บทที่ 8
เทคนิคในการอินทิเกรต

ข้อสรุป 8.1 ในการหาปฏิยานุพันธ์ของฟังก์ชันถูกอินทิเกรตนั้น หาได้โดยใช้เทคนิคของการอินทิเกรต ซึ่งอาศัยสูตรพื้นฐานดังต่อไปนี้

$$\int du = u + c$$

$$\int adu = au + c$$ เมื่อ a เป็นค่าคงที่

$$\int [f(u) + g(u)]du = \int f(u)du + \int g(u)du$$

$$\int u^n du = \frac{u^{n+1}}{n+1} + C, \ n \neq -1$$

$$\int \frac{du}{u} = \ln|u| + C$$

$$\int a^u du = \frac{a^u}{\ln a} + C$$

$$\int e^u du = e^u + C$$

เทคนิคของการอินทิเกรตมีหลายวิธี จะใช้วิธีใดนั้นขึ้นอยู่กับลักษณะของฟังก์ชันในหัวข้อต่อไปนี้

ข้อสรุป 8.2 **การอินทิเกรตทีละส่วน** (Integration by parts) เป็นวิธีหนึ่งของเทคนิคของการอินทิเกรต

ลักษณะของฟังก์ชัน : เป็นรูปของผลคูณของสองฟังก์ชัน เช่น โพลิโนเมียลฟังก์ชัน กับเอ็กซ์โปเนนเชียลฟังก์ชัน เป็นต้น

รูปสูตร : $\int udv = uv - \int vdu$

วิธีการใช้สูตร : สมมุติ u และ dv ที่เหมาะสม โดย

เลือก dv ให้อินทิเกรตหาค่า v ได้ง่าย

เลือก u ให้เป็นฟังก์ชันที่สามารถหาอนุพันธ์เป็นรูปอย่างง่ายได้

เฉลยแบบฝึกหัด 8.2

1. **โจทย์** จงหาค่าของ $\int x e^{3x} dx$

วิธีทำ ให้ $u = x$, $dv = e^{3x}dx = \frac{1}{3} e^{3x} d(3x)$

$du = dx \quad v = \frac{1}{3} e^{3x}$

$$\therefore \int x e^{3x} dx = \frac{1}{3} x e^{3x} - \frac{1}{3} \int e^{3x} dx$$

$$= \frac{1}{3} x e^{3x} - \frac{1}{9} e^{3x} + C$$

$$= \frac{1}{9} e^{3x} (3x-1) + C$$

Ans.

2. **โจทย์** จงหาค่าของ $\int x 3^x dx$

วิธีทำ ให้ $u = x$, $dv = 3^x dx$

$du = dx \quad v = \frac{3^x}{\ln 3}$

$$\therefore \int x 3^x dx = x \cdot \frac{3^x}{\ln 3} - \int \frac{3^x}{\ln 3} dx$$

$$= x \cdot \frac{3^x}{\ln 3} - \frac{1}{\ln 3} \int 3^x dx$$

$$= x \cdot \frac{3^x}{\ln 3} - \frac{3^x}{(\ln 3)^2} + C$$

$$= \frac{3^x}{\ln 3} \left(x - \frac{1}{\ln 3}\right) + C$$

Ans.

3. **โจทย์** จงหาค่าของ $\int \ln x \, dx$

วิธีทำ ให้ $u = \ln x$, $dv = dx$

$du = \frac{1}{x} dx \quad v = x$

$$\therefore \int \ln x \, dx = x \ln x - \int x \cdot \frac{1}{x} dx$$

$$= x \ln x - x + C$$

$$= x(\ln x - 1) + C$$

Ans.

4. **โจทย์** **จงหาค่าของ** $\int x^2 \ln x\, dx$

วิธีทำ ให้ $u = \ln x$, $dv = x^2 dx$

$du = \frac{1}{x} dx \quad v = \frac{x^3}{3}$

$$\therefore \int x^2 \ln x\, dx = \frac{x^3}{3} \ln x - \int \frac{x^3}{3} \cdot \frac{1}{x} dx$$

$$= \frac{x^3}{3} \ln x - \frac{1}{3} \int x^2 dx$$

$$= \frac{x^3}{3} \ln x - \frac{1}{3} \cdot \frac{x^3}{3} + C$$

$$= \frac{x^3}{9} (3\ln x - 1) + C$$

Ans.

5. **โจทย์** **จงหาค่าของ** $\int (\ln x)^2 dx$

วิธีทำ ให้ $u = (\ln x)^2$, $dv = dx$

$du = 2(\ln x)\, d(\ln x), v = x$

$= 2(\ln x) \cdot \frac{1}{x} dx$

$$\therefore \int (\ln x)^2 dx = x(\ln x)^2 - \int x \cdot 2(\ln x) \frac{1}{x} dx$$

$$= x(\ln x)^2 - 2\int \ln x\, dx$$

$= x(\ln x)^2 - 2x(\ln x - 1) + C$ (แทนค่า $\int \ln x\, dx$ **จากข้อ** 3)

$$= x(\ln x)^2 - 2x \ln x + 2x + C$$

Ans.

6. **โจทย์** **จงหาค่าของ** $\int x\, a^x\, dx$

วิธีทำ ให้ $u = x$, $dv = a^x dx$

$du = dx \quad v = \frac{a^x}{\ln a}$

$$\therefore \int x\, a^x dx = \frac{xa^x}{\ln a} - \frac{1}{\ln a} \frac{a^x}{\ln a} + C$$

$$= \frac{xa^x}{\ln a} - \frac{a^x}{(\ln a)^2} + C$$

Ans.

7. **โจทย์** **จงหาค่าของ** $\int \frac{xe^x}{(x+1)^2} dx$

วิธีทำ ให้ $u = \frac{e^x}{x+1}$

$$du \Rightarrow \frac{(x+1)\,d(e^x) - e^x d(x+1)}{(x+1)^2}$$

$$= \frac{[e^x(x+1) - e^x]\,dx}{(x+1)^2}$$

$$= \frac{xe^x}{(x+1)^2}\,dx$$

$$\therefore \int \frac{xe^x}{(x+1)^2}\,dx = \int du$$

$$= u + C$$

$$= \frac{e^x}{x+1} + C$$

Ans.

8. **โจทย์** จงหาค่าของ $\int (\ln x)^3\,dx$

วิธีทำ ให้ $u = (\ln x)^3$, $dv = dx$, $v = x$

$$du = 3(\ln x)^2\,d(\ln x)$$

$$= 3(\ln x)^2\,\frac{1}{x}\,dx$$

$$\therefore \int (\ln x)^3\,dx = x(\ln x)^3 - \int x.3(\ln x)^2\,\frac{1}{x}\,dx$$

$$= x(\ln x)^3 - 3\int (\ln x)^2\,dx$$

$$= x(\ln x)^3 - 3\,[x(\ln x)^2 - 2x\ln x + 2x] + C$$

$$= x(\ln x)^3 - 3x(\ln x)^2 + 6x\ln x - 6x + C$$ Ans.

9. **โจทย์** จงหาค่าของ $\int \frac{\ln(x+1)}{\sqrt{x+1}}\,dx$

วิธีทำ ให้ $u = \ln(x+1)$, $dv = (x+1)^{-1/2}\,dx$

$du = \frac{1}{x+1}\,dx$ $\quad v = 2(x+1)^{1/2}$

$$\therefore \int \frac{\ln(x+1)}{\sqrt{x+1}}\,dx = 2(x+1)^{\frac{1}{2}}\ln(x+1) - \int 2(x+1)^{\frac{1}{2}}\,\frac{1}{x+1}\,dx$$

$$= 2(x+1)^{\frac{1}{2}} \ln(x+1) - 2\int \frac{1\,dx}{(x+1)^{\frac{1}{2}}}$$

$$= 2(x+1)^{\frac{1}{2}} \ln(x+1) - 2[2(x+1)^{\frac{1}{2}}] + C$$

$$= 2\sqrt{x+1}\ \ln(x+1) - 4\sqrt{x+1} + C$$

$$= 2\sqrt{x+1}\ [\ln(x+1) - 2] + C$$ Ans.

10. **โจทย์** จงหาค่าของ $\int \frac{\ln x}{x^2}\,dx$

วิธีทำ ให้ $u = \ln x$, $dv = x^{-2}dx$

$du = \frac{1}{x}\,dx$, $v = -\frac{1}{x}$

$$\therefore \int \frac{\ln x}{x^2}\,dx = -\frac{1}{x}\ln x + \int \frac{1}{x}\cdot\frac{1}{x}\,dx$$

$$= -\frac{1}{x}\ln x - \frac{1}{x} + C$$

$$= -\frac{1}{x}(\ln x + 1) + C$$ Ans.

11. **โจทย์** จงหาค่าของ $\int \frac{x^3dx}{\sqrt{1-x^2}}$

วิธีทำ ให้

$$u = \sqrt{1-x^2}$$

$$u^2 = 1-x^2$$

$$-2xdx = 2u\,du$$

$$dx = \frac{udu}{x}$$

$$\therefore \int \frac{x^3dx}{\sqrt{1-x^2}} = \int \frac{x^3}{u}\ \frac{udu}{x}$$

$$= \int x^2du$$

$$= \int (1-u^2)\,du$$

$$= u - \frac{u^3}{3} + C$$

$$= \sqrt{1-x^2} - \frac{(\sqrt{1-x^2})^3}{3} + C$$

$$= (1-x^2)^{\frac{1}{2}} - \frac{(1-x^2)^{\frac{3}{2}}}{3} + C$$ Ans.

12. **โจทย์** จงหาค่าของ $\int x^3\sqrt{1-x^2}\,dx$

วิธีทำ ให้ $u = \sqrt{1-x^2}$

$$u^2 = 1-x^2$$

$$-2xdx = 2udu$$

$$dx = \frac{udu}{x}$$

$$\therefore \int x^3\sqrt{1-x^2}\,dx = \int x^3\, u \,.\, \frac{udu}{x}$$

$$= \int x^2u^2du$$

$$= \int (1-u^2)u^2du$$

$$= \int u^2du - \int u^4du$$

$$= \frac{u^3}{3} - \frac{u^5}{5} + C$$

$$= \frac{(1-x^2)^{\frac{3}{2}}}{3} - \frac{(1-x^2)^{\frac{5}{2}}}{5} + C$$

Ans.

13. **โจทย์** จงหาค่าของ $\int e^{3\sqrt{x}}dx$

วิธีทำ ให้ $u = \sqrt{x}$

$$x = u^2 \quad , dx = 2udu$$

$$\therefore \int e^{3\sqrt{x}}dx = \frac{2}{3}\int e^{3u}ud(3u)$$

$$= 2\left[\frac{u}{3}e^{3u} - \int \frac{e^{3u}}{3}d(3u)\right]$$

$$= \frac{2}{3}ue^{3u} - \frac{2}{9}e^{3u} + C$$

$$= \frac{2}{3}\sqrt{x}.e^{3\sqrt{x}} - \frac{2}{9}e^{3\sqrt{x}} + C$$

$$= \frac{2}{9}e^{3\sqrt{x}}(3\sqrt{x}-1) + C$$

Ans.

14. **โจทย์** จงหาค่าของ $\int (2^x+x)^2\,dx$

วิธีทำ $\int (2^x+x)^2dx = \int (2^{2x}+2x.2^x+x^2)\,dx$

$$= \int 2^{2x}dx + 2\int x.2^xdx + \int x^2dx$$

$$\therefore \int 2^{2x}dx = \frac{1}{2}\cdot\frac{2^{2x}}{\ln 2} + C_1$$

หาค่า $\int x.2^x dx$

ให้ $u = x$, $dv = 2^x dx$

$du = dx$ $\quad v = \frac{2^x}{\ln 2}$

$$\therefore \int x.2^x dx = x.\frac{2^x}{\ln 2} - \int \frac{2^x}{\ln 2}\,dx$$

$$= x.\frac{2^x}{\ln 2} - \frac{1}{\ln 2}\cdot\frac{2^x}{\ln 2} + C_2$$

$$= x.\frac{2^x}{\ln 2} - \frac{2^x}{(\ln 2)^2} + C_2$$

$$\int x^2 dx = \frac{x^3}{3} + C_3$$

$$\therefore \int (2^x + x)^2\,dx = \frac{1}{2}\cdot\frac{2^{2x}}{\ln 2} + 2\left[x\cdot\frac{2^x}{\ln 2} - \frac{2^x}{(\ln 2)^2}\right] + \frac{x^3}{3} + C$$

เมื่อ $C = C_1 + C_2 + C_3$

$$= \frac{2^{2x-1}}{\ln 2} + x.\frac{2^{x+1}}{\ln 2} - \frac{2^{x+1}}{(\ln 2)^2} + \frac{x^3}{3} + C$$

$$= \frac{2^{2x-1} + x.2^{x+1}}{\ln 2} - \frac{2^{x+1}}{(\ln 2)^2} + \frac{x^3}{3} + C$$

Ans.

15. **โจทย์** จงหาค่าของ $\int_0^2 x^2 3^x dx$

วิธีทำ ให้ $u = x^2$, $dv = 3^x dx$

$du = 2x\,dx$ $\quad v = \frac{3^x}{\ln 3}$

$$\therefore \int_0^2 x^2 3^x dx = x^2\frac{3^x}{\ln 3}\Big|_0^2 - \int_0^2 \frac{3^x}{\ln 3}\cdot 2x\,dx$$

$$= \left. x^2 \frac{3^x}{\ln 3} \right|_0^2 - \frac{2}{\ln 3} \int_0^2 x \cdot 3^x dx$$

$$= \left. x^2 \frac{3^x}{\ln 3} \right|_0^2 - \frac{2}{\ln 3} \left. \left(x \cdot \frac{3^x}{\ln 3} - \frac{3^x}{(\ln 3)^2} \right) \right|_0^2$$

(จากข้อ 2)

$$= 4 \cdot \frac{3^2}{\ln 3} - \frac{2}{\ln 3} \left(2 \cdot \frac{3^2}{\ln 3} - \frac{3^2}{(\ln 3)^2} \right)$$

$$= \frac{36}{\ln 3} - \frac{36}{(\ln 3)^2} + \frac{18}{(\ln 3)^3}$$

$$= \frac{36(\ln 3)^2 - 36 \ln 3 + 18}{(\ln 3)^3}$$

Ans.

16. **โจทย์** จงหาค่าของ $\int_0^1 x^2 e^{-2x} dx$

วิธีทำ ให้ $u = x^2$, $dv = e^{-2x} dx$

$du = 2x dx$ $\quad v = -\frac{1}{2} e^{-2x}$

$$\therefore \int_0^1 x^2 e^{-2x} dx = \left. -\frac{1}{2} x^2 e^{-2x} \right|_0^1 + \frac{1}{2} \int_0^1 e^{-2x} \cdot 2x \, dx$$

$$= \left. -\frac{1}{2} x^2 e^{-2x} \right|_0^1 + \int_0^1 x e^{-2x} dx$$

หาค่า $\int x e^{-2x} dx$

ให้ $u = x$, $dv = e^{-2x} dx$

$du = dx$ $\quad v = -\frac{1}{2} e^{-2x}$

$$\therefore \int x e^{-2x} dx = -\frac{1}{2} x e^{-2x} + \frac{1}{2} \int e^{-2x} dx$$

$$= -\frac{1}{2} x e^{-2x} - \frac{1}{4} e^{-2x} + C$$

$$\therefore \int_0^1 x^2 e^{-2x} dx = \left. -\frac{1}{2} x^2 e^{-2x} \right|_0^1 - \left. \frac{1}{2} x e^{-2x} - \frac{1}{4} e^{-2x} \right|_0^1$$

$$= -\frac{1}{2}e^{-2} - \frac{1}{2}e^{-2} - \frac{1}{4}e^{-2}$$

$$= -\frac{5}{4}e^{-2}$$ Ans.

17. **โจทย์** จงหาค่าของ $\int_{-1}^{2} \ln(x+2)\,dx$

วิธีทำ ให้ $u = \ln(x+2)$, $dv = dx$

$$du = \frac{1}{x+2}dx \qquad v = x$$

$$\therefore \int_{-1}^{2} \ln(x+2)\,dx = x\ln(x+2)\Big|_{-1}^{2} - \int_{-1}^{2} \frac{x}{x+2}dx$$

$$= x\ln(x+2)\Big|_{-1}^{2} - \int_{-1}^{2} dx + 2\int_{-1}^{2} \frac{1}{x+2}dx$$

$$= x\ln(x+2) - x + 2\ln(x+2)\Big|_{-1}^{2}$$

$$= 2\ln 4 - 2 + 2\ln 4 - (-\ln 1 + 1 + 2\ln 1)$$

$$= 4\ln 4 - 3$$

$$= 8\ln 2 - 3$$ Ans.

18. **โจทย์** จงหาค่าของ $\int_{1}^{3} x^2 (\ln x)^2\,dx$

วิธีทำ ให้ $u = (\ln x)^2$, $dv = x^2dx$

$$du = 2(\ln x)\,d(\ln x) \qquad v = \frac{x^3}{3}$$

$$= 2(\ln x)\frac{1}{\ln x}dx$$

$$= 2dx$$

$$\therefore \int_{1}^{3} x^2(\ln 2)^2 dx = \frac{x^3}{3}(\ln x)^2\Big|_{1}^{3} - \int_{1}^{3}\frac{x^3}{3}\,2dx$$

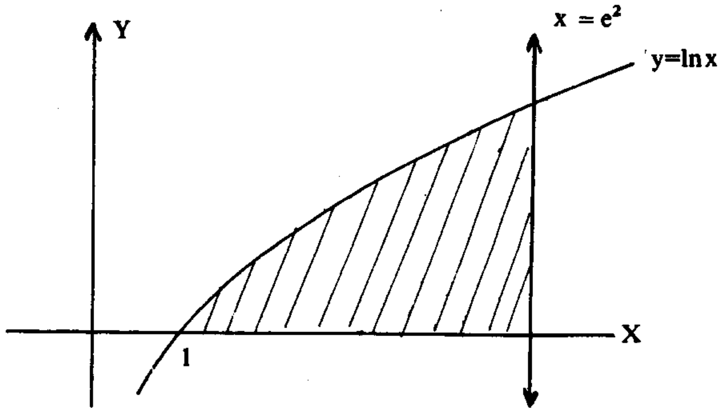
$$= \frac{x^3}{3}(\ln x)^2 - \frac{2}{3}\,\frac{x^4}{4}\Big|_{1}^{3}$$

$$= \frac{27}{3}(\ln 3)^2 - \left(\frac{2}{3}\times\frac{81}{4}\right) - \left[\frac{1}{3}(\ln 1)^2 - \left(\frac{2}{3}\times\frac{1}{4}\right)\right]$$

$$= 9(\ln 3)^2 - \frac{40}{3}$$ Ans.

19. **โจทย์** จงหาพื้นที่ซึ่งล้อมรอบด้วยโค้ง $y = \ln x$, แกน x และเส้น $x = e^2$

วิธีทำ



$$A = \int_1^{e^2} \ln x \, dx$$

$$= x\ln x - x \Big|_1^{e^2} \quad \text{(จากข้อ 3)}$$

$$= e^2 \ln e^2 - e^2 - \ln 1 + 1$$

$$= e^2 + 1$$ ตารางหน่วย $(e^2 \ln e^2 = 2e^2)$ Ans.

20. **โจทย์** สมการอุปทาน (supply equation) สำหรับโภคภัณฑ์อย่างหนึ่งเป็น $p - 2\ln(x+2) = 0$ เมื่อ x หน่วยเป็นอุปทาน (supply) p บาท เป็นราคาต่อหนึ่งหน่วย ถ้าราคาตลาดเป็น 4 บาท จงหาส่วนเกินของผู้ผลิต

วิธีทำ หาจำนวนหน่วยของสินค้าที่สมนัยกับราคาตลาด

แทนค่า $p = 4$ ในสมการอุปทาน

$$\therefore 2\ln(x+2) = 4$$

$$\ln(x+2) = 2$$

$$\therefore e^2 = x + 2$$

$$x = e^2 - 2$$

$$= 7.3891 - 2$$

$$= 5.3891$$

$\therefore \quad \bar{p} = 4, \ \bar{x} = 5.39$

จากสูตร $\quad PS = \bar{p}\bar{x} - \int_0^{\bar{x}} h(x)\,dx$

$$= (4\times5.39) - \int_0^{5.39} 2\ln(x+2)\,dx$$

$$= 21.56 - 2\int_0^{5.39} \ln(x+2)\,dx$$

ให้ $\quad u = \ln(x+2) \qquad dv = dx$

$\therefore \ du = \frac{1}{x+2}dx \qquad v = x$

$$\therefore \int_0^{5.39} \ln(x+2)\,dx = x\ln(x+2) - \int \frac{x}{x+2}\,dx$$

$$= x\ln(x+2) - (x - 2\ln|x+2|)\Big|_0^{5.39}$$

$$\therefore PS = 21.56 - 2\left[x\ln(x+2) - x + 2\ln|x+2|\right]\Big|_0^{5.39}$$

$$= 5.60$$

$\therefore$ ส่วนเกินของผู้ผลิต = **5.60** บาท Ans.

21. **โจทย์** จงหาจำนวนจากการลงทุนติดต่อกันเป็นระยะเวลา 5 ปีด้วยทุน 10,000 t บาท ต่อปี เมื่อ t เป็นจำนวนปีนับจากปัจจุบันอัตราดอกเบี้ย 6%

วิธีทำ จากสูตร $\quad A = \int_0^T f(t)\, e^{i(T-t)}\,dt$

เมื่อ A เป็นจำนวนเงินที่ได้จากการลงทุน

$f(t) = 10{,}000t, \ i = 0.06$

$T = 5$

$$\therefore \quad A = 10{,}000\int_0^5 t\, e^{0.06(5-t)}\,dt$$

โดยการอินทิเกรตทีละส่วน

ให้ $u = t,$ $dv = e^{0.06(5-t)}\,dt$

$du = dt,$ $v = -\dfrac{e^{0.06(5-t)}}{0.06}$

$$\therefore A = 10{,}000\left[-\frac{e^{0.06(5-t)}t}{0.06}\right]_0^5 + \frac{1}{0.06}\int_0^5 e^{0.06(5-t)}\,dt$$

$$= 10{,}000\left[\frac{-e^{0.06(5-t)}t}{0.06} - \frac{e^{0.06(5-t)}}{0.36}\right]_0^5$$

$$= 10{,}000\left(-\frac{5}{0.06} - \frac{1}{0.36} + \frac{e^{0.3}}{0.36}\right)$$

$$= \frac{10{,}000}{0.36}(-0.3-1+1.3499)$$

$$= 27777.77(0.0499)$$

$$= 1386.11$$

∴ จำนวนเงินที่ได้จากการลงทุนในระยะเวลา 5 ปี เป็น 1,386 บาท Ans.

22. **โจทย์** ในการลงทุนทำธุรกิจอย่างหนึ่ง มีรายได้ 500 t บาทต่อปี เมื่อ t เป็นจำนวนปีนับจากปัจจุบัน ถ้านำรายได้ในระยะ 5 ปีแรกไปฝากธนาคารด้วยอัตราดอกเบี้ย 10% จงหารายได้ปัจจุบัน

วิธีทำ จากสูตร $V = \int_0^T f(t)\,e^{-it}\,dt$

เมื่อ V เป็นรายได้ปัจจุบัน

$$f(t) = 500t$$

$$T = 5, \quad i = 0.1$$

$$\therefore V = \int_0^5 500\,t\,e^{-0.1t}\,dt$$

$$= \quad 500\int_0^5 t e^{-0.1t}\,dt$$

หาค่าโดยการอินทิเกรตทีละส่วน

ให้ $u = t$, $dv = e^{-0.1t}\,dt$

$$v = -10e^{-0.1t}$$

$$\therefore \quad V = 500\left[-10e^{-0.1t}\,t\Big|_0^5 - \int_0^5 -10e^{-0.1t}\,dt\right]$$

$$= 500\left[-10e^{-0.1t}t - \frac{1}{(0.1)^2}e^{-0.1t}\right]_0^5$$

$$= 500e^{-0.5}\left[-\frac{5}{0.1} + \frac{1}{(0.1)^2}\right] + 500\left(\frac{1}{0.1}\right)^2$$

$$= (500\times 0.6065)(-50+100) + 500(100)$$

$$= 65162.50$$

$\therefore$ รายได้ปัจจุบัน เป็น 65162.50 บาท Ans.

ข้อสรุป 8.3 การอินทิเกรตโดยทำให้เป็นเศษส่วนย่อย

ลักษณะของฟังก์ชัน : เป็นฟังก์ชันตรรกยะ (Rational Function) หรืออยู่ในรูปของการหาร (เศษ/ส่วน) ของโพลิโนเมียลฟังก์ชันสองฟังก์ชัน คือ $\frac{P(x)}{Q(x)}$

รูปของการอินทิเกรต : $\int \frac{P(x)}{Q(x)}\,dx$

วิธีการอินทิเกรต : แยก $\frac{P(x)}{Q(x)}$ ออกเป็นผลรวมของเศษส่วนย่อยเสียก่อน ซึ่งมีวิธีการแยกอยู่ 4 กรณี แล้วอินทิเกรตทีละเทอม

เฉลยแบบฝึกหัด 8.3

1. โจทย์ จงหาค่าของ $\int \frac{dx}{x^2-4}$

วิธีทำ $\because \quad \frac{1}{x^2-4} \equiv \frac{1}{(x-2)(x+2)}$

$\therefore \quad \frac{1}{(x-2)(x+2)} \equiv \frac{A}{x-2}+\frac{B}{x+2}$ (เมื่อ A, B เป็นค่าคงที่)

เอา $(x-2)(x+2)$ คูณตลอด

$\therefore \quad 1 \equiv A(x+2)+B(x-2)$

สมมุติ ให้ $x = 2 \quad \therefore \quad A = \frac{1}{4}$

ให้ $x = -2 \quad \therefore \quad B = -\frac{1}{4}$

นั่นคือ $\frac{1}{x^2-4} = \frac{1}{4(x-2)} - \frac{1}{4(x+2)}$

$$\therefore \int \frac{dx}{x^2-4} = \frac{1}{4}\int \frac{dx}{x-2} - \frac{1}{4}\int \frac{1}{x+2}\, dx$$

$$= \frac{1}{4}\ln|x-2| - \frac{1}{4}\ln|x+2| + C$$

$$= \frac{1}{4}\ln\left|\frac{x-2}{x+2}\right| + C$$ Ans.

2. **โจทย์** จงหาค่าของ $\int \frac{x^2}{x^2+x-6}\, dx$

วิธีทำ $\because \frac{x^2}{x^2+x-6} \equiv 1 - \frac{(x-6)}{x^2+x-6}$

$$\frac{x-6}{x^2+x-6} \equiv \frac{A}{x+3} + \frac{B}{x-2}$$

$$\therefore \quad x-6 \equiv A(x-2)+B(x+3)$$

สมมุติให้ $x=2$ $\quad \therefore \quad B = -\frac{4}{5}$

ให้ $x=-3$ $\quad \therefore \quad A = \frac{9}{5}$

นั่นคือ $\frac{x-6}{x^2+x-6} = \frac{9}{5(x+3)} - \frac{4}{5(x-2)}$

$$\therefore \int \frac{x^2 dx}{x^2+x-6} = \int \left(1 - \frac{9}{5(x+3)} + \frac{4}{5(x-2)}\right) dx$$

$$= x - \frac{9}{5}\ln|x+3| + \frac{4}{5}\ln|x-2| + C$$ Ans.

3. **โจทย์** จงหาค่าของ $\int \frac{5x-2}{x^2-4} dx$

วิธีทำ $\because \frac{5x-2}{x^2-4} \equiv \frac{A}{x-2} + \frac{B}{x+2}$

$$\therefore \quad 5x-2 \equiv A(x+2)+B(x-2)$$

สมมุติ ให้ $x=-2$ ได้ $B = 3$

ให้ $x = 2$ ได้ $A = 2$

$$\therefore \quad \frac{5x-2}{x^2-4} = \frac{2}{x-2} + \frac{3}{x+2}$$

$$\int \frac{5x-2}{x^2-4}\, dx = \int \frac{2}{x-2} dx + \int \frac{3}{x+2} dx$$

$= 2\ln|x-2|+3\ln|x+2|+\ln C$

$= \ln|C(x-2)^2(x+2)^3|$ Ans.

4. **โจทย์ จงหาค่าของ** $\int \frac{(4x-2)dx}{x^3-x^2-2x}$

วิธีทำ $\because \frac{4x-2}{x^3-x^2-2x} \equiv \frac{4x-2}{x(x-2)(x+1)}$

$\therefore \frac{4x-2}{x^3-x^2-2x} \equiv \frac{A}{x}+\frac{B}{x-2}+\frac{C}{x+1}$

ทำส่วนให้หมดไป

$\therefore 4x-2 \equiv A(x-2)(x+1)+Bx(x+1)+Cx(x-2)$

สมมุติ ให้ $x = 2$ $\therefore 6 = 6B \quad , B=1$

ให้ $x=-1$ $\therefore -6 = 3C \quad C=-2$

ให้ $x=0$ $\therefore -2 = -2A, A=1$

$\therefore \frac{4x-2}{x^3-x^2-2x} = \frac{1}{x}+\frac{1}{x-2}-\frac{2}{x+1}$

นั่นคือ $\int \frac{(4x-2)dx}{x^3-x^2-2x} = \int \left(\frac{1}{x}+\frac{1}{x-2}-\frac{2}{x+1}\right)dx$

$= \ln|x|+\ln|x-2|-2\ln|x+1|+\ln C$

$= \ln\left|\frac{Cx(x-2)}{(x+1)^2}\right|$ Ans.

5. **โจทย์ จงหาค่าของ** $\int \frac{6x^2-2x-1}{4x^3-x}dx$

วิธีทำ $\frac{6x^2-2x-1}{4x^3-x} \equiv \frac{6x^2-2x-1}{x(2x-1)(2x+1)}$

$\therefore \frac{6x^2-2x-1}{4x^3-x} \equiv \frac{A}{x}+\frac{B}{2x-1}+\frac{C}{2x+1}$

ทำส่วนให้หมดไป

ได้ $6x^2-2x-1 \equiv A(2x-1)(2x+1)+Bx(2x+1)+Cx(2x-1)$

$\equiv x^2(4A+2B+2C)+x(B-C)-A$

$\therefore 4A+2B+2C = 6$ ——— ①

$B-C = -2$ ——— ②

$A = 1$ ——— ③

โดยการแก้สมการ ได้ $A = 1, B = -\frac{1}{2}, C = \frac{3}{2}$

$$\therefore \int \frac{6x^2-2x-1}{4x^3-x}dx = \int \frac{dx}{x} - \frac{1}{2}\int \frac{1}{2x-1}dx + \frac{3}{2}\int \frac{dx}{2x+1}$$

$$= \ln|x| - \frac{1}{4}\ln|2x-1| + \frac{3}{4}\ln|2x+1| + \ln C$$

$$= \frac{4\ln|x| - \ln|2x-1| + 3\ln|2x+1| + \ln C}{4}$$

$$= \frac{1}{4}\ln\left|\frac{Cx^4(2x+1)^3}{2x-1}\right|$$ Ans.

6. โจทย์ จงหาค่าของ $\int \frac{x^2+x+2}{x^2-1}dx$

วิธีทำ $\because \frac{x^2+x+2}{x^2-1} \equiv 1+\frac{x+3}{x^2+1}$

$\equiv 1+\frac{x}{x^2+1}+\frac{3}{x^2+1}$

$$\therefore \int \frac{x^2+x+2}{x^2-1}dx = \int\left(1+\frac{x}{x^2+1}+\frac{3}{x^2+1}\right)dx$$

$$= x+\frac{1}{2}\ln|x^2+1|+\frac{3}{2}\ln|x^2+1|+C$$

$$= 2x+\ln|x^2+1|+3\ln|x^2+1|+C$$

$$= 2x+\ln|(x^2+1)^4|+C$$ Ans.

7. **โจทย์** จงหาค่าของ $\int \frac{dx}{x^3+3x^2}$

วิธีทำ $\frac{1}{x^3+3x^2} \equiv \frac{1}{x^2(x+3)}$

$$\equiv \frac{A}{x}+\frac{B}{x^2}+\frac{C}{x+3}$$

$$\therefore \quad 1 \equiv Ax(x+3)+B(x+3)+Cx^2$$

สมมุติ ให้ $x = 0 \quad \therefore \quad B = \frac{1}{3}$

ให้ $x = -3 \quad \therefore \quad C = \frac{1}{9}$

ให้ $x = 1 \quad \therefore \quad A = -\frac{1}{9}$

$$\therefore \int \frac{dx}{x^3+3x^2} = -\frac{1}{9}\int \frac{dx}{x}+\frac{1}{3}\int \frac{dx}{x^2}+\frac{1}{9}\int \frac{dx}{x+3}$$

$$= -\frac{1}{9}\ln|x|-\frac{1}{3x}+\frac{1}{9}\ln|x+3|+C$$

$$= \frac{1}{9}\ln\left|\frac{x+3}{x}\right|-\frac{1}{3x}+C$$ Ans.

8. **โจทย์** จงหาค่าของ $\int \frac{3x^2-x+1}{x^3-x^2}\,dx$

วิธีทำ $\frac{3x^2-x+1}{x^3-x^2} \equiv \frac{A}{x}+\frac{B}{x^2}+\frac{C}{x-1}$

$$\therefore \quad 3x^2-x+1 \equiv Ax(x-1)+B(x-1)+Cx^2$$

สมมุติ

ให้ $x=1$, $C=3$

ให้ $x=0$, $B=-1$

ให้ $x=-1$, $A=0$

$$\therefore \int \frac{3x^2-x+1}{x^3-x^2}\,dx = \int \left(-\frac{1}{x^2}+\frac{3}{x-1}\right)dx$$

$$= \frac{1}{x}+3\ln|x-1|+C$$ Ans.

9. **โจทย์ จงหาค่าของ** $\int \frac{dx}{(x+2)^3}$

วิธีทำ $\frac{1}{(x+2)^3} \equiv \frac{A}{x+2} + \frac{B}{(x+2)^2} + \frac{C}{(x+2)^3}$

$\therefore \quad 1 \equiv A(x+2)^2+B(x+2)+C$

สมมุติให้ $x=-2$ $\quad \therefore \quad C = 1$

โดยการเทียบสัมประสิทธิ์ ได้ A และ B เป็น 0

$$\therefore \int \frac{dx}{(x+2)^3} = \int (x+2)^{-3}\, d(x+2)$$

$$= -\frac{1}{2(x+2)^2} + C \qquad \text{Ans.}$$

10. **โจทย์ จงหาค่าของ** $\int \frac{dt}{(t+2)^2(t+1)}$

วิธีทำ $\frac{1}{(t+2)^2(t+1)} \equiv \frac{A}{t+2} + \frac{B}{(t+2)^2} + \frac{C}{t+1}$

$$\therefore \quad 1 \equiv A(t+2)(t+1)+B(t+1)+C(t+2)^2$$

$$\equiv t^2(A+C)+t(3A+B+4C)+2A+B+4C$$

โดยการเทียบสัมประสิทธิ์

$\therefore \quad A+C = 0$ ——— ①

$3A+B+4C = 0$ ——— ②

$2A+B+4C = 1$ ——— ③

โดยการแก้สมการ ได้ $A=-1, B=-1, C=1$

$$\therefore \int \frac{dt}{(t+2)^2(t+1)} = \int \frac{-dt}{t+2} - \int \frac{dt}{(t+2)^2} + \int \frac{dt}{t+1}$$

$$= -\ln|t+2| - \frac{1}{t+2} + \ln|t+1| + C$$

$$= \ln\left|\frac{t+1}{t+2}\right| - \frac{1}{t+2} + C \qquad \text{Ans.}$$

11. **โจทย์ จงหาค่าของ** $\int \frac{x^2-3x-7}{(2x+3)(x+1)^2}\, dx$

วิธีทำ $\dfrac{x^2-3x-7}{(2x+3)(x+1)^2} \equiv \dfrac{A}{2x+3}+\dfrac{B}{x+1}+\dfrac{C}{(x+1)^2}$

$\therefore \quad x^2-3x-7 \equiv A(x+1)^2+B(x+1)(2x+3)+C(2x+3)$

$\equiv x^2(A+2B)+x(2A+5B+2C)+A+3B+3C$

โดยการเทียบสัมประสิทธิ์

$\therefore \quad A+2B = 1$ ——— ①

$2A+5B+2C = -3$ ——— ②

$A+3B+3C = -7$ ——— ③

โดยการแก้สมการ ได้ $A=-1, B=1, C=-3$

$$\therefore \int \frac{x^2-3x-7}{(2x-3)(x+1)^2}dx = -\int \frac{dx}{2x+3}+\int \frac{dx}{x+1}-3\int \frac{dx}{(x+1)^2}$$

$$= -\frac{1}{2}\ln|2x+3|+\ln|x+1|+\frac{3}{x+1}+C$$

$$= \frac{3}{x+1}+\ln|x+1|-\frac{1}{2}\ln|2x+3|+C$$ Ans.

12. โจทย์ จงหาค่าของ $\displaystyle\int \frac{2x^4-2x+1}{2x^5-x^4}\,dx$

วิธีทำ $\dfrac{2x^4-2x+1}{2x^5-x^4} \equiv \dfrac{2x^4-2x+1}{x^4(2x-1)}$

$\equiv \dfrac{A}{x}+\dfrac{B}{x^2}+\dfrac{C}{x^3}+\dfrac{D}{x^4}+\dfrac{E}{2x-1}$

$\therefore \quad 2x^4-2x+1 \equiv Ax^3(2x-1)+Bx^2(2x-1)+Cx(2x-1)+D(2x-1)+Ex^4$

$\equiv x^4(2A+E)+x^3(-A+2B)+x^2(-B-2C)+x(-C+2D)-D$

โดยการเทียบสัมประสิทธิ์ได้

$D = -1$

$2A+E = 2$

$-A+2B = 0$

$-B+2C = 0$

$-C+2D = -2$

โดยการแก้สมการ ได้ $A=0, B=0, C=0, D=-1, E=2$

$$\therefore \int \frac{2x^4-2x+1}{2x^5-x^4}dx = -\int \frac{dx}{x^4}+\int \frac{2dx}{2x-1}$$

$$= \frac{-x^{-5}}{-5}+\ln|2x-1|+C$$

$$= \frac{1}{5x^5}+\ln|2x-1|+C \qquad \text{Ans.}$$

13. **โจทย์** จงหาค่าของ $\int \frac{dx}{16x^4-8x^2+1}$

วิธีทำ $$\frac{1}{16x^4-8x^2+1} \equiv \frac{1}{(2x+!)^2(2x-1)^2}$$

$$\equiv \frac{A}{2x+1}+\frac{B}{(2x+1)^2}+\frac{C}{2x-1}+\frac{D}{(2x-1)^2}$$

$$\therefore\ 1 \equiv A(2x+1)(2x-1)^2+B(2x-1)^2+C(2x-1)(2x+1)^2+D(2x+1)^2$$

$$\equiv x^3(8A+8C)+x^2(-4A+4B+4C+4D)$$

$$+x(-2A-4B-2C+4D)+A+B-C+D$$

โดยการเทียบสัมประสิทธิ์

$\therefore$ $A+C = 0$ ——— 1

$-A+B+C+D = 0$ ——— 2

$-A-2B-C+2D = 0$ ——— 3

$A+B-C+D = 1$ ——— 4

โดยการแก้สมการ ได้ $A=\frac{1}{4}, B=\frac{1}{4}, C=\frac{1}{4}, D=\frac{1}{4}$

$$\therefore \int \frac{dx}{16x^4-8x^2+1} = \frac{1}{4}\int\frac{dx}{2x+1}+\frac{1}{4}\int\frac{dx}{(2x+1)^2}-\frac{1}{4}\int\frac{dx}{2x-1}+\frac{1}{4}\int\frac{dx}{(2x-1)^2}$$

$$= \frac{1}{8}\ln|2x+1|-\frac{1}{8(2x+1)}-\frac{1}{8}\ln|2x-1|-\frac{1}{8(2x-1)}+\frac{1}{8}C$$

$$= \frac{1}{8}\ln\left|C\frac{(2x+1)}{2x-1}\right|-\frac{x}{2(4x^2-1)} \qquad \text{Ans.}$$

14. โจทย์ จงหาค่าของ $\int \frac{dx}{2x^3+x}$

วิธีทำ $\frac{1}{2x^3+x} \equiv \frac{1}{x(2x^2+1)}$

$$\equiv \frac{A}{x}+\frac{Bx+C}{2x^2+1}$$

$$\equiv \frac{A(2x^2+1)+x(Bx+C)}{2x^3+x}$$

$$\therefore 1 \equiv A(2x^2+1)+x(Bx+C)$$

$$\equiv x^2(2A+B)+Cx+A$$

$$\therefore 2A+B = 0 \qquad \text{———— (1)}$$

$$C = 0 \qquad \text{———— (2)}$$

$$A = 1 \qquad \text{———— (3)}$$

$$\therefore B = -2$$

$$\therefore \int \frac{dx}{2x^3+x} = \int \frac{dx}{x} - 2\int \frac{x}{2x^2+1}\,dx$$

$$= \ln|x| - \frac{1}{2}\ln|2x^2+1| + \frac{1}{2}\ln C$$

$$= 2\ln|x| - \ln|2x^2+1| + \ln C$$

$$= \ln\left|\frac{Cx^2}{2x^2+1}\right| \qquad \text{Ans.}$$

15. โจทย์ จงหาค่าของ $\int \frac{2-x}{x^3+8}\,dx$

วิธีทำ $\frac{2-x}{x^3+8} \equiv \frac{2-x}{(x+2)(x^2-2x+4)}$

$$\equiv \frac{A}{x+2}+\frac{Bx+C}{x^2-2x+4}$$

$$\therefore 2-x = A(x^2-2x+4)+(Bx+C)(x+2)$$

$$= x^2(A+B)+x(-2A+2B+C)+4A+2C$$

โดยการเทียบสัมประสิทธิ์ได้

$$A+B = 0 \qquad \text{———— (1)}$$

$$-2A+2B+C = -1 \qquad (2)$$

$$4A+2C = 1 \qquad (3)$$

โดยการแก้สมการ ได้ $A=\frac{1}{3}, B=-\frac{1}{3}, C=\frac{1}{3}$

$$\therefore \int \frac{2-x}{x^3+8}\,dx = \frac{1}{3}\int\frac{dx}{x+2}+\int\frac{-\frac{1}{3}x+\frac{1}{3}}{x^2-2x+4}dx$$

$$= \frac{1}{3}\int\frac{dx}{x+2}-\frac{1}{3}\int\frac{(x-1)\,dx}{x^2-2x+4}$$

$$= \frac{1}{3}\ln|x+2|-\frac{1}{6}\ln|x^2-2x+4\ |+\frac{1}{6}\ln C$$

$$= \frac{2\ln|x+2|-\ln|x^2-2x+4|+\ln C}{6}$$

$$= \frac{1}{6}\ln\left|\frac{C(x+2)^2}{x^2-2x+4}\right| \qquad \text{Ans.}$$

16. **โจทย์** จงหาค่าของ $\int \frac{x+3}{4x^4+4x^3+x^2}dx$

วิธีทำ $\frac{x+3}{4x^4+4x^3+x^2} \equiv \frac{x+3}{x^2(2x+1)^2}$

$$\equiv \frac{A}{x}+\frac{B}{x^2}+\frac{C}{2x+1}+\frac{D}{(2x+1)^2}$$

$$\therefore\ x+3 \equiv Ax(2x+1)^2+B(2x+1)^2+Cx^2(2x+1)+Dx^2$$

$$\equiv x^3(4A+2C)+x^2(4A+4B+C+D)+x(A+4B)+B$$

โดยการเทียบสัมประสิทธิ์ ได้

$$4A+2C = 0 \qquad (1)$$

$$4A+4B+C+D = 0 \qquad (2)$$

$$A+4B = 1 \qquad (3)$$

$$B = 3 \qquad (4)$$

โดยการแก้สมการ ได้ $A=-11, B=3, C=22, D=10$

$$\therefore \int\frac{x+3dx}{4x^4+4x^3+x^2} = -11\int\frac{dx}{x}+3\int\frac{dx}{x^2}+22\int\frac{dx}{2x+1}+10\int\frac{dx}{(2x+1)^2}$$

$$= -11\ln|x|-\frac{1}{x^3}+11\ln|2x+1|\ \frac{-5}{3(2x+1)^3}+C$$

$$= 11\ln\left|\frac{2x+1}{x}\right|-\frac{5}{3(2x+1)^3}+C \qquad \text{Ans.}$$

17. จงหาค่าของ $\int \frac{xdx}{x^4+6x^2+5}$

วิธีทำ $\frac{x}{x^4+6x^2+5} \equiv \frac{x}{(x^2+5)(x^2+1)}$

$$\triangleq \frac{Ax+B}{x^2+5} + \frac{Cx+D}{x^2+1}$$

$$\therefore \quad x \equiv (Ax+B)(x^2+1)+(Cx+D)(x^2+5)$$

$$\therefore \int \frac{xdx}{x^4+6x^2+5} = -\frac{1}{4}\int \frac{x}{x^2+5}\,dx + \frac{1}{4}\int \frac{xdx}{x^2+1}$$

$$= -\frac{1}{8}\ln|x^2+5| + \frac{1}{8}\ln|x^2+1| + \frac{1}{8}\ln C$$

$$= \frac{-\ln|x^2+5| + \ln|x^2+1| + \ln C}{8}$$

$$= \frac{1}{8}\ln C\left(\frac{x^2+1}{x^2+5}\right)$$ Ans.

18. โจทย์ จงหาค่าของ $\int \frac{z^5dz}{z^4+8z^2+16}$

วิธีทำ $\frac{z^5}{z^4+8z^2+16} \equiv z\,\frac{-8(z^3+2z)}{z^4+8z^2+16}$

$$\frac{z^3+2z}{z^4+8z^2+16} \equiv \frac{Az+B}{z^2+4} + \frac{Cz+D}{(z^2+4)^2}$$

$$\therefore \quad z^3+2z \equiv \frac{(Az+B)(z^2+4)+Cz+D}{(z^2+4)^2}$$

$$\equiv Az^3+Bz^2+z(4A+C)+4B+D$$

โดยการเทียบสัมประสิทธิ์

$$\therefore \quad A = 1$$

$$B = 0$$

$$4A+C = 2$$

$$4B+D = 0$$

โดยการแก้สมการ ได้ $C=-2, D=0$

$$\therefore \int \frac{z^5\,dz}{z^4+8z^2+16} = \int zdz - 8\int \frac{zdz}{z^2+4} + 16\int \frac{zdz}{(z^2+4)^2}$$

$$= \frac{z^2}{2} - 4n\,|z^2+4| - \frac{\frac{8}{2}}{z^2+4} + C$$ Ans.

19. โจทย์ จงหาค่าของ $\int \frac{dx}{(x^2+4)(x+2)^2}$

วิธีทำ $\frac{1}{(x^2+4)(x+2)^2} \equiv \frac{Ax+B}{x^2+4}+\frac{C}{x+2}+\frac{D}{(x+2)^2}$

$$\therefore \quad 1 \equiv (Ax+B)(x+2)^2+C(x+2)(x^2+4)+D(x^2+4)$$

$$\equiv x^3(A+C)+x^2(2A+B+2C+D)$$

$$+x(4A+2B+4C)+4B+8C+4D$$

โดยการเทียบสัมประสิทธิ์ ได้

$$A+C = 0 \quad \text{——} ①$$

$$2A+B+2C+D = 0 \quad \text{——} ②$$

$$4A+2B+4C = 0 \quad \text{——} ③$$

โดยการแก้สมการ ได้ $A=-\frac{1}{16}, B=0, C=\frac{1}{16}, D=\frac{1}{8}$

$$\therefore \int \frac{dx}{(x^2+4)(x+2)^2} = -\frac{1}{16}\int\frac{x\,dx}{x^2+4}+\frac{1}{16}\int\frac{dx}{x+2}+\frac{1}{8(x+2)^2}$$

$$= \frac{-1}{32}\ln|x^2+4|+\frac{1}{16}\ln|x+2|+\frac{1}{8(x+2)^2}+C$$

$$= \frac{1}{32}\ln\frac{(x+2)^2}{x^2+4}+\frac{1}{8(x+2)^2}+C \qquad \text{Ans.}$$

20. โจทย์ จงหาค่าของ $\int \frac{1}{x(x^2+1)^2}\,dx$

วิธีทำ $\frac{1}{x(x^2+1)^2} \equiv \frac{A}{x}+\frac{Bx+C}{x^2+1}+\frac{Dx+E}{(x^2+1)^2}$

$$\equiv A(x^2+1)^2+(Bx+C)(x^2+1)x+x(Dx+E)$$

$$\equiv x^4(A+B)+x^3C+x^2(2A+B+D)+x(C+E)+A$$

โดยการเทียบสัมประสิทธิ์ ได้

$$A+B = 0$$

$$C = 0$$

$$2A+B+D = 0$$

$$C+E = 0$$

$$A = 1$$

โดยการแก้สมการ ได้ $A = 1, B = -1, C = 0, D = -1, E = 0$

$$\therefore \int \frac{1}{x(x^2+1)^2}dx = \int \frac{dx}{x} - \int \frac{xdx}{x^2+1} - \int \frac{xdx}{(x^2+1)^2}$$

$$= \ln|x| - \frac{1}{2}\ln|x^2+1| + \frac{1}{6(x^2+1)^3} + \frac{1}{6}C$$

$$= \frac{1}{6}\left[6\ln|x| - 3\ln|x^2+1| + \frac{1}{(x^2+1)^3}\right] + C$$

$$= \ln\left|\frac{x^6}{(x^2+1)^3}\right| + \frac{1}{6(x^2+1)^3} + C$$ Ans.

21 **โจทย์** จงหาค่าของ $\int \frac{x^2-4x-4}{x^3-2x^2+4x-8}dx$

วิธีทำ $\frac{x^2-4x-4}{x^3-2x^2+4x-8} \equiv \frac{Ax+B}{x^2+4} + \frac{C}{x-2}$

$$\therefore x^2-4x-4 \equiv (Ax+B)(x-2)+C(x^2+4)$$

$$\equiv x^2(A+C)+x(-2A+B)-2B+4C$$

โดยการเทียบสัมประสิทธิ์ ได้

$$A+C = 1$$

$$-2A+B = -4$$

$$-2B+4C = -4$$

โดยการแก้สมการ ได้ $A = 2, B = 0, C = -1$

$$\therefore \int \frac{x^2-4x-4}{x^3-2x^2+4x-8}dx = \int \frac{2x\,dx}{x^2+4} - \int \frac{dx}{x-2}$$

$$= \ln|x^2+4| - \ln|x-2| + \ln C$$

$$= \ln\left|\frac{C(x^2+4)}{x-2}\right|$$ Ans.

22. **โจทย์** จงหาค่าของ $\int \frac{4x^4-15x^3+36x^2-40x+27\,dx}{x(x^2-2x+3)^2}$

วิธีทำ

$$\frac{4x^4-15x^3+36x^2-40x+27}{x(x^2-2x+3)^2} \equiv \frac{A}{x}+\frac{Bx+C}{x^2-2x+3}+\frac{Dx+E}{(x^2-2x+3)^2}$$

$$\therefore \quad 4x^4-15x^3+36x^2-40x+27 \equiv A(x^2-2x+3)^2+x(Bx+C)(x^2-2x+3)+x(Dx+E)$$

$$\equiv x^4(A+B)+x^3(-4A-2B+C)+x^2(10A+3B-2C+D)$$

$$+x(-12A+3C+E)+9A$$

โดยการเทียบสัมประสิทธิ์ ได้

$$A+B = 4 \quad \text{——— (1)}$$

$$-4A-2B+C = -15 \quad \text{——— (2)}$$

$$10A+3B-2C+D = 36 \quad \text{——— (3)}$$

$$-12A+3C+E = -40 \quad \text{——— (4)}$$

โดยการแก้สมการ ได้ $A = 3, B = 1, C = -1, D = 1, E = -1$

$$\therefore \int \frac{4x^4-15x^3+36x^2-40x+27\,dx}{x(x^2-2x+3)^2} = 3\int \frac{dx}{x}+\int \frac{(x-1)\,dx}{x^2-2x+3}+\int \frac{(x-1)\,dx}{(x^2-2x+3)^2}$$

$$= 3\ln|x|+\frac{1}{2}\ln|x^2-2x+3|-\frac{1}{2(x^2-2x+3)}+C$$

$$= \frac{1}{2}\left[6\ln|x|+\ln|x^2-2x+3|\right]-\frac{1}{2(x^2-2x+3)}+C$$

$$= \frac{1}{2}\ln|x^6(x^2-2x+3)|-\frac{1}{2(x^2-2x+3)}+C$$

23. **โจทย์** จงหาค่าของ $\int_1^2 \frac{x-3}{x^3+x^2}dx$

วิธีทำ $$\frac{x-3}{x^2(x+1)} \equiv \frac{A}{x}+\frac{B}{x^2}+\frac{C}{x+1}$$

$$\therefore \quad x-3 \equiv Ax(x+1)+B(x+1)+Cx^2$$

$$\equiv x^2(A+C)+x(A+B)+B$$

โดยการเทียบสัมประสิทธิ์ ได้

$$A+C = 0 \quad \text{——— (1)}$$

$$A+B = 1 \quad \text{——— (2)}$$

$B \quad = \quad -3$ ——③

โดยการแก้สมการ ได้ $A = 4, B = -3, C = -4$

$$\therefore \int_1^2 \frac{x-3}{x^2(x+1)}\,dx = \left[4\int\frac{dx}{x} - 3\int\frac{dx}{x^2} - 4\int\frac{dx}{x+1}\right]_1^2$$

$$= \left[4\ln|x| + \frac{3}{x} - 4\ln|x+1|\right]_1^2$$

$$= 4\ln 2 + \frac{3}{2} - 4\ln 3 - 4\ln 1 - 3 + 4\ln 2$$

$$= 8\ln 2 - 4\ln 3 - \frac{3}{2}$$

$$= 4\ln 2^2 - 4\ln 3 - \frac{3}{2}$$

$$= 4\ln\frac{4}{3} - \frac{3}{2}$$ Ans.

24. **โจทย์** จงหาค่าของ $\int_0^4 \frac{(x-2)\,dx}{2x^2+7x+3}$

วิธีทำ $$\frac{x-2}{2x^2+7x+3} \equiv \frac{A}{2x+1} + \frac{B}{x+3}$$

$$\therefore \quad x-2 \equiv A(x+3)+B(2x+1)$$

$$\equiv x(A+2B)+3A+B$$

โดยการเทียบสัมประสิทธิ์ ได้

$A+2B \quad = \quad 1$ ——①

$3A+B \quad = \quad -2$ ——②

โดยการแก้สมการ ได้ $A = -1, B = 1$

$$\therefore \int_0^4 \frac{(x-2)dx}{2x^2+7x+3} = \left[-\int \frac{dx}{2x+1} + \int \frac{dx}{x+3} \right]_0^4$$

$$= \left[-\frac{1}{2}\ln|2x+1| + \ln|x+3| \right]_0^4$$

$$= -\frac{1}{2}\ln(8+1) + 2\ln 7 - \left[-\frac{1}{2}\ln 1 + \ln 3 \right]$$

$$= -\frac{1}{2}\ln 9 + 2\ln 7 - \ln 3$$

$$= 2\ln 7 - 2\ln 3$$

$$= 2\ln\frac{7}{3}$$

Ans.

25. **โจทย์** จงหาค่าของ $\int_1^3 \frac{x^2-4x+3}{x(x+1)^2}dx$

วิธีทำ $\frac{x^2-4x+3}{x(x+1)^2} \equiv \frac{A}{x} + \frac{B}{x+1} + \frac{C}{(x+1)^2}$

$$\therefore \quad x^2-4x+3 \equiv A(x+1)^2 + Bx(x+1) + Cx$$

$$\equiv x^2(A+B) + x(2A+B+C) + A$$

โดยการเทียบสัมประสิทธิ์ ได้ $A = 3, B = -2, C = -8$

$$\therefore \int_1^3 \frac{x^2-4x+3}{x(x+1)^2}dx = \left[3\int \frac{dx}{x} - 2\int \frac{dx}{x+1} - 8\int \frac{dx}{(x+1)^2} \right]_1^3$$

$$= \left[3\ln|x| - 2\ln|x+1| + \frac{8}{x+1} \right]_1^3$$

$$= (3\ln 3 - 2\ln 4 + \frac{8}{4}) - (3\ln 1 - 2\ln 2 + \frac{8}{2})$$

$$= 3\ln 3 - 4\ln 2 + 2 + 2\ln 2 - 4$$

$$= 3\ln 3 - 2\ln 2 - 2$$

$$= \ln\frac{27}{4} - 2$$

Ans.

26. **โจทย์** จงหาค่าของ $\int_1^4 \frac{(2x^2+13x+18)\,dx}{x^3+6x^2+9x}$

วิธีทำ $\frac{2x^2+13x+18}{x^3+6x^2+9x} \equiv \frac{2x^2+13x+18}{x^3+6x^2+9x}$

$$\equiv \frac{A}{x}+\frac{B}{x+3}+\frac{C}{(x+3)^2}$$

$\therefore\ 2x^2+13x+18 \equiv x^2(A+B)+x(6A+3B+C)+9A$

โดยการเทียบสัมประสิทธิ์ ได้

$A+B = 2$ ——— ①

$6A+3B+C = 13$ ——— ②

$9A = 18$ ——— ③

โดยการแก้สมการ ได้ $A=9,\ B=-7,\ C=-20$

$$\therefore \int_1^4 \frac{(2x^2+13x+18)dx}{x^3+6x^2+9x} = \left[9\int\frac{dx}{x}-7\int\frac{dx}{x+3}-20\int\frac{dx}{(x+3)^2}\right]_1^4$$

$$= \left[9\ln|x|-7\ln|x+3|+\frac{20}{x+3}\right]_1^4$$

$$= 9\ln4-7\ln7+\frac{20}{7}-(9\ln1-7\ln4+\frac{20}{4})$$

$$= 32\ln2-7\ln7-\frac{15}{7}$$ Ans.

27. โจทย์ จงหาค่าของ $\int_1^2 \frac{5x^2-3x+18\,dx}{9x-x^3}$

วิธีทำ $\because \frac{5x^2-3x+18}{9x-x^3} \equiv \frac{5x^2-3x+18}{x(9-x^2)}$

$$\equiv \frac{A}{x}+\frac{B}{3-x}+\frac{C}{3+x}$$

$\therefore\ 5x^2-3x+18 \equiv A(9-x^2)+B(3+x)+Cx(3-x)$

$$\equiv x^2(-A+B-C)+x(3B+3C)+9A$$

โดยการเทียบสัมประสิทธิ์ ได้

$9A = 18$ ——— ①

$3B+3C = -3$ ——— ②

$-A+B-C = 5$ ——— ③

โดยการแก้สมการ ได้ $A=2, B=3, C=-4$

$$\therefore \int_1^2 \frac{5x^2-3x+18}{9x-x^3}\,dx = \left[2\int\frac{dx}{x}+3\int\frac{dx}{3-x}-4\int\frac{dx}{3+x}\right]_1^2$$

$$= \left[2\ln|x|-3\ln|3-x|-4\ln|3+x|\right]_1^2$$

$$= 2\ln2-3\ln1-4\ln5-(2\ln1-3\ln2-4\ln4)$$

$$= 13\ln2-4\ln5$$ Ans.

28. โจทย์ จงหาค่าของ $\int_1^3 \frac{4t^2+6}{t^3+3t}\,dt$

วิธีทำ $\because \frac{4t^2+6}{t^3+3t} = \frac{A}{t}+\frac{Bt+C}{t^2+3}$

$$\therefore\ 4t^2+6 \equiv A(t^2+3)+t(Bt+C)$$

$$\equiv t^2(A+B)+tC+3A$$

โดยการเทียบสัมประสิทธิ์ ได้

$$A+B = 4$$

$$C = 0$$

$$3A = 6$$

$\therefore$ $A=2$ และ $B=2$

$$\therefore \int_1^3 \frac{4t^2+6}{t^3+3t}\,dt = \left[2\int\frac{dt}{t}+2\int\frac{2t\,dt}{t^2+3}\right]_1^3$$

$$= \left[2\ln|t|+\ln|t^2+3|\right]_1^3$$

$$= 2\ln3+\ln12-2\ln1-\ln4$$

$$= 3\ln3$$ Ans.

29. โจทย์ จงหาค่าของ $\int_1^4 \frac{(4+5x^2)}{x^3+4x}\,dx$

วิธีทำ $\because \dfrac{4+5x^2}{x^3+4x} \equiv \dfrac{A}{x}+\dfrac{Bx+C}{x^2+4}$

$\therefore 4+5x^2 \equiv A(x^2+4)+Bx^2+Cx$

$\equiv x^2(A+B)+Cx+4A$

โดยการเทียบสัมประสิทธิ์ ได้

$A+B = 5$

$C = 0$

$4A = 4$

$\therefore A \quad 1$

$B = 4$

$$\therefore \int_1^4 \frac{(4+5x^2)dx}{x^3+4x} = \left[\int \frac{dx}{x}+4\int \frac{x\,dx}{x^2+4}\right]_1^4$$

$$= \left[\ln|x|+2\ln|x^2+4|\right]_1^4$$

$$= \ln 4+2\ln 20-\ln 1-2\ln 5$$

$$= 2\ln 2+2\ln(4\times 5)-2\ln 5$$

$$= 2\ln 2+4\ln 2+4\ln 5-4\ln 5$$

$$= 6\ln 2$$

Ans.

30. โจทย์ จงหาค่าของ $\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{(x+1)\,dx}{(x-1)(x^2+x+1)}$

วิธีทำ $\frac{x+1}{(x-1)(x^2+x+1)} \equiv \frac{A}{x-1}+\frac{Bx+C}{x^2+x+1}$

$\therefore \quad x+1 \equiv A(x^2+x+1)+(x-1)(Bx+C)$

$\equiv x^2(A+B)+x(A+C-B)+A-C$

โดยการ เทียบสัมประสิทธิ์ ได้

$A+B = 0$ ———— ①

$A+C-B = 1$ ———— ②

$A-C = 1$ ———— ③

โดยการแก้สมการ ได้ $A=\frac{2}{3}, B=-\frac{2}{3}, C=-\frac{1}{3}$

$$\therefore \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{(x+1)dx}{(x-1)(x^2+x+1)} = \frac{2}{3}\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{dx}{x-1} + \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{-\frac{2}{3}x-\frac{1}{3}}{x^2+x+1}\,dx$$

$$= \frac{2}{3}\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{dx}{x-1} - \frac{1}{3}\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{2x+1}{x^2+x+1}\,dx$$

$$= \left[\frac{2}{3}\ln|x-1| - \frac{1}{3}\ln|x^2+x+1|\right]_0^{\frac{1}{2}}$$

$$= \frac{2}{3}\ln|(\tfrac{1}{2}-1)| - \frac{1}{3}\ln|(\tfrac{1}{4}+\tfrac{1}{2}+1)| \qquad \text{Ans.}$$

$$= \frac{2}{3}\ln\left|\frac{1}{2}\right| - 13\ln\left|\frac{7}{4}\right|$$

31. โจทย์ จงหาค่าของ $\int_3^4 \frac{(5x^3-4x)\,dx}{x^4-16}$

วิธีทำ $\frac{5x^3-4x}{x^4-16} \equiv \frac{5x^3-4x}{(x+2)(x-2)(x^2+4)}$

$\therefore \quad \frac{5x^3-4x}{x^4-16} \equiv \frac{A}{x-2}+\frac{B}{x+2}+\frac{Cx+D}{x^2+4}$

$5x^3-4x \equiv A(x+2)(x^2+4)+B(x-2)(x^2+4)+(Cx+D)(x^2-4)$

โดยการเทียบสัมประสิทธิ์ ได้

$A+B+C = 5$ ———— ①

$2A-2B+D = 0$ ———— ②

$4A+4B-4C = -4$ ———— ③

$8A-8B-4D = 0$ ———— ④

โดยการแก้สมการ ได้ $A=0, B=2, C=3, D=0$

$$\therefore \int_3^4 \frac{5x^3-4x}{x^4-16}dx = 2\int_3^4 \frac{dx}{x+2}+3\int_3^4 \frac{x\,dx}{x^2+4}$$

$$= \left[2\ln|x+2|+\frac{3}{2}\ln|x^2+4|\right]_3^4$$

$$= 2\ln 6+\frac{3}{2}\ln 20-2\ln 5-\frac{3}{2}\ln 13$$

$$= 2(\ln 6-\ln 5)+\frac{3}{2}(\ln 20-\ln 13)$$

$$= 2\ln\frac{6}{5}+\frac{3}{2}\ln\frac{20}{13}$$ **Ans.**

32. โจทย์ จงหาค่าของ $\int_3^4 \frac{(x-3)\,dx}{(x-2)(x^2+2x+1)}$

วิธีทำ $\frac{x-3}{(x-2)(x+1)^2} \equiv \frac{A}{x-2}+\frac{B}{x+1}+\frac{C}{(x+1)^2}$

$$\therefore x-3 \equiv A(x+1)^2+B(x-2)(x+1)+C(x-2)$$

$$\equiv x^2(A+B)+x(2A-B+C)+A-2C$$

โดยการเทียบสัมประสิทธิ์ ได้

$$A+B = 0 \quad \text{①}$$

$$2A-B+C = 1 \quad \text{②}$$

$$A-2C = -3 \quad \text{③}$$

โดยการแก้สมการ ได้ $A=-\frac{1}{7}, B=\frac{1}{7}, C=\frac{10}{7}$

$$\therefore \int_3^4 \frac{(x-3)dx}{(x-2)(x^2+2x+1)} = -\frac{1}{7}\int_3^4 \frac{dx}{x-2}+\frac{1}{7}\int_3^4 \frac{dx}{x+1}+\frac{10}{7}\int_3^4 \frac{dx}{(x+1)^2}$$

$$= \left[-\frac{1}{7}\ln|x-2|+\frac{1}{7}\ln|x+1|-\frac{10}{7(x+1)}\right]_3^4$$

$$= \left(-\frac{1}{7}\ln 2+\frac{1}{7}\ln 5-\frac{10}{35}\right)-\left(-\frac{1}{7}\ln 1+\frac{1}{7}\ln 4-\frac{10}{28}\right)$$

$$= -\frac{1}{7}\ln 2+\frac{1}{7}\ln 5-\frac{2}{7}-\frac{2}{7}\ln 2-\frac{5}{14}$$

$$= -\frac{3}{7}\ln 2+\frac{1}{7}\ln 5-\frac{9}{14}$$ **Ans.**

33. โจทย์ จงหาค่าของ $\int_0^2 \frac{(t^3+3t)}{(t^2+1)^2}dt$

วิธีทำ $\frac{t^3+3t}{(t^2+1)^2} \equiv \frac{At+B}{t^2+1}+\frac{Ct+D}{(t^2+1)^2}$

$\therefore \quad t^3+3t \equiv (At+B)(t^2+1)+Ct+D$

$\equiv At^3+Bt^2+t(A+C)+B+D$

โดยการเทียบสัมประสิทธิ์ ได้ $A=1, B=0, C=2, D=0$

$$\therefore \int_0^2 \frac{t^3+3t}{(t^2+1)^2}dt = \int_0^2 \frac{t\,dt}{t^2+1}+\int_0^2 \frac{2t\,dt}{(t^2+1)^2}$$

$$= \left[\frac{1}{2}\ln|t^2+1|-\frac{1}{t^2+1}\right]_0^2$$

$$= \frac{1}{2}\ln 5-\frac{1}{5}-\frac{1}{2}\ln 1+1$$

$$= \frac{1}{2}\ln 5+\frac{4}{5}$$

Ans.

34. โจทย์ จงหาพื้นที่ซึ่งล้อมรอบด้วยโค้ง $y=\frac{x-1}{x^2-5x+6}$ แกน x

และเส้น $x=4, x=6$

วิธีทำ ให้ A เป็นพื้นที่ที่โจทย์ต้องการ

$$\therefore \quad A \quad \int_4^6 \frac{x-1}{x^2-5x+6}dx$$

$\because \quad \frac{x-1}{x^2-5x+6} \equiv \frac{P}{x-3}+\frac{Q}{x-2}$ (เมื่อ P, Q เป็นค่าคงที่)

$\therefore \quad x-1 \equiv P(x-2)+Q(x-3)$

$\equiv x(P+Q)-2p-3Q$

โดยการเทียบสัมประสิทธิ์ ได้

$P+Q = 1$ ——— 1

$-2p-3Q = -1$ ——— 2

โดยการแก้สมการ ได้ $P=2, Q=-1$

$$\therefore \int_4^6 \frac{x-1}{x^2-5x+6}\,dx = 2\int_4^6 \frac{dx}{x-3} - \int_4^6 \frac{dx}{x-2}$$

$$= \Big[2\ln|x-3| - \ln|x-2|\Big]_4^6$$

$$= 2\ln 3 - \ln 4 - 2\ln 1 + \ln 2$$

$$= 2\ln 3 - \ln 2$$

$$= (2\times 1.0986) - 0.6931$$

∴ พื้นที่ทั้งหมด $= 1.5$ ตารางหน่วย Ans.

35. โจทย์ ผู้ประกอบหัตถกรรมผู้หนึ่งได้ดำเนินกิจการมาได้ 4 ปีแล้ว รายได้จากการขายของเขาเพิ่มขึ้นอย่างสม่ำเสมอ ด้วยอัตรา $\frac{t^3+3t^2+6t+7}{t^2+3t+2}$ ล้านบาทต่อปี เมื่อ t เป็นจำนวนปีที่บริษัทได้ดำเนินการมาและได้คาดการว่า รายได้ทั้งหมดจากการขายจะเพิ่มขึ้นด้วยอัตราเดียวกันในอีก 2 ปีข้างหน้า ถ้ารายได้จากการขายเมื่อสิ้น 1 ปี เป็น 6 ล้านบาท จงหารายได้จากการขายเมื่อสิ้นหนึ่งปีนับจากปัจจุบัน

วิธีทำ ให้ B บาท เป็นรายได้จากการขาย เมื่อสิ้น 1 ปี นับจากปัจจุบัน $\therefore\ t=2$

$$\because \frac{dB}{dt} = \frac{t^3+3t^2+6t+7}{t^2+3t+2}$$

$$\therefore B = \int \frac{t^3+3t^2+6t+7}{t^2+3t+2}\,dt$$

$$\because \frac{t^3+3t^2+6t+7}{t^2+3t+2} = t + \frac{4t+7}{t^2+3t+2}$$

และ $\frac{4t+7}{t^2+3t+2} \equiv \frac{A_1}{t+1} + \frac{A_2}{t+2}$ (เมื่อ A_1, A_2 เป็นค่าคงที่)

$$\therefore 4t+7 \equiv A_1(t+2) + A_2(t+1)$$

$$\equiv t(A_1+A_2) + 2A_1 + A_2$$

โดยการเทียบสัมประสิทธิ์ ได้

$$A_1+A_2 = 4 \qquad \text{——— (1)}$$

$$2A_1+A_2 = 7 \quad \text{———— } 2$$

โดยการแก้สมการ ได้ $A_1 = 3, A_2 = 1$

$$\therefore \int \frac{t^3+3t^2+6t+7}{t^2+3t+2}\,dt = \int t\,dt + 3\int \frac{dt}{t+1} + \int \frac{dt}{t+2}$$

หรือ $B = \frac{t^2}{2} + 3\ln|t+1| + \ln|t+2| + C$

$B = 6$ เมื่อ $t = 1$

$$\therefore \quad 6 = \frac{1}{2} + 3\ln 2 + \ln 3 + C$$

$$C = 6 - \frac{1}{2} - 3\ln 2 - \ln 3$$

หา B เมื่อ $t = 2$

$$\therefore \quad B = \frac{4}{2} + 3\ln 3 + \ln 4 + 6 - \frac{1}{2} - 3\ln 2 - \ln 3$$

$$= \frac{15}{5} + 2\ln 3 - \ln 2$$

$$= \frac{15}{2} + 2(1.6094) - 0.6931$$

$$= 10.0257$$

$\therefore$ รายได้จากการขายเป็นเงิน 10,025,700 บาท Ans.

ข้อสรุป 8.4 การประมาณค่าของการอินทิเกรต มี 2 วิธี

กฎสี่เหลี่ยมคางหมู (Trapezoidal Rule)

วิธีการ : เนื่องจาก $\int_a^b f(x)dx$ แทนพื้นที่ในช่วงปิด $[a,b]$ จึงแบ่ง $[a,b]$ ออกเป็นส่วน ๆ เท่า ๆ กัน แล้วหาค่าของฟังก์ชัน ณ จุดแบ่ง สมมุติว่าแบ่งออกเป็น n ช่วงเท่า ๆ กัน แต่ละช่วงยาว $\Delta x = \frac{b-a}{n}$ ทั้งหมดมี $n+1$ จุด จะได้

$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{1}{2}\Delta x\,[f(x_0) + 2f(x_1) + 2f(x_2) + \dots + 2f(x_{n-1}) + f(x_n)]$$

เป็นสูตรของกฎสี่เหลี่ยมคางหมู

ให้ ε_T เป็นค่าที่คลาดเคลื่อน

ได้ $\varepsilon_T = \int_a^b f(x)dx - T$

เมื่อ T คือค่าประมาณของ $\int_a^b f(x)dx$ ซึ่งหาได้จากกฎสี่เหลี่ยมคางหมู

และจะมี η บางจำนวนบน $[a,b]$ ซึ่ง

$$\varepsilon_T = -\frac{1}{12}(b-a)\,f''(\eta)(\Delta x)^2$$

กฎซิมสัน (Symson's rule)

$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{1}{3}\Delta x[f(x_0) + 4f(x_1) + 2f(x_2) + 4f(x_3) + 2f(x_4) + \dots + 2f(x_{2n-2}) + 4f(x_{2n-1} + f(x_{2n})]$$

เมื่อ $\Delta x = \frac{b-a}{2n}$

และ $\varepsilon_s = \int_a^b f(x)dx - s$

เมื่อ x คือค่าประมาณของ $\int_a^b f(x)dx$ ซึ่งหาได้จากกฎซิมสัน

และจะมี η บางจำนวนใน $[a,b]$ ซึ่ง

$$\varepsilon_s = -\frac{1}{180}(b-a)\,f^{(iv)}(\eta)(\Delta x)^4$$

เฉลยแบบฝึกหัด 84

คำสั่ง ข้อ 1 ถึง 10 จงหาค่าประมาณของอินทิกรัลจำกัดเขตที่กำหนดให้ โดยใช้กฎสี่เหลี่ยมคางหมู ด้วยค่า n ที่กำหนดให้ ตอบทศนิยมสามตำแหน่ง ข้อ 1 ถึง 4 จงหาค่าที่แน่นอนของอินทิกรัล จำกัดเขต และเปรียบเทียบกับค่าประมาณที่หาได้

1. **โจทย์** $\int_1^2 \frac{dx}{x}, n = 5$

วิธีทำ $\because [a, b] = [1, 2]$ และ $n = 5$

$$\therefore \Delta x = \frac{b-a}{n} = \frac{1}{5} = 0.2$$

$$\int_1^2 \frac{dx}{x} \approx \frac{0.2}{2}\left[f(x_0)+2f(x_1)+2f(x_2)+2f(x_3)+2f(x_4)+f(x_5)\right]$$

เมื่อ $f(x) = \frac{1}{x}$

ผลบวกในวงเล็บแสดงด้วยตารางข้างล่างนี้

i	x_i	$f(x_i)$	K_i	$K_i f(x_i)$
0	1	1	1	1
1	1.2	0.8333	2	1.6666
2	1.4	0.7143	2	1.4286
3	1.6	0.625	2	1.250
4	1.8	0.555	2	1.110
5	2	0.5	1	0.5
				$\sum_{i=0}^{5} K_i f(x_i) = 6.9552$

$$\therefore \int_1^2 \frac{dx}{x} \approx \frac{0.2}{2}(6.9552)$$

$$\approx 0.6955$$

$$\because \int_1^2 \frac{dx}{x} = \ln|x|\Big|_1^2$$

$$= \ln 2 - \ln 1$$

∴ ค่าที่แน่นอน $= 0.693$

2. โจทย์ $\int_2^{10} \frac{dx}{1+x}$, $n = 8$

วิธีทำ $\because [a, b] = [2, 10]$ และ $n = 8$

$$\therefore \Delta x = \frac{b-a}{n} = \frac{10-2}{8} = 1$$

$$\therefore \int_2^{10} \frac{dx}{1+x} \approx \frac{1}{2}\Big[f(x_0)+2f(x_1)+2f(x_2)+2f(x_3)+2f(x_4)$$

$$+2f(x_5)+2f(x_6)+2f(x_7)+f(x_8)\Big]$$

เมื่อ $f(x) = \frac{1}{1+x}$

ผลบวกในวงเล็บแสดงด้วยตารางข้างล่างนี้

i	x_i	$f(x_i)$	Ki	$k_i f(x_i)$
0	2	0.3333	1	0.3333
1	3	0.25	2	0.5
2	4	0.2	2	0.4
3	5	0.1667	2	0.3334
4	6	0.1429	2	0.2858
5	7	0.125	2	0.25
6	8	0.111	2	0.222
7	9	0.1	2	0.2
8	10	0.0909	1	0.0909
				$\sum_{i=0}^{8} k_i f(x_i) = 2.6154$

$\therefore \int_2^{10} \frac{dx}{1+x} \approx 1.308$ Ans.

$$\because \int_2^{10} \frac{dx}{1+x} = \ln|1+x|\Big]_2^{10}$$

$$= \ln 11 - \ln 3$$

$$= (\ln 1.1 + \ln 10) - \ln 3$$

$$= (0.0953 + 2.30259) - 1.0986$$

$\therefore$ ค่าที่แน่นอน $= 1.299$ Ans.

๓. **โจทย์** $\int_0^2 x^3 dx\ ,\ n = 4$

วิธีทำ $\because [a, b] \quad = \quad [0, 2]$ และ $n = 4$

$$\therefore \quad \Delta x \quad = \quad \frac{b-a}{n} \; = \; \frac{2-0}{4} \; = \; 0.5$$

$$\therefore \quad \int_0^2 x^3 dx \quad \approx \quad \frac{0.5}{2}\left[f(x_0)+2f(x_1)+2f(x_2)+2f(x_3)+f(x_4)\right]$$

เมื่อ $f(x) \; = \; x^3$

ผลบวกในวงเล็บแสดงด้วยตารางข้างล่างนี้

i	x_i	$f(x_i)$	K_i	$K_i f(x_i)$
0	0	0	1	0
1	0.5	0.125	2	0.25
2	1	1	2	2
3	1.5	3.375	2	6.75
4	2	8	1	8
				$\sum_{i=0}^{4} K_i f(x_i) = 17$

$$\therefore \quad \int_0^2 x^3 dx \quad \approx \quad 0.25 \times 17 \approx 4.25$$

$$\because \quad \int_0^2 x^3 dx \quad = \quad \left.\frac{x^4}{4}\right|_0^2 \quad = \quad \frac{16}{4} = 4$$

$\therefore$ ค่าประมาณ $\quad = \quad 4$ **Ans.**

4. **โจทย์** $\int_0^2 x\sqrt{4-x^2}\,dx\ ,\ n = 8$

$$\therefore \quad [a, b] \quad = \quad [0, 2]$$

$$\Delta x = \frac{b-a}{n} = \frac{2}{8} = \frac{1}{4} = 0.25$$

$$\therefore \int_0^2 x\sqrt{4-x^2}\,dx \approx \frac{0.25}{2}[f(x_0)+2f(x_1)+2f(x_2)+2f(x_3)+2f(x_4)+2f(x_5)+2f(x_6)+2f(x_7)+f(x_8)]$$

เมื่อ $f(x) = x\sqrt{4-x^2}$

i	x_i	$f(x_i)$	K_i	$K_i f(x_i)$
0	0	0	1	0
1	0.25	0.4961	2	0.9922
2	0.5	0.9683	2	1.9366
3	0.75	1.3905	2	2.7810
4	1	1.7321	2	3.4642
5	1.25	1.9516	2	3.9032
6	1.5	1.9843	2	3.9686
7	1.75	1.6944	2	3.3888
8	2	0	1	0
				$\sum_{i=0}^{8} K_i f(x_i) = 20.4346$

$$\therefore \int_0^2 x\sqrt{4-x^2}\,dx \approx 0.639$$ Ans.

5. $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1+x^2}}$, $n=5$

วิธีทำ $\because$ $[a,b] = [0,1]$ และ $n=5$

$$\therefore \Delta x = \frac{b-a}{n} = \frac{1}{5} = 0.2$$

$$\therefore \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1+x^2}} \approx \frac{0.2}{2}\Big[f(x_0)+2f(x_1)+2f(x_2) +2f(x_3)+2f(x_4)+f(x_5)\Big]$$

เมื่อ $f(x) = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$

ผลบวกในวงเล็บแสดงด้วยตารางข้างล่างนี้

i	x_i	$f(x_i)$	K_i	$K_i f(x_i)$
0	0	1	1	1
1	0.2	0.9806	2	1.9612
2	0.4	0.9285	2	1.8570
3	0.6	0.8576	2	1.7152
4	0.8	0.7809	2	1.5618
5	1	0.7272	1	0.7272
				$\sum_{i=0}^{5} K_i f(x_i) = 8.8224$

$$\therefore \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1+x^2}} \approx 0.1\times 8.8224$$

$$\approx 0.882$$ Ans.

6. โจทย์ $\int_2^3 \sqrt{1+x^2}\,dx, \quad n=6$

วิธีทำ $\because [a, b] = [2, 3]$ และ $n=6$

$$\Delta x = \frac{b-a}{n} = \frac{3-2}{6} = \frac{1}{6}$$

$$= 0.166$$

$$\therefore \int_2^3 \sqrt{1+x^2}\,dx \approx \frac{0.166}{2}\Big[f(x_0)+2f(x_1)+2f(x_2) +2f(x_3)+2f(x_4)+2f(x_5)+f(x_6)\Big]$$

เมื่อ $f(x) = \sqrt{1+x^2}$

ผลบวกในวงเล็บแสดงด้วยตารางข้างล่างนี้

i	x_i	$f(x_i)$	K_i	$K_i f(x_i)$
0	2	2.236	1	2.236
1	2.166	2.3857	2	4.7714
2	2.332	2.5374	2	5.0748
3	2.498	2.6907	2	5.3814
4	2.664	2.8455	2	5.691
5	2.830	3.0015	2	3.1637
6	2.996	3.1585	1	3.1585
				$\sum_{i=0}^{6} K_i f(x_i) = 29.477$

$$\therefore \int_2^3 \sqrt{1+x^2}\,dx \approx \frac{0.166}{2} \times 29.477$$

$$\approx 24.466$$ Ans.

7. **โจทย์** $\int_0^1 e^{x^2}\,dx,\ n=5$

$\because\ [a,b] = [0,1]$ และ $n=5$

$$\Delta x = \frac{b-a}{n} = \frac{1-0}{5} = \frac{1}{5} = 0.2$$

$$\therefore \int_0^1 e^{x^2}\,dx \approx \frac{0.2}{2}\left[f(x_0)+2f(x_1)+2f(x_2)+2f(x_3)+2f(x_4)+2f(x_5)+f(x_6)\right]$$

เมื่อ $f(x) = e^{x^2}$

ผลบวกในวงเล็บแสดงด้วยตารางข้างล่างนี้

i	x_i	$f(x_i)$	K_i	$K_i f(x_i)$
0	0	1	1	1
1	0.2	1.0408	2	2.0816

2	0.4	1.7355	2	3.4710
3	0.6	1.4333	2	2.8666
4	0.8	1.8965	2	3.7930
5	1	2.7183	1	2.7183
				$\sum_{i=0}^{5} K_i f(x_i) = 14.9305$

$$\therefore \int_0^1 e^{x^2}\,dx \approx \frac{0.2}{2} \times 14.9305$$

$$\approx 1.493$$

Ans.

8. **โจทย์** $\int_2^3 \ln(1+x^2)\,dx,\ n=4$

วิธีทำ $\because\ [a, b] = [2, 3]$

$$\therefore\ \Delta x = \frac{b-a}{n} = \frac{3-2}{4} = \frac{1}{4} = 0.25$$

$$\therefore \int_2^3 \ln(1+x^2)\,dx \approx \frac{0.25}{2}\left[f(x_0)+2f(x_1)+2f(x_2)+2f(x_3)+f(x_4)\right]$$

เมื่อ $f(x) = \ln(1+x^2)$

ผลบวกในวงเล็บแสดงด้วยตารางข้างล่างนี้

i	x_i	$f(x_i)$	K_i	$K_i f(x_i)$-1
0	2.00	1.6094	1	1.6094
1	2.25	1.8017	2	1.6034
2	2.50	1.9810	2	3.9620
3	2.75	2.1471	2	4.2942
4	3.00	2.1972	1	2.1972
				$\sum_{i=0}^{4} K_i f(x_i) = 13.666$

$\therefore \quad \int_2^3 \ln(1+x^2)\,dx \quad \approx \quad 1.708$ Ans.

9. **โจทย์** $\int_0^2 \sqrt{1+x^4}\,dx$, n = 6

วิธีทำ $\because \quad [a, b] = [0, 2]$ และ $n = 6$

$\Delta x = \frac{2}{6} = 0.333$

$$\therefore \int_0^2 \sqrt{1+x^4}\,dx \approx \frac{0.333}{2}\left[f(x_0)+2f(x_1)+2f(x_2)+2f(x_3)+f(x_4)\right]$$

เมื่อ $f(x) = \sqrt{1+x^4}$

ผลบวกในวงเล็บแสดงด้วยตารางข้างล่างนี้

i	x_i	$f(x_i)$	Ki	$K_i f$ (Xi)
0	0	1	1	1
1	0.333	1.006	2	2.012
2	0.666	1.0939	2	2.1878
3	0.999	1.4128	2	2.8256
4	1.332	2.0366	2	4.0732
5	1.665	2.9471	2	5.8942
6	1.998	4.1153	1	4.1153
				$\sum_{i=0}^{6} K_i f(x_i) = 22.1081$

$\therefore \quad \int_0^2 \sqrt{1+x^4}\,dx \quad \approx \quad 3.681$ Ans.

10. **โจทย์** $\int_0^1 \sqrt{1+x^2}\,dx$, n = 4

$\because \quad [a, b] = [o, 1]$ และ $n = 4$

$$\Delta x = \frac{b-a}{n} = \frac{1}{4} = 0.25$$

$$\int_0^1 \sqrt{1+x^2}\, dx \approx \frac{0.25}{2}\left[f(x_0)+2f(x_1)+2f(x_2) + 2f(x_3)+f(x_4)\right]$$

เมื่อ $f(x) = \sqrt{1+x^2}$

ผลบวกในวงเล็บแสดงด้วยตารางข้างล่างนี้

i	x_i	$f(x_i)$	K_i	$K_i f(x_i)$
0	0	1	1	1
1	0.25	1.0308	2	2.0616
2	0.5	1.1180	2	2.2360
3	0.75	1.25	2	2.5
4	1	1.4142	1	1.4142
				$\sum_{i=0}^{4} K_i f(x_i) = 9.2118$

$$\therefore \int_0^1 \sqrt{1+x^2}\, dx \approx \frac{0.25}{2}(9.2118)$$

$$\approx 1.151$$

Ans.

11. **โจทย์** จงหาขอบเขตของความคลาดเคลื่อนในข้อ 1

$$\int_1^2 \frac{dx}{x},\ n = 5$$

วิธีทำ หาค่าต่ำสุดสัมบูรณ์ และค่าสูงสุดสัมบูรณ์ของ $f(x)$ บน $[1, 2]$

$$\Delta x = \frac{2-1}{5} = \frac{1}{5}$$

$$\because \quad f(x) = \frac{1}{x}$$

$$f'(x) = -x^{-2} = -\frac{1}{x^2}$$

$$f''(x) = 2x^{-3} = \frac{2}{x^3}$$

$$f'''(x) = -6x^{-4} = \frac{-6}{x^4}$$

$\because f'''(x) < 0$ สำหรับทุก ๆ x บนช่วง [1, 2] แล้ว $f''(x)$ เป็นฟังก์ชันที่ลดลงในช่วง [1, 2] ดังนั้นค่าต่ำสุดสัมบูรณ์ ของ f'' บน [1, 2] คือ $f''(2)$ และค่าสูงสุดสัมบูรณ์ของ f'' บน [1, 2] คือ $f''(1)$

$f''(2) = \frac{2}{(2)^3} = \frac{2}{8} = \frac{1}{4}$ และ $f''(1) = 2$

ให้ $\eta = 1$ แทนในสมการ $\Sigma_T = -\frac{1}{12}(b-a)f''(\eta)(\Delta x)^2$

$$\therefore \Sigma_T = -\frac{1}{12}(1)(2)\left(\frac{1}{25}\right) = -0.007$$

ให้ $\eta = 2$ แทนในสมการ Σ_T ได้

$$\Sigma_T = -\frac{1}{12}(1)\left(\frac{1}{4}\right)\left(\frac{1}{25}\right) = -0.0008$$

ดังนั้น $-0.007 \leqslant \Sigma_T \leqslant -0.0008$ Ans.

12. **โจทย์** จงหาขอบเขตของความคลาดเคลื่อนของ

$$\int_2^{10} \frac{dx}{1+x}, \ n = 8$$

วิธีทำ หาค่าต่ำสุดสัมบูรณ์ และค่าสูงสุดสัมบูรณ์บน [2, 10]

$$\because f(x) = \frac{1}{1+x} = (1+x)^{-1}$$

$$f'(x) = -(1+x)^{-2} = \frac{-1}{1+x^2}$$

$$f''(x) = 2(1+x)^{-3} = \frac{2}{(1+x)^3}$$

$$f'''(x) = -6(1+x)^{-4} = \frac{-6}{(1+x)^4}$$

$\because f'''(x) < 0$ สำหรับทุก ๆ ค่าของ x บนช่วง $[0, 3]$ แล้ว $f''(x)$ เป็นฟังก์ชันที่ลดลง

ในช่วง $[2, 10]$ ดังนั้นค่าต่ำสุดสัมบูรณ์ ของ f'' บน $[2, 10]$ คือ $f''(10)$ และค่าสูงสุดสัมบูรณ์ของ f'' บน $[2, 10]$ คือ $f''(2)$

$$f''(2) = \frac{2}{3^3} = 0.25, \; f''(10) = \frac{2}{(11)^3} = 0.0015$$

ให้ $\eta = 10$ แทนในสมการ $\Sigma_T = \frac{-1}{12}(b-a) f''(\eta)(\Delta x)^2$

$\therefore \Sigma_T = \frac{-1}{12}(8)(0.0015)(1) = -0.001$

ให้ $\eta = 2$ แทนในสมการ Σ_T

$$\therefore \Sigma_T = \frac{-1}{12}(8)(0.25)(1) = -0.167$$

ดังนั้น $-0.167 \leqslant \Sigma_T \leqslant -0.001$ Ans.

13. **โจทย์** จงหาค่าขอบเขตของความคลาดเคลื่อน จาก $\int_0^2 x^3 dx, \; n = 4$

วิธีทำ หาค่าต่ำสุดสัมบูรณ์ และค่าสูงสุดสัมบูรณ์ของ $f(x)$

บนช่วง $[0, 2]$ มี $\Delta x = \frac{2-0}{4} = \frac{1}{2}$

$$f(x) = x^3$$

$$f'(x) = 3x^2, \; f''(x) = 6x, \; f'''(x) = 6$$

$\because f'''(x) > 0$ สำหรับทุก ๆ ค่าของ x บนช่วง $[0, 2]$

แล้ว f'' เป็นฟังก์ชันเพิ่มขึ้นบนช่วง $[0, 2]$

$\therefore$ ค่าต่ำสุดสัมบูรณ์ของ f'' บน $[0, 2]$ คือ $f''(0)$

และค่าสูงสุดสัมบูรณ์ของ f'' บน $[0, 2]$ คือ $f''(2)$

$f''(0) = 0$ และ $f''(2) = 12$

ให้ $\eta = 0$ แทนในสมการ $\Sigma_T = \frac{-1}{12}(b-a) f''(\eta)(\Delta x)^2$

ได้ $\Sigma_T = \frac{-1}{12}(2)(0)(\frac{1}{4}) = 0$

ให้ $\eta = 2$ แทนในสมการ Σ_T