บทที่ 10
เมทริกซ์ และการกำหนดโปรแกรมเชิงเส้นเบื้องต้น

10.1 เมทริกซ์

เมทริกซ์ คือ กลุ่มของเลขจำนวนหรือฟังก์ชันที่จัดเรียงในแนวนอนหรือแนวดิ่งอย่างมีระเบียบเป็นรูปสี่เหลี่ยมมุมฉากในเครื่องหมาย [ ] ถ้าเมทริกซ์มี m แถว และ n หลัก เรียกว่า $m \times n$ เมทริกซ์ (อ่านว่า เอ็ม บายเอ็น เมทริกซ์) และถ้ากำหนดเลขจำนวนในแถวที่ i และหลักที่ j ด้วย a_{ij} แล้ว $m \times n$ เมทริกซ์ คือ

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & & a_{mn} \end{pmatrix} \qquad (10.1.1)$$

โดยปรกติจะใช้อักษรโรมันตัวใหญ่แทนเมทริกซ์ เช่น A, B, C

ตัวอย่าง 10.1.1

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 3 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}$$

เรียกว่า 3×2 เมทริกซ์

ในบางครั้ง (10.1.1) จะเขียนด้วยสัญลักษณ์ $[a_{ij}]$

10.2 การบวก (ลบ) เมทริกซ์

ถ้า $A = [a_{ij}]$ และ $B = [b_{ij}]$

เป็น $m \times n$ เมทริกซ์

การบวก (ลบ) เมทริกซ์ $A \pm B$ คือ เมทริกซ์ C ซึ่งเท่ากับ $[c_{ij}]$ โดยแต่ละเลขจำนวนของ C เกิดจากผลบวก (ลบ) ของเลขจำนวนที่สมนัยกันของ A และ B

ตัวอย่าง 10.2.1 ถ้า $A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 4 \end{bmatrix}$

และ $B = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 \\ -1 & 2 & 4 \end{bmatrix}$

แล้ว $A+B = \begin{bmatrix} 1+2 & -2+3 & 1+1 \\ 0-1 & 1+2 & 4+4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 2 \\ -1 & 3 & 8 \end{bmatrix}$

และ $A-B = \begin{bmatrix} 1-2 & -2-3 & 1-1 \\ 0-(-1) & 1-2 & 4-4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & -5 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \end{bmatrix}$

10.3 การคูณเมทริกซ์ด้วยเลขจำนวน

ถ้า A เป็น $m \times n$ เมทริกซ์ และ k เป็นเลขจำนวน

แล้ว kA เป็น $m \times n$ เมทริกซ์ ซึ่งเลขจำนวนในแถวที่ i หลักที่ j คือ ka_{ij}

ตัวอย่าง 10.3.1 ถ้า $A = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 2 & -3 \end{bmatrix}$

แล้ว $2A = \begin{bmatrix} 2 & -4 \\ 4 & -6 \end{bmatrix}$

ตัวอย่าง 10.3.2 ถ้า $A = \begin{bmatrix} -2 & 3 \\ 1 & 5 \end{bmatrix}$

แล้ว $\frac{1}{3} A = \begin{bmatrix} -\frac{2}{3} & 1 \\ \frac{1}{3} & \frac{5}{3} \end{bmatrix}$

10.4 การคูณระหว่างเมทริกซ์

ถ้า A เป็น $m \times n$ เมทริกซ์

และ B เป็น $n \times p$ เมทริกซ์

แล้วผลคูณระหว่างเมทริกซ์ทั้งสอง หรือ AB เป็น $m \times p$ เมทริกซ์

ซึ่งถ้าเขียนแทนด้วยเมทริกซ์ $C = [c_{ij}]$

$$[c_{ij}] = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} \, b_{kj} \quad \begin{cases} \text{โดย } i = 1, 2, \ldots, m \\ \text{และ } j = 1, 2, \ldots, p \end{cases}$$

ตัวอย่าง 10.4.1 ถ้า $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 4 & -2 & 5 \\ 2 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

และ $B = \begin{bmatrix} 5 & 0 \\ 3 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

แล้ว $AB = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 4 & -2 & 5 \\ 2 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5 & 0 \\ 3 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

$= \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 19 & 5 \\ 11 & 1 \end{bmatrix}$

ข้อสังเกต ถ้า A เป็น $m \times n$ เมทริกซ์
และ B เป็น $p \times q$ เมทริกซ์

1. หา AB ได้เฉพาะเมื่อหลักของ A เท่ากับแถวของ B นั่นคือ $n=p$ และ AB จะเป็น $m \times q$ เมทริกซ์
2. หา BA ได้เฉพาะเมื่อหลักของ B เท่ากับแถวของ A นั่นคือ $q=m$ และ BA เป็น $p \times n$ เมทริกซ์
3. ถ้า $m=n=p=q$ แล้วไม่จำเป็นว่า AB ต้องเท่ากับ BA

10.5 เมทริกซ์จัตุรัส (Square matrix)

เมทริกซ์ $\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$

เรียกว่า เมทริกซ์จัตุรัส อันดับที่ n ถ้า $m=n$
และในเมทริกซ์จัตุรัส เลขจำนวน $a_{11}, a_{22}, \ldots, a_{nn}$ เรียกว่า เลขจำนวนในแนวทะแยง (diagonal elements)

10.6 เมทริกซ์ศูนย์ (Zero matrix)

$m \times n$ เมทริกซ์ เรียกว่า เมทริกซ์ศูนย์ถ้าเลขจำนวนทุก ๆ เทอมในแถวที่ i, หลักที่ j มีค่าเป็นศูนย์

10.7 เมทริกซ์เชิงสามเหลี่ยม (triangular matrix)

เมทริกซ์จัตุรัสอันดับที่ n เรียกว่า เมทริกซ์เชิงสามเหลี่ยมในส่วนบน (ส่วนล่าง) ถ้าเลขจำนวนในส่วนที่อยู่ใต้ (เหนือ) แนวเส้นทะแยงเป็นศูนย์ทั้งหมด

10.8 เมทริกซ์หน่วย

เมทริกซ์จัตุรัส อันดับที่ n เรียกว่า เมทริกซ์หน่วย I หรือ I_n ถ้าเลขจำนวนทุกเทอมในแนวทะแยงของ I เป็นหนึ่ง และเลขจำนวนอื่นเป็นศูนย์ทั้งหมด

เช่น $I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ และ $I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

10.9 เมทริกซ์เปลี่ยนตำแหน่ง

สำหรับ $m \times n$ เมทริกซ์ A

ถ้า A^T เป็น $n \times m$ เมทริกซ์ ซึ่งได้จากการสลับแถว และหลักของเมทริกซ์ A จะเรียก A^T ว่า เมทริกซ์เปลี่ยนตำแหน่ง (the transposed of **A**)

$$\text{นั่นคือถ้า} \quad A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \text{—} & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \text{—} & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \text{—} & a_{mn} \end{pmatrix}$$

$$\text{แล้ว} \quad A^T = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \text{—} & a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} & \text{—} & a_{m2} \\ \vdots & \vdots & \text{—} & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \text{—} & a_{mn} \end{pmatrix}$$

ตัวอย่าง 10.9.1

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & -2 \\ 2 & 1 & 1 \end{bmatrix} ; \quad A^T = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} ; \quad B^T = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

ข้อสังเกต 1. $(A^T)^T = A$

2. ถ้า A และ B มีขนาดเดียวกัน แล้ว $(A+B)^T = A^T + B^T$

3. $(AB)^T = B^T A^T$

10.10 เมทริกซ์แบ่งส่วน (PARTITIONED MATRIX)

กำหนด m×n เมทริกซ์ A ใด ๆ เมทริกซ์ A อาจจะแบ่งเป็นเมทริกซ์ย่อย ๆ ได้ด้วยการตัดบางแถวหรือบางหลักออกตามแนวนอนหรือแนวดิ่ง เช่น

$$A = \left[\begin{array}{cc|cc} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ \hline a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{array}\right]$$

ซึ่ง A ถูกแบ่งออกเป็นเมทริกซ์ย่อย A_{11}, A_{12}, A_{21}, และ A_{22}

ในลักษณะที่ $A = \left[\begin{array}{c|c} A_{11} & A_{12} \\ \hline A_{21} & A_{22} \end{array}\right]$

โดยมี $A_{11} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{bmatrix}$, $A_{12} = \begin{bmatrix} a_{13} & a_{14} \\ a_{23} & a_{24} \\ a_{33} & a_{34} \end{bmatrix}$

$A_{21} = \begin{bmatrix} a_{41} & a_{42} \end{bmatrix}$, $A_{22} = \begin{bmatrix} a_{43} & a_{44} \end{bmatrix}$

10.11 การคูณระหว่างเมทริกซ์แบ่งส่วน

ถ้าเมทริกซ์ A และ B ถูกแบ่งส่วนเป็นเมทริกซ์ย่อย

$$A = \begin{array}{c} \begin{array}{cc} n_1 & n_2 \end{array} \\ \left[\begin{array}{c|c} A_{11} & A_{12} \\ \hline A_{21} & A_{22} \end{array}\right] \end{array} \begin{array}{c} m_1 \\ m_2 \end{array} \qquad B = \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} q_1 & q_2 & q_3 \end{array} \\ \left[\begin{array}{c|c|c} B_{11} & B_{12} & B_{13} \\ \hline B_{21} & B_{22} & B_{23} \end{array}\right] \end{array} \begin{array}{c} P_1 \\ P_2 \end{array}$$

แล้ว $AB = \left[\begin{array}{c|c} A_{11} & A_{12} \\ \hline A_{21} & A_{22} \end{array}\right] \left[\begin{array}{c|c|c} B_{11} & B_{12} & B_{13} \\ \hline B_{21} & B_{22} & B_{23} \end{array}\right]$

$$= \left[\begin{array}{c|c|c} A_{11}B_{11} + A_{12}B_{21} & A_{11}B_{12} + A_{12}B_{22} & A_{11}B_{13} + A_{12}B_{23} \\ \hline A_{21}B_{11} + A_{22}B_{21} & A_{21}B_{12} + A_{22}B_{22} & A_{21}B_{13} + A_{22}B_{23} \end{array}\right]$$

ข้อสังเกต การคูณระหว่างเมทริกซ์แบ่งส่วนเช่นนี้ จะต้องมี $n_1 = p_1$ และ $n_2 = p_2$

10.12 วิธีดำเนินการสำหรับเมทริกซ์ (metrix operations)

กำหนด $m \times n$ เมทริกซ์ A ใด ๆ จะมีวิธีดำเนินการขั้นพื้นฐานต่าง ๆ ที่เกี่ยวข้องกับแถวหรือหลักของเลขจำนวนในเมทริกซ์ต่าง ๆ ซึ่งเป็นเครื่องมือที่มีประโยชน์ในการแก้ระบบสมการเชิงเส้น ตลอดจนหาเมทริกซ์ผกผัน (inverse matrix)

วิธีดำเนินการที่เกี่ยวกับแถวในเมทริกซ์ A

1. การเปลี่ยนแถวกันระหว่างแถวที่ i กับแถวที่ j
2. การคูณแถวที่ i ด้วยเลขจำนวน (scalar) k
3. การแทนแถวที่ i ด้วยแถวที่เกิดจากผลบวกระหว่าง k คูณแถวที่ j กับแถวที่ i

วิธีดำเนินการที่เกี่ยวข้องกับหลักในเมทริกซ์ มีวิธีการเช่นเดียวกับวิธีดำเนินการของแถวในเมทริกซ์

ตัวอย่าง 10.12.1 (วิธีดำเนินการเกี่ยวกับแถว)

กำหนด $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 10 \\ -1 & 2 & 1 & 8 \\ -1 & -1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$

หารแถวที่ 1 ด้วย ๒ แล้วบวกกับแถวที่ 2 และลบจากแถวที่ 3 จะได้

$$\begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 5 \\ 0 & \frac{5}{2} & \frac{3}{2} & 13 \\ 0 & -\frac{3}{2} & \frac{3}{2} & -3 \end{pmatrix}$$

คูณแถวที่ 2 ด้วย $\frac{2}{5}$ และคูณอีกครั้งด้วย $\frac{3}{2}$ แล้วบวกกับแถวที่ 3 ได้

$$\begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 5 \\ 0 & 1 & \frac{3}{5} & \frac{26}{5} \\ 0 & 0 & \frac{24}{10} & \frac{24}{5} \end{pmatrix}$$

คูณแถวที่ 3 ด้วย $\frac{10}{24}$ ได้

$$\begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 5 \\ 0 & 1 & \frac{3}{5} & \frac{26}{5} \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

10.13 การแก้สมการเชิงเส้น

พิจารณาระบบสมการเชิงเส้น

$$
\begin{array}{lcl}
a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n & = & b_1 \\
a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n & = & b_2 \\
\vdots & & \vdots \\
a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 \cdots + a_{mn}x_n & = & b_m
\end{array}
$$

จะเห็นได้ว่าในกรณีเฉพาะของระบบสมการ

$$
\begin{array}{lcl}
2x_1 + x_2 + x_3 & = & 10 \\
-x_1 + 2x_2 + x_3 & = & 8 \\
x_1 - x_2 + 2x_3 & = & 2
\end{array}
$$

เขียนในรูปเมทริกซ์ได้ $\begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 & 10 \\ -1 & 2 & 1 & 8 \\ 1 & -1 & 2 & 2 \end{bmatrix}$

ซึ่งเป็นเมทริกซ์ A ตามตัวอย่างข้างบนซึ่งใช้วิธีดำเนินการเกี่ยวกับแถวแล้วได้

$$
\begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 5 \\ 0 & 1 & \frac{3}{5} & \frac{26}{5} \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}
$$

หรือเขียนในรูปสมการได้

$$
\begin{array}{rcll}
x_1 + \frac{1}{2}x_2 + \frac{1}{2}x_3 & = & 5 & \quad (1) \\
x_2 + \frac{3}{5}x_3 & = & \frac{26}{5} & \quad (2) \\
x_3 & = & 2 &
\end{array}
$$

ซึ่งจะเห็นได้ว่า ด้วยการแทนค่า $x_3 = 2$ ใน (2) จะได้ $x_2 = 4$
แล้วแทนค่า x_2 และ x_3 ใน (1) จะได้ $x_1 = 2$

การลดรูป เมทริกซ์ A ให้เป็นเมทริกซ์สามเหลี่ยมในส่วนบนเพื่อแก้สมการระบบเชิงเส้นด้วยกรรมวิธีเช่นนี้เรียกว่า วิธีลดรูปของแกสส์ (GAUSSIAN REDUCTION)

10.14 เมทริกซ์ผกผัน (INVERSE MATRIX)

ถ้า A เป็น n×n เมทริกซ์ และ B เป็น n×n เมทริกซ์ ที่ทำให้ AB = I และ BA = I แล้ว B เรียกว่าเมทริกซ์ผกผันของ A และเขียนแทนด้วย A^{-1}

10.15 การคำนวณหาเมทริกซ์ผกผัน

ถ้า A มีเมทริกซ์ผกผัน A^{-1} แล้วจะหา A^{-1} ได้โดยวิธีปฏิบัติเกี่ยวกับแถวในเมทริกซ์ดังตัวอย่างต่อไปนี้

ตัวอย่าง 10.15.1 กำหนดเมทริกซ์ A

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

ขยายเมทริกซ์ A ด้วยเมทริกซ์หน่วย I, เป็นเมทริกซ์

$$(A,I) = \left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

จากนั้นลดรูปเมทริกซ์ A ให้เป็นเมทริกซ์ I โดยวิธีปฏิบัติในแถวของเมทริกซ์ จะทำให้ได้เมทริกซ์ผกผัน A^{-1} แทนที่ในตำแหน่งของเมทริกซ์ I ดังนี้

หารแถวที่ 1 ด้วย 2 แล้วบวกกับแถวที่ 2 และลบจากแถวที่ 3 ได้

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{5}{2} & \frac{3}{2} & \frac{1}{2} & 1 & 0 \\ 1 & -\frac{3}{2} & \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} & 0 & 1 \end{array}\right]$$

คูณแถวที่ 2 ด้วย $\frac{2}{5}$ ได้แถวที่ 2 ใหม่ คูณอีกครั้งด้วย$-\frac{1}{2}$ แล้วบวกแถวที่ 1 และคูณแถวที่ 2 ใหม่ด้วย $\frac{3}{2}$ แล้วบวกกับแถวที่ 3 ได้

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & \frac{1}{5} & \frac{2}{5} & -\frac{1}{5} & 0 \\ 0 & 1 & \frac{3}{5} & \frac{1}{5} & \frac{2}{5} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{12}{5} & -\frac{1}{5} & \frac{3}{5} & 1 \end{array}\right]$$

คูณแถวที่ 3 ด้วย $\frac{5}{12}$ ได้แถวที่ 3 ใหม่ คูณอีกครั้งด้วย $\frac{-3}{5}$ แล้วบวกกับแถวที่ 2 และคูณแถวที่ 3 ใหม่อีกครั้งด้วย $\frac{-1}{5}$ แล้วบวกกับแถวที่ 1 ได้

$$\left|\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & \frac{5}{12} & \frac{-3}{12} & \frac{-1}{12} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{3}{12} & \frac{3}{12} & \frac{-3}{12} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{-1}{12} & \frac{3}{12} & \frac{5}{12} \end{array}\right)$$

ดังนั้น เมทริกซ์ผกผัน คือ

$$A^{-1} = \frac{1}{12}\begin{pmatrix} 5 & -3 & -1 \\ 3 & 3 & -3 \\ -1 & 3 & 5 \end{pmatrix}$$

10.16 ดีเทอร์มิแนนท์ของเมทริกซ์

ถ้าให้ A เป็น $n \times n$ เมทริกซ์ ซึ่งเลขจำนวนในแถวที่ i และหลักที่ j เป็น a_{ij} แล้ว ดีเทอร์มิแนนท์ของ A หรือ

$$\det A = \sum_{i=1}^{n} a_{i1} A_{i1}$$

โดย A_{i1} เป็นแฟคเตอร์ร่วม (cofactor) ของ a_{i1} ที่กำหนดเท่ากับ $(-1)^{i+1}$ คูณกับเมทริกซ์ย่อยของ A ที่คำนวณได้เมื่อลบแถวที่ i และ หลักที่ 1 แล้ว เช่น

$$\det\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & -3 \\ -3 & 2 & 1 \end{pmatrix} = 1\,A_{11} + 2\,A_{21} - 3\,A_{31}$$

$$= \det\begin{bmatrix} 1 & -3 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} - 2\det\begin{bmatrix} 6 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} - 3\det\begin{bmatrix} 6 & 1 \\ 1 & -3 \end{bmatrix}$$

$$= 1\,(1 + 6) - 2\,(0 - 2) - 3\,(0 - 1)$$

$$= 14$$

สรุป ความสำคัญเกี่ยวกับดีเทอร์มิแนนท์ของเมทริกซ์จัตุรัส

1. **นิยามข้างต้นของดีเทอร์มิแนนท์ A ได้ใช้หลักที่ 1 เป็นเกณฑ์ในการคำนวณ det A ในกรณีทั่วไปจะใช้แถวหรือหลักที่เท่าใดก็ได้เป็นเกณฑ์ในการคำนวณ det A นั่นคือ**

$$\det A = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} A_{ij} \quad \text{สำหรับ } j = 1, 2, 3, \ldots\ldots\ldots, n$$

หรือ

$$\det A = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} A_{ij} \quad \text{สำหรับ } i = 1, 2, 3, \ldots\ldots\ldots, n$$

โดย A_{ij} ป็นแฟคเตอร์ร่วม ของ a_{ij} ที่กำหนดให้เท่ากับ $(-1)^{i+j}$ คูณกับดีเทอร์มิแนนท์ของเมทริกซ์ย่อย A ที่คำนวณได้เมื่อลบแถวที่ i และหลักที่ j แล้ว

2. $\det A = \det A^T$

3. ถ้าเมทริกซ์ B ได้จากการเปลี่ยนที่ระหว่างแถวสองแถว (หรือระหว่างหลักสองหลัก) ของเมทริกซ์ A แล้ว $\det B = -\det A$

4. ถ้า เมทริกซ์ B ได้จากการคูณค่าคงที่เข้ากับแถว ๆ หนึ่ง (หรือหลัก ๆ หนึ่ง) แล้วบวกกับอีกแถวหนึ่ง (หรืออีกหลักหนึ่ง) ของ เมทริกซ์ A แล้ว

$$\det B = \det A$$

5. ถ้า เมทริกซ์ B ได้จากการคูณแถว ๆ หนึ่ง (หรือหลัก ๆ หนึ่ง) ด้วยสเกลาร์ k แล้ว

$$\det B = k \det A$$

6. ถ้าแบ่ง เมทริกซ์ A เป็น

$$A = \left[\begin{array}{c|c} B & O \\ \hline D & C \end{array}\right]$$

โดย B และ C เป็นสแควร์ เมทริกซ์ แล้ว

$$\det A = \det B \cdot \det C$$

7. ถ้า A และ B เป็น $n \times n$ เมทริกซ์ แล้ว

$$\det (AB) = \det A \cdot \det B$$

8. $\det A \neq O$ ก็ต่อเมื่อแถว (และหลัก) ของ A เป็นอิสระเชิงเส้นต่อกัน และ $\det A = O$ ก็ต่อเมื่อแถว (และหลัก) ของ A ไม่เป็นอิสระเชิงเส้นต่อกัน ดังนั้น สแควร์เมทริกซ์ A มีเมทริกซ์ผกผัน A^{-1} ก็ต่อเมื่อ $\det A \neq O$

9. ถ้า A เป็น $n \times n$ เมทริกซ์ ซึ่ง $\det A \neq O$ แล้ว

$$A^{-1} = \frac{\text{Adj } A}{\det A}$$

โดย Adj A เรียกว่า Adjoint matrix ของ A และมีรูป

$$\text{adj } A = \begin{bmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{21} & \cdots & \alpha_{n1} \\ \alpha_{12} & \alpha_{22} & \cdots & \alpha_{n2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \alpha_{1n} & \alpha_{2n} & \cdots & \alpha_{nn} \end{bmatrix}$$

โดย α_{ij} เป็นแฟคเตอร์ร่วมของ a_{ij}

เช่น ถ้า $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$, $\text{adj } A = \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$

หรือ ถ้า $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 4 \\ 1 & 4 & 3 \end{bmatrix}$

$$\text{adj } A = \begin{bmatrix} \begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 4 & 3 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 3 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 3 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} -7 & 6 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

10.17 ระบบสมการเชิงเส้นในรูป

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n &= b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n &= b_2 \\ \vdots \qquad \vdots \qquad\qquad \vdots \quad &\;\; \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n &= b_m \end{aligned}$$

จะมี $\quad x_j = \frac{\det A_j}{\det A}$ สำหรับ $j = 1, 2, \cdots, n$

ถ้า $\det A \neq O$ และ A_j ได้จาก A โดยการแทนหลักที่ j ของ A ด้วย $(b_1, b_2, \quad , b_m)$

กฎการแก้สมการโดยวิธีนี้เรียกว่า กฎของเครเมอร์ (Cramer s Rute)

10.18 บัญหาการกำหนดโปรแกรมเชิงเส้น

(LINEAR PROGRAMMING PROBLEM)

การหาค่าต่ำสุด หรือค่าสูงสุดจากพังก์ชันเชิงเส้น ซึ่งมีเงื่อนไขในรูปสมการ หรือ (และ) อสมการเชิงเส้น เรียกว่า บัญหาการกำหนดโปรแกรมเชิงเส้น

สำหรับบัญหาการกำหนดโปรแกรมเชิงเส้นซึ่งให้หาค่าต่ำสุดของพังก์ชัน

$$Z = c_1x_1 + c_2x_2 + \cdots + c_nx_n$$

ที่มีเงื่อนไข

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots a_{1n}x_n &> b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots a_{2n}x_n &> b_2 \\ \vdots \qquad \vdots \qquad \vdots \quad &\quad \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n &> b_m \end{aligned}$$

และ $\quad x_1, x_2, \cdots, x_n > O$

พังก์ชัน $\quad Z = c_1x_1 + c_2x_2 + \cdots + c_nx_n$ เรียกว่า พังก์ชันจุดประสงค์ (objective function)

$c_1, c_2, \cdots, c_n$ เรียกว่า ค่าสัมประสิทธิ์ต้นทุน (cost coefficients)

$x_1, x_2, \cdots, x_n$ เรียกว่า ตัวแปรตัดสิน (decision variables)

และสำหรับ

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j > b_i$$ คือเงื่อนไขแถวที่ i

ซึ่งมี a_{ij}, $\{ i = 1, 2, \cdots m$ และ $j = 1, 2, \cdots n \}$ **เป็นสัมประสิทธิ์ที่เขียนในรูปเมทริกซ์ได้เป็น**

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

ชุดของตัวแปร x_1 , x_2 , ... x_n ที่ทำให้เงื่อนไขเป็นจริงเรียกว่า จุดที่เป็นไปได้ (feasible point) และเซ็ตของจุดทั้งหลายเหล่านี้จะทำให้เกิดขอบเขตคำตอบที่เป็นไปได้ (feasible vegion)

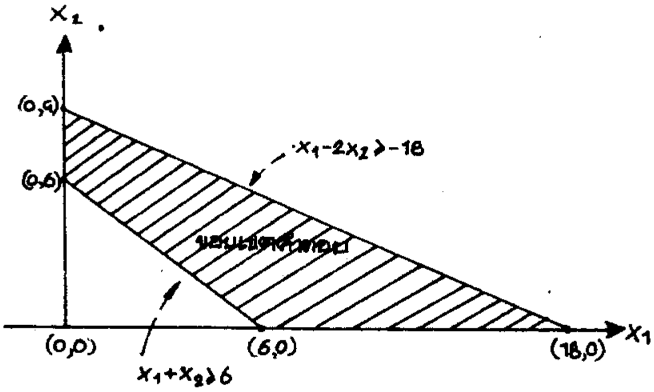
ตัวอย่าง 10.18.1 จงหาค่าต่ำสุดของฟังก์ชัน $z = 2x_1 + 5x_2$

ที่มีเงื่อนไข $x_1 + x_2 > 6$

$- x - 2x_2 > - 18$

และ $x_1 , x_2 > 0$

ในที่นี้ มีตัวแปรตัดสินใจ x_1 และ x_2 มีฟังก์ชันจุดประสงค์เป็น $2x_1 + 5x_2$ ส่วนเงื่อนไขและขอบเขตคำตอบที่เป็นไปได้แสดงได้ดังภาพ



ข้อสมมุติฐานในการกำหนดโปรแกรมเชิงเส้น

การกำหนดปัญหาการหาค่าสูงสุด (ต่ำสุด) ในรูปโปรแกรมเชิงเส้น จำเป็นต้องมีข้อสมมุติฐานต่าง ๆ ดังนี้

1. สมมุติฐานเกี่ยวกับสัดส่วน ระบุว่า ถ้ากำหนดตัวแปร x_j ใด ๆ จะต้องมีผลถึงต้นทุนเป็น c_jx_j และเงื่อนไขที่ i เป็น $a_{ij}x_j$ ซึ่งหมายถึงว่า ถ้า x_j เพิ่มเป็นสองเท่า ผลอันนี้จะต้องส่งถึงต้นทุน และเงื่อนไขด้วย เช่น ถ้า x_i เป็นจำนวนกิจการเท่ากับ 10 แล้วต้นทุนของกิจการนี้จะเป็น $10c_j$ หรือถ้า $x_j = 20$ แล้วต้นทุนจะต้องเป็น $20c_j$ ดังนี้

2. **สมมุติฐานเกี่ยวกับผลรวม** กำหนดว่าต้นทุนรวมต้องเท่ากับผลบวกของต้นทุนย่อย และผลรวมทั้งหมดต่อเงื่อนไขที่ i เท่ากับผลรวมของแต่ละ Contributions ของแต่ละกิจการ

3. สมมุติฐานเกี่ยวกับการหาร กำหนดว่าสามารถจะหารตัวแปรตัดสินใจเป็นค่าเศษส่วน

10.19 สมการ กับ อสมการ

อสมการสามารถแปลงรูปเป็นสมการได้ เช่น เงื่อนไขในรูปอสมการ

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_i > b_i$$

จะแปลงรูปเป็นสมการได้ด้วยการลบออกด้วยตัวแปรเฉื่อย (slack variable) x_{n+i} (บางครั้งอาจแทนด้วย S_i) นั่นคือ

$$\sum_{i=1}^{n} a_{ij} x_j - x_{n+i} = b_i \qquad \text{สำหรับ } x_{r+i} \geqslant O$$

ในทำนองเดียวกัน อสมการ $\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \leqslant b_i$ จะเปลี่ยนเป็นสมการได้ ในรูป

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j + x_{n+i} = b_i \qquad \text{สำหรับ } x_{n+i} > O$$

เช่นเดียวกัน สมการ $\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j = b_i$

สามารถแปลงเป็นอสมการ $\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \leqslant b_i$

และ $\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j > b_i$

10.20 ปัญหาการหาค่าต่ำสุด กับค่าสูงสุด

ปัญหาการหาค่าต่ำสุด **สามารถเปลี่ยนเป็นปัญหาการหาค่าสูงสุดและเช่นเดียวกัน** ปัญหาการหาค่าสูงสุด สามารถเปลี่ยนเป็นปัญหาการหาค่าต่ำสุดได้ ทั้งนี้เพราะว่า

$$\text{ค่าสูงสุด} \sum_{j=1}^{n} c_j x_j = -\left[\text{ค่าต่ำสุด} \sum_{j=1}^{n} -c_j x_j\right]$$

ดังนั้น ปัญหาการหาค่าสูงสุด (ค่าต่ำสุด) จะเปลี่ยนเป็นปัญหาการหาค่าต่ำสุด (ค่าสูงสุด) ด้วยการคูณสัมประสิทธิ์ของฟังก์ชันจุดประสงค์โดย -1 และเมื่อหาคำตอบของปัญหาใหม่ได้แล้ว จงคูณกลับด้วย -1 ได้คำตอบที่ต้องการ

10.21 แบบ (FORMATS) ของปัญหาการกำหนดโปรแกรมเชิงเส้น

แบบของปัญหาการกำหนดโปรแกรมเชิงเส้น มี 2 แบบ ที่เน้นประโยชน์คือ แบบมาตรฐาน (Standard Form) และแบบง่าย (Canonical Form) โดยแบบมาตรฐานจะมีเงื่อนไขเป็นสมการ และตัวแปรทั้งหมดไม่เป็นลบ ส่วนแบบง่ายสำหรับปัญหาการหาค่าต่ำสุดจะมีตัวแปรทั้งหมดไม่เป็นลบ แต่เงื่อนไขเป็นแบบมากกว่าหรือเท่ากับและในทางกลับกันสำหรับปัญหาการหาค่าสูงสุดมีเงื่อนไขเป็นแบบน้อยกว่าหรือเท่ากับ สรุปได้ดังตารางต่อไปนี้

ปัญหาค่าต่ำสุด	ปัญหาค่าสูงสุด
แบบมาตรฐาน ปัญหาค่าต่ำสุดของ $\sum_{j=1}^{n} c_j x_j$ ซึ่งขึ้นกับเงื่อนไข $\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j = b_j,\ i = 1, 2, \ldots, m$ $x_j \geq 0,\ j = 1, 2, \ldots, n$	 จงหาค่าสูงสุดของ $\sum_{j=1}^{n} c_j x_j$ ซึ่งมีเงื่อนไข $\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j = b_i,\ i = 1, 2, \ldots, m$ $x_j \geq 0,\ j = 1, 2, \ldots, n$
แบบง่าย จงหาค่าต่ำสุด $\sum_{j=1}^{n} c_j x_j$ ซึ่งขึ้นกับเงื่อนไข $\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \geq b_i,\ i = 1, 2, \ldots,$ $x_j \geq 0,\ j = 1, 2, \ldots, n$	 จงหาค่าสูงสุดของ $\sum_{j=1}^{n} c_j x_j$ ซึ่งมีเงื่อนไข $\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \leq b_i,\ i = 1, 2, \ldots, m$ $x_j \geq 0,\ j = 1, 2, \ldots, n$

10.22 การเขียนปัญหาโปรแกรมเชิงเส้นในรูปเมทริกซ์

ปัญหาการกำหนดโปรแกรมเชิงเส้น เขียนได้ในรูปสัญญลักษณ์เมทริกซ์ดังต่อไปนี้

สำหรับการหาค่าต่ำสุด $\sum_{j=1}^{n} c_j x_j$

ซึ่งมีเงื่อนไข $\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j = b_i,\ i = 1, 2, \ldots, m$

$$x_j > 0,\ j = 1, 2, \ldots, n$$

ถ้าให้เวคเตอร์แถว $C = (c_1, c_2, \ldots, c_n)$

เวคเตอร์หลัก X และ B เป็น

$$X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}$$

และ A เป็น $m \times n$ เมทริกซ์

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

ปัญหาการหาค่าต่ำสุดข้างต้นจะเขียนได้ในรูป

จงหาค่าต่ำสุดของ CX

ซึ่งมีเงื่อนไข $AX = B$

$$X > 0$$

10.23 วิธีการกำหนดปัญหาต่าง ๆ ในรูปโปรแกรมเชิงเส้น

มีปัญหาจำนวนมากที่สามารถกำหนดรูปเป็นแบบโปรแกมเชิงเส้น เช่น

ปัญหาการผสมอาหารเลี้ยงสัตว์

โรงงานผสมอาหารไก่แห่งหนึ่ง ผสมข้าวโพด หญ้าอัลฟัลฟา และอื่น ๆ โดยต้องการให้อาหารมีคุณค่าทางโภชนาการ เช่น โปรตีน, แคลเซียม, คาร์โบไฮเดรต และไวตามิน สมมุติว่า ถ้ามีส่วนผสม n ประเภท $j = 1, 2, \ldots, n$ และมีคุณค่าอาหาร m ชนิด $i = 1, 2, \ldots, m$ มีต้นทุนต่อหน่วยของอาหาร j เป็น c_j และปริมาณอาหาร j ที่ใช้ผสมเป็น x_j

ดังนั้นต้นทุนคือ

$$\sum_{j=1}^{n} c_j x_j$$

ถ้ากำหนดเพิ่มเติมว่าปริมาณอาหารที่ต้องการทั้งหมดเป็น b จะได้ $\sum_{j=1}^{n} x_j = b$

และถ้าคุณค่าอาหาร i ที่มีในอาหาร j หนึ่งหน่วยเป็น a_{ij} โดยบังคับคุณค่าอาหาร i ในอาหารไก่หนึ่งหน่วยมีขีดจำกัดไม่ต่ำกว่า l_i และไม่เกิน u_i

จะทำให้ได้เงื่อนไข $l_i b \leq \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \leq u_i b$ สำหรับ $i = 1, 2, \ldots, m$

และเพราะอาหารไก่ขาดแคลนทำให้
โรงงานได้รับอาหาร j ไม่มากกว่า v_j หน่วย

จากข้อมูลและเงื่อนไขต่าง ๆ เหล่านี้ จะสามารถ**กำหนดปัญหาการผสมอาหารให้เสียค่าใช้จ่ายต่ำสุดและเป็นไปตามเงื่อนไข** ในรูปโปรแกรมเชิงเส้นได้ดังนี้คือ

หาค่าต่ำสุดของ $c_1 x_1 + c_2 x_2 + \cdots + c_n x_n$

ซึ่งมีเงื่อนไข $x_1 + x_2 + \cdots x_n = b$

$$\begin{aligned}
bl_1 &\leq a_{11} x_1 + a_{12} x_2 + \cdots + a_{1n} x_n \leq bu_1 \\
bl_2 &\leq a_{21} x_1 + a_{22} x_2 + \quad\;\; + a_{2n} x_n \leq bu_2 \\
&\;\;\vdots \\
bl_m &\leq a_{m1} x_1 + a_{m2} x_2 + \cdots + a_{mn} x_n \leq bu_m
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
0 &\leq x_1 \leq v_1 \\
0 &\leq x_2 \leq v_2 \\
&\;\;\vdots \\
0 &\leq x_n \leq v_n
\end{aligned}$$

ปัญหาการขนส่ง

บริษัทผลิตกาแฟแห่งหนึ่งมีโรงงานผลิต m แห่ง และส่งกาแฟทุกสัปดาห์ ไปคลังเก็บ n แห่ง เพื่อขายส่งต่อไป ถ้าจำนวนกาแฟที่ส่งจากโรงงาน i ไปยังคลัง j เป็น c_{ij} และถ้าโรงงาน i เก็บกาแฟได้จำนวน a_i ในขณะที่คลัง j มีความต้องการกาแฟเป็นจำนวน b_j ปัญหาที่เกิดขึ้นก็คือทำอย่างไรจึงจะทำให้ต้นทุนการขนส่งสินค้าจากโรงงานไปยังคลังเก็บมีค่าต่ำสุด นั่นคือ

การหาค่าต่ำสุดของ $\sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} c_{ij} x_{ij}$

ซึ่งมีเงื่อนไข $\sum_{j=1}^{n} x_{ij} \leq a_i \quad i = 1, 2, \ldots, m$

$$\sum_{i=1}^{m} x_{ij} \leq b_j \quad j = 1, 2, \ldots, n$$

$$x_{ij} > 0 \quad i = 1, 2, \ldots, m; \; j = 1, 2, \ldots, n$$

ปัญหาการจัดงบประมาณ

โครงการก่อสร้างแห่งหนึ่งจำเป็นจะต้องใช้จ่ายในช่วง 4 ปี เป็นเงิน 2 ล้านบาท 4 ล้านบาท 8 ล้านบาท และ 5 ล้านบาทตามลำดับ และค่าใช้จ่ายเหล่านี้คิดเมื่อเริ่มต้นปีใหม่ คณะกรรมการตั้งใจจะขายพันบัตรเงินกู้ระยะยาว เพื่อให้ได้เงินมาดำเนินตามโครงการ โดยจ่ายคืนเมื่อครบกำหนดในวันเดียวกันไม่ว่าจะได้ขายพันธบัตรเมื่อใด อัตราดอกเบี้ยสำหรับพันธบัตรระยะยาว (นั่นคือราคาของการขายพันธบัตร) ใน 4 ปี จะเป็น 7%, 6%, 6.5% และ 7.5% ตามลำดับ ดอกเบี้ยพันธบัตรจะเริ่มจ่ายหนึ่งปีหลังจากโครงการสำเร็จ และจะจ่ายเป็นเวลา 20 ปี แล้วจ่ายคืนหมด ในช่วงเวลาเดียวกันนี้ อัตราดอกเบี้ยระยะสั้นตามเวลาเงินฝาก (Time deposits) (นั่นคือสิ่งที่คณะกรรมการจะหาได้มาจากเงินฝาก) เป็น 6% , 5.5% และ 4.5% ตามลำดับ (แน่นอนว่าคณะกรรมการจะต้องไม่นำเงินลงทุนสำหรับเงินฝากระยะสั้นในระหว่างปีที่ 4) ปัญหาคือคณะกรรมการจะดำเนินการอย่างไรให้ได้ประโยชน์สูงสุดสำหรับการขายพันธบัตร และการฝากเงินทุน เพื่อให้สำเร็จตามโครงการก่อสร้าง

การกำหนดปัญหาเช่นนี้ในรูปโปรแกรมเชิงเส้น ให้ x_j, $j = 1, 2, 3, 4$ เป็นจำนวนพันธบัตรที่ขายเมื่อเริ่มแต่ละปี j เมื่อขายพันธบัตรได้ เงินบางส่วนจะถูกนำไปใช้ในการก่อสร้างทันที ในขณะที่บางส่วนจะถูกนำไปฝากระยะสั้นเพื่อใช้ในปีต่อไป ให้ y_j, $j = 1, 2, 3$ เป็นเงินที่ฝากแบบ time deposits เมื่อเริ่มแต่ละปี j

พิจารณาตอนเริ่มต้นปีแรก จำนวนพันธบัตรที่ขายได้ ลบด้วย จำนวนที่ได้จาก time deposits จะถูกใช้ไปในโครงการของปีนั้น

นั่นคือ $x_1 - y_1 = 2$

(อาจจะใช้เครื่องหมาย "$\geq$" ก็ได้ แต่ในกรณีนี้ทุนส่วนที่เกินจะต้องนำฝาก ดังนั้นจึงใช้เครื่องหมายเท่ากับ)

เมื่อเริ่มปีที่ 2 นอกจากพันธบัตรที่ขายและส่วนที่ได้จาก time deposits แล้วก็มี time deposits กับดอกเบี้ยที่ได้จากปีก่อน

ดังนั้น

$$1.06\ y_1 + x_2 - y_2 = 4$$

สำหรับปีที่ 3 และ 4 จะคิดในแบบเดียวกันนี้

เนื่องจากค่าการขายพันธบัตรต่อหน่วยเท่ากับ 20 เท่าของอัตราดอกเบี้ย ดังนั้นสำหรับพันธบัตรที่ขายเมื่อเริ่มต้นปีแรกจะได้ว่า $c_1 = 20\ (0.07)$ และสำหรับ c_2, c_3, c_4 หาได้ทำนองเดียวกัน

เพราะฉะนั้น ปัญหาการกำหนดโปรแกรมเชิงเส้นจะอยู่ในรูป

จงหาค่าต่ำสุดของ $20\ (0.07)\ x_1 + 20\ (0.06)\ x_2 + 20\ (0.065)\ x_3 + 20\ (0.075)\ x_4$

ซึ่งมีเงื่อนไข

$$\begin{aligned} x_1 - y_1 &= 2 \\ 1.06\ y_1 + x_2 - y_2 &= 4 \\ 1.055\ y_2 + x_3 - y_3 &= 8 \\ 1.045\ y_3 + x_4 &= 5 \\ x_1, x_2, x_3, x_4, y_1, y_2, y_3 &\geqslant 0 \end{aligned}$$

10.24 คำตอบเชิงเรขาคณิต (Geometric Solution)

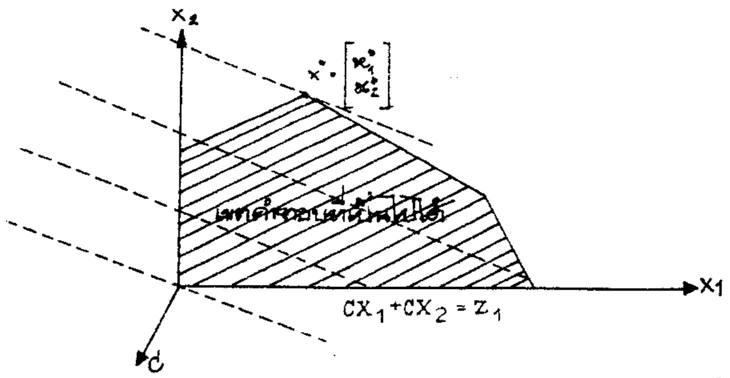
ในหัวข้อนี้จะแสดงให้เห็นกรรมวิธีเชิงเรขาคณิตในการแก้ปัญหาโปรแกรมเชิงเส้น ซึ่งแม้ว่าจะเหมาะสมกับปัญหาที่ไม่กว้างขวางมาก แต่ก็ทำให้สามารถเข้าใจแนวทางการแก้ปัญหาโปรแกรมเชิงเส้นได้ดี

พิจารณาการหาค่าต่ำสุดของ $Z = CX$

ซึ่งมีเงื่อนไข $AX \geqslant B$

และ $X > 0$

จะสังเกตเห็นว่าขอบเขตคำตอบที่เป็นไปได้ประกอบด้วยเวคเตอร์ X ซึ่งทำให้สมการ $AX > B$ และ $X \geqslant 0$ เป็นจริง ในกลุ่มของจุดทั้งหลายเหล่านี้จะมีจุดหนึ่งที่ทำให้ได้ค่าต่ำสุดของ CX เพราะว่าจะต้องหาค่าต่ำสุดของ Z แนวเส้น $\sum_{j=i}^{n} c_j x_j = Z$ จะต้องเคลื่อนที่ในแนวขนานกับระนาบ Z ไปตามทิศทางที่ทำให้ CX มีค่าต่ำสุด ซึ่งทิศทางนี้คือ $-C$ ดังภาพ



จะเห็นว่าเมื่อถึงจุดคำตอบ X^* เส้น $c_1x_1 + c_2x_2 = Z^*$ ที่มี $Z^* = c_1x_1^* + c_2x_2^*$ จะไม่สามารถเคลื่อนที่ต่อไปตามแนวทิศทาง $-C = (-c_1, -c_2)$ อีก เพราะว่าจะออกนอกเขตคำตอบ ดังนั้น จึงสรุปได้ว่า X^* เป็นจุดที่ต้องการ (สำหรับปัญหาการหาค่าสูงสุด แนวเส้น $Z = CX$ จะต้องเคลื่อนที่ขนานกับระยะทาง Z ไปตามทิศทาง C)

กรรมวิธีเช่นนี้ใช้ได้สะดวกสำหรับปัญหาซึ่งมี 2 ตัวแปร และไม่เหมาะสมที่จะใช้กับปัญหาที่มีมากกว่า 3 ตัวแปร ส่วน X^* ในที่นี้เป็นจุดที่มุม ๆ หนึ่งใน 5 มุม ที่เรียกว่าจุดปลาย (extreme points) ซึ่งสำหรับปัญหาโปรแกรมเชิงเส้นที่มีคำตอบจำนวนจำกัดนั้น จะต้องมีจุดปลายเหล่านี้

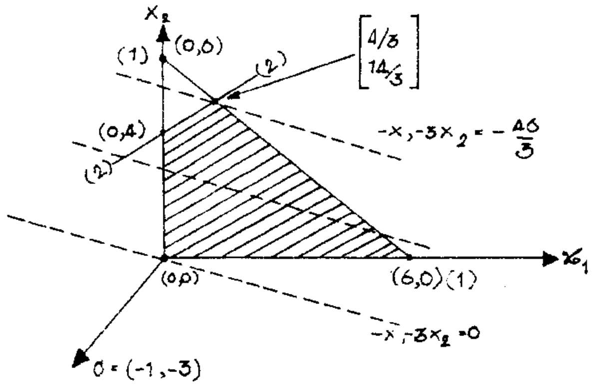
ตัวอย่าง 10.24.1 จงหาค่าต่ำสุดของ $Z = -x_1 - 3x_2$.

ซึ่งมีเงื่อนไข $x_1 + x_2 \leq 6$

$$-x_1 + 2x_2 \leq 8$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$

วิธีทำ ขอบเขตคำตอบที่เป็นไปได้ปรากฏในภาพ



เงื่อนไข $x_1 + x_2 \leq 6$ และ $-x_1 + 2x_2 \leq 8$ แทนได้ด้วยจุดที่อยู่ต่ำกว่าเส้น (1) และ (2) และ $x_1, x_2 \geq 0$ ทำให้ได้เฉพาะจุดที่อยู่ในควอดแรนท์แรก สำหรับสมการ $-x_1 - 3x_2 = Z$ เรียกว่า OBJECTIVE CONTOURS และแทนได้ด้วยเส้นประ ซึ่งเคลื่อนที่ไปในทิศทาง $-C = (1, 3)$ ผ่านจุด (0,0) ขนานกับระนาบ Z ไปจนถึงจุดแห่งคำตอบ $\left(\frac{4}{3}, \frac{14}{3}\right)$

10.25 การหาคำตอบโดยวิธีคำนวณ (Simplex method)

ตัวอย่าง 10.25.1 จงหาค่าสูงสุดของ $Z = 1.2x + 1.4y$ (1)

ซึ่งมีเงื่อนไข $40x + 25y \leq 1000$ (2)

$$35x + 28y \leq 980 \quad (3)$$

$$25x + 35y \leq 875 \quad (4)$$

และ $x \geq 0, \; y \geq 0$ (5)

วิธีทำ เพื่อให้ง่ายขึ้น เปลี่ยนอสมการเป็นสมการโดยเพิ่มตัวแปรเฉื่อย $u, v, w > 0$ นั่นคือ

$$40x + 25y + u = 1000 \qquad (6)$$

$$35x + 28y + v = 980 \qquad (7)$$

$$25x + 35y + w = 875 \qquad (8)$$

กรรมวิธีเริ่มด้วยการหาคำตอบที่เป็นไปได้แล้วทดสอบว่าเป็นคำตอบที่ให้ค่าสูงสุดหรือไม่ถ้าไม่เป็นคำตอบที่ถูกต้อง จะใช้วิธีปรับคำตอบให้ดีขึ้นจนได้คำตอบที่ต้องการ ซึ่งในตัวอย่างนี้มีวิธีการอยู่ 4 ขั้นตอน

1. คำตอบที่เห็นได้ชัดอันแรกหาได้โดยให้ $x = y = 0$ จะได้ $u = 1,000$, $v = 980$ และ $w = 875$ คำตอบนี้เปลี่ยนแปลงได้โดยเพิ่มค่า x หรือ y ซึ่งจากฟังก์ชันจุดประสงค์จะเห็นว่าอัตราการเพิ่มของ Z จะมากกว่าถ้าเพิ่มค่า y

2. จะเห็นได้ว่าการเพิ่มค่า y จะทำให้ค่า u, v, w ลดลง และเมื่อเพิ่มค่า y ถึงจุดหนึ่ง u หรือ v หรือ w จะเป็นศูนย์ นั่นคือ จากสมการ (6) ถ้า $y = 40$ $u = 0$ หรือจากสมการ (7) ถ้า $y = 35$, $v = 0$ และจากสมการ (8) ถ้า $y = 25$, $w = 0$

3. ดังนั้นที่ $y = 25$ ได้ $u = 375$, $v = 280$ และ $w = 0$ ซึ่งการคำนวณทำได้ง่ายเพราะว่า

3.1 ฟังก์ชัน Z ไม่มีตัวแปร u, v, และ w

3.2 สมการ (6) — (8) มีตัวแปร u, v, w สมการละ 1 ตัวแปร และมีสัมประสิทธิ์ ของ u, v, w เท่ากับ 1

1. จัดฟังก์ชัน Z และสมการ (6), (7), (8) ใหม่ เพื่อหาค่า Z สูงสุด หารสมการ (8) ด้วย 35 (สัมประสิทธิของ y ใน (8)) ได้

$$\frac{5}{7}x + y + \frac{w}{35} = 25 \qquad (9)$$

ใช้ (9) กำจัด y จาก (6), (7) ได้

$$\frac{155}{7}x + u - \frac{5}{7}w = 375 \qquad (10)$$

$$15x + v - \frac{4}{5}w = 280 \qquad (11)$$

คูณ (9) ด้วย 1.4 แล้วลบออกจาก (1) จะได้

$$Z = 0.2x - 0.04w + 35 \qquad (12)$$

ซึ่งเห็นได้ว่าเฉพาะเมื่อ x เพิ่มจากศูนย์เท่านั้นที่ Z เพิ่ม ส่วนการที่ x จะเพิ่มถึงค่าที่เหมาะสม พิจารณาจาก (9), (10) และ (11) เมื่อหารค่าคงที่ด้านขวามือของสมการด้วยสัมประสิทธิ์ของ x

จะเห็นว่า $x = 35,\ 16\frac{29}{31}$ และ $18\frac{2}{3}$

ซึ่งที่ $x = 16\frac{29}{31}$ จะทำให้ $u = 0,\ y = 12\frac{28}{31},\ v = 25\frac{30}{31}$

หาร (10) ด้วยสัมประสิทธิ์ของ x และย้ายค่าคงที่ได้

$$x + \frac{7}{155}u - \frac{w}{31} - 16\frac{29}{31} = 0 \qquad (13)$$

คูณ (13) ด้วย 0.2 แล้วลบออกจาก (12) ได้

$$Z = -\frac{1.4}{155}u - \frac{26}{775}w + 38\frac{12}{31}$$

ซึ่งสรุปได้ว่าถ้าเพิ่มค่า u หรือ w จะทำให้ค่า Z น้อยลง ดังนั้นค่า Z สูงสุด $(u = w = 0)$ คือ $38\frac{12}{31}$

แบบฝึกหัด

1. จงเขียนชุดของสมการต่อไปนี้ในรูปเมทริกซ์ $AX = B$

1.1
$$4x_1 - x_2 = 3$$
$$x_1 + 2x_2 = 5$$

1.2
$$3x_1 + 4x_2 = 8$$
$$x_1 - x_2 = 3$$
$$-x_1 + 2x_2 = 1$$
$$2x_1 + x_2 = 5$$

1.3
$$x_1 + x_2 - x_3 = 2$$
$$2x_1 - x_2 + x_3 = 3$$
$$x_1 - x_2 = -1$$

1.4
$$ax_1 + bx_2 + cx_3 = r$$
$$bx_1 + cx_2 + dx_3 = s$$
$$cx_1 + dx_2 + ex_3 = t$$

2. จงหาค่าของ x และ y จาก

2.1 $$\begin{bmatrix} 4 & 1 \\ 3 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

2.2 $$\begin{bmatrix} 2 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x & y \\ -y & -x \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 2 \end{bmatrix}$$

3. จงเขียนชุดของระบบสมการจากสมการเมทริกซ์

$$\begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix}$$

4. จงแก้สมการเมทริกซ์ $XB = C$ ถ้ากำหนดให้

$$X = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \end{bmatrix}$$

$$C = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

และ $$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

5. จงใช้วิธีลดรูปของแกสส์ หาค่าของ x, y, z จากชุดสมการต่อไปนี้

5.1 $\begin{aligned} x+y-z &= 0 \\ 2x+y+z &= 7 \\ 3x-y+z &= 7 \end{aligned}$

5.2 $\begin{aligned} x-2y+3z &= 5 \\ 2x-4y+5z &= 8 \\ 3x+y-4z &= 3 \end{aligned}$

5.3 $\begin{aligned} x-y+2z &= 4 \\ 3x+y-z &= 2 \\ 5x-y+3z &= 10 \end{aligned}$

5.4 $\begin{aligned} 2x+4y-z &= -3 \\ 3x-y+z &= 10 \\ 4x+y-2z &= 1 \end{aligned}$

5.5 $\begin{aligned} 3x-y+2z &= 4 \\ x+4y-z &= 3 \\ x-9y+4z &= 3 \end{aligned}$

5.6 $\begin{aligned} 3x-y+z &= 5 \\ 4x+y+2z &= 3 \\ 5x+4y-z &= -2 \end{aligned}$

6. จงหาเมทริกซ์ผกผันของเมทริกซ์ต่อไปนี้

6.1 $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$

6.2 $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}$

6.3 $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 5 \end{pmatrix}$

6.4 $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

6.5 $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 6 & 11 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

6.6 $\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

7. จงเขียนกราฟหาเขตในระนาบ x, y จากอสมการต่อไปนี้

7.1 $\begin{aligned} x+y &< 3 \\ 2x-y &< 2 \end{aligned}$

7.2 $\begin{aligned} x+2y &< 4 \\ x-4 &> -1 \end{aligned}$

7.3 $\begin{aligned} 2x+y &> 3 \\ y-3x &< 1 \end{aligned}$

7.4 $\begin{aligned} 2x+3y &\leq 6 \\ 3x-2y &> 4 \end{aligned}$

8. **จงใช้วิธีเขียนกราฟหาค่าสูงสุด หรือค่าต่ำสุดของฟังก์ชันซึ่งมีเงื่อนไขต่อไปนี้**

8.1 **ฟังก์ชัน** $Z = 4x + 3y$

เงื่อนไข $2x + y \leqslant 10$

$x + y \leqslant 6$

$x \geqslant 0,\ y \geqslant 0$

8.2 **ฟังก์ชัน** $Z = 3x + 4y$

เงื่อนไข $2x + y \leqslant 7$

$3x + y \leqslant 9$

$x \geqslant 0,\ y \geqslant 0$

8.3 **ฟังก์ชัน** $Z = 2x + 3y$

เงื่อนไข $3x + 2y \geqslant 6$

$x + 3y \geqslant 6$

$x \geqslant 0,\ y \geqslant 0$

8.4 **ฟังก์ชัน** $Z = 2x + y$

เงื่อนไข $x + y \geqslant 4$

$-2x + 3y \geqslant 6$

$x \geqslant 0,\ y \geqslant 0$

8.5 **ฟังก์ชัน** $Z = 2x + y$

เงื่อนไข $2x + 2y \leqslant 3$

$4x + y \leqslant 4$

$x + 4y \leqslant 4$

$x \geqslant 0,\ y \geqslant 0$

9. จงหาค่าสูงสุดของ

$$Z = 3x + 2y$$

ซึ่งมีเงื่อนไข

$$4x - 2y \leq 2$$

$$2x + 4y \leq 6$$

$$x \geqslant 0$$

$$y \geqslant 0$$

โดยใช้วิธีเชิงเรขาคณิต (เขียนกราฟ หาเขตคำตอบที่เป็นไปได้ และหาในเขตคำตอบที่ทำให้ z มีค่าสูงสุด)

10. จงใช้วิธีคำนวณ (Simplex method) แก้ปัญหากำหนดโปรแกรมเชิงเส้นซึ่งมีฟังก์ชัน

$$z = 2x + 3y$$

และเงื่อนไข

$$2x + y \leq 10$$

$$x + y < 6$$

$$x > 0, \ y > 0$$

(เริ่มจากมุม $x = 0, \ y = 0$)

11. จงใช้วิธีคำนวณ แก้ปัญหาการกำหนดโปรแกรมเชิงเส้นซึ่งมีฟังก์ชัน

$$z = 2x + y$$

และเงื่อนไข

$$2x + 2y \leqslant 3$$

$$4x + y \leq 4$$

$$x + 4y \leq 4$$

$$x > 0, \ y > 0$$

12. จงใช้วิธีคำนวณ แก้ปัญหาการกำหนดโปรแกรมเชิงเส้น ซึ่งมีฟังก์ชัน

$$Z = 3x + 4y$$

และเงื่อนไข

$$2x + y \leqslant 7$$

$$3x + y \leqslant 9$$

$$x > 0, \ y > 0$$