$F'(x) = f(x) \tag{6.3.2}$$

พิจารณา x_1 และ $x_1 + \Delta x$ ใน [a, b] เรามี

$$F(x_1) = \int_a^{x_1} f(t)\,dt$$

และ

$$\Gamma(x_1 + \Delta x) = \int_a^{x_1+\Delta x} f(t)\,dt$$

ดังนั้น

$$F(x_1 + \Delta x) - F(x_1) = \int_a^{x_1+\Delta x} f(t)\,dt - \int_a^{x_1} f(t)\,dt \tag{6.3.3}$$

โดยทฤษฎี 6.2.2

$$\int_a^{x_1} f(t)\,dt + \int_{x_1}^{x_1+\Delta x} f(t)\,dt = \int_a^{x_1+\Delta x} f(t)\,dt$$

หรือ

$$\int_a^{x_1+\Delta x} f(t)\,dt - \int_a^{x_1} f(t)\,dt = \int_{x_1}^{x_1+\Delta x} f(t)\,dt \tag{6.3.4}$$

แทนค่าจากสมการ 6.3.4 ในสมการ 6.3.3 เราได้

$$F(x_1 + \Delta x) - F(x_1) = \int_{x_1}^{x_1+\Delta x} f(t)\,dt$$

หรือ ถ้าหารโดยตลอดด้วย Δx เราได้

$$\frac{F(x_1+\Delta x)-F(x_1)}{\Delta x} = \frac{\int_{x_1}^{x_1+\Delta x} f(t)\,dt}{\Delta x}$$

ให้ $\Delta x \to 0$ เราได้ลิมิต

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{F(x_1+\Delta x)-F(x_1)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\int_{x_1}^{x_1+\Delta x} f(t)\,dt}{\Delta x} \qquad (6.3.5)$$

ซึ่งค่าทางซ้ายของสมการ 6.3.5 คือ $F'(x_1)$ ถ้าเราสามารถแสดงว่าค่าทางขวาของสมการ 6.3.5 คือ $f(x_1)$ นั่นก็คือเราได้แสดงว่าสมการ 6.3.2 เป็นจริงสำหรับค่าใด ๆ ของ x ใน $[a,b]$ อย่างไรก็ตามเราจะไม่พิสูจน์ในที่นี้ เพราะว่ายุ่งยากจนเกินไปในระดับนี้ แต่เราสามารถแสดงในแง่เรขาคณิต

พิจารณา $f(t) \geqslant 0$ และ $\Delta x > 0$ ดังนั้น $\int_{x_1}^{x_1+\Delta x} f(t)\,dt$ คือพื้นที่ของบริเวณซึ่งล้อมรอบด้วยเส้นโค้ง $y = f(t)$ แกน t และเส้นตรง $t = x_1$ และ $t = x_1 + \Delta x$ ดังรูป 6.3.2 ให้ m และ M หน่วยเป็นค่าต่ำสุดและสูงสุดของ $f(t)$ บนช่วงปิด $[x_1, x_1+\Delta x]$ ตามลำดับ ดังนั้น

$$m\,\Delta x \leqslant \int_{x_1}^{x_1+\Delta x} f(t)\,dt < M\,\Delta x$$

หรือ

$$m < \frac{\int_{x_1}^{x_1+\Delta x} f(t)\,dt}{\Delta x} < M \qquad (6.3.6)$$

ถ้า Δx เข้าใกล้ o ทางขวาแล้วเพราะว่า f เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องบน $[x_1, x_1+\Delta x]$ ทั้ง m และ M เข้าใกล้ $f(x_1)$ ดังนั้นจากอสมการ (6.3.6) เราได้

$$\lim_{\Delta x \to o^+} \frac{\int_{x_1}^{x_1+\Delta x} f(t)\,dt}{\Delta x} = f(x_1) \qquad (6.3.7)$$

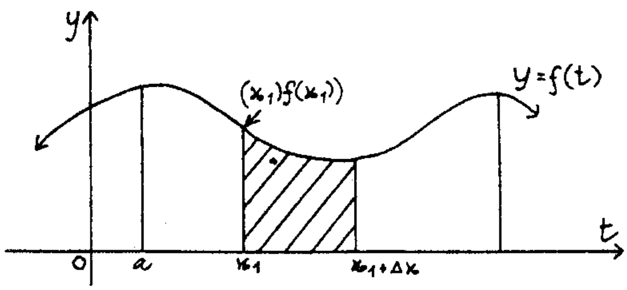
ในทำนองเดียวกัน ถ้า $\Delta x < 0$ แล้วเราพิจารณาช่วงปิด $[x_1+\Delta x, x_1]$ และให้ Δx เข้าใกล้ o ทางซ้าย เราได้

$$\lim_{\Delta x \to 0^-} \frac{\int_{x_1}^{x_1+\Delta x} f(t)\,dt}{\Delta x} = f(x_1) \qquad (6.3.8)$$

เราสรุปจากสมการ 6.3.7 และสมการ 6.3.8 ได้ว่าค่าทางด้านขวาของสมการ 6.3.5 คือ $f(x_1)$ ดังนั้นจากสมการ 6.3.5 เราได้

$$F'(x_1) = f(x_1)$$

เพราะว่า x_1 เป็นค่าใด ๆ $[a,b]$ นั่นก็คือ เราได้แสดงว่าสมการ 6.3.2 เป็นจริง และสรุปผลอันนี้ในทฤษฎีต่อไปนี้



รูป 6.3.2

ทฤษฎี 6.3.1 ให้ f เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องบนช่วงปิด $[a, b]$ และให้ x เป็นค่าใด ๆ ใน $[a, b]$ ถ้า F เป็นฟังก์ชันซึ่งมีนิยาม คือ

$$F(x) = \int_a^x f(t)\,dt$$

แล้ว

$$F'(x) = f(x) \qquad (6.3.9)$$

ทฤษฎีนี้กล่าวว่า อินทิกรัลจำกัดเขต $\int_a^x f(t)\,dt$ ซึ่งมีขีดจำกัดบนเป็นตัวแปร x คือ ปฏิยานุพันธ์ของ f (antiderivative of f)

ทฤษฎี 6.3.2 ทฤษฎีกฎหลักมูลของแคลคูลัส (Fundamental Theorem of the Calculus) ให้ f เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องบนช่วงปิด $[a, b]$ และ g เป็นฟังก์ชันซึ่ง

$$g'(x) = f(x) \qquad (6.3.10)$$

สำหรับทุก ๆ x ใน $[a, b]$ แล้ว

$$\int_a^b f(t)\, dt = g(b) - g(a)$$

หมายเหตุ ถ้า $x = a$ อนุพันธ์ในสมการ 6.3.9 และสมการ 6.3.10 อาจเป็นอนุพันธ์ทางด้านขวาของ a และถ้า $x = b$ อนุพันธ์ในสมการ 6.3.9 และสมการ 6.3.10 อาจเป็นอนุพันธ์ทางด้านซ้ายของ b

พิสูจน์ ถ้า f เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องสำหรับทุก ๆ ค่าใน $[a, b]$ จากทฤษฎี 6.3.1 เราทราบว่า อินทิกรัลจำกัดเขต $\int_a^x f(t)\, dt$ ซึ่งมีขีดจำกัดบนเป็นตัวแปร x คือนิยามของฟังก์ชัน F ซึ่งอนุพันธ์ของมันบน $[a, b]$ คือ f เพราะว่าโดยสมมุติฐาน $g'(x) = f(x)$ และจากทฤษฎี 5.2.1 เราได้

$$g(x) = \int_a^x f(t)\, dt + K \qquad (6.3.11)$$

เมื่อ K เป็นค่าคงที่ใด ๆ

ให้ $x = a$ และ $x = b$ ในสมการ 6.3.11 เราได้

$$g(b) = \int_a^b f(t)\, dt + K \qquad (6.3.12)$$

และ

$$g(a) = \int_a^a f(t)\, dt + K \qquad (6.3.13)$$

จากสมการ 6.3.12 และสมการ 6.3.13 เราได้

$$g(b) - g(a) = \int_a^b f(t)\, dt - \int_a^a f(t)\, dt$$

แต่โดยนิยาม 6.2.5 $\int_a^a f(t)\, dt = 0$ ดังนั้น

$$g(b) - g(a) = \int_a^b f(t)\, dt$$

ซึ่งก็คือสิ่งที่เราต้องการพิสูจน์

ดังนั้นต่อไปนี้ เราใช้ทฤษฎี 6.3.2 หาค่าของอินทิกรัลจำกัดเขตและใช้สัญกรณ์ $g(x)\,]_a^b$ แทน $[\,g(b) - g(a)\,]$

ตัวอย่าง 6.3.1 เราใช้กฎหลักมูลของแคลคูลัสหาค่าของ $\int_1^3 x^2 dx$ ได้ดังต่อไปนี้

วิธีทำ ในที่นี้ $f(x) = x^2$ เราทราบว่าปฏิยานุพันธ์ของ x^2 คือ $\frac{1}{3}x^3$ ดังนั้นเราให้

$$g(x) = \frac{x^3}{3}$$

โดยทฤษฎี 6.3.2 เราได้

$$\int_1^3 x^2\,dx = \frac{x^3}{3}\Big]_1^3 = \left[9-\frac{1}{3}\right] = 8\frac{2}{3}$$

ซึ่งคำตอบนี้เท่ากับค่าที่เราหามาแล้วในตัวอย่าง 6.2.2

เนื่องด้วย อินทิกรัลจำกัดเขตและปฏิยานุพันธ์ต่างก็มีความเกี่ยวเนื่องกัน เราจึงได้ใช้เครื่องหมายอินทิกรัลในสัญกรณ์ $\int f(x)\,dx$ แทนปฏิยานุพันธ์ แต่ต่อไปนี้เราจะเลิกใช้คำว่าปฏิยานุพันธ์และการหาปฏิยานุพันธ์ และเราเรียก $\int f(x)\,dx$ ว่า อินทิกรัลไม่จำกัดเขต (indefinite integral) ของ $f(x)\,dx$ และเรียกขบวนการที่ใช้หาค่าของอินทิกรัลไม่จำกัดเขตว่า การอินทิเกรต (integration)

ข้อแตกต่างระหว่าง อินทิกรัลไม่จำกัดเขตและอินทิกรัลจำกัดเขต คือ อินทิกรัลไม่จำกัดเขต $\int f(x)\,dx$ มีนิยามเป็นฟังก์ชัน g ซึ่งอนุพันธ์ของ g คือ $g'(x) = f(x)$ ในขณะที่ อินทิกรัลจำกัดเขต คือ ค่าค่าหนึ่งซึ่งขึ้นอยู่กับฟังก์ชัน f และค่า a และ b และมีนิยามเป็นลิมิตของผลรวมรีมานน์และเราไม่ได้อ้างถึงการหาอนุพันธ์ ในนิยามของอินทิกรัลจำกัดเขต

สำหรับค่าทั่วไปของอินทิกรัลไม่จำกัดเขต จะเกี่ยวเนื่องกับค่าคงที่ใด ๆ เช่น

$$\int x^2 dx = \frac{x^3}{3} + C$$

ทั้งนี้เพราะว่า อนุพันธ์ของ $\frac{x^3}{3} + 1$, $\frac{x^3}{3} - 5$, $\frac{x^3}{3} + 4, \ldots\ldots$ ต่างก็เท่ากับ x^2

ดังนั้น เราเขียน C แทนคงที่ 1, —5, 4,...... เหล่านี้ และเรียกค่าคงที่ใด ๆ C นี้ว่า ค่าคงที่ของการอินทิเกรต (constant of integration) ในการหาค่าของอินทิกรัลจำกัดเขตโดยใช้ทฤษฎีกฎหลักมูล เราไม่จำเป็นต้องคำนึงถึงค่าคงที่ใด ๆ C นี้ เพราะว่า โดยทฤษฎีกฎหลักมูล เราสามารถเลือกปฏิยานุพันธ์ใด ๆ รวมทั้งในกรณีที่ $C = 0$

ตัวอย่าง 6.3.2 จงหาค่าของ $\int_1^2 (x^2 - 2x + 4)\, dx$

วิธีทำ

$$\begin{aligned}
\int_1^2 (x^2 - 2x + 4)\, dx &= \int_1^2 x^2\, dx - 2\int_1^2 x\, dx + 4\int_1^2 dx \\
&= \frac{x^3}{3} - 2.\frac{x^2}{2} + 4x\Big]_1^2 \\
&= (\tfrac{8}{3} - 4 + 8) - (\tfrac{1}{3} - 1 + 4) \\
&= \frac{10}{3}
\end{aligned}$$

ตัวอย่าง 6.3.3 จงหาค่าของ $\int_{-1}^1 (x^{4/3} + 4x^{1/3})\, dx$

วิธีทำ

$$\begin{aligned}
\int_{-1}^1 (x^{4/3} + 4x^{1/3})\, dx &= \tfrac{3}{7} x^{7/3} + 4\ \tfrac{3}{4} x^{4/3}\Big]_{-1}^1 \\
&= (\tfrac{3}{7} + 3) - (\tfrac{-3}{7} + 3) \\
&= \tfrac{6}{7}
\end{aligned}$$

ตัวอย่าง 6.3.4 จงหาค่าของ $\int_0^2 2x^2 \sqrt{x^8 + 1}\, dx$

วิธีทำ

$$\begin{aligned}
\int_0^2 2x^2 \sqrt{x^3 + 1}\, dx &= \tfrac{2}{3} \int_0^2 \sqrt{x^2 + 1}\ \ 3x^2\, dx \\
&= \tfrac{2}{3}\, \frac{(x^2 + 1)^{3/2}}{\frac{3}{2}}\Big]_0^2 \\
&= \tfrac{4}{9} (8 + 1)^{3/2} - \tfrac{4}{9} (0 + 1)^{3/2} \\
&= \tfrac{4}{9} (27 - 1) = \tfrac{104}{9}
\end{aligned}$$

ตัวอย่าง 6.3.5 จงหาค่าของ $\int_0^3 x\ \sqrt{1 + x}\, dx$

วิธีทำ ในการหาค่าของ $\int x\ \sqrt{1 + x}\, dx$

เราให้ $u = \sqrt{1+x}$, $u^2 = 1+x$, $x = u^2 - 1$, $dx = 2udu$

แทนค่าเหล่านี้ เราได้

$$\int x\sqrt{1+x}\,dx = \int (u^2-1)\,u\,(2udu)$$
$$= 2\int (u^4-u^2)\,du$$
$$= \tfrac{2}{5}u^5-\tfrac{2}{3}u^3+C$$
$$= \tfrac{2}{5}(1+x)^{\frac{5}{2}}-\tfrac{2}{3}(1+x)^{\frac{3}{2}}+C$$

ดังนั้น

$$\int_0^3 x\sqrt{1+x}\,dx = \tfrac{2}{5}(1+x)^{\frac{5}{2}}-\tfrac{2}{3}(1+x)^{\frac{3}{2}}\Big]_0^3$$
$$= \tfrac{2}{5}(4)^{\frac{5}{2}}-\tfrac{2}{3}(4)^{\frac{3}{2}}-\tfrac{2}{5}(1)^{\frac{5}{2}}+\tfrac{2}{3}(1)^{\frac{3}{2}}$$
$$= \tfrac{64}{5}-\tfrac{16}{3}-\tfrac{2}{5}+\tfrac{2}{3}$$
$$= \tfrac{116}{15}$$

หรือเราอาจจะเปลี่ยนค่าของขีดจำกัดตามตัวแปร u และหาค่าของ $\int_0^3 x\sqrt{1+x}\,dx$ ได้ทันที นั่นก็คือ

จาก $u = \sqrt{1+x}$

เมื่อ $x = 0$, $u = 1$

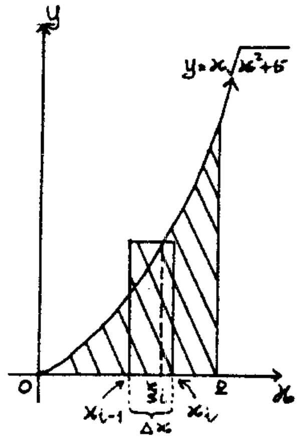
และ เมื่อ $x = 3$, $u = 2$

ดังนั้นเรามี

$$\int_0^3 x\sqrt{1+x}\,dx = 2\int_1^2 (u^4-u^2)\,du$$
$$= \tfrac{2}{5}u^5-\tfrac{2}{3}u^3\Big]_1^2$$
$$= \tfrac{64}{5}-\tfrac{16}{3}-\tfrac{2}{5}+\tfrac{2}{3}$$
$$= \tfrac{116}{15}$$

ตัวอย่าง 6.3.6 จงหาพื้นที่ของบริเวณในจตุภาคที่ 1 ซึ่งล้อมรอบด้วย เส้นโค้ง $y = x\sqrt{x^2+5}$, แกน x และเส้นตรง $x = 2$

วิธีทำ บริเวณที่เราต้องการหาพื้นที่ แสดงในรูป 6.3.3



เราแบ่งช่วงปิด $[0, 2]$ เป็นผลแบ่งกั้นแบบสม่ำเสมอ โดยที่ความกว้างของแต่ละช่วงแบ่งคือ Δx และความสูงของรูปสี่เหลี่ยมผืนผ้ารูปที่ i คือ $\varepsilon_i\sqrt{\varepsilon_i^2+5}$ หน่วย เมื่อ ε_i เป็นจุดใดๆ ในช่วงที่ i ดังนั้นพื้นที่ของรูปสี่เหลี่ยมผืนผ้าที่ i คือ $\varepsilon_i\sqrt{\varepsilon_i^2+5}\ \Delta x$ และผลรวมของพื้นที่ของรูปสี่เหลี่ยมผืนผ้าทั้ง n รูป คือ

$$\sum_{i=1}^{n} \varepsilon_i\sqrt{\varepsilon_i^2+5}\ \Delta x$$

ซึ่งคือ ผลรวมรีมานน์ ลิมิตของผลรวมนี้เมื่อ Δx เข้าใกล้ศูนย์ (หรือ $n \to \infty$) คือ พื้นที่ของบริเวณที่เราต้องการ และลิมิตของผลรวมรีมานน์นี้คือ อินทิกรัลจำกัดเขต ซึ่งหาค่าได้โดยทฤษฎีกฎหลักมูลของแคลคูลัส

ให้ A เป็นตารางหน่วยของพื้นที่ของบริเวณในรูป 6.3.3 ดังนั้น

$$\begin{aligned}
A &= \lim_{\Delta x \to 0} \sum_{i=1}^{n} \varepsilon_i \sqrt{\varepsilon_i^2+5}\ \Delta x \\
&= \int_0^2 x\sqrt{x^2+5}\ dx \\
&= \int_0^2 \sqrt{x^2+5}\ (2xdx) \\
&= \tfrac{1}{2}\cdot\tfrac{2}{3}\ (x^2+5)^{\frac{3}{2}}\Big]_0^2 \\
&= \tfrac{1}{3}\ \left[9^{\frac{3}{2}} - 5^{\frac{3}{2}}\right] \\
&= \tfrac{1}{3}\ (27 - 5\sqrt{5})
\end{aligned}$$

ดังนั้น พื้นที่ของบริเวณที่เราต้องการ คือ $\frac{1}{3}\ (27 - 5\sqrt{5})$ ตารางหน่วย

แบบฝึกหัด 6.3

จงหาค่าของอินทิกรัลจำกัดเขตในข้อต่อไปนี้ โดยใช้ทฤษฎีกฎหลักมูลของแคลคูลัส

1) $\int_{-2}^{2} (x^3+1)\, dx$

2) $\int_{0}^{1} (x^2-x+1)\, dx$

3) $\int_{1}^{3} \frac{2x^2+1}{x^2}\, dx$

4) $\int_{1}^{10} \sqrt{3y-1}\, dy$

5) $\int_{-1}^{3} \frac{dy}{(y+2)^3}\, dy$

6) $\int_{-2}^{0} 3u\sqrt{4-u^2}\, du$

7) $\int_{1}^{2} \frac{udu}{(3u^2-1)^2}$

8) $\int_{0}^{1} \frac{z^2+2z}{\sqrt[3]{z^3+3z^2+1}}\, dz$

9) $\int_{2}^{3} z^2\sqrt{z-2}\, dz$

10) $\int_{0}^{15} \frac{x}{(1+x)^{3/4}}\, dx$

11) $\int_{-2}^{5} |x-3|\, dx$

12) $\int_{-1}^{1} \sqrt{|x|-x}\, dx$

13) $\int_{0}^{1} \sqrt{x}\sqrt{1+x\sqrt{x}}\, dx$

จงหาพื้นที่ของบริเวณในข้อต่อไปนี้ โดยเขียนพื้นที่ในรูปของอินทิกรัลจำกัดเขต และหาค่าของอินทิกรัลจำกัดเขตโดยใช้ทฤษฎีกฎหลักมูลของแคลคูลัส พร้อมทั้งเขียนรูปแสดงบริเวณที่หาพื้นที่ด้วย

14) ล้อมรอบด้วย $y = 4x - x^2$ แกน x เส้นตรง $x = 1$ และ $x = 3$

15) ล้อมรอบด้วย $y = x^2 - 2x + 3$ แกน x เส้นตรง $x = -2$ และ $x = 1$

16) ล้อมรอบด้วย $y = \sqrt{x+1}$ แกน x แกน y และเส้นตรง $x = 8$

17) ล้อมรอบด้วย $y = x\sqrt{x^2+9}$ แกน x แกน y และเส้นตรง $x = 4$

6.4 พื้นที่ของบริเวณในระนาบ (Area of a region in a plane)

จากนิยาม 6.2.3 เราทราบว่า ถ้า f เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องบนช่วงปิด $[a,b]$ และถ้า $f(x) \geqslant 0$ สำหรับทุก ๆ ค่าของ x ใน $[a,b]$ แล้วพื้นที่ของบริเวณซึ่งล้อมรอบด้วยเส้นโค้ง $y = f(x)$, แกน x และเส้นตรง $x = a$ และ $x = b$ คือ

$$\lim_{\|\Delta\| \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(\varepsilon_i) \Delta_i x \qquad (6.4.1)$$

ซึ่งลิมิตนี้เท่ากับ อินทิกรัลจำกัดเขต $\int_a^b f(x)\,dx$ นั่นเอง

ถ้า $f(x) < 0$ สำหรับทุก ๆ x ใน $[a,b]$ แล้ว สำหรับแต่ละ $f(\varepsilon_i)$ เป็นค่าลบ ดังนั้น เพื่อให้พื้นที่ ของบริเวณซึ่งล้อมรอบด้วยเส้นโค้ง $y = f(x)$ แกน x และเส้นตรง $x = a$ และ $x = b$ ยังคงเป็นค่าบวก เรานิยามพื้นที่นี้โดย

$$\lim_{\|\Delta\| \to 0} \sum_{i=1}^{n} \left[-f(\varepsilon_i)\right] \Delta_i x$$

$$= -\int_a^b f(x)\,dx \qquad (6.4.2)$$

ตัวอย่าง 6.4.1 จงหาพื้นที่ของบริเวณซึ่งล้อมรอบด้วยเส้นโค้ง $y = x^2 - 4x$ แกน x และเส้นตรง $x = 1$ และ $x = 2$

วิธีทำ บริเวณที่เราต้องการหาพื้นที่แสดงในรูป 4.6.1 เพราะว่า $f(x) = x^2 - 4x < 0$ บน $[0,3]$ ดังนั้น ถ้าให้ A เป็นพื้นที่ของบริเวณนี้ และจากสมการ 6.4.2

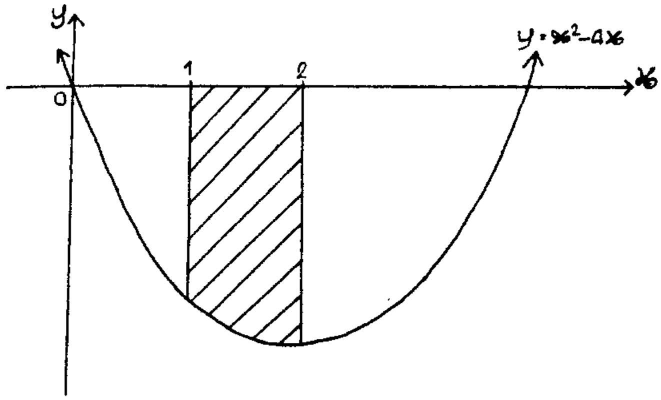
$$A = -\int_1^2 (x^2 - 4x)\,dx$$

$$= -\left(\frac{x^3}{3} - 4\frac{x^2}{2}\right)\Big]_1^2$$

$$= -\left(\frac{8}{3} - 8\right) + \left(\frac{1}{3} - 2\right)$$

$$= -\frac{7}{3} + 6 = \frac{11}{3}$$

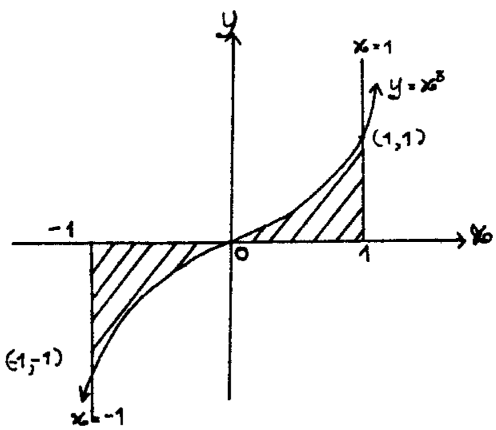
ฉะนั้น พื้นที่ของบริเวณที่เราต้องการคือ $\frac{11}{3}$ ตารางหน่วย



รูป 6.4.1

ตัวอย่าง 6.4.2 จงหาพื้นที่ของบริเวณซึ่งล้อมรอบด้วย เส้นโค้ง $y = x^3$ แกน x และเส้นตรง $x = -1$ และ $x = 1$

วิธีทำ บริเวณที่เราต้องการหาพื้นที่แสดงในรูป 6.4.2 ซึ่งเห็นได้ $f(x) > 0$ เมื่อ x อยู่ในช่วง $[0, 1]$ และ $f(x) \leqslant 0$ เมื่อ x อยู่ในช่วง $[-1, 0]$ เราแบ่งบริเวณที่เราต้องการหาพื้นที่เป็นสองส่วน โดยให้ A_1 เป็นพื้นที่ของบริเวณเมื่อ x อยู่ใน $[0, 1]$ และให้ A_2 เป็นพื้นที่ของบริเวณเมื่อ x อยู่ใน $[-1, 0]$

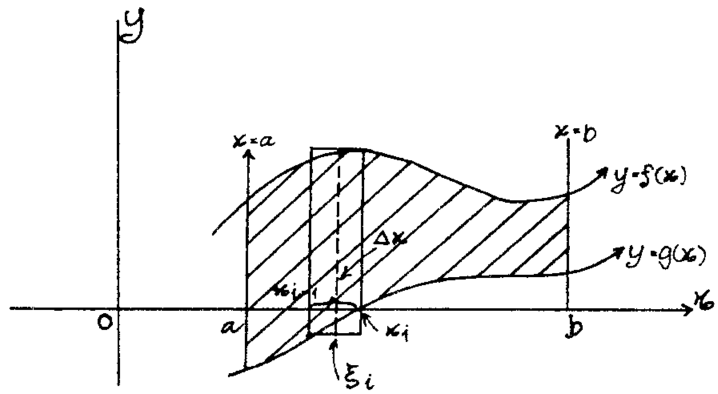


รูป 6.4.2

$$A_1 = \int_0^1 f\ x\ (dx)$$
$$= \int_0^1 x^3\ dx = \frac{x^4}{4}\Big]_0^1$$
$$= \frac{1}{4} - 0 = \frac{1}{4}$$

$$A_2 = -\int_{-1}^{0} f(x)\ dx$$
$$= -\int_{-1}^{0} x^3\ dx = \frac{x^4}{4}\Big]_{-1}^{0}$$
$$= 0 + \frac{1}{4} = \frac{1}{4}$$

ดังนั้น พื้นที่ของบริเวณที่เราต้องการ คือ $A_1 + A_2 = \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{1}{2}$ ตารางหน่วย ต่อไปเราจะพิจารณาการหาพื้นที่ระหว่างเส้นโค้ง $y = f(x)$ และ $y = g(x)$ ซึ่งเป็นฟังก์ชันต่อเนื่องบนช่วงปิด $[a, b]$ และ $f(x) > g(x)$ สำหรับทุก ๆ x ใน $[a, b]$ บริเวณที่เราต้องการหาพื้นที่คือ บริเวณซึ่งล้อมรอบด้วย เส้นโค้ง $y = f(x)$, $y = g(x)$ และเส้นตรง $x = a$, $x = b$ ดังแสดงในรูป 6.4.3



รูป 6.4.3

ในทำนองเดียวกันกับการหาพื้นที่ของบริเวณที่กล่าวมาแล้ว เราเริ่มโดยการแบ่งช่วงปิด $[a, b]$ เป็น n ช่วงเท่า ๆ กัน และความยาวของแต่ละช่วงเท่ากับ Δx นั่นก็คือ ผลแบ่งกั้นของช่วง $[a, b]$ เป็นแบบสม่ำเสมอ ในแต่ละช่วงแบ่งเราเลือก จุด ε_i พิจารณารูปสี่เหลี่ยมผืนผ้าซึ่งมีความสูงเป็น $f(\varepsilon_i) - g(\varepsilon_i)$ หน่วย และความกว้าง Δx หน่วย ดังแสดงในรูป 6.4.3 ดังนั้น เราสามารถหาพื้นที่ของรูปสี่เหลี่ยมผืนผ้าทั้ง n รูป และนำพื้นที่ของทั้ง n รูปมารวมกัน ได้ผลรวมเท่ากับ

$$\sum_{i=1}^{n} \left[f(\varepsilon_i) - g(\varepsilon_i) \right] \Delta x$$

ซึ่งก็คือ ผลรวมรีมานน์นั่นเอง และเป็นค่าประมาณของพื้นที่ของบริเวณที่เราต้องการ ดังนั้น ถ้าเราเพิ่มค่า n หรือแบ่งช่วงปิด $[a, b]$ ให้มีจำนวนช่วงแบ่งมากขึ้น หรือให้ความยาวของช่วงแบ่ง , Δx เล็กลงมากเท่าใด ค่าของผลรวมรีมานน์นี้จะเข้าใกล้หรือใกล้เคียงกับค่าจริง ๆ ของพื้นที่บริเวณที่เรากำลังพิจารณานี้มากขึ้นเท่านั้น ถ้า A เป็นจำนวนตารางหน่วยของพื้นที่ของบริเวณนี้ เราจึงได้ว่า

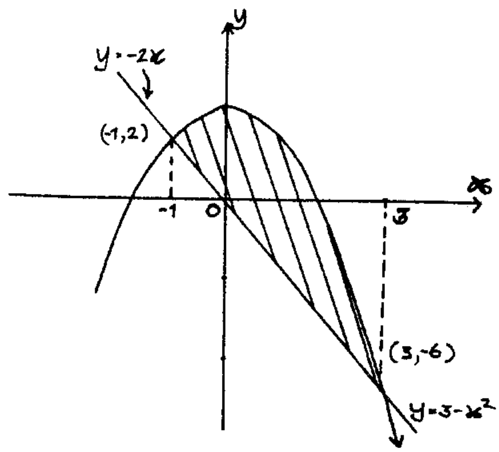
$$A = \lim_{\Delta x \to 0} \sum_{i=1}^{n} \left[f(\varepsilon_i) - g(\varepsilon_i) \right] \Delta x \qquad (6.4.3)$$

เพราะว่าทั้ง f และ g เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องบน $[a, b]$ เราได้ $f-g$ เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องบน $[a, b]$ ด้วย ดังนั้นลิมิตในสมการ 6.4.3 หาค่าได้ (exist) และเท่ากับอินทิกรัลจำกัดเขต ของ $[f(x) - g(x)]\,dx$ จาก a ถึง b นั่นก็คือ

$$A = \int_a^b \left[f(x) - g(x) \right] dx \qquad (6.4.4)$$

ตัวอย่าง 6.4.3 จงหาพื้นที่ของบริเวณซึ่งล้อมรอบด้วยเส้นโค้ง $y = 3-x^2$ และเส้นตรง $y = -2x$

วิธีทำ เราหาจุดตัดของเส้นโค้ง $y = 3-x^2$ และเส้นตรง $y = -2x$ เสียก่อน โดยแทนค่า $y = -2x$ ในสมการ $y = 3-x^2$ เราได้ $x = -1, 3$ ค่าของ y ที่สมนัยกับค่าของ x นั้น คือ $y = 2, -6$ ดังนั้นจุดตัด คือ $(-1, 2)$ และ $(3,-6)$ และพื้นที่ของบริเวณที่เราต้องการแสดงในรูป 6.4.4



รูป 6.4.4

เราใช้สมการ 6.4.4 หาพื้นที่ของบริเวณในรูป 6.4.4 ซึ่งบนช่วง $[-1, 3]$ นั้น เส้นโค้ง $y = 3-x^2$ อยู่เหนือเส้นตรง $y = -2x$ ดังนั้น เราแทน $f(x) = 3-x^2$ และ $g(x) = 2x$ ในสมการ 6.4.4 ได้

$$A = \int_{-1}^{3} \left[(3-x^2) - (-2x) \right] dx$$

$$= \int_{-1}^{3} (3-x^2 + 2x)\, dx$$

$$= 3x - \frac{x^3}{3} + x^2\Big]_{-1}^{3}$$

$$= (9 - 9 + 9) - (-3 + \tfrac{1}{3} + 1)$$

$$= 11\frac{1}{3}$$

พื้นที่ของบริเวณที่เราต้องการเท่ากับ $10\frac{2}{3}$ ตารางหน่วย

ตัวอย่าง 6.4.4 จงหาพื้นที่ของบริเวณ ซึ่งล้อมรอบด้วยเส้นโค้ง $f(x) = x^3 - 4x$ และ $g(x) = 4-x^2$

วิธีทำ เราหาจุดตัดของเส้นโค้งทั้งสองเสียก่อน นั่นคือ แก้สมการ

$$4 - x^2 = x^3 - 4x$$

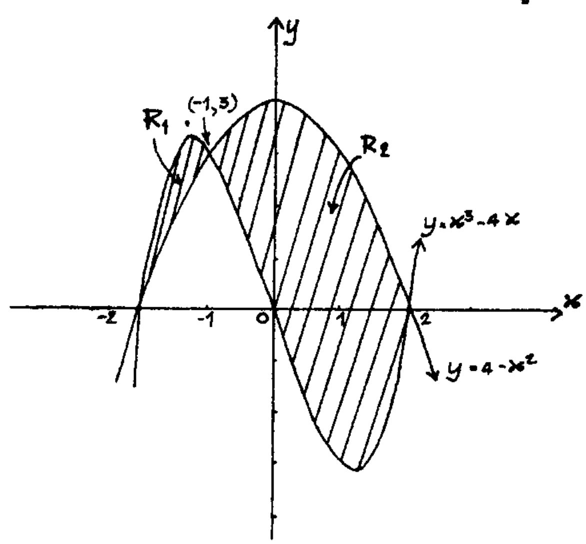
หรือ

$$x^3 + x^2 - 4x - 4 = 0$$

ได้

$$x = -2, -1, 2$$

ดังนั้น จุดตัดคือ $(-2, 0), (-1, 3), (2, 0)$ **และบริเวณที่เราต้องการหาพื้นที่แสดงในรูป** 6.4.5 เห็นได้ว่าบริเวณที่เราต้องหาพื้นที่มี 2 ส่วน คือ R_1 และ R_2 โดยที่ R_1 อยู่บนช่วง $[-2, -1]$ และล้อมรอบด้วยเส้นโค้ง $y = f(x)$ ซึ่งอยู่เหนือเส้นโค้ง $y = g(x)$ และ R_2 อยู่บนช่วง $[-1, 2]$ และล้อมรอบด้วยเส้นโค้ง $y = g(x)$ ซึ่งอยู่เหนือเส้นโค้ง $y = f(x)$



ให้ A_1 และ A_2 เป็นจำนวนตารางหน่วยของพื้นที่ของบริเวณ R_1 และ R_2 ตามลำดับ โดยใช้สมการ 6.4.4 เราได้

$$A_1 = \int_{-2}^{-1} \left(f(x) - g(x)\right) dx$$

$$= \int_{-2}^{-1} \left[(x^3 - 4x) - (4 - x^2)\right] dx$$

$$= \frac{x^4}{4} - 4\frac{x^2}{2} - 4x + \frac{x^3}{3}\Big]_{-2}^{-1}$$

$$= \left(\tfrac{1}{4} - 2 + 4 - \tfrac{1}{3}\right) - \left(4 - 8 + 8 - \tfrac{8}{3}\right)$$

$$= \frac{7}{12}$$

และ $$A_2 = \int_{-1}^{2} \left(g(x) - f(x)\right) dx$$

$$= \int_{-1}^{2} \left[(4-x^2) - (x^3 - 4x)\right] dx$$

$$= 4x - \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + 4\frac{x^2}{2}\Big]_{-1}^{2}$$

$$= \left(8 - \tfrac{8}{3} - 4 + 8\right) - \left(-4 + \tfrac{1}{3} - \tfrac{1}{4} + 2\right)$$

$$= 14\tfrac{3}{4}$$

$\therefore$ พื้นที่ของบริเวณ R_1 และบริเวณ $R_2 = A_1 + A_2 = \frac{7}{12} + 14\frac{3}{4} = 15\frac{1}{3}$

ตัวอย่าง 6.4.5 จงหาพื้นที่ของบริเวณซึ่งล้อมรอบด้วยเส้นโค้ง $y^2 = x - 2$ และเส้นตรง $y = x - 4$

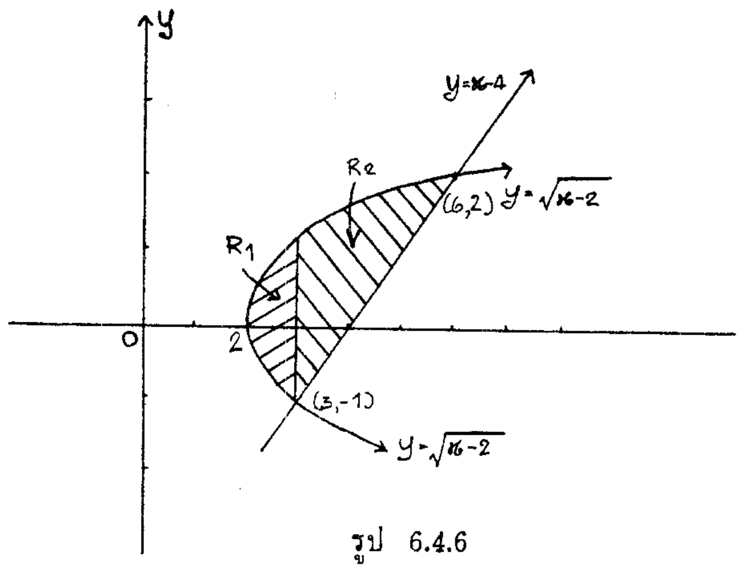
วิธีทำ เราหาจุดตัดของเส้นโค้ง $y^2 = x - 2$ และเส้นตรง $y = x - 4$ โดยแก้สมการ

$y^2 = (y + 4) - 2$ ($\because$ จาก $y = x - 4$ ได้ $x = y + 4$)

$\therefore$ $y = -1, 2$ และค่า x ที่สมนัยกันคือ 3,6 ดังนั้นจุดตัดคือ $(3, -1)$ และ $(6,2)$

จากสมการ $y^2 = x - 2$ เราได้ $y = \sqrt{x-2}$ และ $y = -\sqrt{x-2}$ ซึ่งก็คือ สมการของเส้นโค้งพาราบอลาซึ่งอยู่เหนือแกน x และใต้แกน x ตามลำดับ

บริเวณที่เราต้องการหาพื้นที่แสดงในรูป 6.4.6 เห็นได้ว่า เราต้องแบ่งบริเวณนี้ออกเป็น 2 ส่วน คือ R_1 และ R_2 เพราะว่าบนช่วง $[2,3]$ R_1 คือบริเวณซึ่งล้อมรอบด้วยเส้นโค้ง $y = \sqrt{x-2}$, $y = -\sqrt{x-2}$ และเส้นตรง $x = 3$ โดยมีเส้นโค้ง $y = \sqrt{x-2}$ อยู่เหนือเส้นโค้ง $y = -\sqrt{x-2}$ และบนช่วง $[3,6]$ R_2 คือบริเวณซึ่งล้อมรอบด้วยเส้นโค้ง $y = \sqrt{x-2}$, เส้นตรง $x = 3$, เส้นตรง $y = x-4$ โดยมีเส้นโค้ง $y = \sqrt{x-2}$ อยู่เหนือเส้นตรง $y = x-4$



รูป 6.4.6

ให้ A_1 และ A_2 เป็นจำนวนตารางหน่วยของพื้นที่บริเวณ R_1 และ R_2 ตามลำดับ และโดยใช้สมการ 6.4.4 เราได้

$$
\begin{aligned}
A_1 &= \int_2^3 \left[(\sqrt{x-2}) - (-\sqrt{x-2}) \right] dx \\
&= \int_2^3 2\sqrt{x-2}\, dx \\
&= 2.\tfrac{2}{3}(x-2)^{\frac{3}{2}} \Big]_2^3 \\
&= \tfrac{4}{3}.1 - 0 = \tfrac{4}{3}
\end{aligned}
$$

และ

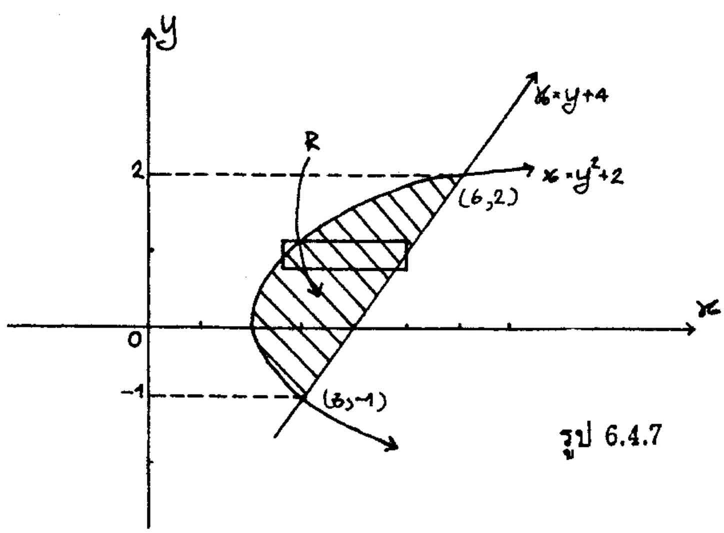
$$A_2 = \int_3^6 [(\sqrt{x-2}) - (x-4)]\, dx$$
$$= \frac{2}{3}(x-2)^{\frac{3}{2}} - \frac{x^2}{2} + 4x \Big]_3^6$$
$$= (\tfrac{2}{3}.8 - 18 + 24) - (\tfrac{2}{3}.1 - \tfrac{9}{2} + 12)$$
$$= 3\tfrac{1}{6}$$

$\therefore$ พื้นที่ของบริเวณ R_1 และ $R_2 = A_1 + A_2 = \frac{4}{3} + 3\frac{1}{6} = 4\frac{1}{2}$ ตวรางหน่วย

อีกวิธีหนึ่งที่เราสามารถหาพื้นที่ของบริเวณในรูป 6.4.6 ได้ คือแทนที่เราจะแบ่งพื้นที่นี้ออกเป็น 2 ส่วน และอินทิเกรตตามแนว x หรืออีกนัยหนึ่งแบ่งพื้นที่ออกเป็นรูปสี่เหลี่ยมผืนผ้าในแนวตั้งนั้น เราสามารถอินทิเกรตตามแนว y หรือแบ่งพื้นที่เป็นรูปสี่เหลี่ยมผืนผ้าในแนวนอนดังรูป 6.4.7 ดังนั้น บริเวณที่เราต้องการหาพื้นที่คือบริเวณ R ซึ่งล้อมรอบด้วยเส้นตรง $x = y+4$ (จาก $y = x-4$) และเส้นโค้ง $x = y^2+2$ (จาก $y^2 = x-2$) โดยมีเส้นตรง $x = y+4$ อยู่เหนือเส้นโค้ง $x = y^2+2$ และ R นั้น อยู่บนช่วง $[-1, 2]$ บนแกน y ให้ A เป็นจำนวนตารางหน่วยของพื้นที่บริเวณ R โดยใช้สมการ 6.4.4 เราได้

$$A = \int_{-1}^{2} [(y+4) - (y^2+2)]\, dy$$
$$= \int_{-1}^{2} (y+2-y^2)\, dy$$
$$= \frac{y^2}{2} + 2y - \frac{y^3}{3} \Big]_{-1}^{2}$$
$$= (2+4-\tfrac{8}{3}) - (\tfrac{1}{2} - 2 + \tfrac{1}{3})$$
$$= 4\tfrac{1}{2}$$

$\therefore$ พื้นที่ของบริเวณ $R = 4\frac{1}{2}$ ตารางหน่วย ซึ่งเท่ากับที่เราหาได้ในวิธีแรก



รูป 6.4.7

แบบฝึกหัด 6.4

จงหาพื้นที่ของบริเวณที่ล้อมรอบด้วยเส้นโค้ง และเส้นตรงในข้อต่อไปนี้ โดยหาค่าของอินทิกรัลจำกัดเขตด้วยทฤษฎีกฎหลักมูลของแคลคูลัส และเขียนรูปแสดงบริเวณในแต่ละข้อด้วย

1) $x^2 = -y, y = -4$

2) $x^2 + y + 4 = 0, y = -8$ โดยอินทิเกรตตามแนว y

3) $x^2 = 2y^2, x = 0, y = -2$

4) $y = 2 - x^2, y = -x$

5) $y = \sqrt{x}, y = x^3$

6) $x = y^2 - 2, x = 6 - y^2$

7) $y = 2x^3 - 3x^2 - 9x, y = x^3 - 2x^2 - 3x$

8) $y = |x|, y = x^2 - 1, x = -1, x = 1$

9) $x^3 - x^2 + 2xy - y^2 = 0, x = 4$ (แนะ แก้สมการกำลังสาม หา y ในรูปของ x และเขียน y เป็นฟังก์ชัน 2 ฟังก์ชันของ x)

10) จงหาค่าของ m ซึ่งทำให้บริเวณที่อยู่เหนือเส้นตรง $y = mx$ และต่ำกว่าเส้นโค้งพาราบอลา $y = 2x - x^2$ มีพื้นที่ 36 ตารางหน่วย

6.5 ส่วนเกินของผู้บริโภคและผู้ผลิต (Consumers' Surplus and Producers' Surplus)

โดยทั่วไปแล้ว เมื่อผู้บริโภคซื้อสินค้า ราคาของสินค้าที่เขาจ่ายจริง ๆ จะต่ำกว่าราคาที่เขายินดีจะจ่าย ถ้าเรานำเอาราคาของสินค้าที่ผู้บริโภคยินดีจะจ่ายมาสัมพันธ์กับความพอใจที่ผู้บริโภคได้รับจากการซื้อ และนำเอาราคาของสินค้าที่ผู้บริโภคจ่ายจริง ๆ มาสัมพันธ์กับความพอใจที่ได้รับจากซื้อสินค้านั้น แล้วเราเรียก ส่วนที่เกินของความพอใจ ส่วนแรกจากส่วนหลังว่า ความพอใจส่วนเกิน (Surplus satisfaction) นั่นก็คือ ความพอใจที่ผู้บริโภคได้รับเกินกว่าจำนวนเงินที่จ่ายไปจริง ๆ แน่นอนที่สุด ความพอใจส่วนเกินจากการซื้อสินค้าแต่ละชนิดย่อมแตกต่างกัน ทั้งนี้ขึ้นอยู่กับชนิดของสินค้า เช่น สินค้าประเภท เกลือ ผัก ซึ่งมีความพอใจส่วนเกินค่อนข้างมาก เพราะว่า ราคาที่ผู้บริโภคจ่ายจริง ๆ สำหรับสินค้าประเภทนี้ต่ำกว่าราคาที่เขายินดีจะจ่ายอยู่มาก เพื่ออธิบายความพอใจส่วนเกิน เราพิจารณาจากตัวอย่างต่อไปนี้

สมมุติว่า ผู้บริโภคซื้อส้ม 4 กิโลกรัม ในราคากิโลกรัมละ 10 บาท แต่เมื่อราคาของส้มเป็นกิโลกรัมละ 25, 20, 15 บาท ผู้บริโภคจะซื้อเพียง 1, 2, 3 กิโลกรัม ตามลำดับ

ในเมื่อผู้บริโภคจะซื้อส้มเพียง 1 กิโลกรัม เมื่อราคากิโลกรัมละ 25 บาท ดังนั้นเราอาจกล่าวได้ว่า ความพอใจทั้งหมดที่เขาได้รับจากการซื้อส้มกิโลกรัมนี้ อย่างน้อยที่สุดเท่ากับที่เขาจ่ายเงิน 25 บาท เพื่อซื้อสินค้าชนิดอื่น เมื่อราคาของส้มลดลงเป็นกิโลกรัมละ 20 บาท ผู้บริโภคที่ซื้อส้มเพียงหนึ่งกิโลกรัมย่อมได้รับความพอใจเท่ากับ จำนวนเงิน 20 ซึ่งเทียบเท่าหรือมีค่าเสมือนกับจำนวนเงิน 25 บาท ดังนั้น ความพอใจที่ผู้บริโภคได้รับเกินกว่าที่เขาจ่ายไป หรือความพอใจส่วนเกินเท่ากับ 25 — 20 = 5 บาท สำหรับส้มหนึ่งกิโลกรัมนี้ สำหรับผู้บริโภคที่ซื้อส้ม 2 กิโลกรัม สำหรับกิโลกรัมที่สองนั้น ความพอใจที่ได้รับอย่างน้อยที่สุดก็มีค่าเท่ากับจำนวนเงิน 20 บาทนั่นเอง นั่นก็คือ สำหรับจำนวนเงิน 40 บาท ที่ผู้บริโภคจ่ายไปสำหรับส้ม 2 กิโลกรัม เขาจะได้รับความพอใจทั้งหมดเทียบเท่าหรือเสมือนกับจำนวนเงิน 25 + 20 = 45 บาท ดังนั้นผู้บริโภคจะได้รับความพอใจเกินกว่าเงินที่เขาจ่ายไปเท่ากับ 45 — 40 = 5 บาท ซึ่งจะเห็นว่าความพอใจส่วนเกินนี้ยังคงเท่าเดิม ไม่ส่งผลมายังการซื้อส้มกิโลกรัมที่สอง

ในทำนองเดียวกัน เมื่อราคาของส้มลดลงเป็นกิโลกรัมละ 15 บาท ผู้บริโภคจะซื้ออย่างมากที่สุดเพียง 3 กิโลกรัม แต่ถ้าเขาซื้อเพียง 2 กิโลกรัม เป็นเงิน 30 บาท ความพอใจที่เขาได้รับจากเงินจำนวน 30 บาทนี้ เทียบเท่ากับจำนวนเงิน $25 + 20 = 45$ บาท หรือเมื่อราคาของส้มเป็น $25 + 20 = 45$ บาท ฉะนั้นความพอใจส่วนเกิน คือ $45 - 30 = 15$ บาท และถ้าเขาซื้อส้ม 3 กิโลกรัมเป็นเงิน 45 บาท ซึ่งความพอใจที่ได้รับเทียบเท่าจำนวนเงิน $25 + 20 + 15 = 60$ บาท หรือเมื่อราคาของส้มเป็น $25 + 20 + 15 = 60$ บาท อย่างไรก็ตาม ความพอใจส่วนเกินยังคงเท่าเดิม คือ $60 - 45 = 15$ บาท ไม่ได้ลดลงเนื่องจากการซื้อกิโลกรัมที่สาม

ดังนั้นเมื่อผู้บริโภคซื้อส้ม 4 กิโลกรัม เป็นเงิน 40 บาท ความพอใจทั้งหมดที่ได้รับจากการซื้อมีค่าไม่น้อยไปกว่า ผลรวมของจำนวนเงินที่ผู้บริโภคยินดีจะจ่าย สำหรับส้มกิโลกรัมที่ 1, 2, 3, คือ $25 + 20 + 15$ บาท รวมกับ กิโลกรัมที่ 4 ซึ่งมีราคา 10 บาท ทั้งหมดเท่ากับ $25 + 20 + 15 + 10 = 70$ บาท เราจึงกล่าวได้ว่าผู้บริโภคได้รับความพอใจเกินกว่าเงินที่เขาจ่ายไปจริง ๆ หรือความพอส่วนเกินเท่ากับ $70 - 40 = 30$ บาท

สรุปได้ว่า ถ้าเราต้องการวัดผลกำไรทั้งหมดในการซื้อส้มผู้บริโภคได้รับนั้น เราจะดูจากผลรวมของความพอใจส่วนเกินทั้งหมด ซึ่งได้จากการที่แต่ละราคาอุปสงค์เกินกว่าราคาขายจริง ๆ ของส้ม และผลรวมนี้ เราเรียกว่าส่วนเกินของผู้ผลิต (Consumers' surplus)

ถ้าสมการของเส้นอุปสงค์ คือ $p = f(x)$ ซึ่งเป็นฟังก์ชันต่อเนื่อง ดังแสดงในรูป 6.5.1 จุด A คือ จุด $(\bar{x}, \bar{p})$ เมื่อ $\bar{p}$ คือ ราคาตลาดและ $\bar{x}$ เป็นจำนวนหน่วยของสินค้าที่ผู้บริโภคต้องการซื้อ จากรูป 6.5.1 เห็นได้ว่า จำนวนหน่วยของสินค้าจาก o ถึง $\bar{x}$ หน่วย ราคาของสินค้าบนเส้นอุปสงค์สูงกว่าราคาของสินค้าที่ผู้บริโภคจ่ายจริง ๆ สำหรับแต่ละหน่วยจาก o ถึง $\bar{x}$ หน่วย ซึ่งราคาของสินค้าบนเส้นอุปสงค์หรือราคาอุปสงค์ คือ ราคาที่ผู้บริโภคยินดีจะจ่ายสำหรับจำนวนสินค้าที่สมนัยกัน

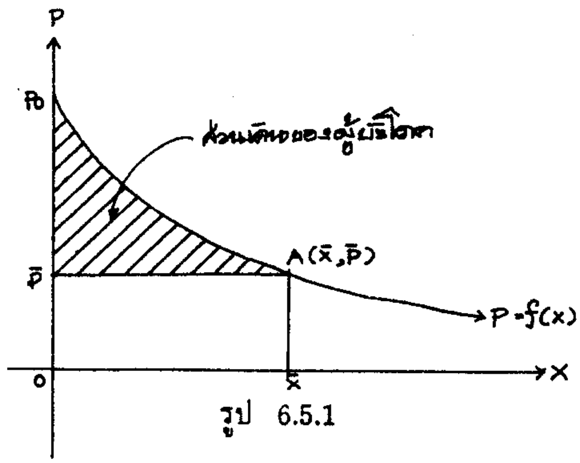
ฉะนั้น จาก o ถึง $\bar{x}$ หน่วย ราคาที่ผู้บริโภคยินดีจ่ายสำหรับแต่ละหน่วยจาก o ถึง $\bar{x}$ หน่วยนี้สูงกว่าราคาที่เขาจ่ายจริง ๆ สำหรับแต่ละหน่วย คือ ราคาหน่วยละ $\bar{p}$ นั่นก็คือผู้บริโภคได้รับความพอใจเกินกว่าจำนวนเงินที่เขาจ่ายไปจริง ๆ เท่ากับพื้นที่ของบริเวณ $\bar{p} A p_o$ ในรูป 6.5.1

พื้นที่ของบริเวณใต้เส้นโค้ง $p = f(x)$ จาก $x = o$ ถึง $x = \bar{x}$ คือ

$\int_o^{\bar{x}} f(x)\,dx$ และพื้นของรูปสี่เหลี่ยมผืนผ้า $O\bar{x}A\bar{p}$ คือ $\bar{p}\bar{x}$

ดังนั้นพื้นที่ของบริเวณ $\bar{p}Ap_o = \int_o^{\bar{x}} f(x)\,dx - \bar{p}\bar{x}$

ซึ่งพื้นที่ของบริเวณ $\bar{p}Ap_o$ นี้ก็คือ ค่าที่เราใช้วัดหรือแทนส่วนเกินของผู้ผลิตนั่นเอง ดังที่เราจะกล่าวในนิยามต่อไป



รูป 6.5.1

นิยาม 6.5.1 ถ้าสมการอุปสงค์ของสินค้าชนิดหนึ่ง คือ $p = f(x)$ หรือ $x = g(p)$ โดยที่ p คือราคาต่อหน่วย เมื่อจำนวนหน่วยของสินค้าที่ต้องการคือ x ให้ $\bar{p}$ บาท เป็นราคาตลาด และ $\bar{x}$ เป็นจำนวนหน่วยของสินค้าที่สมนัยกับราคาตลาด แล้วส่วนเกินของผู้บริโภค (Consumers' surplus) คือพื้นที่ของบริเวณซึ่งอยู่ต่ำกว่าเส้นอุปสงค์และเหนือเส้นตรง $p = \bar{p}$ ฉะนั้น ถ้า CS คือจำนวนบาทในส่วนเกินของผู้บริโภค แล้ว

$$CS = \int_o^{\bar{x}} f(x)\,dx - \bar{p}\bar{x} \qquad (6.5.1)$$

หรือ

$$CS = \int_{\bar{p}}^{p_o} g(p)\,dp \qquad (6.5.2)$$

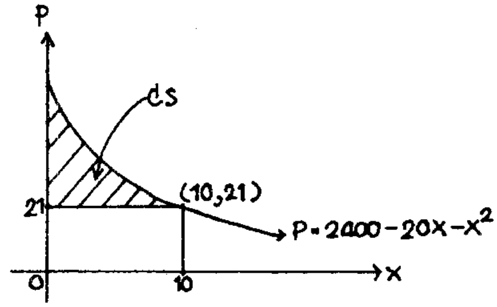
เมื่อ $p_o = f(o)$

ตัวอย่าง 6.5.1 ถ้าสมการของเส้นอุปสงค์ คือ $100p = 2400 - 20x - x^2$ จงหาส่วนเกินของผู้บริโภค เมื่อเขาซื้อสินค้า 10 หน่วย

วิธีทำ ราคาตลาดเมื่อผู้บริโภคซื้อสินค้า 10 หน่วย คือ

$$p = \frac{1}{100}\left[2400 - (20 \times 10) - (10)^2\right] = 21 \text{ บาท}$$

ส่วนเกินของผู้บริโภค คือพื้นที่ของบริเวณที่แรเงาในรูป 6.5.2



รูป 6.5.2

โดยใช้สมการ 6.5.1 เราได้

$$\begin{aligned} CS &= \int_0^{10} \frac{1}{100}(2400 - 20x - x^2)\,dx - (21 \times 10) \\ &= \frac{1}{100}\left(2400x - 20\frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3}\right)\Big]_0^{10} - 210 \\ &= \left(240 - 10 - \frac{10}{3}\right) - 210 \\ &= 16\tfrac{2}{3} \end{aligned}$$

ดังนั้นส่วนเกินของผู้บริโภคเท่ากับ $16\frac{2}{3}$ บาท

ตัวอย่าง 6.5.2 สมการอุปสงค์และสมการอุปทานสำหรับสินค้าชนิดหนึ่ง คือ $3p + x = 32$ และ $3p^2 + p - x = 0$ ตามลำดับ จงหาส่วนเกินของผู้บริโภค เมื่อราคาตลาด คือ ราคาสมดุลย์ตลาด และวาดรูปแสดงบริเวณที่หมายถึงส่วนเกินของผู้บริโภค

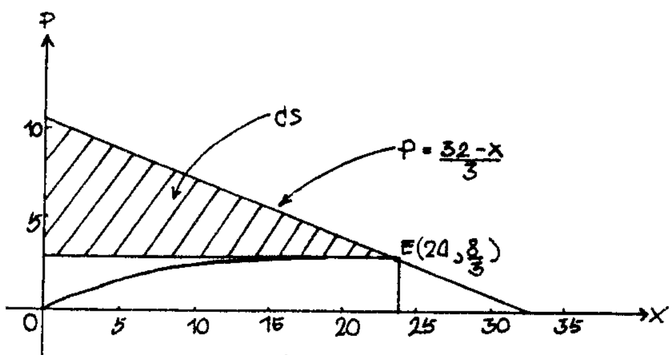
วิธีทำ ก่อนอื่นเราต้องหาราคาสมดุลย์ตลาด โดยจากสมการ $3p + x = 32$ เราได้ $x = 32 - 3p$ และแทนค่า x นี้ ในสมการ $3p^2 + p - x = 0$ นั่นคือ

$$\begin{aligned} 3p^2 + p - (32 - 3p) &= 0 \\ 3p^2 + 4p - 32 &= 0 \\ (3p - 8)(p + 4) &= 0 \end{aligned}$$

ซึ่งรากที่เป็นค่าบวกของ p คือ $p = \frac{8}{3}$ และค่า x ที่สมนัยกันคือ $x = 32 - 3 \cdot \frac{8}{3} = 24$ ดังนั้น เส้นอุปสงค์ และเส้นอุปทานตัดกันที่จุดสมดุลย์ E $(24, \frac{8}{3})$ และส่วนเกินของผู้บริโภค คือ พื้นที่ของบริเวณที่แรเงาในรูป 6.5.3 โดยใช้สมการ 6.5.1 เราได้

$$
\begin{aligned}
CS &= \int_0^{24} \frac{32 - x}{3}\, dx - \frac{8}{3} . 24 \\
&= \frac{32}{3} x - \frac{1}{3} \frac{x^2}{2} \Big]_0^{24} - 64 \\
&= (256 - 96) - 64 \\
&= 96
\end{aligned}
$$

ดังนั้นส่วนเกินของผู้บริโภคเท่ากับ 96 บาท



รูป 6.5.3

จากตัวอย่าง 6.5.3 นี้ พิจารณาเส้นอุปทาน เห็นได้ว่า ผู้ผลิตบางคนอาจจะเสนอขายสินค้าในราคาที่ต่ำกว่าราคาตลาดซึ่งในตัวอย่างนี้ราคาสมดุลย์ตลาดเท่ากับ $\frac{8}{3} = 2.6$ บาท เช่น เขาอาจจะยินดีเสนอขายสินค้าในราคาหน่วยละ 2 บาทสำหรับจำนวนสินค้า 14 หน่วย และในราคาหน่วยละ 1 บาท สำหรับจำนวนสินค้า 4 หน่วย แต่ราคาที่ผู้ผลิตขายไปจริง ๆ คือหน่วยละ 2.6 บาท สำหรับทุก ๆ หน่วยจาก 0 ถึง 24 หน่วย ดังนั้นผู้ผลิตที่ยินดีขายสินค้าในราคาต่ำกว่าราคาสมดุลย์ย่อมได้กำไร และถ้าเราต้องการวัดผลกำไรทั้งหมด ที่ผู้ผลิตจะได้รับจากการขายสินค้า เราจะดูจากผลรวมทั้งหมดของส่วนที่เกินของราคาตลาดจากราคาที่ผู้ผลิตยินดีเสนอขายสำหรับแต่ละจำนวนหน่วยของสินค้าจาก 0 ถึงจำนวนหน่วยที่ผู้ผลิตได้ขายไปจริง ๆ เราเรียกผลรวมนี้ว่า ส่วนเกินของผู้ผลิต (Producers' surplus)

ถ้าสมการของเส้นอุปสงค์คือ $p=h(x)$ ซึ่งเป็นฟังก์ชันต่อเนื่องดังแสดงในรูป 6.5.4 จุด A คือ จุด $(\bar{x}, \bar{p})$ เมื่อ $\bar{p}$ คือราคาตลาด และ $\bar{x}$ จำนวนหน่วยของสินค้าที่ผู้ผลิตขายไป จากรูป 6.5.4 เห็นได้ จำนวนหน่วยของสินค้าจาก o ถึง $\bar{x}$ หน่วย ราคาของสินค้าบนเส้นอุปทาน ต่ำกว่าราคาของสินค้าที่ขายไปจริง ๆ สำหรับแต่ละหน่วยจาก o ถึง $\bar{x}$ หน่วย นั่นคือ ขายไปราคาหน่วยละ $\bar{p}$ ซึ่งราคาของสินค้าบนเส้นอุปทาน หรือราคาอุปทานคือ ราคาที่ผู้ผลิตยินดีเสนอขายสำหรับจำนวนของสินค้าที่สมนัยกัน

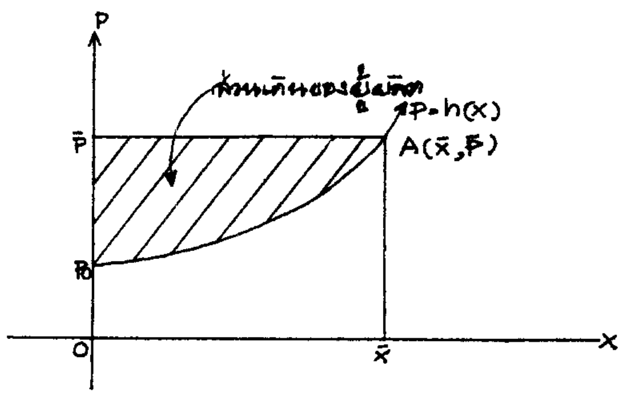
ฉะนั้น จาก o ถึง $\bar{x}$ หน่วย ราคาที่ผู้ผลิตยินดีเสนอขายต่ำกว่าราคาตลาด หรือราคาที่ผู้ผลิตขายไปจริง ๆ สำหรับแต่ละหน่วยคือราคาหน่วยละ $\bar{p}$ นั่นก็คือผู้ผลิตได้รับความพอใจส่วนเกิน ซึ่งก็คือส่วนที่เกินของความพอใจที่รับจากการขายสินค้าในราคาตลาดจากความพอใจที่ได้รับในราคาที่ผู้ผลิตยินดีขาย ดังนั้น ผลรวมของความพอใจส่วนเกินทั้งหมดที่ได้จากการขายสินค้า o ถึง $\bar{x}$ หน่วย คือ พื้นที่ของบริเวณ $p_o A \bar{p}$ ในรูป 6.5.4 นั่นเอง

พื้นที่ของบริเวณใต้เส้นโค้ง $p = h(x)$ จาก $x = o$ ถึง $x = \bar{x}$ คือ

$\int_o^{\bar{x}} h(x)\,dx$ และพื้นที่ของรูปสี่เหลี่ยมผืนผ้า $O\bar{x}A\bar{p}$ คือ $\bar{p}\,\bar{x}$

ดังนั้นพื้นที่ของบริเวณ $p_oA\bar{p} = \bar{p}\,\bar{x} - \int_o^{\bar{x}} h(x)\,dx$

ซึ่งก็คือค่าที่เราใช้วัดหรือแทน ส่วนเกินของผู้ผลิตนั่นเอง



รูป 6.5.4

นิยาม 6.5.2 ถ้าสมการอุปทาน สำหรับสินค้าชนิดหนึ่ง คือ $p = h(x)$ หรือ $x = \lambda(p)$ โดยที่ p คือราคาต่อหน่วย เมื่อจำนวนหน่วยของสินค้าที่ขาย คือ x ให้ $\bar{p}$ บาท เป็นราคาตลาด และ $\bar{x}$ เป็นจำนวนหน่วยของสินค้าที่ขายในราคาตลาดนั้นแล้ว ส่วนเกินของผู้ผลิต (Producers' surplus) คือ พื้นที่ของบริเวณซึ่งอยู่เหนือเส้นอุปทาน และต่ำกว่าเส้นตรง $p = \bar{p}$ ฉะนั้น ถ้า PS เป็นจำนวนบาท ในส่วนเกินของผู้ผลิต แล้ว

$$PS = \bar{p}\,\bar{x} - \int_{o}^{\bar{x}} h(x)\,dx \qquad (6.5.3)$$

หรือ

$$PS = \int_{p_o}^{\bar{p}} \lambda(p)\,dp \qquad (6.5.4)$$

เมื่อ $p_o = h(o)$

ตัวอย่าง 6.5.3 ถ้าสมการของเส้นอุปทาน คือ $3p^2 + p - x = o$ ดังเช่นในตัวอย่าง 6.5.2 จงหาส่วนเกินของผู้ผลิต เมื่อราคาตลาด คือ ราคาสมดุลย์ตลาด และเขียนรูปแสดงพื้นที่ของบริเวณที่ใช้แทนส่วนเกินของผู้ผลิต

วิธีทำ จากตัวอย่าง 6.5.2 เราได้ว่า จุดตัดของเส้นอุปสงค์และอุปทานคือ $E(24, \frac{8}{3})$ นั่นคือ $\bar{x} = 24$, $\bar{p} = \frac{8}{3}$ และจากสมการอุปทาน

$$3p^2 + p - x = o$$

เราได้

$$p = h(x) \qquad \frac{\sqrt{1 + 12x} - 1}{6}$$

โดยใช้สมการ (6.5.3) เราได้

$$PS = \frac{8}{3} \cdot 24 - \int_0^{24} \frac{\sqrt{1 + 12x} - 1}{6}\,dx$$

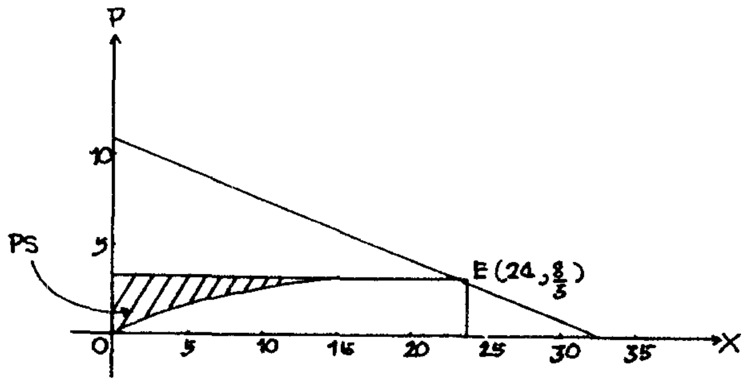
$$= 64 - \frac{1}{6}\left[\frac{1}{12} \cdot \frac{2}{3}(1 + 12x)^{\frac{3}{2}} - x\right]_0^{24}$$

$$= 64 - \frac{1}{6}\left[\left(\frac{1}{18}(289)^{\frac{3}{2}} - 24\right) - \frac{1}{18}\right]$$

$$= 64 - \frac{1}{6}\left[\frac{1}{18}(17)^3 - 24\frac{1}{18}\right]$$

$$= \frac{358}{27} = 13\frac{7}{27}$$

ดังนั้น ส่วนเกินของผู้ผลิตคือ $13\frac{7}{27}$ บาท และพื้นที่ของบริเวณซึ่งใช้แสดงส่วนเกินของผู้ผลิตนี้คือบริเวณที่แรเงาในรูป 6.5.5



รูป 6.5.5

ตัวอย่าง 6.5.4 ถ้าสมการอุปสงค์และสมการอุปทานสำหรับสินค้าชนิดหนึ่งคือ $100p = 1100 - x^2$ และ $400p = x^2 + 2400$ ตามลำดับ และราคาตลาด คือ ราคาสมดุลย์ตลาด แล้วจงหาส่วนเกินของผู้ผลิต และส่วนเกินของผู้บริโภค และเขียนรูปแสดงพื้นที่ของบริเวณที่ใช้แทนส่วนเกินของผู้ผลิต และส่วนเกินของผู้บริโภค

วิธีทำ เราหาราคาสมดุลย์ตลาดเสียก่อน โดยการแก้สมการอุปสงค์และอุปทานนั้นก็คือ

$400p = (1100 - 100p) + 2400$ (จาก $100p = 1100 - x^2$ เราได้ $x^2 = 1100 - 100p$)

$500p = 3500$

$p = 7$

เมื่อ $p = 7$ เราได้ $x = 20$ รูป 6.5.6 แสดงให้เห็นเส้นอุปสงค์ และเส้นอุปทาน โดยจุดตัดของทั้งสองอยู่ที่ (20,7) ซึ่งเป็นจุดสมดุลย์ตลาดนั่นเอง และบริเวณแรเงาส่วนบนและส่วนล่าง คือส่วนเกินของผู้บริโภค และส่วนเกินของผู้ผลิตตามลำดับ

ให้ CS เป็นจำนวนบาทในส่วนเกินของผู้บริโภค เราได้

$$CS = \int_0^{20} \frac{1100-x^2}{100}\, dx - 7 \times 20$$

$$= 11x - \frac{1}{100} \cdot \frac{x^3}{3}\Big]_0^{20} - 140$$

$$= 220 - 26\tfrac{2}{3} - 140$$

$$= 53\tfrac{1}{3}$$

ให้ PS เป็นจำนวนบาทในส่วนเกินของผู้ผลิต เราได้

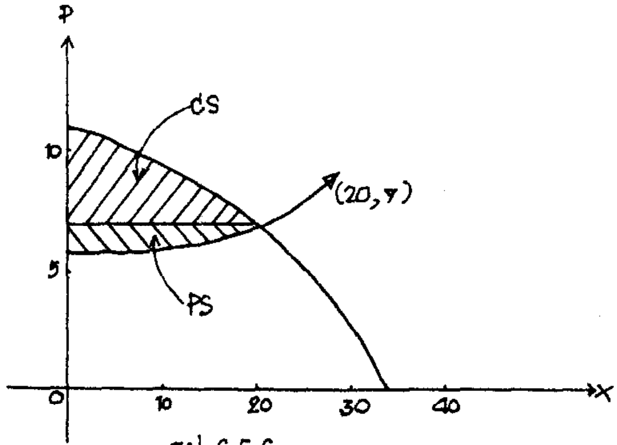
$$PS = 7\times 20 - \int_0^{20} \frac{x^2 + 2400}{400}\, dx$$

$$= 140 - \left(\frac{1}{400} \cdot \frac{x^3}{3} + 6x\right]_0^{20}$$

$$= 140 - 6\tfrac{2}{3} - 120$$

$$= 13\tfrac{1}{3}$$

ดังนั้น ส่วนเกินของผู้บริโภค $= 53\frac{1}{3}$ บาท และส่วนเกินของผู้ผลิต $= 13\frac{1}{3}$ บาท



รูป 6.5.6

ตัวอย่าง 6.5.5 สำหรับสินค้าชนิดหนึ่งในตลาด ซึ่งมีผู้ผลิตสินค้าชนิดนี้คนเดียว และสามารถควบคุมผลผลิต และราคาเพื่อให้ได้กำไรสูงสุด ถ้าสมการอุปสงค์ คือ $10p=(80-x)^2$ และ ฟังก์ชันต้นทุนการผลิตทั้งหมด คือ $C(x) = \frac{1}{2}x^2+100x$ เมื่อ $C(x)$ คือจำนวนบาทของต้นทุนการผลิตของสินค้า จำนวน x หน่วย จงหาส่วนเกินของผู้บริโภค และเขียนรูปแสดงบริเวณที่ใช้แทนส่วนเกินของผู้บริโภค

วิธีทำ ก่อนอื่น เราต้องหาราคาตลาด และจำนวนผลผลิตที่ผู้ผลิตหรือผู้ขายในที่นี้จะได้กำไรสูงสุด ' โดยใช้ความจริงที่ว่า ผลกำไรจะสูงสุดเมื่อฟังก์ชันรายได้เพิ่มเท่ากับฟังก์ชันต้นทุนเพิ่ม (marginal revenue = marginal cost) ถ้า R คือ ฟังก์ชันรายได้ทั้งหมดเราได้

$$R(x) = px$$

$$R(x) = \frac{(80-x)^2}{10}x$$

$$R(x) = 640x - 16x^2 + \frac{1}{10}x^3$$

ดังนั้น $$R'(x) = 640 - 32x + \frac{3}{10}x^2$$

$$c(x) = \frac{1}{2}x^2 + 100x$$

ดังนั้น $$c'(x) = x + 100$$

ให้ $R'(x) = C'(x)$ เราได้

$$\frac{3}{10}x^2 - 32x + 640 = x + 100$$

$$3x^2 - 330x + 5400 = 0$$

$$3(x-20)(x-90) = 0$$

$$x = 20, 90$$

เพราะว่า $p = \frac{(80-x)^2}{10}$ เราได้ $p' = -\frac{(80-x)}{5}$ แต่ p เป็นฟังก์ชันลดลง เมื่อค่า x เพิ่มขึ้น ดังนั้น $p' < 0$ นั่นก็คือ เราต้องเลือกค่า x เท่ากับ 20 เพื่อให้ $p' < 0$

เมื่อ $x = 20$ เราได้ $p = \frac{(80-20)^2}{10} = 360$

นั่นก็คือ $x = 20$ และ $p = 360$ ในสมการที่เราใช้หาส่วนเกินของผู้บริโภคให้ CS คือจำนวนบาทในส่วนเกินของผู้บริโภค เราได้

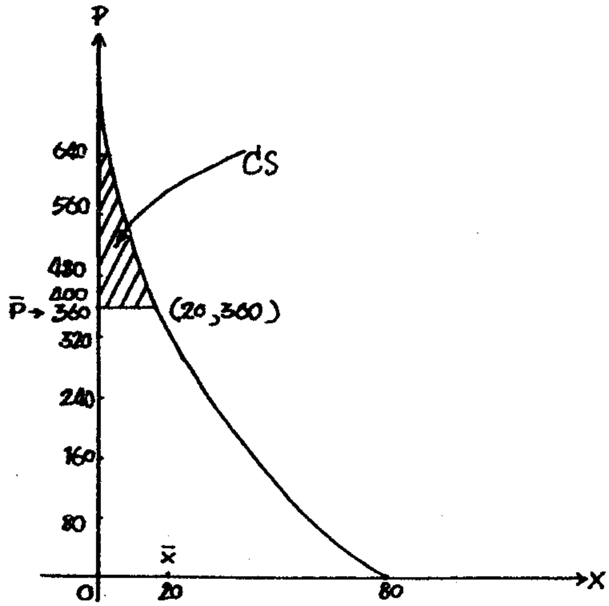
$$CS = \int_0^{20} \frac{(80-x)^2}{10} dr - 360 \times 20$$

$$= -\frac{1}{10}\frac{(80-x)^3}{3}\Big]_0^{20} - 7200$$

$$= -7200 + \frac{51200}{3} - 7200$$

$$= 2666\tfrac{2}{3}$$

ดังนั้น ส่วนเกินของผู้บริโภคคือประมาณ 2,667 บาท และบริเวณที่ใช้แทนส่วนเกินของผู้บริโภค คือส่วนที่แรเงาในรูป 6.5.6



รูป 6.5.6

แบบฝึกหัด 6.5

จากข้อ 1 ถึง 6 p คือ จำนวนบาทของราคาต่อหน่วย เมื่อจำนวนหน่วยของสินค้าที่ต้องการหรือขาย คือ x

1) สมการอุปสงค์สำหรับสินค้าชนิดหนึ่ง คือ $100\,p = 2400 - 20x - x^2$ และราคาตลาดคือ 16 บาท จงหาส่วนเกินของผู้บริโภค และเขียนรูปแสดงบริเวณที่ใช้แทนส่วนเกินของผู้บริโภคนี้

2) สมการอุปทานสำหรับสินค้าชนิดหนึ่ง คือ $2x^2 - 300p + 900 = 0$ และราคาตลาดคือ 9 บาท จงหาส่วนเกินของผู้ผลิต และเขียนรูปแสดงบริเวณที่ใช้แทนส่วนเกินของผู้ผลิตนี้

3) ถ้าสมการอุปสงค์สำหรับสินค้าชนิดหนึ่งคือ $10p = \sqrt{900 - x}$ และจำนวนอุปสงค์หรือจำนวนสินค้าที่ผู้บริโภคซื้อ คือ 500 หน่วย จงหาส่วนเกินของผู้บริโภคโดย 2 วิธี ก) อินทิเกรตตาม x ข) อินเกรตตาม p

4) ถ้าสมการอุปทาน สำหรับสินค้าชนิดหนึ่งคือ $100p = (x + 20)^2$ และราคาตลาดคือ 25 บาท จงหาส่วนเกินของผู้ผลิตโดย 2 วิธี คือ ก) อินทิเกรตตาม x ข) อินทิเกรตตาม p

5) ถ้าเราใช้สมการอุปสงค์ในข้อ 1 และสมการอุปทานในข้อ 2 กับสินค้าชนิดหนึ่ง จงหาส่วนเกินของผู้บริโภคและส่วนเกินของผู้ผลิตเมื่อตลาดอยู่ในสภาพสมดุลย์ หรือมีดุลยภาพ (นั่นก็คือ ราคาตลาดในที่นี้คือ ราคาสมดุลย์ตลาด)

6) สำหรับสินค้าชนิดหนึ่ง มีสมการอุปสงค์เป็น $30p = 3600 - x^2$ ฟังก์ชันต้นทุนการผลิตทั้งหมดของสินนี้คือ $C(x) = (x + 20)^2$ เมื่อ $C(x)$ บาท คือต้นทุนของการผลิตสินค้า x หน่วย ในสภาพที่ผู้ผลิตสินค้าชนิดนี้สามารถเป็นผู้ผลิตแต่เพียงผู้เดียว และสามารถควบคุมจำนวนหน่วยของสินค้าที่ผลิตและราคาเพื่อให้ได้กำไรสูงสุด (Monopoly) จงหาส่วนเกินของผู้บริโภค