$F_x(x, y, \lambda) = 2x + y - 2 + \lambda = 0$

$F_y(x, y, \lambda) = x + 4y - 2\lambda = 0$

$F_\lambda(x, y, \lambda) = x - 2y + 1 = 0$

$x = \frac{1}{8}, y = \frac{9}{16}$

จุดวิกฤต คือ $(\frac{1}{8}, \frac{9}{16})$

1.3 $f(x, y) = 25 - x^2 - y^2$ มีเงื่อนไข $x^2 + y^2 - 4y = 0$

ให้ $g(x, y) = x^2 + y^2 - 4y = 0$

ให้ F ซึ่ง

$F(x, y, \lambda) = f(x, y) + \lambda g(x, y)$

$= 25 - x^2 - y^2 + \lambda(x^2 + y^2 - 4y)$

$F_x(x, y, \lambda) = -2x + 2\lambda x = 0$

$F_y(x, y, \lambda) = -2y + 2\lambda y - 4\lambda = 0$

$F_\lambda(x, y, \lambda) = x^2 + y^2 - 4y = 0$

ได้ $x = 0, y = 0, 4, \lambda = 2$

$\because$ จุดวิกฤต คือ $(0,0)$: หรือ $(0, 4)$

1.4 $t(x, y) = 4x^2 + 2y^2 + 5$ มีเงื่อนไข $x^2 + y^2 - 2y = 0$

ให้ $g(x_1 y) = x^2 + y^2 - 2y$

ให้ F ซึ่ง

$F(x, y, \lambda) = f(x, y) + \lambda g(x, y)$

$= 4x^2 + 2y^2 + 15 + \lambda(x^2 + y^2 - 2y)$

$F_x(x, y, \lambda) = 8x + 2\lambda x = 0$

$F_y(x, y, \lambda) = 4y + 2\lambda y - 2\lambda = 0$

$F_\lambda(x, y, \lambda) = x^2 + y^2 - 2y = 0$

แก้สมการได้ $x = 0, y = 0, 2$

จุดวิกฤตคือ $(0, 0)$ หรือ $(0, 2)$

1.5 $f(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2$ มีเงื่อนไข $3x - 2y + z - 4 = 0$

ให้ $g(x,y,z) = 3x - 2y + z - 4 = 0$

$$F(x,y,z,\lambda) = f(x,y,z) + \lambda g(x,y,2)$$

$$= x^2 \div y^2 + z^2 + \lambda(3x - 2y + z - 4)$$

$$F_x(x,y,z,\lambda) = 2x + 3\lambda = 0$$

$$F_y(x,y,z,\lambda) = 2y - 2\lambda = 0$$

$$F_z(x,y,z,\lambda) = 2z + \lambda = 0$$

$$F\lambda(x,y,z,\lambda) = 3x - 2y + z - 4 = 0$$

แก้สมการ ได้ $x = +\frac{6}{7}$, $y = -\frac{4}{7}$, $z = \frac{2}{7}$, $\lambda = -\frac{4}{7}$

$\therefore$ จุดวิกฤต คือ $(\frac{6}{7}, -\frac{4}{7}, \frac{2}{7})$

1.6 $f(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2$ มีเงื่อนไข $y^2 - x^2 = 1$

ให้ $g(x,y,z) = y^2 - x^2 - 1 = 0$

$$F(x,y,z,\lambda) = f(x,y,z) + \lambda g(x,y,z)$$

$$= x^2 + y^2 + z^2 + \lambda(y^2 - x^2 - 1)$$

$$F_x(x,y,z,\lambda) = 2x - 2\lambda x = 0$$

$$F_y(x,y,z,\lambda) = 2y + 2\lambda y = 0$$

$$F_z(x,y,z,\lambda) = 2z = 0$$

$$F\lambda(x,y,z,\lambda) = y^2 - x^2 - 1 = 0$$

แก้สมการได้ $x = 0$, $y = \pm 1$, $z = 0$

$\therefore$ จุดวิกฤตคือ $(0, 1, 0)$, $(0, -1, 0)$

2. จงใช้วิธีคูณของลากรานจ์หาค่าฟังก์ชันต่ำสุดสัมพัทธ์ของ

2.1 $f(x,y,z) = x^2 + 3y^2 + 2z^2$ ซึ่งมีเงื่อนไข

$x - 2y - z = 6$ และ $x - 3y + 2z = 4$

วิธีทำ ให้ $g(x,y,z) = x - 2y - z - 6 = 0$

$$h(x,y,z) = x - 3y + 2z - 4 = 0$$

$$f(x, y, z, \lambda, \mu) = x^2 + 3y^2 + 2z^2 + \lambda(x-2y-z-6) + \mu(x-3y+2z-4)$$

$$F_x = 2x + \lambda + \mu = 0$$

$$F_y = 6y-2A-3\mu = o$$

$$F_z = 4z-\lambda+2\mu = 0$$

$$F\lambda = x-2y-z-6 = 0$$

$$F_\mu = x-3y+2z-4 = 0$$

แก้สมการได้ $x = \frac{142}{3}$, $Y = 18$, $z = \frac{16}{3}$

จุดวิกฤตคือ $(\frac{142}{3}, 18, \frac{16}{3})$

ค่าต่ำสุดของฟังก์ชั่น $= f(\frac{142}{3}, 18, \frac{16}{3}) = \frac{29424}{9} = 3269\frac{1}{3}$

2.2 $f(x,y,z) = x^2 + Y^2 + z^2$ ซึ่งมีเงื่อนไข

$x + Y + 2z = 1$ และ

$3x - 2y + z = -4$

$$f(x, y, z, \lambda\mu) = x^2 + y^2 + z^2 + \lambda(x + y + 2z - 1) + \mu(3x-2y+z+4)$$

$$F_x = 2x + \lambda + 3\mu = 0$$

$$F_y = 2y + \lambda - 2\mu = 0$$

$$F_z = 2z + 2\lambda + \mu = 0$$

$$F\lambda = x + y + 2z - 1 = 0$$

$$F\mu = 3x - 2y + z + 4 = 0$$

แก้สมการได้ $x = -\frac{11}{15}$, $y = \frac{16}{15}$, $z = \frac{1}{3}$

$$\therefore f(-\frac{11}{15}, \frac{16}{15}, \frac{1}{3}) = (-\frac{11}{15})^2 + (\frac{16}{15})^2 + (\frac{1}{3})^2 = \frac{3578}{2025}$$

3. ถ้า $U(x, y, z, s, t) = xyzst$ เกี่ยวข้องกับสินค้า A, B, C, D และ E ซึ่งผู้บริโภค ซื้อสินค้า x หน่วยของ A, y หน่วยของ B, z หน่วยของ C, s หน่วยของ D และ t หน่วยของ E เป็นประจำทุกสัปดาห์ ถ้าราคาต่อหน่วยของสินค้า A, B, C, D และ E เป็น 2 บาท, 3 บาท, 4 บาท, 1 บาท และ 5 บาท ตามลำดับ ผู้บริโภคกำหนดค่าใช้จ่ายสำหรับสินค้าทั้ง 5 ชนิดไว้ สัปดาห์ละ 150 บาท จะหาว่าผู้บริโภคควรจะซื้อสินค้าแต่ละชนิดเป็นจำนวนเท่าใดใน 1 สัปดาห์ เพื่อให้ได้ดัชนีอรรถประโยชน์สูงสุด

วิธีทำ ต้องการหาค่า x,y,z,s และ t ที่ทำให้ u(x,y,z,s,t) มีค่าสูงสุด

โดยมี $2x+3y+4z+s+5t = 150$

ให้ $g(x, y, z, s, t) = 2x + 3y + 4z + s + 5t - 150 = 0$

ฟังก์ชันช่วยคือ

$$F(x, y, z, s, t, \lambda) = x(x, y, z, s, t) + \lambda g(x, y, z, s, t))$$

$$= x y z s t + \lambda(2x + 3y + 4z + s + 5t - 150)$$

หาจุดวิกฤต

$F_x = y z s t + 2\lambda = 0$

$F_y = x z s t + 3\lambda = 0$

$F_z = x y s t + 4\lambda = 0$

$F_s = x y z t + \lambda = 0$

$F_t = x y z s + 5\lambda = 0$

$F_\lambda = 2x + 3y + 4z + s + 5t - 150 = 0$

แก้สมการได้ $x = 15,\ y = 10,\ z = \frac{15}{2},\ S = 30,\ t = 6$

$\therefore$ จุดวิกฤตคือ (15, 10, 15 2, 30, 6) และ u (x,y,z,s,t) = 202500

ผู้บริโภคควรจะซื้อสินค้าแต่ละชนิดเป็น 15 หน่วยของ A, 10 หน่วยของ B, $\frac{15}{2}$ หน่วยของ C, 30 หน่วยของ D และ 6 หน่วยของ E เพื่อให้ได้ดัชนีอรรถประโยชน์สูงสุด

4. บริษัทแห่งหนึ่งมีโรงงาน 3 แห่ง ซึ่งแต่ละโรงงานผลิตสินค้าชนิดเดียวกัน ถ้าโรงงาน A ผลิต x หน่วย, โรงงาน B ผลิต y หน่วย และโรงงาน C ผลิต z หน่วย โดยมีต้นทุนการผลิตของแต่ละโรงงานเป็น $(3x^2 + 200)$ บาท, $(y^2 + 400)$ บาท $(2z^2 + 300)$ บาท ตามลำดับ และถ้ามีผู้สั่งซื้อสินค้าชนิดนี้เป็นจำนวน 1100 หน่วย บริษัทควรจะกำหนดให้แต่ละโรงงานผลิตสินค้าเป็นจำนวนเท่าใด เพื่อให้รวมได้เต็มตามจำนวนที่สั่งซื้อ และต้นทุนการผลิตทั้งหมดต่ำสุดด้วย

ต้นทุนการผลิต $= (3x^2 + 200) + (y^2 + 400) + (2z^2 + 300)$

$u(x, y, z) = 3x^2 + y^2 + 2z^2 + 900$

$g(x, y, z) = x + y + z - 1100 = 0$

$F(x, y, z, \lambda) \quad = \quad u(x, y, z) + \lambda g(x, y, z)$

$\qquad\qquad\qquad\quad = \quad 3x^2 + y^2 + 2z^2 + 900 + \lambda(x + y + z - 1100)$

$F_x \quad = \quad 6x + \lambda = 0$

$F_y \quad = \quad 2y + \lambda = 0$

$F_z \quad = \quad 4z + \lambda = 0$

$F_\lambda \quad = \quad x + y + z - 1100 = 0$

แก้สมการทั้ง 4 ได้ $x = 200,\ y = 600,\ z = 300$

$\therefore$ จุดวิกฤตคือ (200, 600, 300)

ต้นทุนในการผลิตต่ำสุดคือ $\mathbf{u}(200, 600, 300) = 660900$ บาท

5. บริษัทแห่งหนึ่งผลิตเครื่องคำนวณไฟฟ้าออกมาจำหน่ายสองแบบ คือ แบบธรรมดาและแบบพิเศษ ถ้า x เป็นจำนวนเครื่องคำนวณไฟฟ้าแบบธรรมดา และ y เป็นจำนวนเครื่องคำนวณไฟฟ้าแบบพิเศษ และต้นทุนการผลิตเครื่องคำนวณไฟฟ้า ทั้งสองแบบเป็น

$C(x, y) \quad = \quad 2x^2 - 12y + 6xy$

จงหาว่าบริษัทควรจะผลิตเครื่องคำนวณไฟฟ้าทั้งสองแบบออกมาเป็นจำนวนแบบละเท่าใดในหนึ่งวัน เพื่อให้ต้นทุนการผลิตมีค่าต่ำสุด ทั้งนี้กำหนดให้ว่าบริษัทสามารถผลิตเครื่องคำนวณไฟฟ้าได้วันละ 406 เครื่อง

วิธีทำ

[illegible]

$x + y \quad = \quad 406$

ให้ $g(x, y) \quad = \quad x + y - 406$

$F(x, y, \lambda) \quad = \quad C(x, y) + \lambda g(x, y)$

$\qquad\qquad\quad = \quad 2x^2 - 12y + 6xy + \lambda(x + y - 406)$

$F_x \quad = \quad 4x + 6y + \lambda = 0$

$F_y \quad = \quad -12 + 6x + \lambda = 0$

$F_\lambda \quad = \quad x + y - 406 = 0$

$x = 306, y = 100$

$\therefore$ ต้นทุนในการผลิตต่ำสุดคือ $C(306, 100) = 369{,}672$ บาท

6. บริษัท แห่งหนึ่งผลิตสินค้า 2 ชนิด A และ B โดยใช้เครื่องจักรอัตโนมัติแบบเดียวกัน ถ้า x เป็นจำนวนเครื่องจักรที่ใช้ผลิตสินค้า A และ y เป็นจำนวนเครื่องจักรที่ใช้ผลิตสินค้า B และต้นทุนการผลิตสินค้า A และ B ต่อวันเป็น

$$C(x,y) = 200 + 10x + y^2$$

จงหาจำนวน x และ y ที่ควรใช้ผลิตสินค้า A และ B โดยให้ต้นทุนต่ำสุด ถ้ากำหนดว่าเครื่องจักรมีทั้งหมด 12 เครื่อง

วิธีทำ $C(x,y) = 200 + 10x + y^2$

$x + Y = 12$

ให้ $g(x, y) = x + y - 12$

$F(x, y, \lambda) = C(x, y) + \lambda g(x, y)$

$= 200 + 10x + y^2 + \lambda(x + y - 12)$

$F_x = 10 + \lambda = 0$

$F_y = 2y + \lambda = 0$

$F_\lambda = x + y - 12 = 0$

$\therefore$ แก้สมการ $\lambda = -10, y = 5, x = 7$

$\therefore$ จุดวิกฤต (7, 5)

จะต้องใช้เครื่องจักร 7 เครื่องผลิตสินค้าชนิด A

และใช้เครื่องจักร 5 เครื่องผลิตสินค้าชนิด B เพื่อให้ต้นทุนต่ำสุด

7. บริษัทแห่งหนึ่งมีโรงงานสองแห่งไว้ผลิตสินค้าชนิดเดียวกัน ถ้าโรงงานแห่งแรกสามารถผลิตได้ x หน่วย และโรงงานแห่งที่สองผลิตได้ y หน่วยโดยมีต้นทุนการผลิตของโรงงานทั้งสองเป็น

$$C_1(x) = 900 + 15x^2$$

$$C_2(x) = 700 + y^2$$

จงหาว่าแต่ละโรงงานควรจะผลิตสินค้าชนิดนี้เป็นจำนวนเท่าใด จึงจะทำให้ต้นทุนในการ

ผลิตต่ำสุด เมื่อมีผู้สั่งซื้อสินค้าเป็นจำนวน 500 หน่วย

วิธีทำ $\quad C_1\ x = 900 + 15x^2$

$$C_2(x) = 700 + y^2$$

$$x + y = 500$$

ให้ $g(x, y) = x + y - 500 = 0$

$$F(x, y, \lambda) \quad C_1(x) + C_2(x) + \lambda g(x, y)$$

$$= 900 + 15x^2 + 700 + y^2 + \lambda \quad x + y \quad 500)$$

$$= 15x^2 + y^2 + 1600 + \lambda(x + y \quad 500)$$

$$F_x = 30x + \lambda = 0$$

$$F_y = 2y + \lambda = 0$$

$$F_\lambda = x + y - 500 = 0$$

$$x = \frac{125}{4}, \quad y = \frac{1875}{4}$$

∴ โรงงานแรกควรจะผลิตสินค้า 31 $\frac{1}{4}$ หน่วย และ โรงงานที่ 2 ควรจะผลิตสินค้า 468 $\frac{3}{4}$ หน่วย จึงจะทำให้ต้นทุนต่ำสุด

8. โรงงานแห่งหนึ่งผลิตตู้เย็นได้ 2 แบบ ถ้าโรงงานผลิตตู้เย็นแบบธรรมดา x ตู้และผลิตตู้เย็นแบบไม่มีน้ำแข็งจับ y ตู้ โดยมีต้นทุนการผลิตเป็น

$$C(x_1 Y) = 90 + 4xy - 8x + y^2$$

จงหาว่าโรงงานควรจะผลิตตู้เย็นแต่ละแบบเป็นจำนวนเท่าใด เพื่อให้มีต้นทุนการผลิตต่ำสุด และจำนวนตู้เย็นทั้งสองแบบที่ผลิตรวมกันเป็น 19 เครื่อง

วิธีทำ $\quad C(x, y) = 90 + 4xy - 8x + y^2$

$$x + y = 19$$

ให้ $g(x, y) = x + y - 19 = 0$

ให้ $F(x, y, \lambda) \quad C(x_1 y) + \lambda g(x_1 y)$

$$= 90 + 4xy - 8x + y^2 + \lambda(x + y - 19)$$

$$F_x = 4y - 8 + \lambda = 0$$

$F_y \quad = \cdot 4x + 2y + \lambda = 0$

$F\lambda \quad = x + y - 19 = 0$

แก้สมการหาค่า x, y ได้ x = 5, y = 14

∴ โรงงานจะผลิตตู้เย็นแบบธรรมดา 5 ตู้และผลิตตู้เย็นแบบไม่มีน้ำแข็งจับ 14 ตู้ เพื่อให้ต้นทุนในการผลิตต่ำสุด

9. บริษัทแห่งหนึ่งผลิตสินค้า A และ B เป็นจำนวน x หน่วยและ y หน่วยตามลำดับ ถ้าฟังก์ชั่นกำไรเป็น

$$P(x,y) = 3x^2-50x+3y^2-20y+5xy$$

จงหาว่าบริษัทควรจะผลิตสินค้าแต่ละชนิดออกมาเป็นจำนวนเท่าใด จึงจะทำให้ได้กำไรสูงสุด ทั้งนี้กำหนดว่าสินค้าทั้งสองชนิดมีจำนวนรวมกันเท่ากับ 50 หน่วย

วิธีทำ

$$P(x,y) = 3x^2-50x+3y^2-20y+5xy$$

$x+y = 50$

ให้ $g(x,y) = x+y-50 = 0$

$F(x,y,\lambda) = P(x,y)+\lambda g(x+y)$

$= 3x^2-50x+3y^2-20y+5xy+\lambda(x+y-50)$

$F_x = 6x-50+5y+A = 0$

$F_y = 6y-20+5x+A = 0$

$F_\lambda = x+y-50 = 0$

แก้สมการได้ x = 40, y = 10

กำไรสูงสุด = P(40,10) = 4,900 บาท

บริษัทควรจะผลิตสินค้าชนิด A ออกมา 40 หน่วย และสินค้าชนิด B 10 หน่วย

10. บริษัทแห่งหนึ่งผลิตสินค้า A และ B เป็นจำนวน x หน่วย และ y หน่วยตามลำดับ และเสียต้นทุนการผลิตเป็น

$$C(x,y) = x^2+10x+y^2+10y-xy$$

ถ้าบริษัทมีรายได้เป็น

$$R(x,y) = 3x^2+40x+2y^2$$

จงหาจำนวนสินค้าที่ควรผลิตแต่ละชนิด โดยให้มีจำนวนที่ผลิตรวมกันเท่ากับ 380 หน่วย แล้วให้ได้กำไรสูงสุด

วิธีทำ กำไร $= R(x,y)-C(x,y)$

$= 3x^2+40x+2y^2-x^2-10x-y^2-10y+xy$

$= 2x^2+30x+y^2-10y+xy$

และ $x+y = 380$

ให้ $g(x,y) = x+y-380 = 0$

$F(x,y,\lambda) = 2x^2+30x+y^2-10y+xy+\lambda(x+y-380)$

$F_x = 4x+30+y+\lambda = 0$

$F_y = 2y-10+x+\lambda = 0$

$F_\lambda = x+y-380 = 0$

แก้สมการได้ $x = 85, y = 215$

∴ กำไรสูงสุดเมื่อ $x = 85, y = 215$

∴ ควรผลิตสินค้าชนิด A 85 หน่วย

สินค้าชนิด B 215 หน่วย

10. เมทริกซ์และการกำหนดโปรแกรมเชิงเส้นเบื้องต้น

นิยาม ถ้า A เป็นเมทริกซ์ที่มี m แถวและ n หลัก จะกล่าวว่า A มีขนาด $m \times n$ และเขียนแทน A ด้วย

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & . & . & a_{1n} \\ a_{21} & a22 & . & . & a_{2n} \\ . & & & & \\ . & . & & & \\ a_{m1} & a_{m2} & & . & a_{mn} \end{bmatrix}$$

เมื่อ a_{ij} เป็นสมาชิกที่ i,j ของ A , $1 \leqslant i \leqslant m$, $1 \leqslant j \leqslant n$ อาจจะเขียนแทน A ด้วย $[a_{ij}]$

วิธีดำเนินการสำหรับเมทริกซ์ (Matrix operations)

นิยาม การแปลงแถวเบื้องต้น (Elementary row operations) กับเมทริกซ์หมายถึงการกระทำอย่างหนึ่งอย่างใดโดยวิธีการต่อไปนี้

1. สลับแถวสองแถวของเมทริกซ์
2. คูณแถวใดแถวหนึ่งของเมทริกซ์ด้วยสเกลาร์ที่มีค่าไม่เป็นศูนย์
3. บวกแถวใดแถวหนึ่งด้วย ค่าคงที่คูณกับอีกแถวหนึ่งของเมทริกซ์

สำหรับการแปลงหลักเบื้องต้น (Elementary column operations) กับเมทริกซ์ใช้วิธีการเดียวกัน เพียงแต่เปลี่ยนคำว่าแถวเป็นหลักเท่านั้น

เมทริกซ์ผกผัน

นิยาม ให้ A เป็น $n \times n$ เมทริกซ์ ถ้าสามารถหา B ซึ่งเป็น $n \times n$ เมทริกซ์ได้ซึ่งทำให้ $AB = BA = I$ เมื่อ I คือเมทริกซ์จัตุรัส จะกล่าวว่า B เป็นเมทริกซ์ผกผันของ A หรือเขียนแทนด้วย A^{-1}

สมการเชิงเส้น (Linear equation) คือสมการในรูปของ

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \ldots + a_nx_n = b$$

โดยที่ $x_1, x_2, \ldots, x_n$ ต่างมีกำลังหนึ่ง และ $a_1, a_2, \ldots, a_n$ เป็นค่าคงตัว

ระบบสมการเชิงเส้น จะประกอบด้วย m สมการและ n ตัวแปร

$$
\begin{array}{ccccccc}
a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + & \ldots & + a_{1n}x_n & = & b_1 \\
a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + & \ldots & + a_{2n}x_n & = & b_2 \\
\vdots & & \vdots & & \vdots \\
a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + & \ldots & + a_{mn}x_n & = & b_m
\end{array}
$$

เขียนในรูปเมทริกซ์ได้เป็น

$$
\begin{bmatrix}
a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\
a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\
\cdot & & \cdot & \cdot \\
\cdot & & \cdot & \cdot \\
\cdot & & \cdot & \cdot \\
a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn}
\end{bmatrix}
\begin{bmatrix}
x_1 \\ x_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ x_n
\end{bmatrix}
=
\begin{bmatrix}
b_1 \\ b_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ b_m
\end{bmatrix}
$$

หรือ $AX = B$

การแก้ระบบสมการเชิงเส้นโดยวิธีลดรูปของแกสส์ (Gaussian Reduction)

จากสมการเชิงเส้น

$$
\begin{array}{ccccccc}
a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + & \ldots & + a_{1n}x_n & = & b_1 \\
a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + & \ldots & + a_{2n}x_n & = & b_2 \\
\vdots & & & & \vdots \\
a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + & \ldots & + a_{mn}x_n & = & b_m
\end{array}
$$

เขียนในรูปเมทริกซ์
$$
\begin{bmatrix}
a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} & b_1 \\
a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} & b_2 \\
\cdot & & & & \\
\cdot & & & & \\
\cdot & & & & \\
a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} & b_n
\end{bmatrix}
$$

แล้วใช้วิธีการแปลงแถวเบื้องต้นกับเมทริกซ์นี้จนได้เมทริกซ์อยู่ในรูป

$$\begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & \cdots & \cdots & c_{1n} & d_1 \\ 0 & c_{22} & \cdots & \cdots & c_{2n} & d_2 \\ 0 & 0 & c_{33} & \cdots & c_{3n} & d_3 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots 0 & c_{mn} & d_n \end{bmatrix}$$

จะได้ว่าระบบสมการที่กำหนดให้จะมีคำตอบเหมือนกับระบบสมการ

$$\begin{aligned} c_{11}x_1 + c_{12}x_2 + \ \ldots\ + c_{1n}x_n &= d_1 \\ c_{22}x_2 + \ \ldots\ c_{2n}x_n &= d_2 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots & \\ \cdots\cdots\cdots\cdots & \\ c_{mn}x_n &= d_n \end{aligned}$$

ดังนั้นสามารถแก้สมการหาค่า $x_1, \ldots, x_n$ ได้ง่ายขึ้น

การหาเมทริกซ์ผกผัน

นอกจากจะหาเมทริกซ์ผกผันโดยใช้นิยามและพีชคณิตของเมทริกซ์แล้ว อาจจะใช้การแปลงแถวเบื้องต้นมาหาเมทริกซ์ผกผันของเมทริกซ์ $A = [a_{ij}]$ ซึ่งมีขนาด $n \times n$ โดยทำการแปลงแถวเบื้องต้นกับเมทริกซ์

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} & 1 & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} & 0 & 1 & 0 & \ldots & 0 \\ . & . & & . & . & . & . & & . \\ . & . & & . & . & . & . & & . \\ . & . & & . & . & . & . & & . \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} & 0 & 0 & 0 & \ldots & 1 \end{bmatrix} \quad \text{——— (1)}$$

ถ้าเมทริกซ์นี้สามารถเปลี่ยนไปเป็นเมทริกซ์

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \ldots & 0 & b_{11} & b_{12} & \ldots & b_{1n} \\ 0 & 1 & 0 & \ldots & 0 & b_{21} & b_{22} & \ldots & b_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & & \cdot & \cdot & \cdot & & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & & \cdot & \cdot & \cdot & & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & & \cdot & \cdot & \cdot & & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & & 1 & b_{n1} & b_{n2} & \ldots & b_{nn} \end{bmatrix} \text{———} \; 2$$

จะได้ว่า $B = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \ldots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \ldots & b_{2n} \\ \cdot & & & \\ \cdot & & & \\ \cdot & & & \\ b_{n1} & b_{n2} & \ldots & b_{nn} \end{bmatrix}$ เป็นเมตริกซ์ผกผันของ A

แต่ถ้าไม่สามารถเปลี่ยนเมทริกซ์ 1 เป็นเมทริกซ์ 2 ได้เรากล่าวว่า A ไม่มีเมทริกซ์ผกผัน

แบบฝึกหัด

1. จงเขียนจุดของสมการต่อไปนี้ในรูปเมทริกซ์ $Ax = B$

1.1 $4x_1 - x_2 = 3$

$x_1 + 2x_2 = 5$

$$\begin{bmatrix} 4 & -1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 5 \end{bmatrix}$$

1.2 $3x_1 + 4x_2 = 8$

$x_1 - x_2 = 3$

$-x_1 + 2x_2 = 1$

$2x_1 + x_2 = 5$

$$\begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 1 & -1 \\ -1 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 \\ 3 \\ 1 \\ 5 \end{bmatrix}$$

1.3 $x_1 + x_2 - x_3 = 2$

$2x_1 - x_2 + x_3 = 2$

$x_1 - x_2 = -1$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix}$$

1.4 $ax_1 + bx_2 + cx_3 = r$

$bx_1 + cx_2 + dx_3 = s$

$cx_1 + dx_2 + ex_3 = t$

$$\begin{bmatrix} a & b & c \\ b & c & d \\ c & d & e \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r \\ s \\ t \end{bmatrix}$$

2. จงหาค่าของ x และ y จาก

2.1 $\begin{bmatrix} 4 & 1 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$

$4x + y = 2$ ——— (1)

$3x + 2y = 1$ ——— (2)

(1) × 2 − (2); $5x = 3$

$x = \frac{3}{5}$

$\therefore \quad y = -\frac{2}{5}$

2.2 $\begin{bmatrix} 2 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x & y \\ -y & -x \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 2 \end{bmatrix}$

$\begin{bmatrix} 2 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x & y \\ -y & -x \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2x+y & 2y+x \end{bmatrix}$

$\therefore \quad 2x + y = 3$ ——— (1)

$2y + x = 2$ ——— (2)

$$①\times 2-②;\quad 3x = 4$$

$$x = \frac{4}{3}$$

$$\therefore\ y = \frac{1}{3}$$

3. จงเขียนชุดของระบบสมการจากสมการเมทริกซ์

$$\begin{bmatrix} 3 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix}$$

$$\because\ \begin{bmatrix} 3 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3x+y+2z \\ -x+z \\ 2x+y-3z \end{bmatrix}$$

$$\therefore\ 3x+y+2x = 2$$

$$-x+z = 3$$

$$2x+y-3z = 4$$

4. จงแก้สมการเมทริกซ์ $XB = C$ ถ้ากำหนดให้

$$X = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \end{bmatrix}$$

$$C = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

และ $$B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$xB = C$$

$$\therefore\ \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x_1-x_3 & 2x_2+x_3 & -x_1+x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\therefore\ x_1 - x_3 = 2 \quad \text{———}①$$

$$2x_2+x_3 = -1 \quad \text{———}②$$

$$-x_1+x_2 = 0 \quad \text{———}③$$

$$①+③;\quad x_2 - x_3 = 2 \quad \text{———}④$$

$$② + ④; \quad 3x_2 = 1$$

$$x_2 = \frac{1}{3}$$

$$\therefore \quad x_3 = x_2 - 2 = \frac{1}{3} - 2 = \frac{-5}{6}$$

$$x_1 = 2 + x_3 = 2 - \frac{5}{6} = \frac{7}{6}$$

$$\therefore \quad x_1 = \frac{7}{6}, x_2 = \frac{1}{3}, x_3 = -\frac{5}{6}$$

5. จงใช้วิธีลดรูปของแกสส์ หาค่าของ x, y, z จากชุดสมการต่อไปนี้

5.1
$$\begin{aligned} x+y-z &= 0 \\ 2x+y+z &= 7 \\ 3x-y+z &= 7 \end{aligned}$$

เขียนในรูปเมทริกซ์ได้
$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 7 \\ 3 & -1 & 1 & 7 \end{bmatrix}$$

คูณแถวที่ 1 ด้วย −2 แล้วบวกกับแถวที่ 2

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 3 & 7 \\ 3 & -1 & 1 & 7 \end{bmatrix}$$

คูณแถวที่ 1 ด้วย -3 แล้วบวกกับแถวที่ 3

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 3 & 7 \\ 0 & -4 & +4 & 7 \end{bmatrix}$$

คูณแถวที่ 2 ด้วย -4 แล้วบวกกับแถวที่ 3

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 3 & 7 \\ 0 & 0 & -8 & -21 \end{bmatrix}$$

คูณแถวที่ 2 ด้วย -1

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & -7 \\ 0 & 0 & -8 & -21 \end{bmatrix}$$

คูณแถวที่ 3 ด้วย $-\frac{1}{8}$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & -7 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{21}{8} \end{bmatrix}$$

$$\therefore \quad x+y-z = 0$$

$$y-3z = 7$$

$$z = \frac{21}{8}$$

$$y = 3z-7 = \frac{63}{8}-7 = \frac{7}{8}$$

$$x = z-y = \frac{21}{8}-\frac{7}{8} = \frac{14}{8} = \frac{7}{4}$$

$$\therefore \quad x = \frac{7}{4}, y = \frac{7}{8}, \quad z = \frac{21}{8}$$

5.2

$$x-2y+3z = 5$$

$$2x-4y+5z = 8$$

$$3x+y-4z = 3$$

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 & 5 \\ 2 & -4 & 5 & 8 \\ 3 & 1 & -4 & 3 \end{bmatrix} \xrightarrow{-2r_1+r_2} \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 & 5 \\ 0 & 0 & -1 & -2 \\ 3 & 1 & -4 & 3 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{-3r_1+r_2} \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 & 5 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 7 & -13 & -12 \end{bmatrix} \xrightarrow{\frac{1}{7}r_3+r_2} \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 & 5 \\ 0 & 1 & -\frac{20}{7} & \frac{2}{7} \\ 0 & 7 & -13 & -12 \end{bmatrix} \xrightarrow{-7r_2+r_3} \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 & 5 \\ 0 & 1 & -\frac{20}{7} & \frac{2}{7} \\ 0 & 0 & 7 & -14 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{\frac{1}{7}r_3} \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 & 5 \\ 0 & 1 & -\frac{20}{7} & \frac{2}{7} \\ 0 & 0 & 1 & -2 \end{bmatrix}$$

$$\therefore \quad x-2y+3z = 5$$

$$y-\frac{20}{7}z = \frac{2}{7}$$

$$z = -2$$

$$\therefore \quad y = \frac{2}{7}+\frac{40}{7}=\frac{42}{7}=6$$

$$x = 5+12+6 = 23$$

$$\therefore \quad x = 23,\ y = 6,\ z = -2$$

$$x-y+2z = 4$$

$$3x+y-z = 2$$

$$5x-y+3z = 10$$

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 & 4 \\ 3 & 1 & -1 & 2 \\ 5 & -1 & 3 & 10 \end{bmatrix} \xrightarrow{-3r_1+r_2} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 & 4 \\ 0 & 4 & -7 & -10 \\ 5 & -1 & 3 & 10 \end{bmatrix} \xrightarrow{-5r_1+r_3} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 & 4 \\ 0 & 4 & -7 & -10 \\ 0 & 4 & -7 & -10 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{\frac{1}{4}r_2} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & -\frac{7}{4} & -\frac{10}{4} \\ 0 & 4 & -7 & -10 \end{bmatrix} \xrightarrow{-4r_2+r_3} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & -\frac{7}{4} & -\frac{10}{4} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\therefore \quad x-y+2z = 4 \qquad x = y-2z+4$$

$$y - \frac{7}{4}z = -\frac{10}{4}$$

$$\therefore \quad y = \frac{7z}{4} - \frac{10}{4}$$

$$\therefore \quad x = y+4-2k, \quad y = \frac{7}{4}k - \frac{10}{4},\ z = k$$

5.4 $2x + 4y - z = -3$

$3x - y + z = 10$

$4x + y - 2z = 1$

$$\begin{bmatrix} 2 & 4 & -1 & -3 \\ 3 & -1 & 1 & 10 \\ 4 & 1 & -2 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{\frac{1}{2}r_1} \begin{bmatrix} 1 & 2 & -\frac{1}{2} & -\frac{3}{2} \\ 3 & -1 & 1 & 10 \\ 4 & 1 & -2 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{-3r_1 + r_2} \begin{bmatrix} 1 & 2 & -\frac{1}{2} & -\frac{3}{2} \\ 0 & -7 & -\frac{1}{2} & \frac{11}{2} \\ 4 & 1 & -2 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{-4r_1 + r_3} \begin{bmatrix} 1 & 2 & -\frac{1}{2} & -\frac{3}{2} \\ 0 & -7 & -\frac{1}{2} & \frac{11}{2} \\ 0 & -7 & 0 & 7 \end{bmatrix} \xrightarrow{-r_2 + r_3} \begin{bmatrix} 1 & 2 & -\frac{1}{2} & -\frac{3}{2} \\ 0 & -7 & -\frac{1}{2} & \frac{11}{2} \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{3}{2} \end{bmatrix} \xrightarrow{-\frac{1}{7}r_2} \begin{bmatrix} 1 & 2 & -\frac{1}{2} & -\frac{3}{2} \\ 0 & 1 & \frac{1}{14} & -\frac{11}{14} \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{3}{2} \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{2r_3} \begin{bmatrix} 1 & 2 & -\frac{1}{2} & -\frac{3}{2} \\ 0 & 1 & \frac{1}{14} & -\frac{11}{14} \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

$\therefore\ x + 2y - \frac{z}{2} = -\frac{3}{2}$

$y + \frac{z}{14} = -\frac{11}{14}$

$z = 3$

$\therefore\ y = -\frac{11}{14} - \frac{3}{14} = -1$

$x = -\frac{3}{2} + 1 + \frac{3}{2} = 1$

$\therefore\ x = 1,\ y = -1,\ z = 3$

5.5 $3x - y + 2z = 4$

$x + 4y - z = 3$

$x - 9y + 4z = 3$

Z

$$\begin{bmatrix} 3 & -1 & 2 & 4 \\ 1 & 4 & -1 & 3 \\ 1 & -9 & 4 & 3 \end{bmatrix} \xrightarrow{-r_2 + r_3} \begin{bmatrix} 3 & -1 & 2 & 4 \\ 1 & 4 & -1 & 3 \\ 0 & -13 & 5 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{\frac{1}{3}r_1} \begin{bmatrix} 1 & -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} & \frac{4}{3} \\ 1 & 4 & -1 & 3 \\ 0 & -13 & 5 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{-r_1 + r_2} \begin{bmatrix} 1 & -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} & \frac{4}{3} \\ 0 & \frac{13}{3} & \frac{5}{3} & \frac{5}{3} \\ 0 & -13 & 5 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{\frac{3}{13} \times r_2} \begin{bmatrix} 1 & -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} & \frac{4}{3} \\ 0 & 1 & -\frac{5}{13} & \frac{5}{13} \\ 0 & -13 & 5 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{13r_2 + r_3} \begin{bmatrix} 1 & -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} & \frac{4}{3} \\ 0 & 1 & -\frac{5}{13} & \frac{5}{13} \\ 0 & 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}$$

$\therefore$ ไม่มีคำตอบ

5.6 $3x-y+z = 5 \qquad 4x+y+2z = 3 \qquad 5x+4y-z = -2$

$$\begin{bmatrix} 3 & -1 & 1 & 5 \\ 4 & 1 & 2 & 3 \\ 5 & 4 & -1 & -2 \end{bmatrix} \xrightarrow{-4r_1+3r_2} \begin{bmatrix} 3 & -1 & 1 & 5 \\ 0 & 7 & 2 & -11 \\ 5 & 4 & -1 & -2 \end{bmatrix} \xrightarrow{-5r_1+3r_3} \begin{bmatrix} 3 & -1 & 1 & 5 \\ 0 & 7 & 2 & -11 \\ 0 & 17 & -8 & -31 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{\frac{1}{3}r_1,\ \frac{1}{7}r_2} \begin{bmatrix} 1 & \frac{-1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{5}{3} \\ 0 & 1 & \frac{2}{7} & \frac{-11}{7} \\ 0 & 17 & -8 & -31 \end{bmatrix} \xrightarrow{-17\,r_2+r_3} \begin{bmatrix} 1 & \frac{-1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{5}{3} \\ 0 & 1 & \frac{2}{7} & \frac{-11}{7} \\ 0 & 0 & \frac{-90}{7} & \frac{-30}{7} \end{bmatrix} \xrightarrow{-\frac{7}{90}r_3} \begin{bmatrix} 1 & \frac{-1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{5}{3} \\ 0 & 1 & \frac{2}{7} & \frac{-11}{7} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{3} \end{bmatrix}$$

$\therefore 3x - y + z = 5$

$7y + 2z = -11, \quad z = \frac{1}{3}$

$\therefore y = \frac{1}{7}(-11 - \frac{2}{3}) = -\frac{5}{3}$

$x = \frac{5 + y - z}{3} = \frac{1}{3}(5 - \frac{5}{3} - \frac{1}{3}) = 1$

$\therefore x = 1, y = -\frac{5}{3}, z = \frac{1}{3}$

6. จงหาเมตริกผกผันของเมทริกซ์ต่อไปนี้

6.1 $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}$

$$\left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{-3r_1+r_2} \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & -5 & -3 & 1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{-1/5r_2} \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{3}{5} & \frac{-1}{5} \end{array}\right] \xrightarrow{-2r_2+r_1} \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & \frac{-1}{5} & \frac{2}{5} \\ 0 & 1 & \frac{3}{5} & \frac{-1}{5} \end{array}\right]$$

เมทริกซ์ผกผัน คือ $\frac{1}{5}\begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 3 & -1 \end{bmatrix}$

6.2 $\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 2 \end{bmatrix}$

$$\left[\begin{array}{cc|cc} 2 & 1 & 1 & 0 \\ 4 & 2 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{\frac{1}{2}r_1} \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 1/2 & 1/2 & 0 \\ 4 & 2 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{-4r_1+r_2} \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 1 \end{array}\right]$$

เนื่องจากแถวที่ 2 เป็น 0 ∴ ไม่มีเมทริกซ์ผกผัน

6.3 $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 5 \end{bmatrix}$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 4 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 4 & 5 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{-2r_1+r_2} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -2 & -2 & 1 & 0 \\ 3 & 4 & 5 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{2r_2+r_1} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -1 & -3 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & -2 & -2 & 1 & 0 \\ 3 & 4 & 5 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow[\text{และ } -1r_2]{-3r_1+r_3} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -1 & -3 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & 8 & 9 & -6 & 1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{-4r_2+r_3} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -1 & -3 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 1 \end{array}\right]$$

∴ แถวที่ 3 เป็น 0 ∴ ไม่มีเมทริกซ์ผกผัน

6.4 $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

เมทริกซ์ผกผันคือ $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

6.5 $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 6 & 11 \\ -1 & 0 & 2 \end{bmatrix}$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 6 & 11 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{-2r_1 + r_2} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 5 & -2 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{r_1 + r_3} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 5 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 5 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{-r_2 + r_3} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 5 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & -1 & 1 \end{array}\right]$$

$\therefore$ ไม่มีเมทริกซ์ผกผัน

6.6 $\begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow[-r_1 + r_3]{-r_1 + r_2} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 2 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow[\text{และ } 1/2\, r_3]{-1/2\, r_2} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1/2 & -1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1/2 & 0 & 1/2 \end{array}\right] \xrightarrow{r_3 + r_2} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1/2 & 1/2 \\ 0 & 0 & 1 & -1/2 & 0 & 1/2 \end{array}\right]$$

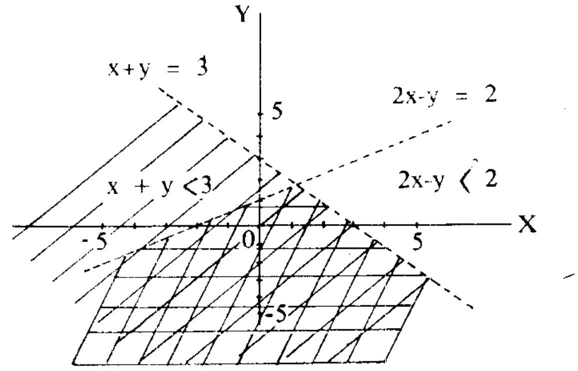
$$\xrightarrow{r_3 + r_1} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 1/2 & 0 & 1/2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1/2 & 1/2 \\ 0 & 0 & 1 & -1/2 & 0 & 1/2 \end{array}\right] \xrightarrow{-r_2 + r_1} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1/2 & 1/2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1/2 & 1/2 \\ 0 & 0 & 1 & -1/2 & 0 & 1/2 \end{array}\right]$$

$\therefore$ เมทริกซ์ผกผัน คือ $\begin{bmatrix} 1/2 & 1/2 & 1 \\ 0 & -1/2 & 1/2 \\ -1/2 & 0 & 1/2 \end{bmatrix}$

7. จงเขียนกราฟหาเขตในระนาบ X, Y จาก ๒ สมการต่อไปนี้

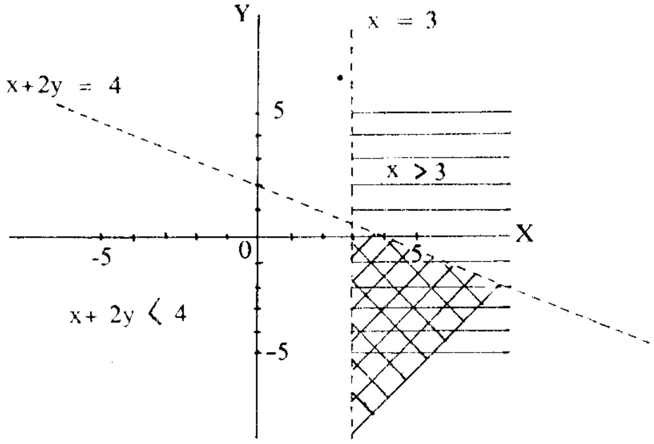
7.1 $x+y < 3$

$2x-y < 2$



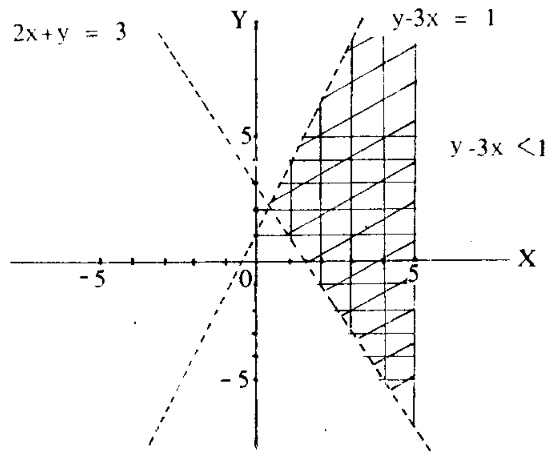
7.2 $x+2y < 4$

$x - 4 > -1$

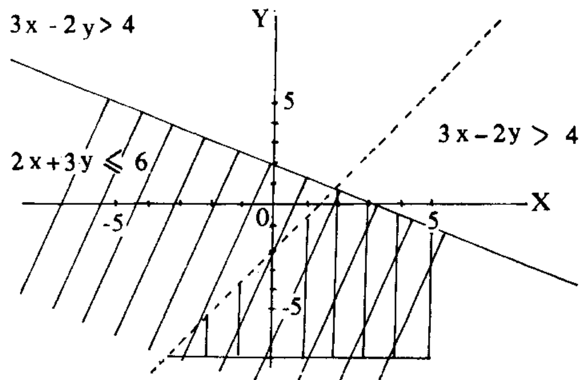


7.3 $2x+y > 3$

$y-3x < 1$



7.4 $2x + 3y \leqslant 6 \quad 3x - 2y > 4$



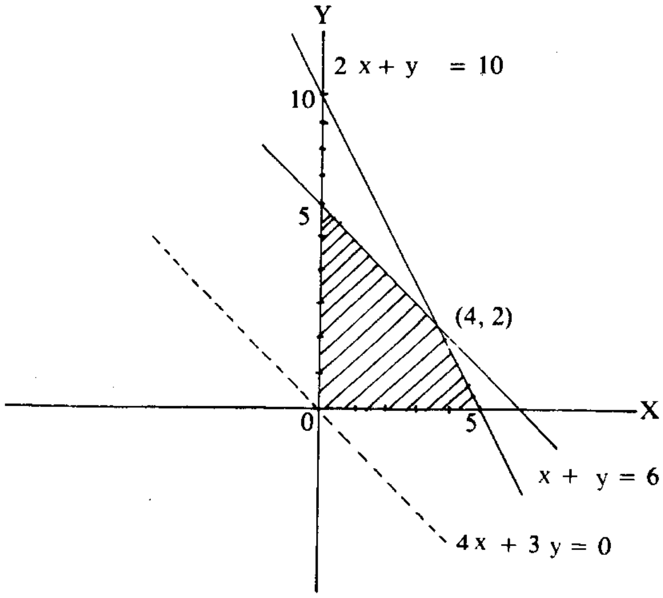
8. จงใช้วิธีเขียนกราฟหาค่าสูงสุด หรือค่าต่ำสุดของฟังก์ชันซึ่งมีเงื่อนไขต่อไปนี้

8.1 ฟังก์ชัน $z = 4x + 3y$

เงื่อนไข $2x + y \leqslant 10$

$x + y \leqslant 6$

$x \geqslant 0, y \geqslant 0$



$z\ (0, 6) = 18$

$z\ (4, 2) = 16 + 6 = 22$

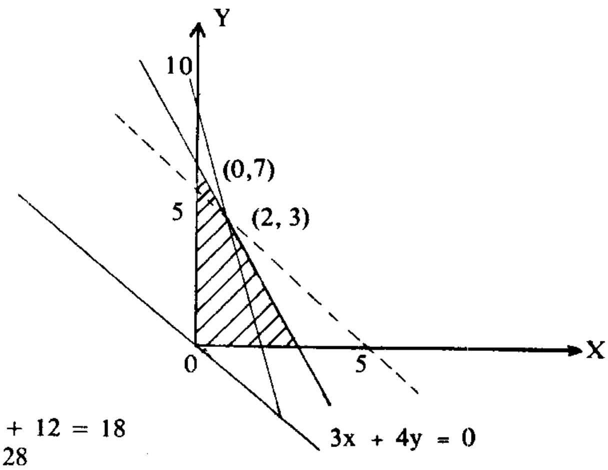
ค่าสูงสุดของฟังก์ชัน คือที่จุด $(4, 2) = 22$

8.2 ฟังก์ชั่น $z = 3x + 4y$

เงื่อนไข $2x + y \leq 7$

$3x + y \leq 9$

$x \geq 0,\ y \geq 0$



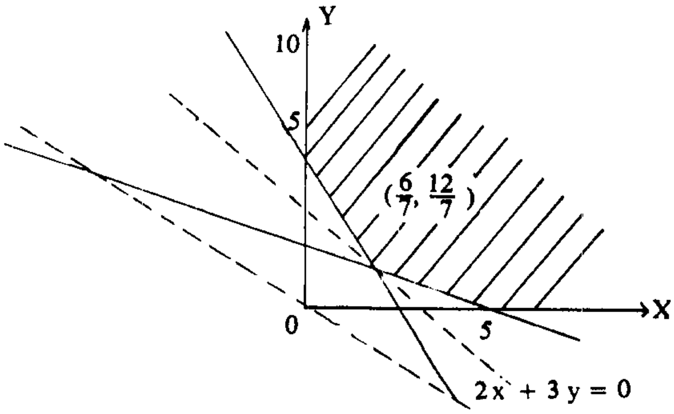
$z(2, 3) = 6 + 12 = 18$

$z(0, 7) = 28$

ค่าสูงสุดของฟังก์ชั่น คือที่จุด (0, 7) = 28

8.3 ฟังก์ชั่น $z = 2x + 3y$

เงื่อนไข $3x + 2y \geq 6$ $x + 3y \geq 6$ $x \geq 0,\ y \geq 0$



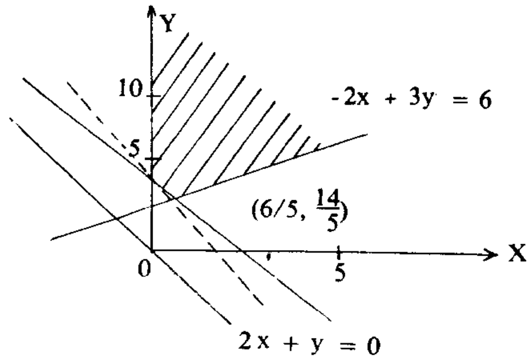
$z(\frac{6}{7}, \frac{12}{7}) = 2(\frac{6}{7}) + 3(\frac{12}{7}) = \frac{48}{7}$

ค่าต่ำสุดของฟังก์ชั่นคือที่จุด $(\frac{6}{7}, \frac{12}{7})$ = มีค่าเท่ากับ $\frac{48}{7}$

8.4 ฟังก์ชั่น $z = 2x + y$

เงื่อนไข $x + y \geq 4$

$-2x + 3y \geq 6 \qquad x \geq 0,\ y \geq 0$



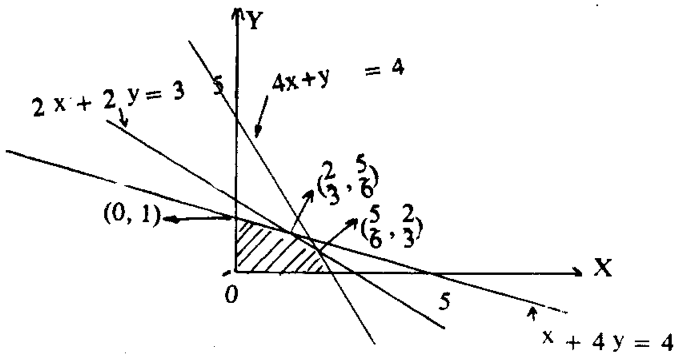
$(\frac{6}{5}, \frac{14}{5}) = 2(\frac{6}{5}) + \frac{14}{5} = \frac{26}{5}$

$z(0, 4) = 4$

$\therefore$ ค่าต่ำสุดของฟังก์ชั่นคือ ที่จุด (0, 4) มีค่า = 4

8.5 ฟังก์ชั่น $z = 2x + y$ เงื่อนไข

$2x+2y \leq 3 \qquad 4x + y \leq 4 \qquad x + 4y \leq 4 \qquad x \geq 0,\quad y \geq 0$



$z = 2x + y$

$z(0, 1) = 1$

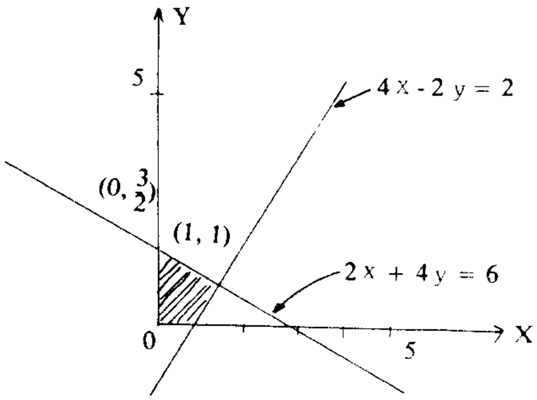
$z(\frac{2}{3}, \frac{5}{6}) = \frac{4}{3} + \frac{5}{6} = \frac{13}{6}$

$z(\frac{5}{6}, \frac{2}{3}) = \frac{5}{3} + \frac{2}{3} = \frac{7}{3}$

$\therefore$ ค่าสูงสุดของฟังก์ชั่นคือที่จุด $(\frac{5}{6}, \frac{2}{3})$ เมื่อ z มีค่าเท่ากับ $\frac{7}{3}$

9. จงหาค่าสูงสุดของ $z = 3x+2y$ ซึ่งมีเงื่อนไข

$4x-2y \leq 2$ $\quad 2x+4y \leq 6$ $\quad x \geq 0$ $\quad y \geq 0$ โดยวิธีเชิงเรขาคณิต



$z(0, \frac{3}{2}) = 3 \qquad z(1,1) = 5$

$\therefore$ ค่าสูงสุดของฟังก์ชันคือที่จุด (1, 1) มีค่าเท่ากับ 5

10. จงใช้วิธีคำนวณ (Simplex method) แก้ปัญหากำหนดโปรแกรมเชิงเส้น

ซึ่งมีฟังก์ชัน $z = 2x+3y$ และเงื่อนไข

$$2x+y \leqslant 10$$

$$x+y \leqslant 6$$

$$x \geqslant 0, y \geqslant 0$$

วิธีทำ จะหาค่าสูงสุดของ $z = 2x+3y$ ①

ซึ่งมีเงื่อนไข $2x+y+u = 10$ ②

$x+y+v = 6$ ③

$$x,y,u,v \geqslant 0$$

ถ้าให้ $x=y=0 \;\therefore\; u=10,\ v=6$

จาก ② $y=10$ ถ้า $u=0, x=0$

และจาก ③ $y=6$ ถ้า $v=0, x=0$

ดังนั้นจะเลือก $y=6$ ซึ่ง $v=0$

จาก ② $\therefore u=4$

② − ③ ; $x+u-v = 4$

③ × 3; $3x+3y+3v-18 = 0$ ④

① − ④ ; $z = -x-3v+18$

จะเห็นว่า z จะมีค่าสูงสุดเมื่อ $x=v=0$ ($\because x\geqslant 0 , v\geqslant 0$)

$\therefore$ จาก ③ ถ้า $x=0 , v=0$

$\therefore y = 6$

$\therefore$ ที่จุด (0,6) z จะมีค่าสูงสุด $= 18$

11. จงแก้ปัญหากำหนดโปรแกรมเชิงเส้นซึ่งมีฟังก์ชัน

$z = 2x+y$ $\because$ และมีเงื่อนไข

$2x + 2y \leqslant 3$

$4x + y \leqslant 4$

$x + 4y \leqslant 4$

$x \geqslant 0, y \geqslant 0$

เหมือนข้อ 8.5

$\therefore$ ค่าสูงสุดของฟังก์ชันคือที่จุด $(\frac{5}{6}, \frac{2}{3})$ มีค่าเท่ากับ $\frac{7}{3}$

12. เหมือนข้อ 8.2

12. จงใช้วิธีคำนวณ แก้ปัญหาการกำหนดโปรแกรมเชิงเส้น ซึ่งมีฟังก์ชัน

$$z = 3x + 4y$$

มีเงื่อนไข

$$2x + y \leqslant 7$$

$$3x + y \leqslant 9$$

$$x \geqslant 0 \,,\ y \geqslant 0$$

วิธีทำ จะหาค่าสูงสุดของ $z = 3x + 4y$ ①

เมื่อ $2x + y + u = 7$ ②

$3x + y + v = 9$ ③

$x, y, u, v \geqslant 0$

ถ้า $x = y = 0 \quad \therefore \ u = 7, v = 9$

จาก ② $y = 7$ ถ้า $x = 0 \,,\ u = 0$

จาก ③ $y = 9$ ถ้า $x = 0 \,,\ v = 0$

เลือก $y = 7$ ซึ่งทำให้ $u = 0$

$\therefore$ จาก ③ $v = 2$

② − ③ ; $-x + u - v = -2$

② × 4 ; $8x + 4y + 4u - 28 = 0$ ④

① − ④ ; $z = -5x - 4u + 28$

z จะมีค่าสูงสุดเมื่อ $x = u = 0$

$\therefore$ จาก ③ ถ้า $x = u = 0$

$\therefore \ y = 7$

$\therefore$ ที่จุด (0,7) z จะมีค่าสูงสุด $= 28$

พิมพ์ที่... สำนักพิมพ์มหาวิทยาลัยรามคำแหง
Ramkhamhaeng University Press.

มหาวิทยาลัยรามคำแหง

รู้จักภัย ตั้งใจศึกษา บูชาพ่อขุน สนองคุณชาติ

22101141 7