บทที่ 5
ดิฟเฟอเรนเชียล และ ปฏิยานุพันธ์

5.1 ดิฟเฟอเรนเชียล (Differential)

กำหนด $y = f(x)$ เป็นฟังก์ชัน เมื่อ $f'(x)$ หาค่าได้ $f'(x)$ จะมีค่าเท่ากับ

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

เมื่อ $\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x)$

ซึ่งเราจะได้ผลตามมาโดยอาศัยนิยามของลิมิตว่าค่าของ $\left|\frac{\Delta y}{\Delta x} - f'(x)\right|$ หรือ $\frac{|\Delta y - f'(x)\,\Delta x|}{|\Delta x|}$ จะมีค่าเล็กได้ตามความต้องการ โดยการกำหนด Δx ให้เข้าใกล้ศูนย์

คำกล่าวข้างต้นหมายความว่าค่าของ $|\Delta y - f'(x)|\Delta x|$ มีค่าน้อย ๆ เมื่อเปรียบเทียบกับ $\Delta x|$ นั่นคือสำหรับ $\Delta x|$ ที่มีค่าน้อย ๆ $f'(x)\ \Delta x$ จะเป็นค่าประมาณที่ดีของ Δy

หมายเหตุ เราใช้เครื่องหมาย $\approx$ แทน "ประมาณค่าโดย" ซึ่งจากข้างบนจะได้ว่า $\Delta y \approx f'(x)\ \Delta x$

นิยาม 5.1.1 ถ้านิยามฟังก์ชัน f โดย $y = f(x)$ แล้ว **ดิฟเฟอเรนเชียล** ของ y เขียนแทนด้วย dy คือ

$$dy = f'(x)\ \Delta x \qquad (1)$$

เมื่อ x อยู่ในโดเมนของ f' และ Δx เป็นอินครีเมนท์ใด ๆ ของ x

หมายเหตุ วิธีการของดิฟเฟอเรนเชียลนี้จะรวมถึงฟังก์ชันของ 2 ตัวแปร ดังรายละเอียดที่จะกล่าวต่อไปในบทที่ 9 .

ข้อสังเกต 1 ถ้ากำหนด $y = 4x^2 - x$ แล้วจะได้ว่า

$f(x) = 4x^2 - x$

จากนิยาม 5.1.1 จะได้ว่า

$dy = (8x - 1)\ \Delta x$

ถ้ากำหนด $x = 2$ แล้วจะได้ว่า

$$dy = 15\,\Delta x$$

เมื่อกำหนด $y = f(x)$ นิยาม 5.1.1 แสดงให้เห็นถึงความหมายของ dy ว่าหมายถึงค่าดิฟเฟอเรนเชียลของตัวแปรตาม y แต่เราต้องการหานิยามของดิฟเฟอเรนเชียลของตัวแปรอิสระ หรือ dx ด้วย ดังนั้นเพื่อจะให้ได้นิยามของ dx จากนิยาม dy เราจึงพิจารณาฟังก์ชันเอกลักษณ์ซึ่งเป็นฟังก์ชัน f ที่นิยามโดย $f(x) = x$ ดังนั้น $y = x$ และ $f'(x) = 1$ จากนิยาม 5.1.1 จะได้ว่า

$$dy = 1.\,\Delta x = \Delta x$$

เพราะว่า $y = x$ สำหรับฟังก์ชันนี้เราต้องการ $dy = dx$ นั่นคือสำหรับฟังก์ชันนี้เราต้องการ $dx = \Delta x$ นั่นเอง ซึ่งเราจะได้นิยามสำหรับ dx ดังต่อไปนี้

นิยาม 5.1.2 ถ้านิยามฟังก์ชัน f โดย $y = f(x)$ แล้วดิฟเฟอเรนเชียลของ x ซึ่งใช้สัญลักษณ์ dx คือ

$$dx = \Delta x \tag{2}$$

โดยที่ x เป็นสมาชิกในโดเมนของ f' และ Δx เป็นอินครีเมนท์ใด ๆ ของ x

จาก (1) และ (2) จะสรุปได้ว่า

$$dy = f'(x)\,dx \tag{3}$$

ถ้า $dx \neq 0$ สามารถเขียนสมการ (3) อยู่ในรูป

$$\frac{dy}{dx} = f'(x) \tag{4}$$

ซึ่งสมการที่ (4) เรียกว่าอนุพันธ์ของฟังก์ชัน นั่นคืออนุพันธ์ เป็นอัตราส่วนของ 2 ดิฟเฟอเรนเชียล สำหรับ (4) คือ อัตราส่วนระหว่างดิฟเฟอเรนเชียลของ y กับ ดิฟเฟอเรนเชียลของ x

หมายเหตุ สัญลักษณ์ $\frac{dy}{dx}$ ใช้แทนความหมายอนุพันธ์ของ y เทียบกับ x

ตัวอย่างที่ 5.1.1 กำหนดให้ $y = 4x^2 - 3x + 1$ จงหา Δy, dy, และ $\Delta y - dy$ สำหรับ

ก) x และ Δx ใด ๆ

ข) $x = 2$ และ $\Delta x = 0.1$

ค) $x = 2$ และ $\Delta x = 0.01$

ง) $x = 2$ และ $\Delta x = 0.001$

วิธีทำ ก) $\because \quad y = 4x^2 - 3x + 1$

$$\therefore \quad y + \Delta y = 4(x + \Delta x)^2 - 3(x + \Delta x) + 1$$

$$4x^2 - 3x + 1 + \Delta y = 4x^2 + 8x\Delta x + 4(\Delta x)^2 - 3x - 3\Delta x + 1$$

$$\Delta y = 8x\Delta x - 3\Delta x + 4(\Delta x)^2$$

และจากนิยาม

$$\Delta y = (8x - 3)\Delta x + 4(\Delta x)^2$$

$$dy = f'(x)\,dx$$

$$dy = (8x - 3)\,dx$$

$$= (8x - 3)\,\Delta x$$

และ

$$\Delta y - dy = (8x - 3)\Delta x + 4(\Delta x)^2 - (8x - 3)\Delta x$$

$$= 4(\Delta x)^2$$

สำหรับข้อ ข) ค) และ ง) ได้คำตอบดังตารางข้างล่างโดยที่

$\Delta y = (8x - 3)\Delta x + 4(\Delta x)^2$ $\quad dy = (8x - 3)\Delta x$ และ

$\Delta y - dy = 4(\Delta x)^2$

	x	Δx	Δy	dy	$\Delta y - dy$
ข)	2	0.1	1.34	1.3	0.04
ค)	2	0.01	0.1304	0.13	0.0004
ง)	2	0.001	0.013004	0.013	0.000004.

สังเกตได้จากตารางข้างบนว่าเมื่อ Δx ลดน้อยลงผลต่างระหว่าง Δy กับ dy จะมีค่าน้อยลงด้วยนั่นคือเมื่อ Δx เข้าใกล้ศูนย์ ความแตกต่างระหว่าง Δy กับ dy จะน้อยมาก ยิ่งกว่านั้นเราสังเกตเห็นอีกว่าแต่ละค่าของ Δx, $\Delta y - dy$ จะมีค่าน้อยกว่าเสมอเช่น $\Delta x = 0.1$, $\Delta y - dy = 0.04$ เป็นต้น

โดยทั่ว ๆ ไป dy จะเป็นค่าประมาณหรือค่าใกล้เคียงของ Δy เมื่อ Δx มีค่าน้อย ๆ ดังนั้นการประมาณค่าจะดีหรือไม่ดีขึ้นอยู่กับขนาดของ Δx นั่นเอง

สำหรับค่า x ที่กำหนดให้ สมมุติให้เท่ากับ x_0 ดังนั้น

$$dy = f'(x_0)\,dx \qquad (5)$$

จากสมการ (5) นั่นคือ dy เป็นฟังก์ชันเชิงเส้น (linear function ของ dx ดังนั้น dy จึงง่ายแก่การคำนวณมากกว่า Δy (ดังได้เห็นจากตัวอย่างที่ 1 แล้ว)

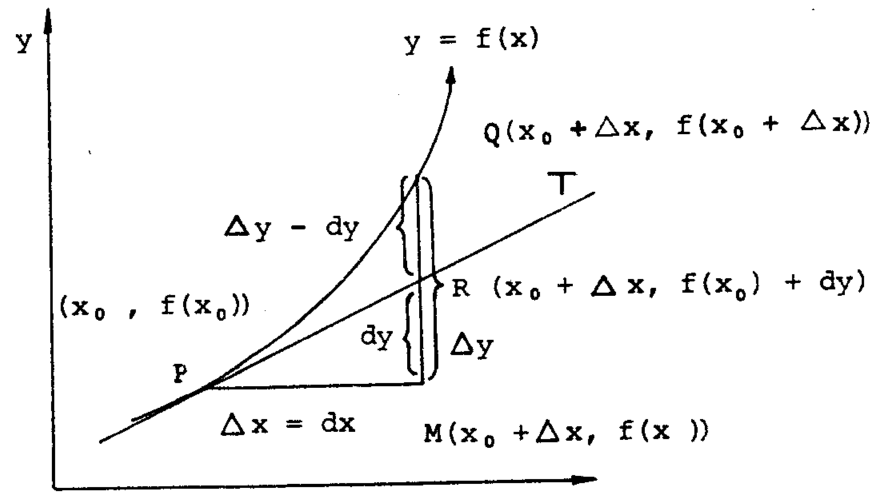
เพราะว่า $f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) = \Delta y$ จะได้

$$f(x_0 + \Delta x) = f(x_0) + \Delta y$$

เนื่องจาก dy เป็นค่าประมาณของ Δy ดังนั้น

$$f(x_0 + \Delta x) \approx f(x_0) + dy \qquad (6)$$

เราแสดงผลที่ได้โดยอาศัยรูปข้างล่างประกอบ



จากรูป เส้นโค้ง $y = f(x)$ มีเส้นสัมผัส PT สัมผัสเส้นโค้งที่จุด $P(x_0, f(x_0))$ Δx และ dx มีค่าเท่ากัน และจะแทนระยะ $\overline{PM}$ โดยที่ M มีโคออร์ดิเนตเป็น $(x_0 + \Delta x,\ f(x_0))$ เราให้จุด Q คือจุด $(x_0 + \Delta x, f(x_0 + \Delta x))$ และระยะ $\overline{MQ}$ แทนด้วย Δy หรือเท่ากับ $f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$ จากคุณสมบัติของอนุพันธ์ ความชันของเส้น PT คือ $f(x) = \dfrac{dy}{dx}$ และอาศัยคุณสมบัติทางตรีโกณมิติก็ได้เช่นเดียวกันว่า ความชันของ PT คือ $\dfrac{\overline{MR}}{\overline{PM}}$ แต่ $\overline{PM} = dx$ และ $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{\overline{MR}}{\overline{PM}}$ ดังนั้นจึงได้ว่า $dy = \overline{MR}$ และจะได้อีกว่า $\overline{QR} = \Delta y - dy$ สังเกตได้ว่าถ้าค่า Δx มีค่าน้อย ๆ (นั่นคือ จุด Q เข้าใกล้จุด P) ค่าของ $\Delta y - dy$ จะมีค่าน้อยลงด้วย

สมการของเส้นสัมผัส PT คือ

$$y = f(x_0) + f'(x_0)\ (x - x_0)$$

ดังนั้นถ้า $\bar{y}$ เป็นออร์ดิเนตของจุด R แล้ว

$$\bar{y} = f(x_0) + dy \qquad (7)$$

เปรียบเทียบสมการ (6) และ (7) จะเห็นว่าเมื่อใช้ $f(x_0) + dy$ ประมาณค่าของ $f(x_0 + \Delta x)$
เราทำโดยให้ออร์ดิเนตของ $Q(x_0 + \Delta x, f(x_0 + \Delta x))$
บนเส้นโค้งเป็นออร์ดิเนตของจุด $R\ (x_0 + \Delta x,\ f(x_0) + dy)$
บนเส้นสัมผัสเส้นโค้งที่จุด $P\ (x_0,\ f(x_0))$

เราจะเห็นว่ารูปข้างต้นเป็นเส้นโค้งชนิดโค้งหงาย แต่ผลที่ได้ก็ยังเป็นจริงสำหรับเส้นโค้งที่เป็นรูปโค้งคว่ำ

ตัวอย่างที่ 5.1.2 หาค่าประมาณของ $\sqrt[3]{28}$ โดยไม่ใช้ตารางการหารากที่สาม

วิธีทำ พิจารณาฟังก์ชัน f นิยามโดย $f(x) = \sqrt[3]{x}$ และให้ $y = f(x)$

ดังนั้น

$$y = \sqrt[3]{x}$$

และ

$$dy = f'(x)\ dx = \frac{1}{3x^{2/3}}\ dx$$

เราทราบว่าตัวเลขที่ถอดรากที่ 3 ได้และใกล้เคียง 28 มากที่สุดคือ 27 ดังนั้นเราจึงคำนวณ dy โดยใช้ $x = 3$และ $\Delta x = dx = 1$

$$dy = \frac{1}{(3)(27)^{2/3}} = \frac{1}{27}$$

ใช้สมการ (6) โดยให้ $x_0 = 27$ และ $\Delta x = 1$ และ $dy = \frac{1}{27}$ จะได้

$$f(27 + 1) \approx f(27) + \frac{1}{27}$$

$$\sqrt[3]{27 + 1} \approx \sqrt[3]{27} + \frac{1}{27}$$

$$\sqrt[3]{28} \approx 3 + \frac{1}{27}$$

ดังนั้น $\sqrt[3]{28} \approx 3.037$

ตัวอย่างที่ 5.1.3 จงหาค่าประมาณของปริมาตรของเปลือกของทรงกลมกลวงซึ่งมีรัศมีภายใน 4 นิ้ว และความหนาของเปลือกเท่ากับ $\frac{1}{16}$ นิ้ว.

วิธีทำ เราจะพิจารณาปริมาตรของเปลือกทรงกลม เป็นอินครีเมนต์ของปริมาตรของทรงกลม และ ให้

r = รัศมีของทรงกลมมีหน่วยเป็นนิ้ว

V = ปริมาตรของทรงกลมมีหน่วยเป็นลูกบาศก์นิ้ว

ΔV = ปริมาตรของเปลือกทรงกลม

$\therefore V = \frac{4}{3}\pi r^3$ ดังนั้น $dv = 4\pi r^2 dr$

แทน $r = 4$ และ $dr = \frac{1}{16}$ จะได้

$$dv = 4\pi(4)^2 \cdot \frac{1}{16}$$

$$= 4\pi$$

ดังนั้น $\Delta v \approx 4\pi$ นั่นคือ ปริมาตรของเปลือกของทรงกลมมีค่า 4π ลูกบาศก์นิ้วโดยประมาณ

ตัวอย่างที่ 5.1.4 จากตัวอย่างที่ 5 ของบทที่ 4 ที่กล่าวถึงเกี่ยวการผลิต ให้ใช้ดิฟเฟอเรนเชียลเพื่อหาค่าประมาณของการเปลี่ยนแปลงของต้นทุนการผลิตของสินค้าที่สั่งเข้ามาและเก็บไว้ ถ้าผลผลิตเพิ่มจาก 1000 หน่วยเป็น 1010 หน่วย

วิธีทำ ให้ต้นทุนการผลิตต่อเดือนเป็น $C(x)$ บาท เมื่อ x เป็นสิ่งที่ผลิตในโกดัง จากตัวอย่างที่ 5 ของบทที่ 4 จะได้ว่า

$$C(x) = \frac{360,000}{x} + \frac{x}{4} + 30,000$$

ดังนั้น

$$dC = C'(x)\,dx$$

$$= \left(-\frac{360,000}{x^2} + \frac{1}{4}\right) dx$$

เมื่อ $x = 1000$ และ $dx = \Delta x = 10$ เราจะได้ว่า

$$dC = \left(-\frac{360,000}{(1000)^2} + \frac{1}{4}\right) .10$$

$$= \left(-\frac{9}{25} + \frac{1}{4}\right) 10$$

$$= -1.1$$

นั่นคือ

$$\Delta C \approx -1.1$$

เราจะสรุปได้ว่าเมื่อผลผลิตในโกดังเพิ่มจาก 1000 ชิ้นเป็น 1010 ชิ้น ต้นทุนการผลิตจะลดลงประมาณ 1.10 ดอลลาร์ #

ข้อสังเกต 2. จากข้อสังเกตข้อ 1 จากหัวข้อ 3.4 ของบทที่ 3 เมื่อ $C(x)$ แทนจำนวนบาทของต้นทุนการผลิตของผลิตผล x ชิ้น และ $C(x) = 110 + 4x + 0.02x^2$

ซึ่งจากบทที่ 3 เราสรุปได้ว่า ค่าประมาณของ $C(51) - C(50)$ คือ $C'(50)$ ที่จริงเราก็สามารถแสดงได้โดยใช้วิธีการของดิฟเฟอเรนเชียล ได้ดังนี้.

ให้ $y = C(x)$

ดังนั้น

$$\Delta y = C(x + \Delta x) - C(x) \tag{8}$$

และ

$$dy = C'(x)\ dx \tag{9}$$

ถ้า $x = 50$ และ $dx = \Delta x = 1$ ดังนั้นสมการที่ (8) จะเป็น

$$\Delta y = C(51) - C(50)$$

และ จากสมการ (9) เราจะได้

$$dy = C'(50).1 = C'(50)$$

เพราะว่า dy เป็นค่าประมาณของ Δy ดังนั้นเราก็จะสรุปได้ว่า $C'(50)$ ก็เป็นค่าประมาณของ $C(51) - C(50)$

สมมุติว่า y เป็นฟังก์ชันของ x และ x เป็นฟังก์ชันของ t นั่นคือ

$$y = f(x) \quad \text{และ} \quad x = g(t) \tag{10}$$

จาก (10) สมการทั้งสอง รวมความหมายว่า y เป็นฟังก์ชันของ t ด้วยตัวอย่างเช่นถ้าสมมุติ $y = x^3$ และ $x = 2t^2+1$ เรารวม 2 สมการนี้เข้าด้วยกันจะได้ $y = (2t^2+1)^3$ โดยทั่ว ๆ ไปแล้ว ถ้า 2 สมการเช่นใน (10) ถูกรวมกันแล้วเราจะได้ว่า

$$y = f(g(t)) \tag{11}$$

เราสามารถหาอนุพันธ์ของ y เมื่อเทียบกับ t ได้โดยใช้ กฎลูกโซ่ (chain rule) ซึ่งจะได้ดังนี้

$$\frac{dy}{dt} = \frac{dy}{dx}\cdot\frac{dx}{dt} \tag{12}$$

สมการ (12) แสดงให้เราทราบว่า $\frac{dy}{dt}$ เป็นฟังก์ชันของ x และ t เพราะว่า $\frac{dy}{dx}$ เป็นฟังก์ชันของ x และ $\frac{dx}{dt}$ เป็นฟังก์ชันของ t

ข้อสังเกต 3. ถ้า $y = x^3$ และ $x = 2t^2 - 1$ ดังนั้น

$$\begin{aligned}\frac{dy}{dt} &= \frac{dy}{dx}\cdot\frac{dx}{dt} \\ &= (3x^2)\,(4t) \\ &= 12x^2t\end{aligned}$$

เพราะว่าสมการ (11) y เป็นฟังก์ชันของตัวแปรอิสระ t จากนิยาม 5.1.1 ดิฟเฟอเรนเชียลของ y คือ

$$dy = \frac{dy}{dt}.dt \tag{13}$$

สมการ (13) แสดงว่า dy เป็นฟังก์ชันของ t และ dt เราแทนสมการ (12) ลงในสมการ (13) จะได้ว่า

$$dy = \frac{dy}{dx}\cdot\frac{dx}{dt}\cdot dt \tag{14}$$

เพราะว่า x เป็นฟังก์ชันของตัวแปรอิสระ t จากนิยามของดิฟเฟอเรนเชียลเราจะได้ว่า

$$dx = \frac{dx}{dt}\cdot dt \tag{15}$$

สมการ (15) แสดงให้เห็นว่า dx เป็นฟังก์ชันของ t และ dt ดังนั้นจาก (14) และ (15) จะได้ว่า

$$dy = \frac{dy}{dx}\cdot dx \tag{16}$$

นักศึกษาต้องเข้าใจเสมอว่าสมการ (16) dy เป็นฟังก์ชันของ t และ dt และ dx เป็นฟังก์ชันของ t และ dt ด้วย ถ้าสมการ (16) แทนที่ $\frac{dy}{dx}$ ด้วย $f'(x)$ จะได้

$$dy = f'(x)\,dx \tag{17}$$

สมการ (17) เหมือนสมการ (3) แต่แตกต่างเพียงสมการ (3) x เป็นตัวแปรอิสระ และ dy เป็นฟังก์ชันของ x และ dx ส่วน (17) t เป็นตัวแปรอิสระ และ dy , dx เป็นฟังก์ชันของ t และ dt ทั้งคู่จากผลที่ได้นี้เราจะได้ทฤษฎีบทดังนี้.

ทฤษฎี 5.1.1 ถ้า $y = f(x)$ แล้วเมื่อ $f'(x)$ หาค่าได้ จะได้ว่า $dy = f'(x)dx$ ไม่ว่า x จะเป็นตัวแปรอิสระหรือไม่เป็น

ถ้า $dx \neq 0$ จากสมการ (17) เราจะได้ว่า

$$f'(x) = \frac{dy}{dx}\ ,\quad dx \neq 0 \tag{18}$$

สมการ (18) กล่าวว่า ถ้า $y = f(x)$ แล้ว $f'(x)$ จะเป็นอัตราส่วนระหว่างสองดิฟเฟอเรนเชียลคือ dy กับ dx โดยที่ x ไม่จำเป็นต้องเป็นตัวแปรอิสระ

เราจะศึกษากฎลูกโซ่สำหรับดิฟเฟอเรนเชียล โดยการใช้คุณสมบัติที่อนุพันธ์เป็นอัตราส่วนระหว่างดิฟเฟอเรนเชียลถ้า $y = f(u)$ และ $\frac{dy}{du}$ หาค่าได้ และ ถ้า $u = g(x)$ และ $\frac{du}{dx}$ หาค่าได้ ดังนั้นจากกฎลูกโซ่จะได้

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du}\,\frac{du}{dx} \qquad (19)$$

นั่นคือ $\frac{dy}{dx} = \left(\frac{dy}{du}\right)\left(\frac{du}{dx}\right)$ เมื่อ $du \neq 0$ $dx \neq 0$

บทที่ 3 เรากล่าวถึงสูตรของการหาอนุพันธ์ แต่ละสูตรของการหาอนุพันธ์เราสามารถเขียนสูตรของดิฟเฟอเรนเชียลได้ ในสูตรข้างล่างนี้ u และ v เป็นฟังก์ชันของ x c เป็นค่าคงที่ และเป็นที่เข้าใจว่าสูตรเหล่านี้เป็นจริงเมื่อ $\frac{du}{dx}$ และ $\frac{dv}{dx}$ หาค่าได้

I	$\frac{d}{dx}(c) = 0$	I′	$d(c) = 0$
II	$\frac{d(x^n)}{dx} = nx^{n-1}$	II′	$d(x^n) = nx^{n-1}dx$
III	$\frac{d(cu)}{dx} = c\frac{du}{dx}$	III′	$d(cu) = c\,du$
IV	$\frac{d(v+v)}{dx} = \frac{du}{dx} + \frac{dv}{dx}$	IV′	$d(u+v) = du + dv$
V	$\frac{d(u.v)}{dx} = u\frac{dv}{dx} + v\frac{du}{dx}$	V′	$d(u.v) = udv + vdu$
VI	$\frac{d}{dx}\left(\frac{u}{v}\right) = \frac{v\frac{du}{dx} - u\frac{dv}{dx}}{v^2}$	VI′	$d\left(\frac{u}{v}\right) = \frac{vdu - udv}{v^2}$
VII	$\frac{d(u^n)}{dx} = nu^{n-1}\frac{du}{dx}$	VII′	$d(u^n) = nu^{n-1}\,du$

I- VII เป็นสูตรการหาอนุพันธ์ซึ่งจะทำให้ได้สูตรการหาดิฟเฟอเรนเชียล I′- VII′ ตามมา ถ้าฟังก์ชัน $y = f(x)$ แล้ว dy สามารถหาได้โดยใช้สูตร I′ - VII′ หรือไม่ก็หา $f'(x)$ แล้วคูณด้วย dx

ตัวอย่าง 5.1.5 ให้ $y = \frac{\sqrt{x^2+1}}{2x+1}$ จงหา dy

วิธีทำ จากสูตรที่ VI′ จะได้

$$dy = \frac{(2x+1)d\left(\sqrt{x^2+1}\right) - \sqrt{x^2+1}\ d(2x+1)}{(2x+1)^2}$$

แต่ $d\left(\sqrt{x^2+1}\right)$ ใช้สูตร VII′ จะได้

$$d\sqrt{x^2+1} = \frac{1}{2}(x^2+1)^{-\frac{1}{2}} d(x^2+1)$$

$$= \frac{1}{2}(x^2+1)^{-\frac{1}{2}} 2x\, dx$$

และ $d(2x+1) = 2dx$

แทนลงสมการแรก

$$\therefore\quad dy = \frac{x(2x+1)(x^2+1)^{-\frac{1}{2}}dx - 2(x^2+1)^{\frac{1}{2}}dx}{(2x+1)^2}$$

$$= \frac{x(2x+1)\,dx - 2(x^2+1)\,dx}{(2x+1)^2\sqrt{x^2+1}}$$

$$= \frac{(x-2)\,dx}{(2x+1)^2\sqrt{x^2+1}}$$

ตัวอย่างที่ 5.1.6 ให้ $2x^2y^2 - 3x^3 + 5y^3 + 6xy^2 = 5$ เมื่อ x และ y เป็นฟังก์ชันของตัวแปร t หา $\frac{dy}{dx}$ โดยการหาดิฟเฟอเรนเชียลของ x และของ y ตามลำดับ โดยการดิฟเฟอเรนเชียลของแต่ละพจน์

วิธีทำ ดิฟเฟอเรนเชียลแต่ละพจน์ได้

$$4xy^2dx + 4x^2ydy - 9x^2dx + 15y^2dy + 6y^2dx + 12xydy = 0$$

$$(4x^2y + 15y^2 + 12xy)\,dy = (9x^2 - 6y^2 - 4xy^2)\,dx$$

ถ้า $dx \neq 0$

จะได้ $$\frac{dy}{dx} = \frac{9x^2 - 6y^2 - 4xy^2}{4x^2y + 15y^2 + 12xy} \quad \#$$

แบบฝึกหัด 5.1

1. จงวาดรูปเส้นโค้งแบบเดียวกับในรูป 5.1.1 แต่เป็นแบบโค้งคว่ำพร้อมทั้งบอกรายละเอียดของ $\Delta x, \Delta y$, dx และ dy ด้วย

2. จงหาค่าของ a) Δy b) dy และ c) $\Delta y - dy$

   2.1 $y = 4x^2 - 3x + 1$

   2.2 $y = \frac{1}{x}$

3. จงหาค่า a) Δy b) dy และ c) $\Delta y - dy$ เมื่อกำหนดค่า

   3.1 $y = x^2 - 3x, \ x = -1, \ \Delta x = 0.02$

   3.2 $y = \frac{1}{x^2}, \quad x = -3, \ \Delta x = -0.1$

4. จงหา dy ของข้อต่อไปนี้

   4.1) $y = (3x^2 - 2x + 1)^3$ 1)

   4.2) $y = \sqrt{4 - x^2}$

   4.3) $y = \frac{3x}{x^2 + 2}$

   4.4) $y = \sqrt{\frac{x - 1}{x + 1}}$

   4.5) $y = (x + 2)^{1/3}(x - 2)^{2/3}$

   4.6) $y = \sqrt{3x + 4}\ \sqrt[3]{x^2 - 1}$

5. ข้อต่อไปนี้ x, y เป็นฟังก์ชันของ t, จงหา $\frac{dy}{dx}$ (ใช้แบบตัวอย่างที่ 6)

   5.1) $8x^2 - y^2 = 32$

   5.2) $2x^2y - 3xy^3 + 6y^2 = 1$

   5.3) $x^{2/3} + y^{2/3} = a^{2/3}$

   5.4) $3x^2 + 4y^2 = 48$

6. ข้อต่อไปนี้จงหา $\frac{dy}{dt}$ โดยกำหนด

   6.1) $y = x^2 - 3x + 1, \quad x = \sqrt{t^2 - t + 4}$

   6.2) $y = x^2 - 5x + 1; \quad x = s^3 - 2s + 1, \quad s = \sqrt{t^2 + 1}$

   6.3) $y = \sqrt{x^2 + 1}; \quad x = \sqrt{t^2 - 1}$

   6.4) $x^3 - 3x^2y + y^3 = 5; \quad x = 4t^2 + 1$

7. จงใช้วิธีการของดิฟเฟอเรนเชียลหาค่าประมาณของข้อต่อไปนี้.

   7.1) $\sqrt{37.5}$

7.2) $\sqrt{82}$

7.3) $\sqrt{0.042}$

7.4) $\sqrt[3]{82}$

7.5) $\sqrt[3]{71}$

8. จากตัวอย่าง5.1.4 จงหาค่าประมาณถ้าผลิตภัณฑ์เพิ่มจาก 1400 ชิ้น เป็น 1410 ชิ้น

5.2 ปฏิยานุพันธ์ (Antidifferentiation)

นักศึกษาคงจะเคยพบกับคำว่า อินเวอร์สโอเปอร์เรชัน (inverse operations) มาบ้างแล้วอย่างเช่น อินเวอร์สโอเปอร์เรชันของการบวก คือ การลบของการคูณ คือ การหารเป็นต้น

สำหรับดิฟเฟอเรนเชียล อินเวอร์สโอเปอร์เรชันของดิฟเฟอเรนทิเอชัน เรียกว่า การหาปฏิยานุพันธ์ (antidifferentiation)

นิยาม 5.2.1 เราเรียกฟังก์ชัน F ว่า ปฏิยานุพันธ์ (antiderivative) ของฟังก์ชัน f บนช่วง I ก็ต่อเมื่อ $F'(x) = f(x)$ สำหรับทุก ๆ ค่าของ x ใน I

ข้อสังเกต 1 ถ้าสมมุติให้ $F(x) = 4x^3 + x^2 + 5$

$$\therefore \quad F'(x) = 12x^2 + 2x$$

ดังนั้น ถ้าให้ f เป็นฟังก์ชันซึ่ง $f(x) = 12x^2 + 2x$ จะสรุปได้ว่า f เป็นอนุพันธ์ของ F และ F เป็นปฏิยานุพันธ์ของ f

ถ้า $G(x) = 4x^3 + x^2 - 17$ เราจะได้ว่าGเป็นปฏิยานุพันธ์ของ f เช่นเดียวกัน เพราะว่า $G'(x) = 12x^2 + 2x$ ซึ่งเท่ากับ $f(x)$ หรือ เราจะได้ว่า ทุก ๆ ฟังก์ชันที่อยู่ในรูป $4x^3 + x^2 + C$ เมื่อ C เป็นค่าคงที่ใด ๆ ต่างก็เป็นปฏิยานุพันธ์ ของ f ทั้งสิ้น

โดยทั่ว ๆ ไป ถ้าฟังก์ชัน F เป็นปฏิยานุพันธ์ของฟังก์ชัน f บนช่วง I แล้ว ถ้าให้ G เป็นฟังก์ชันซึ่ง

$G(x) = F(x) + C$ เมื่อ C เป็นค่าคงที่ใด ๆ แล้ว จะได้ว่า

$G'(x) = F'(x) = f(x)$ และ G ก็จะเป็นปฏิยานุพันธ์ของ f บนช่วง I ด้วย

เราต้องการที่จะพิสูจน์ว่า ถ้า F เป็นปฏิยานุพันธ์ เฉพาะของ f บนช่วง I แล้ว ทุก ๆ ปฏิยานุพันธ์ของ f จะอยู่ในรูป $F(x) + C$ เมื่อกำหนด C เป็นค่าคงที่ใด ๆ ซึ่งต้องอาศัยทฤษฎีบทต่อไปนี้ช่วยในการพิสูจน์

ทฤษฎีบท 5.2.1 ถ้า f และ g เป็นฟังก์ชันซึ่ง $f'(x) = g'(x)$ สำหรับทุก ๆ ค่า x ในช่วง I แล้วจะมีค่าคงที่ K ซึ่งทำให้

$$f(x) = g(x) + K \qquad (1)$$

พิสูจน์ ให้ h เป็นฟังก์ชันบน I นิยามฟังก์ชัน h โดย

$$h(x) = f(x) - g(x)$$

ดังนั้นทุก ๆ ค่า x ที่อยู่ใน I เราจะได้ว่า

$$h'(x) = f'(x) - g'(x)$$

แต่จากสมมุติฐานของทฤษฎีบท $f'(x) = g'(x)$

สำหรับทุก ๆ x ใน I

ดังนั้น $h'(x) = 0$ สำหรับทุก ๆ x ที่อยู่ใน I

จากทฤษฎีบท 4.11.3 จะได้ว่า จะมีค่าคงที่ K ซึ่ง

$$h(x) = K \quad \text{สำหรับทุก ๆ } x \text{ ที่อยู่ใน } I$$

แทน $h(x)$ ด้วย $f(x) - g(x)$ ดังนั้นจะได้

$$f(x) = g(x) + K \text{ สำหรับทุก ๆ } x \text{ ใน } I$$ #

ทฤษฎีบท 5.2.2 ถ้า F เป็นปฏิยานุพันธ์เฉพาะของ f บนช่วง I แล้ว ทุก ๆ ปฏิยานุพันธ์ของ f จะเขียนอยู่ในรูป

$$F(x) + C \qquad (2)$$

เมื่อ c เป็นค่าคงที่

พิสูจน์ ให้ G เป็นปฏิยานุพันธ์ใด ๆ ของ f บนช่วง I ดังนั้น

$$G'(x) = f(x) \quad \text{บน } I \qquad (3)$$

เพราะว่า F เป็นปฏิยานุพันธ์เฉพาะของ f ดังนั้น

$$F'(x) = f(x) \quad \text{บน } I \qquad (4)$$

จาก (3) และ (4) จะได้ว่า

$$G'(x) = F'(x) \quad \text{บน } I$$

อาศัยทฤษฎีบท ๕.๒.๑ จะได้ว่า

มีค่าคงที่ K ซึ่ง $G(x) = F(x) + K$ สำหรับทุก ๆ x ที่อยู่ในช่วง I

เพราะว่า G เป็นปฏิยานุพันธ์ใด ๆ ของ f จะได้ว่า ทุก ๆ ปฏิยานุพันธ์ของ f เขียนได้อยู่ในรูป

$$F(x) + C \text{ เมื่อ } C \text{ เป็นค่าคงที่ใด ๆ}$$ #

หมายเหตุ ถ้า F เป็นปฏิยานุพันธ์ของ f แล้ว $F'(x) = f(x)$ และ $d(F(x)) = f(x)dx$

การหาปฏิยานุพันธ์ คือกระบวนการในการหาปฏิยานุพันธ์ของฟังก์ชันที่กำหนดให้นั่นเอง สัญลักษณ์

$$\int$$

ใช้แทนโอเปอร์เรชันของการหาปฏิยานุพันธ์ และเราเขียน

$$\int f(x)dx = F(x) + C \qquad (5)$$

เมื่อ $F'(x) = f(x)$ หรือ $d(F(x)) = f(x)dx$ (6)

จาก (5) และ (6) เราสามารถเขียนใหม่ได้ว่า

$$\int d(F(x)) = F(x) + C \qquad (7)$$

เนื่องจากแอนติดิฟเฟอเรนทิเอชัน เป็นอินเวอร์สโอเปอร์เรชันของดิฟเฟอเรนทิเอชัน เราจะได้สูตรของแอนติดิฟเฟอเรนทิเอชันจากสูตรดิฟเฟอเรนเชียล

สูตรที่ 1 $\int dx = x + C$

สูตรที่ 2 $\int af(x)dx = a\int f(x)dx$ เมื่อ a เป็นค่าคงที่

สูตรที่ 2 แสดงถึงการหาปฏิยานุพันธ์ของผลคูณระหว่างค่าคงที่กับฟังก์ชันใด ๆ ซึ่งก็คือหาปฏิยานุพันธ์ของฟังก์ชันนั้นแล้วคูณกับค่าคงที่

สูตรที่ 3 $\int \left[f_1(x) + f_2(x)\right] dx = \int f_1(x)dx + \int f_2(x)dx$

สูตรที่ 3 แสดงถึงการหาปฏิยานุพันธ์ของผลบวกของสองฟังก์ชันใด ๆ ซึ่งก็คือหาของแต่ละตัวแล้วนำผลที่ได้มาบวกกัน แต่ต้องคำนึงถึงว่าทั้งสองฟังก์ชันอยู่ในช่วงเดียวกันด้วย สูตรที่ 3 สามารถขยายออกเป็นหลาย ๆ ฟังก์ชันและรวมสูตรที่ 2 เข้าไปด้วยจะได้สูตรที่ 4 ดังนี้

สูตรที่ 4
$$\int \left[c_1f_1(x) + c_2f_2(x) + \dots + C_nf_n(x)\right] dx =$$
$$C_1\int f_1(x)dx + C_2\int f_2(x)dx + \dots + C_n\int f_n(x)dx$$

สูตรที่ 5 $\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{(n+1)} + C \;,\quad n \neq -1$

ตัวอย่างการพิสูจน์สูตรที่ 5 อาศัยสูตรของดิฟเฟอเรนเชียล

$$\therefore \quad d\left(\frac{x^{n+1}}{n+1} + C\right) = \frac{(n+1)x^n}{n+1}dx$$

$$= x^n dx$$

$$\therefore \quad \int x^n dx = \int d\left(\frac{x^{n+1}}{n+1} + C\right)$$

$$= \frac{x^{n+1}}{n+1} + C$$

ตัวอย่าง 5.2.1 จงหาค่า $\int (3x + 5)\,dx$

วิธีทำ $\int (3x + 5)dx = 3\int \frac{x}{2}dx + 5\int dx$ (สูตรที่ 4)

$= 3(\frac{x}{2} + C_1) + 5(x + C_2)$ (สูตรที่ 5 และ สูตรที่ 1)

$= \frac{3}{2}x^2 + 5x + 3C_1 + 5C_2$

เพราะว่า $3C_1 + 5C_2$ เป็นค่าคงที่จึงแทนด้วย C ดังนั้นคำตอบคือ

$$\frac{3x^2}{2} + 5x + C$$

คำตอบของตัวอย่างที่ 1 สามารถตรวจคำตอบได้โดยการหาอนุพันธ์ของ

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{3}{2}x^2 + 5x + C\right) = 3x + 5$$

ตัวอย่างที่ 5.2.2 จงหาค่าของ

$$\int \sqrt[3]{x^2}dx$$

วิธีทำ $\int \sqrt[3]{x^2}dx = \int x^{2/3}\,dx$

$= \frac{x^{2/3 + 1}}{2/3 + 1} + C$ (จากสูตรที่ 5)

$= \frac{3x^{5/3}}{5} + C$ #

ตัวอย่างที่ 5.2.3 จงหาค่าของ

$$\int (x + \frac{1}{x})^2 \, dx$$

วิธีทำ

$$\int (x + \frac{1}{x})^2 \, dx = \int (x^2 + 2 + \frac{1}{x^2}) \, dx$$

$$= \int x^2 dx + 2 \int dx + \int x^{-2} dx$$

$$= \frac{x^3}{3} + 2x + \frac{x^{-1}}{-1} + C$$

$$= \frac{x^3}{3} + 2x - \frac{1}{x} + C \qquad \#$$

ตัวอย่างที่ 5.2.4 จงหาค่าของ

$$\int (\frac{1}{x^4} + \frac{1}{\sqrt[4]{x}}) \, dx$$

วิธีทำ

$$\int (\frac{1}{x^4} + \frac{1}{\sqrt[4]{x}}) \, dx = \int x^{-4} \, dx + x^{-\frac{1}{4}} dx$$

$$= \frac{x^{-4+1}}{-4+1} + \frac{x^{-\frac{1}{4}+1}}{-\frac{1}{4} + 1} + C$$

$$= \frac{x^{-3}}{-3} + \frac{x^{3/4}}{3/4} + C$$

$$= -\frac{1}{3} x^{-3} + \frac{4}{3} x^{3/4} + C$$

$$= \frac{4}{3} x^{3/4} - \frac{1}{3x^3} + C \qquad \#$$

หมายเหตุ ปฏิยานุพันธ์ไม่สามารถหาโดยตรง โดยการใช้สูตรได้เสมอไปบางครั้งต้องอาศัยการเปลี่ยนตัวแปรช่วย

ข้อสังเกต 2 สมมุติเราต้องการหาค่าของ

$$\int 2x \sqrt{1 + x^2} \, dx \qquad (8)$$

จะเห็นว่าหาโดยตรงโดยใช้สูตรไม่ได้ แต่ถ้าสมมุติ

$$U = 1 + x^2 \quad \text{ดังนั้น } dU = 2xdx$$

$\therefore$ จะเปลี่ยนเป็น

$$\int U^{\frac{1}{2}}\, du$$

ใช้สูตร (5) จะได้เท่ากับ

$$\frac{2}{3}U^{3/2} + C$$

แทนที่ $U = 1 + x^2$ จะได้คำตอบคือ

$$\frac{2}{3}(1 + x^2)^{3/2} + C$$

วิธีการข้างบนนี้บางทีเรียกกันว่า กฎลูกโซ่สำหรับการหาปฏิยานุพันธ์ (Chain rule for antidifferentiation)

ทฤษฎีบท 5.2.3 ให้ g เป็นฟังก์ชันของ x ซึ่งสามารถหาอนุพันธ์ได้ และให้เรนจ์ของ g คือ I สมมุติให้ f เป็นฟังก์ชันบน I ซึ่ง F เป็นปฏิยานุพันธ์ของ f บน I แล้วจะได้ว่า

ถ้า $u = g(x)$ ดังนั้น

$$\int f(g(x))\, g'(x)dx = \int f(u)du = F(u) + C$$

$$= F(g(x)) + C$$

(การพิสูจน์ของทฤษฎีนี้ดูได้จากหนังสือ The calculus with Analytic Geometry)

ดังนั้นอาศัยสูตรที่ 5 และทฤษฎีบท 5.2.3 จะได้สูตรอีกสูตรหนึ่งคือ

สูตรที่ 6 ถ้า g เป็นฟังก์ชันที่หาอนุพันธ์ได้ ดังนั้นถ้า $u = g(x)$

$$\int [g(x)]^m\, g'(x)dx = \int u^n du = \frac{u^{n+1}}{n+1} + C$$

$$= \frac{[g(x)]^{n+1}}{n+1} + C$$

ตัวอย่างที่ 5.2.5 จงหาค่าของ

$$\int\sqrt{3x + 4}\ dx$$

วิธีทำ ใช้สูตรที่ (6) โดยให้ $u = 3x + 4$

$\therefore\ du = 3dx$ หรือ $dx = \frac{du}{3}$

ดังนั้น

$$\int\sqrt{3x + 4}\ dx = \int u^{\frac{1}{2}}\frac{du}{3}$$

$$= \frac{1}{3}\int u^{\frac{1}{2}}\ du$$

$$= \frac{1}{3}\frac{u^{\frac{1}{2}+1}}{\frac{1}{2}+1} + C$$

$$= \frac{2}{9}u^{3/2} + C$$

แทนค่า u ด้วย 3x + 4 ดังนั้นคำตอบคือ

$$\frac{2}{9}(3x + 4)^{3/2} + C$$ #

เราจะเห็นว่าตัวอย่างที่ 5 สามารถทำให้สั้นกว่าเดิมได้โดยอาศัยสูตรที่ว่า $\int[g(x)]^n g'(x)dx = \frac{[g(x)]^{n+1}}{n+1} + C$ โดยไม่ต้องเสียเวลาสมมุติ u ดังข้างล่างนี้

$$\int(3x + 4)^{\frac{1}{2}}dx = \frac{1}{3}\int(3x + 4)^{\frac{1}{2}}\ 3dx$$

$$= \frac{1}{3}\ \frac{(3x + 4)^{3/2}}{3/2} + C$$

$$= \frac{2}{9}\ (3x + 4)^{3/2} + C$$

ตัวอย่างที่ 5.2.6 จงหาค่าของ

$$\int t\ (5 + 3t^2)^8 dt$$

วิธีทำ เพราะว่า $d(5 + 3t^2) = 6tdt$

$$\therefore\ \int t\ (5 + 3t^2)^8 dt = \frac{1}{6}\int(5 + 3t^2)^8\ 6t\ dt$$

$$= \frac{1}{6}\int\left(\frac{5 + 3t^2}{8 + 1}\right)^{8+1} + C$$

$$= \frac{1}{54}\ (5 + 3t^2)^9 + C$$ #

ตัวอย่างที่ 5.2.7 จงหาค่าของ

$$\int x^2 \sqrt[5]{7 - 4x^3}\, dx$$

วิธีทำ

$$\int x^2 \sqrt[5]{7 - 4x^3}\,dx = -\frac{1}{12} \int (7 - 4x^3)^{1/5} (-12x^2)\, dx$$

$$= -\frac{1}{12} \frac{(7 - 4x^3)^{1/5 + 1}}{\frac{1}{5} + 1} + C$$

$$= -\frac{5}{72} (7 - 4x^3)^{\frac{6}{5}} + C \quad \#$$

ตัวอย่างที่ 5.2.8 จงหาค่าของ

$$\int x^2 \sqrt{1 + x}\, dx$$

วิธีทำ ให้ $v = \sqrt{1 + x}$ ดังนั้น $v^2 = 1 + x$

$\therefore \quad x = v^2 - 1 \quad , \quad dx = 2vdv$

แทนค่าจะได้

$$\int x^2 \sqrt{1 + x}\, dx = \int (v^2 - 1)^2\, v\, (2vdv)$$

$$= \int (v^4 - 2v^2 + 1)\, 2v^2 dv$$

$$= \int (2v^6 - 4v^4 + 2v^2)\, dv$$

$$= 2\frac{v^7}{7} - 4\frac{v^5}{5} + 2\frac{v^3}{3} + C$$

แทนค่า $v = \sqrt{1 + x}$ จะได้คำตอบคือ

$$\frac{2}{7}(1 + x)^{7/2} - \frac{4}{5}(1 + x)^{5/2} + \frac{2}{3}(1 + x)^{3/2} + C \quad \#$$

เนื่องจากคำตอบที่ได้สามารถตรวจคำตอบโดยการหาอนุพันธ์ของคำตอบ แล้วเทียบกับโจทย์ ดังนั้น เมื่อได้คำตอบทุกครั้งควรตรวจคำตอบด้วย

แบบฝึกหัด 5.2

จากข้อ 1 - 20 จงหาค่าของปฏิยานุพันธ์(antiderivative)

1. $\int 3x^4 dx$
2. $\int (3 - 2t + t^2)\, dt$
3. $\int (1 + x^2)^2 dx$
4. $\int (x^{3/2} + \sqrt{x})\, dx$
5. $\int (\sqrt{y} + y^2 + \frac{1}{y^2}) dy$
6. $\int \sqrt[3]{x + 1}$
7. $\int \sqrt{x}\,(1 + x)\, dx$
8. $\int (\frac{2}{x^3} + \frac{3}{x^2} + 5)\, dx$
9. $\int \frac{x^2 + 4x - 4}{\sqrt{x}}\, dx$
10. $\int (\sqrt{2x} - \frac{1}{\sqrt{2x}})\, dx$
11. $\int x^2 \sqrt{x^3 - 1}\, dx$
12. $\int \frac{s\,ds}{\sqrt{3s^2+1}}$
13. $\int \sqrt{1 - 2y}\, dy$
14. $\int \sqrt{1 + \frac{1}{3x}}\, \frac{dx}{x^2}$
15. $\int x^2 (4 - x^2)^3\, dx$
16. $\int \frac{t\, dt}{\sqrt{t+3}}$
17. $\int \sqrt{3 - x}\, x^2 dx$
18. $\int \frac{(x^2 + 2x)\, dx}{\sqrt{x^3 + 3x^2 + 1}}$
19. $\int \frac{(3+y)}{(3-y)^{2/3}}\, dy$
20. $\int \frac{(r^{1/3} + 2)^4}{\sqrt[3]{r^2}}\, dr$

21. จงหาค่าของ $\int (2x + 1)^3 dx$ โดยวิธี

ก) กระจาย $(2x + 1)^3$

ข) สมมุติ $u = 2x + 1$

5.3 สมการเชิงอนุพันธ์ (Differential Equations)

กำหนด F เป็นฟังก์ชันให้นิยามโดย

$$y = F(x) \tag{1}$$

และ f เป็นอนุพันธ์ของ F ดังนั้น

$$\frac{dy}{dx} = f(x) \tag{2}$$

และ F เป็นปฏิยานุพันธ์ของ f

เขียนสมการที่ (2) เป็นรูปดิฟเฟอเรนเชียลจะได้

$$dy = f(x)\ dx \tag{3}$$

สมการ (2) และ (3) เรียกว่า สมการดิฟเฟอเรนเชียลอันดับหนึ่งเพราะเป็นอนุพันธ์อันดับหนึ่ง การแก้สมการ (3) ทำได้โดยหาฟังก์ชัน G ซึ่ง $y = G(x)$ ดังนั้น จะเห็นได้ว่า ถ้า F เป็นปฏิยานุพันธ์ของ f แล้ว ฟังก์ชัน G ก็คือ

$G(x) = F(x) + C$ เมื่อ C เป็นค่าคงที่ใด ๆ นั่นคือคำตอบของสมการที่ (3) เป็น

$$y = F(x) + C \tag{4}$$

เรียกคำตอบ (4) ของสมการ (3) ว่าเป็นคำตอบทั่วไปเพราะคำตอบนี้ขึ้นอยู่กับค่า C แต่ถ้ากำหนดค่า C แน่นอนลงไปเราจะเรียกคำตอบว่าคำตอบเฉพาะ (particular solution)

ข้อสังเกต 1 สมมุติเราต้องการหาคำตอบทั่วไปของสมการดิฟเฟอเรนเชียล

$$dy = 2x\ dx \tag{5}$$

$$\therefore \int dy = \int 2x\ dx$$

$$\therefore y + C_1 = x^2 + C_2$$

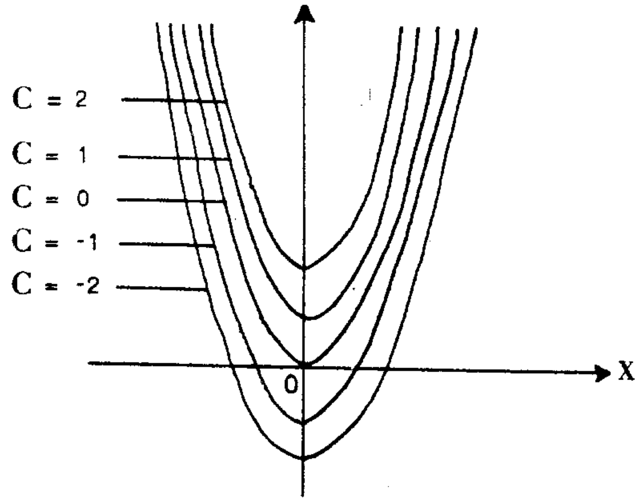
$$y = x^2 + (C_2 - C_1)$$

แต่ $C_2 - C_1$ เป็นค่าคงที่ใด ๆ ดังนั้นนิยมเขียนเป็น

$$y = x^2 + C \tag{6}$$

ซึ่งสมการ (6) เป็นคำตอบทั่วไปของสมการดิฟเฟอเรนเชียล (5) และซึ่งรูปกราฟของสมการจะขึ้นอยู่กับค่า C ดังภาพข้างล่าง

แต่ถ้าต้องการคำตอบเฉพาะสำหรับสมการดิฟเฟอเรนเชียลโจทย์ต้องกำหนดเงื่อนไขมาให้ ดังนั้นจะเห็นว่า (4) จะเป็นคำตอบเฉพาะเมื่อ



กำหนดค่า x ค่า y มาให้ เพราะเราสามารถหาค่า c ได้

ข้อสังเกต 2 สมมุติต้องการหาคำตอบเฉพาะของสมการ (5) เมื่อกำหนดเงื่อนไขว่า $x = 2$ แล้ว $y = 6$ ดังนั้นจากคำตอบ (6) แทน $x = 2$, $y = 6$ จะได้

$$6 = (2)^2 + c$$

$$\therefore c = 2$$

ดังนั้นคำตอบคือ

$$y = x^2 + 2$$

ถ้าสมการเป็นรูป $\dfrac{d^2y}{dx^2} = f(x)$ (7)

สมการ (7) เป็นสมการดิฟเฟอเรนเชียลเช่นเดียวกันแต่มีอันดับสอง เพราะเป็นอนุพันธ์อันดับสอง ดังนั้นเวลาหาคำตอบทั่วไป จึงมีค่าคงที่สองตัวอยู่ในคำตอบดังตัวอย่าง

ตัวอย่างที่ 5.3.1 จงหาคำตอบทั่วไปของสมการดิฟเฟอเรนเชียล

$$\frac{d^2y}{dx^2} = 4x + 3$$

วิธีทำ เพราะว่า $\dfrac{d^2y}{dx^2} = \dfrac{dy'}{dx}$ ดังนั้น

$$\therefore \frac{dy'}{dx} = 4x + 3$$

เขียนอยู่ในรูปดิฟเฟอเรนเชียล จะได้

$$\therefore dy' = (4x + 3)\,dx$$

$$\int dy' = \int (4x + 3)\,dx$$

$$y' = 2x^2 + 3x + C_1$$

แต่ $y' = \frac{dy}{dx}$ จะได้ว่า

$$\frac{dy}{dx} = 2x^2 + 3x + C_1$$

เขียนอยู่ในรูปดิฟเฟอเรนเชียล จะได้

$$\therefore dy = (2x^2 + 3x + C_1)\,dx$$

$$\int dy = \int (2x^2 + 3x + C_1)\,dx$$

$$y = \frac{2x^3}{3} + \frac{3}{2}x^2 + C_1x + C_2$$

ตัวอย่างที่ 5.3.2 จงหาคำตอบเฉพาะของตัวอย่างที่ 1 เมื่อกำหนดเงื่อนไขว่า

$y = 2$ และ $y' = -3$ เมื่อ $x = 1$

วิธีทำ $y' = 2x^2+3x+C_1$

แทน $x = 1,\ y' = -3$ จะได้

$$-3 = 2(1)^2 + 3(1) + C_1$$

$$\therefore C_1 = -8$$

ดังนั้นคำตอบจะเปลี่ยนเป็น

$$y = \frac{2x^3}{3} + \frac{3x^2}{2} - 8x + C_2$$

แทนค่า $x = 1,\ y = 2$ เพื่อที่จะหา C_2

$$2 = \frac{2(1)^3}{3} + \frac{3(1)}{2} - 8(1) + C_2$$

$$C_2 = \frac{47}{6}$$

$\therefore$ คำตอบเฉพาะของสมการดิฟเฟอเรนเชียล คือ

$$y = \frac{2x^3}{3} + \frac{3x^2}{2} - 8x + \frac{47}{6}$$

ตัวอย่างที่ 5.3.3 บริษัทแห่งหนึ่งวิเคราะห์การผลิตสินค้าได้ผลดังนี้คือ อัตราการเปลี่ยนของจำนวนของผลผลิตที่ได้ต่อวันต่ออัตราการเพิ่มขึ้นของคนงาน $= 80-6x^{1/2}$ เมื่อ แทนจำนวนคนงานที่เพิ่มขึ้น ถ้าปัจจุบันผลิตได้วันละ 3000 หน่วย จงหาว่าถ้าคนงาน พิ่มขึ้น 25 คน จะผลิตได้กี่ชิ้นต่อวัน

วิธีทำ ให้ y หน่วยแทนจำนวนของที่ผลิตได้ต่อวัน

$$\therefore \quad \frac{dy}{dx} = 80-6x^{1/2}$$

$$\therefore \quad dy = (80-6x^{1/2})dx$$

$$\int dy = \int (80-6x^{1/2})dx$$

$$y = 80x - 4x^{3/2} + C$$

เมื่อ $x = 0$, $y = 3000$

ดังนั้น $C = 3000$

$$\therefore \quad y = 80x - 4x^{3/2} + 3000$$

แต่เราต้องการหาค่า y เมื่อ $x = 25$

$$\therefore \quad y = 80(25) - 4(25)^{3/2} + 3000$$

$$y = 2000 - 500 + 3000$$

$$= 4500$$

$\therefore$ ถ้าเพิ่มคนงานอีก 25 คน จะผลิตได้ 4500 หน่วยต่อวัน

บางครั้งสมการดิฟเฟอเรนเชียล อาจจะอยู่ในรูป

$$\frac{dy}{dx} = \frac{f(x)}{g(y)} \qquad (8)$$

ซึ่งแบบนี้จะยุ่งยากกว่าข้างต้นเราใช้วิธีการแยกตัวแปร ซึ่งจะได้

$$g(y)dy = f(x)dx$$

แล้วหาปฏิยานุพันธ์ก็จะได้คำตอบดังตัวอย่าง

ตัวอย่างที่ 5.3.4 ความชันของเส้นสัมผัสเส้นโค้งที่จุด (x,y) ใด ๆ บนเส้นโค้งมีค่าเท่ากับ $3x^2y^2$ จงหาสมการเส้นโค้งถ้าทราบว่าจุด (2, 1) อยู่บนเส้นโค้ง

วิธีทำ เพราะว่าความชันของเส้นสัมผัสที่จุดใด ๆ บนเส้นโค้ง คือ ค่าอนุพันธ์ที่จุดนั้น ดังนั้น

$$\frac{dy}{dx} = 3x^2y^2$$

โดยวิธีการแยกตัวแปร จะได้

$$\frac{1}{y^2}dy = 3x^2dx$$

$$\int \frac{1}{y^2}dy = \int 3x^2dx$$

$$-\frac{1}{y} = x^3 + C$$

$$\frac{1}{y} = -x^3 - C \qquad x^3 + \frac{1}{y} + C = 0$$

เพราะว่าเส้นโค้งผ่านจุด (2, 1) นั่นคือ $x = 2$, $y = 1$

$$\therefore \quad 2^3 + \frac{1}{1} + C = 0$$

$$C = -9$$

$\therefore$ คำตอบคือ $x^3 + \frac{1}{y} - 9 = 0$

แบบฝึกหัดที่ 5.3

จากข้อ 1 ถึงข้อ 5 จงหาคำตอบทั่วไปของสมการดิฟเฟอเรนเชียลที่กำหนด

1. $\frac{dy}{dx} = 3x^2+2x+7$ 2. $\frac{dy}{dx} = 3xy^2$

3. $\frac{dy}{dx} = \frac{3x\sqrt{1+y^2}}{y}$ 4 $\frac{d^2y}{dx^2} = 5x^2+1$

5. $\frac{dy}{dx} = \frac{x}{\sqrt{a^2-x^2}}$

จากข้อ (6) ถึงข้อ (9) จงหาคำตอบเฉพาะของสมการดิฟเฟอเรนเชียล เมื่อกำหนดเงื่อนไขให้ดังต่อไปนี้

6, $\frac{dy}{dx} = x^2-2x-4$; $y = -6$ เมื่อ $x - 3$

7, a $\frac{dy}{dx} = \frac{x}{4y}$; $Y = -2$ เมื่อ $x = 4$

8. $\sqrt{a^2-x^2}dy = xdx$; $y = 4$ เมื่อ $x = a$

9. $\frac{d^2y}{dx^2} = 4(1+3x)^2$; $y = -1$ และ $y' = -2$ เมื่อ $x = -1$

10. จุด (3, 2) อยู่บนเส้นโค้ง $y = f(x)$ ซึ่งความชันของเส้นสัมผัสที่จุด (x y) ใด ๆ มีค่าเท่ากับ $2x-3$ จงหาสมการของเส้นโค้ง

11. จุด (-1, 3) และ (0, 2) อยู่บนเส้นโค้ง และที่จุด (x,y) ใด ๆ $\frac{d^2y}{dx^2} = 2 - 4x$ จงหาสมการของเส้นโค้ง

12. ที่จุด (x,y) ใด ๆ บนเส้นโค้ง $\frac{d^2y}{dx^2} = 1 - x^2$ และสมการเส้นสัมผัสที่สัมผัสเส้นโค้งนี้ที่จุด (1, 1) คือ $y = 2-x$ จงหาสมการของเส้นโค้งที่กำหนดให้

5.4 ประยุกต์ของปฏิยานุพันธ์ในเศรษฐศาสตร์
(Applications of antidifferentiation in Economics)

ในบทที่ 3 เราได้กล่าวถึงฟังก์ชันต้นทุนเพิ่ม (marginal cost function) และฟังก์ชันรายได้เพิ่ม (marginal revenue function) ว่าเป็นอนุพันธ์อันดับหนึ่งของฟังก์ชันต้นทุนทั้งหมด (total cost function) และฟังก์ชันรายได้ทั้งหมด (total revenue function) ตามลำดับ นั่นคือถ้าทราบฟังก์ชันต้นทุนเพิ่ม (marginal cost) และรายได้เพิ่ม (marginal revenue) แล้วเราสามารถหาฟังก์ชันต้นทุนทั้งหมด (total cost) และฟังก์ชันรายได้ทั้งหมด (total revenue function) ได้โดยการใช้แอนตี้ดิฟเฟอเรนทิเอชัน

ในการหาฟังก์ชันต้นทุนทั้งหมดจากฟังก์ชันต้นทุนเพิ่ม ค่าคงที่ c จะสามารถหาได้ถ้าเราทราบค่าโสหุ้ย (นั่นก็คือ ต้นทุนเมื่อจำนวนของผลผลิตเป็นศูนย์)หรือราคาของจำนวนแน่นอน และเพราะความจริงที่ว่ารายได้ทั้งหมด (total revenue) มีค่าเป็นศูนย์เมื่อจำนวนของผลผลิตเป็นศูนย์ ดังนั้น เราสามารถใช้ความจริงอันนี้ ในการหาค่า C เมื่อเราหาฟังก์ชันรายได้ทั้งหมด (total revenue function)
จากฟังก์ชันรายได้เพิ่ม (marginal revenue)

ตัวอย่างที่ 5.4.1 กำหนดฟังก์ชันต้นทุนเพิ่ม C' ดังนี้

$C'(x) = 2x - 4$ โดยที่ $C(x)$ เป็นราคาทั้งหมดของการผลิต x ชิ้น ถ้าราคาของผลผลิต 5 หน่วยเป็น 10 บาทให้หาฟังก์ชันต้นทุนทั้งหมด และเขียนรูปกราฟของฟังก์ชันต้นทุนเพิ่ม ฟังก์ชันต้นทุนทั้งหมดบนแกนเดียวกัน

วิธีทำ ต้นทุนเพิ่มต้องมีค่ามากกว่าหรือเท่ากับศูนย์

ดังนั้น $2x - 4 \geqslant 0$ นั่นคือ $x \geqslant 2$

จาก
$$\begin{aligned} C'(x) &= 2x - 4 \\ C(x) &= \int (2x-4)dx \\ &= x^2-4x+C \end{aligned}$$

จากที่กำหนด เมื่อ $x = 5$, $C(x) = 10$

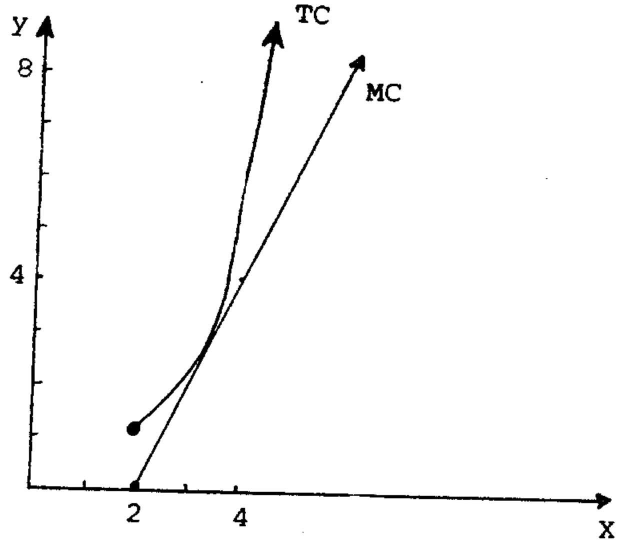
$$\therefore \; 10 = (5)^2-4(5)+C$$

$$C = 5$$

∴ ฟังก์ชันต้นทุนเพิ่ม

$$c(x) = x^2-4x+5 \;, \quad x \geqslant 2$$

ซึ่งแสดงรูปของฟังก์ชันต้นทุนเพิ่มกับฟังก์ชันต้นทุนทั้งหมดได้ดังรูปข้างล่างนี้



ตัวอย่างที่ 5.4.2 ถ้าฟังก์ชันรายได้เพิ่มกำหนดโดย

$R'(x) = 27-12x+x^2$ จงหาฟังก์ชันรายได้ทั้งหมด และสมการอุปสงค์ ให้เขียนกราฟแสดงเส้นโค้งอุปสงค์ และเส้นโค้งรายได้ทั้งหมด, เส้นโค้งรายได้เพิ่ม บนแกนเดียวกัน

วิธีทำ ให้ R(x) ฟังก์ชันรายได้ทั้งหมด และ

$$R'(x) = 27-12x+x^2$$

$$\therefore R(x) = \int(27-12x+x^2)dx$$

$$= 27x-12\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}+c$$

เพราะว่า $R(o) = 0$ เราจะได้ $C = 0$

$$\therefore R(x) = 27x-6x^2+\frac{x^3}{3}$$

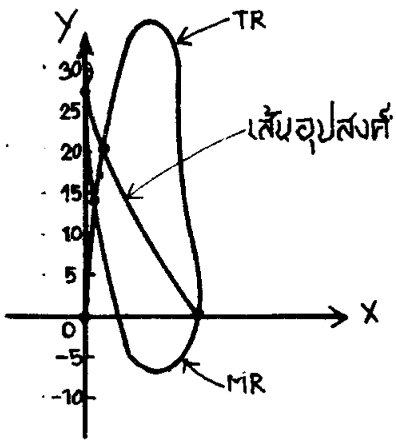
ถ้า f เป็นฟังก์ชันราคา, $R(x) = x\,f(x)$

ดังนั้น $f(x) = 27-6x+\frac{x^2}{3}$

ถ้าให้ p บาทเป็นราคาของผลผลิตหนึ่งหน่วย เมื่อ x หน่วยเป็นอุปสงค์ ดังนั้น เพราะว่า $p = f(x)$ จะได้สมการอุปสงค์ คือ

$$3p = 81-18x+x^2$$

เพื่อที่จะหาว่าค่าของ x อยู่ได้ในช่วงใดบ้าง เราอาศัยความจริงที่ว่า $x \geqslant 0$, $p \geqslant 0$ และ เพราะว่า $f(x) = -6+\frac{2}{3}x$ นั่นคือ f เป็นฟังก์ชันลด (decreasing) เมื่อ $x < 9$ ดังนั้น เมื่อ $x = 9$, $p = 0$ ดังนั้นค่าของ x ที่เป็นไปได้จะอยู่ในชวงปิด $[0, 9]$ ดังแสดงรูปกราฟได้ข้างล่าง



ตัวอย่างที่ 5.4.3 หลังการทดลองได้ผลปรากฏว่า ถ้าผลิตของ x หน่วยต่อสัปดาห์ ฟังก์ชันต้นทุน พีม คือ

$$C'(x) = 0.3x - 11$$

เมื่อ $C(x)$ บาท เป็นต้นทุนทั้งหมดของผลผลิต x หน่วย ถ้าราคาขายของผลผลิตกำหนดไว้เป็น 19 บาทต่อหน่วย และค่าโสหุ้ยเท่ากับ 100 บาทต่อสัปดาห์ ให้หากำไรสูงสุดทั้งหมดในหนึ่งสัปดาห์

วิธีทำ ให้ $R(x)$ บาทเป็นฟังก์ชันรายได้ทั้งหมดจากการขายของ x หน่วย และ $P(x)$ บาท เป็นกำไรทั้งหมดของการขายของ x หน่วย เพราะว่าราคาขายของผลผลิต x หน่วยเป็น 19 บาทต่อหน่วย

ดังนั้น $R(x) = 19x$

$$\therefore R'(x) = 19$$

เราทราบว่า $C'(x) = 0.3x - 11$

กำไรสูงสุดจะเกิดขึ้นได้ก็ต่อเมื่อ รายได้เพิ่มมีค่าเท่ากับต้นทุนเพิ่ม ดังนั้น $C'(x) = R'(x)$

$$0.3x - 11 = 19$$

$$x = 100$$

$\therefore$ต้องผลิตของ 100 หน่วยต่อสัปดาห์ จึงได้กำไรสูงสุด

$$\because C(x) = \int (0.3x - 11)\, dx$$

$$= 0.15x^2 - 11x + k$$

$\because$ ค่าโสหุ้ยเท่ากับ 100 บาท

ดังนั้นจะได้ $k = 100$

$$\therefore C(x) = 0.15x^2 - 11x + 100$$

$$\because P(x) = R(x) - C(x)$$

$$= 19x - 0.15x^2 + 11x - 100$$

$$= -0.15x^2 + 30x - 100$$

$$P(100) = -0.15(100)^2 + 30(100) - 100$$

$$= 1400$$

$\therefore$ กำไรสูงสุดต่อสัปดาห์ 1400 บาท เมื่อผลิตของ 100 หน่วย

แบบฝึกหัดที่ 5.4

1. จงหาฟังก์ชันรายได้ทั้งหมด ถ้าความชันของเส้นโค้งรายได้ที่จุดใด ๆ เท่ากับ $12-3x$ และถ้า $p = 6$ เมื่อ $x = 4$ ให้เขียนกราฟของฟังก์ชันรายได้ทั้งหมด และเส้นโค้งอุปสงค์บนแกนเดียวกัน

2. จงหาสมการอุปสงค์สำหรับสินค้าซึ่งมีฟังก์ชันรายได้เพิ่มเป็น

$$R'(x) = \frac{10}{(x+5)^2+4}$$

3. ฟังก์ชันรายได้เพิ่มนิยามโดย $R'(x) = 16-3x^2$ จงหาฟังก์ชันรายได้ทั้งหมดและสมการอุปสงค์ พร้อมทั้งเขียนกราฟของเส้นโค้งอุปสงค์ เส้นโค้งรายได้ทั้งหมด เส้นโค้งรายได้เพิ่มบนแกนเดียวกัน

4. ให้ฟังก์ชันต้นทุนเพิ่มคือ $C'(x) = 3x^2+8x+4$ และค่าโสหุ้ยเท่ากับ 6 บาท ถ้า $C(x)$ บาท เป็นฟังก์ชันต้นทุนทั้งหมดของผลผลิต x หน่วย จงหาฟังก์ชันต้นทุนทั้งหมด พร้อมทั้งเขียนกราฟของเส้นโค้งต้นทุนทั้งหมด และเส้นโค้งต้นทุนเพิ่มบนแกนเดียวกัน

5. บริษัทแห่งหนึ่งทราบว่าฟังก์ชันต้นทุนเพิ่มสำหรับการผลิตของอย่างหนึ่งมีค่าเท่ากับ $C'(x) = 125+10x+\frac{1}{9}x^2$ เมื่อ $C(x)$ บาท เป็นต้นทุนทั้งหมดของการผลิตสินค้า x หน่วย ถ้าค่าโสหุ้ยเท่ากับ 250 บาท จงหาต้นทุนของการผลิตของ 15 หน่วย

6. ฟังก์ชันต้นทุนเพิ่มของการผลิตของอย่างหนึ่ง คือ $C'(x) = \frac{4-9\sqrt{3x}}{2x}$ เมื่อ $C(x)$ บาท เป็นต้นทุนทั้งหมดของการผลิตของ x หน่วย ค่าโสหุ้ยเท่ากับ 54 บาท ถ้าผลิตของจำนวน 27 หน่วย

   (1) ต้นทุนเพิ่ม

   (2) ต้นทุนเฉลี่ย

   (3) The elasticity of cost