$z_x(x_0,y_0)$ หมายถึง อัตราการเปลี่ยนแปลงโดยทันทีของ $z = f(x,y)$ ต่อการเปลี่ยนแปลงหนึ่งหน่วยใน x

และ $z_y(x_0,y_0)$ หมายถึงอัตราการเปลี่ยนแปลงโดยทันทีของ $z = f(x,y)$ ต่อการเปลี่ยนแปลงหนึ่งหน่วยใน y

อนุพันธ์ย่อยที่มีอันดับสูงกว่าหนึ่ง

อนุพันธ์ย่อยอันดับที่ 2 ของ $z = f(x,y)$ ถ้า $f_x(x,y)$ และ $f_y(x,y)$ หาค่าได้ จะได้ว่า

$\frac{\partial f_x}{\partial x}(x,y) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f_x(x+\Delta x,y) - f_x(x,y)}{\Delta x}$ เมื่อลิมิตหาค่าได้

หรือใช้สัญลักษณ์ $f_{xx}, \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} \cdot D_{1,1}f(x,y)$

ในทำนองเดียวกัน

$$f_{xy} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) = \frac{\partial f}{\partial y \partial x}$$

$$f_{yx} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$$

$$f_{yy} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$$

สำหรับการหาอนุพันธ์ย่อยอันดับสูงกว่าสอง ก็หาได้ในทำนองเดียวกัน ซึ่งใช้หลักการหาโดยอาศัยสูตรการหาอนุพันธ์ของฟังก์ชันที่มีตัวแปรตัวเดียว

เช่น

$$z = 3x^2 + 2xy - y^2$$

$$z_y = \frac{\partial z}{\partial y} = 2x - 2y = 2(x-y)$$

ความหมายของอนุพันธ์ย่อยในทางอื่น ๆ

ในทางเรขาคณิต

$z_x(x_0,y_0)$ คือความชันของเส้นสัมผัสซึ่งสัมผัสเส้นโค้งที่เกิดจากกราฟ $z = f(x,y)$ ตัดกับระนาบ $y = y_0$ ที่จุด$(x_0, y_0, f(x_0,y_0))$

และ $z_y(x_0,y_0)$ คือความชันของเส้นสัมผัสเส้นโค้งที่เกิดจากกราฟ $z = f(x,y)$ ตัดกับกราฟ $x = x_0$ ที่จุด $(x_0, y_0, f(x_0,y_0))$

นอกจากนั้นยังอาจจะให้ความหมายในแนวอัตราการเปลี่ยนแปลงได้

แบบฝึกหัด 9.4

1. จงหาอนุพันธ์ย่อยอันดับหนึ่ง z_x และ z_y ของฟังก์ชันที่กำหนดให้ต่อไปนี้

1.1

$$z = x^2+2xy+y^2$$

$$z_x = \frac{\partial}{\partial x}(x^2+2xy+y^2) = 2x+2y = 2(x+y)$$

$$z_y = \frac{\partial}{\partial y}(x^2+2xy+y^2) = 2x+2y = 2(x+y)$$

1.2

$$z = (x+2)(y+3)$$

$$z_x = \frac{\partial}{\partial x}[(x+2)(y+3)] = y+3$$

$$z_y = \frac{\partial}{\partial y}[(x+2)(y+3)] = x+2$$

1.3

$$z_x = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{x}{2}+\frac{y}{2}\right) = \frac{1}{2}$$

$$z_y = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{x}{2}+\frac{y}{2}\right) = \frac{1}{2}$$

1.4

$$z = (x^{1/5} + y^{1/5} - x^{1/2}y^{1/2})$$

$$Z_x = \frac{\partial}{\partial x}(x^{\frac{1}{5}} + y^{\frac{1}{5}} - x^{\frac{1}{2}}y^{\frac{1}{2}}) = \frac{1}{5x^{4/5}} - \frac{1}{2}\left(\frac{y}{x}\right)^{1/2}$$

$$z_y = \frac{\partial}{\partial y}(x^{1/5} + y^{1/5} - x^{1/2}y^{1/2}) = \frac{1}{5y^{4/5}} - \frac{1}{2}\left(\frac{x}{y}\right)^{1/2}$$

1.5

$$z = \frac{1}{x^2y^2}$$

$$z_x = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{x^2y^2}\right) = \frac{-2}{x^3y^2}$$

$$z_y = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{1}{x^2y^2}\right) = -\frac{2}{x^2y^3}$$

1.6

$$z = \frac{(x^2-y^2)^{1/2}}{2xy}$$

$$z_x = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{(x^2-y^2)^{1/2}}{2xy}\right) = \frac{2xy\frac{\partial}{\partial x}(x^2-y^2)^{1/2} - (x^2-y^2)^{1/2}\frac{\partial}{\partial x}2xy}{(2xy)^2}$$

$$= \frac{\frac{2x^2y}{(x^2-y^2)^{1/2}} - 2y(x^2-y^2)^{1/2}}{4x^2y^2}$$

$$= \frac{2x^2y - 2y(x^2-y^2)}{4x^2y^2(x^2-y^2)^{1/2}} = \frac{y}{2x^2(x^2-y^2)^{1/2}}$$

$$z_y = \frac{\partial}{\partial y}\left[\frac{(x^2-y^2)^{1/2}}{2xy}\right] = \frac{2xy\frac{\partial}{\partial y}(x^2-y^2)^{1/2} - (x^2-y^2)^{1/2}\frac{\partial}{\partial y}(2xy)}{(2xy)^2}$$

$$= \frac{\frac{-2xy^2}{(x^2-y^2)^{1/2}} - 2x(x^2-y^2)^{1/2}}{(2xy)^2}$$

$$= \frac{-2xy^2 - 2x(x^2-y^2)}{4x^2y^2(x^2-y^2)^{1/2}} = \frac{-x}{2y^2(x^2-y^2)^{1/2}}$$

1.7 $z = \ln(x^2y)$

$$z_x = \frac{\partial}{\partial x}(\ln x^2y) = \frac{1}{x^2y}\frac{\partial}{\partial x}(x^2y) = \frac{2xy}{x^2y} = \frac{2}{x}$$

$$z_y = \frac{\partial}{\partial y}(\ln x^2y) = \frac{1}{x^2y}\frac{\partial}{\partial y}(x^2y) = \frac{x^2}{x^2y} = \frac{1}{y}$$

1.8

$$z = \sin(x^2+2\cos y)$$

$$z_x = \frac{\partial}{\partial x}[\sin(x^2+2\cos y)]$$

$$= \cos(x^2+2\cos y)\frac{\partial}{\partial x}(x^2+2\cos y)$$

$$= 2x\cdot\cos(x^2+2\cos y)$$

$$z_y = \frac{\partial}{\partial y}[\sin(x^2+2\cos y)]$$

$$= \cos(x^2+2\cos y)\frac{\partial}{\partial y}(x^2+2\cos y)$$

$$= -2\sin y\cos(x^2+2\cos y)$$

1.9 $z = e^{x^2+2xy}$

$$z_x = \frac{\partial}{\partial x}e^{x^2+2xy} = e^{x^2+2xy}\frac{\partial}{\partial x}(x^2+2xy)$$

$$= (2x+2y)\,e^{x^2+2xy} = 2(x+y)\,e^{x^2+2xy}$$

$$z_y = \frac{\partial}{\partial y}e^{x^2+2xy} = e^{x^2+2xy}\frac{\partial}{\partial y}(x^2+2xy)$$

$$= 2x\cdot e^{x^2+2xy}$$

1.10 $z = c^{\ln x}\cdot c^{\ln y}$

$$z_x = \frac{\partial}{\partial x}(c^{\ln x}\cdot c^{\ln y}) = c^{\ln y}\frac{\partial}{\partial x}c^{\ln x} = y$$

เพราะว่า $e^{\ln x} = x , e^{\ln y} = y$

$$z_y = \frac{\partial}{\partial y}(e^{\ln x} \cdot e^{\ln y}) = e^{\ln x}\frac{\partial}{\partial y} e^{\ln y} = x$$

2. จงหาอนุพันธ์ย่อยอันดับสอง z_{xx}, z_{yy} และ z_{xy} ของฟังก์ชันต่อไปนี้

2.1 $z = \frac{1}{x^2y^2}$

จากข้อ 1.5 $z_x = \frac{-2}{x^3y^2}, z_y = \frac{-2}{x^2y^3}$

$$z_{xx} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{-2}{x^3y^2}\right) = \frac{6}{x^4y^2}$$

$$z_{yy} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{-2}{x^2y^3}\right) = \frac{6}{x^2y^4}$$

$$z_{xy} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right) = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{-2}{x^2y^2}\right) = \frac{4}{x^3y^3}$$

2.2

$$z = 2x+2y+y^2+3x^2+5$$

$$z_x = 2+6x , z_y = 2+2y$$

$$z_{xx} = \frac{\partial}{\partial x}(2+6x) = 6$$

$$z_{yy} = \frac{\partial}{\partial y}(2+2y) = 2$$

$$z_{xy} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right) = \frac{\partial}{\partial y}(2+6x) = 0$$

2.3

$$z = 25-(x-y)^4+(y-1)^4$$

$$z_x = -4(x-y)^3 \cdot z_y = 4(y-1)^3 + 4(x-y)^3$$

z_{xx}

$$z_{xx} = \frac{\partial}{\partial x}(-4(x-y)^3) = -12(x-y)^2$$

$$z_{yy} = \frac{\partial}{\partial y}(4(y-1)^3+4(x-y)^3) = 12(y-1)^2-12(x-y)^2$$

$$z_{xy} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right) = \frac{\partial}{\partial y}(-4(x-y)^3) = 12(x-y)^2 \quad 12(x-y)^2$$

2.4

$$z = \frac{x+y}{(y^2-x^2)^{1/2}}$$

$$z_x = \frac{(y^2-x^2)^{1/2}\frac{\partial}{\partial x}(x+y) - (x+y)\frac{\partial}{\partial x}(y^2-x^2)^{1/2}}{[(y^2-x^2)^{1/2}]^2}$$

$$= \frac{(y^2-x^2)^{1/2} - \frac{1}{2}(x+y)((y^2-x^2)^{-1/2}(-2x)}{y^2-x^2}$$

$$z_x = \frac{xy+y^2}{(y^2-x^2)^{\frac{3}{2}}} \qquad = \frac{y(x+y)}{(y^2-x^2)^{\frac{3}{2}}}$$

$$z_{xx} = \frac{(y^2-x^2)^{\frac{3}{2}}\frac{\partial}{\partial x}(xy+y^2) - (xy+y^2)\frac{\partial}{\partial x}(y^2-x^2)^{\frac{3}{2}}}{[(y^2-x^2)^{\frac{3}{2}}]^2}$$

$$= \frac{y(y^2-x^2)^{\frac{3}{2}} + 3(x^2y+xy^2)(y^2-x^2)^{1/2}}{(y^2-x^2)^3}$$

$$= \frac{(y^2-x^2)^{1/2}(y^3-x^2y+3x^2y+3xy^2)}{(y^2-x^2)^3} = \frac{y(y^2+2x^2+3xy)}{(y^2-x^2)^{\frac{5}{2}}}$$

$$= \frac{y(y+2x)(y+x)}{(y^2-x^2)^{5\ 2}}$$

$$z_y = \frac{(y^2-x^2)^{1/2}\frac{\partial}{\partial y}(x+y) - (x+y)\frac{\partial}{\partial y}(y^2-x^2)^{1/2}}{[(y^2-x^2)^{1/2}]^2}$$

$$= \frac{(y^2-x^2)^{1/2} - (x-y)(\frac{1}{2})(y^2-x^2)^{-1/2}(2y)}{y^2-x^2}$$

$$= \frac{-x(x+y)}{(y^2-x^2)}$$

$$z_{yy} = \frac{(y^2-x^2)^{\frac{3}{2}}\frac{\partial}{\partial y}(-x^2-xy) - (-x^2-xy)\frac{\partial}{\partial y}(y^2-x^1)^{\frac{3}{2}}}{[(y^2-x^2)^{\frac{3}{2}}]^2}$$

$$= \frac{(y^2-x^2)^{\frac{3}{2}}(-x) + 3y(x^2+xy)(x^2-x^2)^{1/2}}{(y^2-x^2)^3}$$

$$= (y^2-x^2)^{1/2}[3yx^2+x^3+2xy^2] = \frac{(y(2y+x)(y+x)}{(y^2-x^2)^{\frac{3}{2}}}$$

$$z_{xy} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right) = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{xy+y^2}{(x^2-x^2)^{3/2}}\right)$$

$$= \frac{(y^2-x^2)^{3/2}(x+2y)-(xy+y^2)(3y)(\ y^2-x^2)^{1/2}}{(y^2-x^2)^3}$$

$$= \frac{-x^3-y^3-2xy^2-2x^2y}{(y^2-x^2)^3}$$

2.5 $\qquad z = e^{y/x}\ln\left(\frac{x}{y}\right)$

$$z_x = \frac{\partial}{\partial x}\left(e^{y/x}\ln\left(\frac{x}{y}\right)\right) = \ln\left(\frac{x}{y}\right)\frac{\partial}{\partial x}e^{y/x} + e^{y/x}\frac{\partial}{\partial x}\ln\left(\frac{x}{y}\right)$$

$$= \ln\left(\frac{x}{y}\right)e^{y/x}\left(\frac{-y}{x^2}\right) + e^{y/x} = \frac{y}{x}\cdot\frac{1}{y}$$

$$= \frac{-y}{x^2}e^{y/x}\ln\left(\frac{x}{y}\right) + \frac{e^{y/x}}{x}$$

$$= \frac{e^{y/x}}{x}\left[1-\frac{y}{x}\ln\left(\frac{x}{y}\right)\right]$$

$$z_{xx} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{e^{y/x}}{x} - \frac{ye^{y/x}}{x^2}\ln\left(\frac{x}{y}\right)\right)$$

$$= e^{y/x}\cdot\frac{y}{x} + \left(-\frac{e^{y/x}}{x^2}\right) - \left\{\left(\frac{-2y}{x^3}\right)e^{y/x}\ln\left(\frac{x}{y}\right)\right.$$

$$\left. + \frac{y}{x^2}e^{y/x}\cdot\left(\frac{-y}{x^2}\right)\ln\left(\frac{x}{y}\right) + \frac{y}{x^2}e^{y/x}\ \frac{y}{x}\cdot\frac{1}{y}\right\}$$

$$= \frac{(x^3y-x^2+2xy\ln\left(\frac{x}{y}\right)+y^2\ln\left(\frac{x}{y}\right)-2xy)e^{y/x}}{x^4}$$

$$z_y = \frac{\partial}{\partial y}\left(e^{y/x}\ln\left(\frac{x}{y}\right)\right) = \frac{e^{y/x}}{x}\ln\left(\frac{x}{y}\right) + e^{y/x}\left(-\frac{1}{y}\right)$$

$$z_{yy} = \frac{e^{y/x}}{x^2}\ln\left(\frac{x}{y}\right)\left(\frac{-e^{y/x}}{xy}\ln\left(\frac{x}{y}\right) - \frac{e^{y/x}}{xy} + \frac{e^{y/x}}{y^2}\right.$$

$$= \frac{(y^2-xy)\,e^{y/x}\ln\left(\frac{x}{y}\right) - (x^2y-x^2)\,e^{y/x}}{x^2y^2}$$

$$z_{xy} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{e^{y/x}}{x} - \frac{ye^{y/x}}{x^2}\ln\left(\frac{x}{y}\right)\right)$$

$$= \frac{-ye^{y/x}}{x^3}\ln\left(\frac{x}{y}\right) - \frac{e^{y/x}}{x^2}\ln\left(\frac{x}{y}\right)$$

$$- \frac{e^{y/x}}{xy}\ln\left(\frac{x}{y}\right) + \frac{e^{y/x}}{x^2}$$

3. จงหาอนุพันธ์ย่อยตามที่กำหนดไว้ของฟังก์ชันต่อไปนี้

3.1 ถ้า $f(x, y, z) = e^{xyz} + \ln\left(\frac{xy}{z}\right)$ จงหา f_{yy}

$$f_y = \frac{\partial}{\partial y}\left(e^{xyz} + \ln\left(\frac{xy}{z}\right)\right)$$

$$= e^{xyz}\,(xz) + \frac{z}{xy}\cdot\frac{x}{z}$$

$$= xze^{xyz} + \frac{1}{y}$$

$$f_{yy} = \frac{\partial}{\partial y}\left(xze^{xyz} + \frac{1}{y}\right)$$

$$= xze^{xyz}\,(zx) + \left(-\frac{1}{y^2}\right)$$

$$= x^2z^2e^{xyz} - \frac{1}{y^2}$$

3.2 ถ้า $f(x, y, z) = xyz + \ln(xyz)$ จงหา f_{zzz}

$$f_z = \frac{\partial}{\partial z}\left(xyz + \ln(xyz)\right)$$

$$= xy + \frac{1}{xyz}\cdot xy$$

$$= xy + \frac{1}{z}$$

$$f_{zz} = \frac{\partial}{\partial z}(xy+\frac{1}{z}) = 0+(-\frac{1}{z^2}) = -\frac{1}{z^2}$$

$$f_{zzz} = \frac{\partial}{\partial z}(-\frac{1}{z^2}) = \frac{2}{z^3}$$

3.3 ถ้า $f(x, y) = x^9y^{-4/3}$ จงหา f_{xxx} และ f_{xyy}

$$f_x = \frac{\partial}{\partial x}(x^9y^{-4/3}) = 9x^8y^{-4/3}$$

$$f_{xx} = 72x^7y^{-4/3}$$

$$f_{xxx} = 504\,x^6\,y^{-4/3}$$

$$f_y = \frac{\partial}{\partial y}(x^9y^{-4/3}) = -\frac{4}{3}x^9y^{-7/3}$$

$$f_{yy} = \frac{28}{9}x^9y^{-\frac{10}{3}}$$

$$f_{xyy} = 28\,x^8y^{-\frac{10}{3}}$$

3.4 ถ้า $f(x, y) = \ln(x^2y^2)$ จงหา f_{yyy} ' f_{yxx}

$$f_y = \frac{2}{y}$$

$$f_{yy} = -\frac{2}{y^2}$$

$$f_{yyy} = \frac{4}{y^3}$$

$$f_x = \frac{2}{x}\ ,\ f_{xx} = -\frac{2}{x^2}$$

$$f_{yxx} = 0$$

3.5 ถ้า $f(x, y) = e^{xy}$ จงหา f_{xxy} , f_{xyx} และ f_{yxx}

$$f_x = ye^{xy}\ ,\ f_y = xe^{xy}$$

$$f_{xy} = \frac{\partial}{\partial y}(ye^{xy}) = e^{xy}+xye^{xy}$$

$$\therefore \quad f_{xxy} = \frac{\partial}{\partial x}(e^{xy}+xye^{xy}) = ye^{xy}+ye^{xy}+xy^2e^{xy}$$

$$= 2ye^{xy}+xy^2e^{xy}$$

$$f_{yx} = f_{xy}$$

$$f_{xyx} = f_{xxy} = 2ye^{xy}+xy^2e^{xy}$$

$$f_{xx} = \frac{\partial}{\partial x}(ye^{xy}) = y^2e^{xy}$$

$$\therefore \quad f_{yxx} = \frac{\partial}{\partial y}(y^2e^{xy}) = y^3e^{xy}$$

4. ถ้ากำหนดให้

$$z(r, t) = e^{r/t}+\ln(\frac{t}{r})$$

จงแสดงให้เห็นว่า

$$tz_t(r, t)+rz_r(r, t) = 0$$

$$z_t(r, t) = \frac{\partial}{\partial t}(e^{r/t}+\ln(\frac{t}{r}))$$

$$= \frac{-r}{t^2}e^{r/t}+\frac{1}{t}$$

$$z_r(r, t) = \frac{\partial}{\partial r}(e^{r/t}+\ln(\frac{t}{r}))$$

$$= \frac{e^{r/t}}{t}-\frac{1}{r}$$

$$tz_t(r, t)+rz_r(r, t) = t\left(\frac{1}{t}-\frac{r}{t^2}e^{r/t}\right)+r\left(\frac{e^{r/t}}{t}-\frac{1}{r}\right)$$

$$= 1-\frac{r}{t}e^{r/t}+\frac{r}{t}e^{r/t}-1 = 0$$

5. **ฟังก์ชัน** $z = f(x, y)$ เรียกว่า ฮาร์โมนิคฟังก์ชัน ถ้า $_{xx} + z_{yy} = 0$ จงแสดงว่าฟังก์ชันที่กำหนดให้ต่อไปนี้เป็นฮาร์โมนิคฟังก์ชัน

5.1

$$z \quad f(x, y) = x^2 - y^2$$

$$z_x = 2x$$

$$z_{xx} = 2$$

$$z_y = -2y$$

$$z_{yy} = -2$$

$$\therefore \quad z_{xx} + z_{yy} = 2 - 2 = 0$$

$\therefore$ $f(x, y) = x^2 - y^2$ เป็นฮาร์โมนิคฟังก์ชัน

5.2

$$z = f(x, y) = \ln(x^2+y^2)$$

$$z_x = \frac{2x}{x^2+y^2}$$

$$z_{xx} = \frac{2(y^2-x^2)}{(x^2+y^2)}$$

$$z_y = \frac{2y}{x^2+y^2}$$

$$z_{yy} = \frac{2(x^2-y^2)}{(x^2+y^2)^2}$$

$$\because \quad z_{xx} + z_{yy} = 0$$

$\therefore$ $f(x, y) = \ln(x^2+y^2)$ เป็นฮาร์โมนิคฟังก์ชัน

5.3

$$z = f(x, y) = \ln(x^2+y^2)^{1/2}$$

$$\because \ln(x^2+y^2)^{1/2} = \frac{1}{2}\ln(x^2+y^2)$$

จากข้อ 5.2 $\qquad z = \ln(x^2+y^2)$

ในที่นี้

$$z_{xx} = \frac{2}{2}\frac{(y^2-x^2)}{(x^2+y^2)^2} = \frac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2}$$

$$z_{yy} = \frac{2}{2}\frac{(x^2-y^2)}{(x^2+y^2)^2} = \frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2}$$

$$\therefore \quad z_{xx} + z_{yy} = 0$$

$f(x, y) = \ln(x^2+y^2)^{1/2}$ เป็นฮาร์โมนิคฟังก์ชัน

5.4

$$z = f(x, y) = e^{y/x} + \frac{x}{x^2+y^2}$$

$$z_x = \frac{-y e^{y/x}}{x^2} + \frac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2}$$

$$z_{xx} = \frac{2y}{x^3} e^{y/x} + \frac{y^2}{x^4} e^{y/x} + \frac{2x^3-6xy^2}{(x^2+y^2)^3}$$

$$z_y = \frac{e^{y/x}}{x} - \frac{2xy}{(x^2+y^2)^2}$$

$$z_{yy} = \frac{e^{y/x}}{x^2} - \frac{(2x^3-6xy^2)}{(x^2+y^2)^3}$$

$$z_{xx}+z_{yy} = \frac{2Y}{x^3} e^{y/x} + \frac{y^2}{x^4} e^{y/x} + \frac{2x^3-6xy^2}{(x^2+y^2)^3} + \frac{e^{y/x}}{x^2} - \frac{(2x^3-6xy^2)}{(x^2+y^2)^3}$$

$$= \frac{(x+y)^2}{x^4} e^{y/x} \neq 0$$

$\therefore \quad z = f(x, y) = e^{y/x} + \frac{x}{x^2+y^2}$ ไม่เป็นฮาร์โมนิคฟังก์ชัน

z จะเป็นฮาร์โมนิคฟังก์ชั่น เมื่อ $\frac{(x+y)^2}{x^4} e^{y/x} = 0$ นั่นคือ $x = -y$

6. กำหนดให้ $f(x, y, 2) = x^2y+y^2z+z^2x$

จงแสดงให้เห็นว่า

$$f_x(x, y, z) + f_y(x, y, z) + f\ (x, y, z) - (x+y+z)^2 = 0$$

$$f_x = 2xy+z^2$$

$$f_y = x^2+2yz$$

$$f_z = y^2+2zx$$

$$f_x + f_y + f_z = x^2+y^2+z^2+2xy+2yz+2zx$$

$$= (x+y+z)^2$$

$$\therefore \quad f_x + f_y + f_z - (x+y+z)^2 = 0$$

7. จงหาความชันของเส้นสัมผัสโค้งที่เกิดจากการตัดกันระหว่างผิวโค้ง $z = x^2+y^2$ กับระนาบ $y = 1$ ที่จุด $(2, 1, 5)$

ความชันที่ต้องการคือ ค่าของ z_x ที่จุด $(2, 1, 5)$

$$z_x = 2x$$

ที่จุด $(2, 1, 5)$ $\quad z_x = 4$

$\therefore$ ความชันที่ต้องการมีค่าเท่ากับ 4

8. จงหาความชันของเส้นสัมผัสโค้งที่เกิดจากการตัดระหว่างรูปทรงกลม $x^2+y^2+z^2 = 9$ กับระนาบ $x = 1$ ที่จุด $(1, 2, 2)$

จากสมการ $\quad x^2+y^2+z^2 = 9$

$$z = (9-x^2-y^2)^{1/2}$$

ความชันที่ต้องการคือ z_y ที่จุด $(1, 2, 2)$

$$z_y = \frac{1}{2}(9-x^2-y^2)^{-1/2}(-2y)$$

$$= \frac{-y}{(9-x^2-y^2)^{1/2}}$$

ที่จุด $(1, 2, 2)$; $\quad z_y = -1$

ความชันที่ต้องการมีค่าเท่ากับ -1

9. สมการของลาปลาซ คือ

$$u_{xx}+u_{yy}+u_{zz} = 0$$

จงแสดงให้เห็นว่า $\quad u(x, y, z) = (x^2+y^2+z^2)^{-1/2}$

เป็นคำตอบของสมการลาปลาซ

$$u_x = -x(x^2+y^2+z^2)^{-3/2}$$

$$u_{xx} = -(x^2+y^2+z^2)^{-3/2} + 3x^2(x^2+y^2+z^2)^{-5/2}$$

$$= (2x^2-y^2-z^2)(x^2+y^2+z^2)^{-5/2}$$

$$u_y = -y(x^2+y^2+z^2)^{-3/2}$$

$$u_{yy} = -(x^2+y^2+z^2)^{-3/2} + 3y^2(x^2+y^2+z^2)^{-5/2}$$

$$= (-x^2+2y^2-z^2)(x^2+y^2+\ )^{2-5/2}$$

$$u_z = -z(x^2+y^2+z^2)^{-3/2}$$

$$u_{zz} = -(x^2+y^2+z^2)^{-3/2} + 3z^2(x^2+y^2+z^2)^{-5/2}$$

$$= (-x^2-y^2+2z^2)(x^2+y^2+z^2)^{-5/2}$$

$$u_{xx} + u_{yy} + u_{zz} = \frac{(2x^2-y^2-z^2) + (-x^2+2y^2-z^2)+(-x^2-y^2+2z^2)}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{5}{2}}}$$

$$= 0$$

$\therefore \quad u(x, y, z) = (x^2+y^2+z^2)^{-1/2}$ เป็นคำตอบของสมการลาปลาซ

10. จากสูตรในเรื่องก๊าซ $P.V. = KT$

ซึ่ง P เป็นความดันของก๊าซ

V เป็นปริมาตร

T เป็นอุณหภูมิ

และ K เป็นค่าคงที่

จงแสดงให้เห็นว่า $\left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)\left(\frac{\partial T}{\partial P}\right)\left(\frac{\partial P}{\partial V}\right) = -1$

วิธีทำ จาก $PV = KT$

$$V = \frac{KT}{P}$$

$$\frac{\partial V}{\partial T} = \left(\frac{\partial}{\partial T}\right)\frac{KT}{P} = \frac{K}{P}$$

และ $$T = \frac{PV}{K}$$

$$\therefore \quad \frac{\partial T}{\partial P} = \frac{\partial}{\partial P}\left(\frac{PV}{K}\right) = \frac{V}{K}$$

และ $$P = \frac{KT}{V}$$

$$\therefore \quad \frac{\partial P}{\partial V} = \frac{\partial}{\partial V}\left(\frac{KT}{V}\right) = KT\left(-\frac{1}{V^2}\right) = \frac{-KT}{V^2}$$

$$\therefore \quad \left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)\left(\frac{\partial T}{\partial P}\right)\left(\frac{\partial P}{\partial V}\right) = \left(\frac{K}{P}\right)\left(\frac{V}{K}\right)\left(\frac{-KT}{V^2}\right) = \frac{-KT}{PV} = \frac{-KT}{KT} = -1$$

11. ถ้า 10,000X เป็นค่าสินค้าในคลังสินค้า y เป็นจำนวนเจ้าหน้าที่ประจำคลังเก็บ , P เป็นกำไรต่อสัปดาห์ และ

$$P = 3000+240y+20y(x-2y) - 10(x-12)^2$$

โดย $15 \leqslant x \leqslant 25$ และ $5 \leqslant y \leqslant 12$

ถ้ากำหนดว่าค่าสินค้าเป็น 180,000 บาท และมีเจ้าหน้าที่ 8 คน

ก. จงหาอัตราการเปลี่ยนแปลงของ P สำหรับการเปลี่ยนแปลง, ต่อหน่วยใน x ถ้ากำหนดให้ y คงที่ และเท่ากับ 8

จงใช้ผลจากข้อ ก. หาการเปลี่ยนแปลงของกำไรต่อสัปดาห์ ถ้าค่าสินค้าเปลี่ยนแปลงจาก 180,000 บาท เป็น 200,000 บาท และ $y = 8$

ค. จงหาอัตราการเปลี่ยนแปลงของ P สำหรับการเปลี่ยนแปลงต่อหน่วยใน y ถ้า $x = 18$

ง. จงใช้ผลจากข้อ ค. หาการเปลี่ยนแปลงของกำไรต่อสัปดาห์ถ้าจำนวนเจ้าหน้าที่เปลี่ยนจาก 8 เป็น 10 และ $x = 18$

วิธีทำ $P = 3000+240y+20y(x-2y) - 10(x-12)^2$

ก) $P_x(x, y) = 20y - 20(x-12)$

ถ้า $x = 18$ และ $y = 8$

$P_x(x, y) = 160 - 20(18-12)$

$= 40$

ข) ถ้าค่าสินค้าเปลี่ยนจาก 180,000 บาท เป็น 200,000 บาท

$\therefore$ การเปลี่ยนแปลงของกำไรต่อสัปดาห์ $= 40 \times 20{,}000 = 800{,}000$ บาท

ค) $P_y(x, y) = 240+20x - 40y^2$

ที่ $x = 18, y = 1$

$P_y(18, 1) = 240+360-40$

$= 560$

ง) ถ้าจำนวนเจ้าหน้าที่เปลี่ยนจาก 8 เป็น 10

$\therefore$ การเปลี่ยนแปลงของกำไรต่อสัปดาห์ $= 560 \times 2$

$= 1{,}120$ บาท

12. ถ้า z เป็นจำนวนโต๊ะที่ผลิตได้ใน 1 วัน โดยโรงงานเฟอร์นิเจอร์
x เป็นจำนวนเครื่องจักรที่ใช้ผลิตในวันนั้น
y เป็นจำนวนคนงานที่ใช้แรงงานในวันนั้น

และ ถ้า $z = 3x^2+4xy+y^2$ โดยที่ $3 \leqslant x \leqslant 10, 4 \leqslant y \leqslant 25$

ก. จงหาจำนวนโต๊ะที่ผลิตใน 1 วัน เมื่อใช้เครื่องจักร 5 เครื่อง และคนงาน 10 คน

ข. จงหาจำนวนโต๊ะเพิ่มโดยประมาณที่ผลิตได้ใน 1 วัน ถ้าจำนวนเครื่องจักรเพิ่มจาก 5 เครื่องเป็น 6 เครื่อง และจำนวนคนงาน $y = 10$

ค. จงหาจำนวนโต๊ะเพิ่มโดยประมาณที่ผลิตได้ใน 1 วัน ถ้าเพิ่มจำนวนคนงานจาก 10 คน เป็น 11 คน และจำนวนเครื่องจักร $x = 5$

วิธีทำ $z = 3x^2+4xy+y^2, 3 \leqslant x \leqslant 10, 4 \leqslant y \leqslant 25$

ก. เมื่อ $x = 5, y = 10$

$z = 75+200+100 = \mathbf{375}$

ข. $z_x = 6x+4y$

เมื่อ $x = 5, y = 10$

$z_x = 30+40 = \mathbf{70}$

ค. $z_y = 4x+2y$

เมื่อ $x = 5, y = 10$

$z_y = 20+20 = \mathbf{40}$

9.5 ค่าปลายสุดของฟังก์ชัน 2 ตัวแปร

นิยาม ถ้า $f : D \to R$ เมื่อ $D \subseteq R^2$ และ $S \subseteq D$

1. ถ้ามีจุด (x_0,y_0) ใน S ซึ่งทำให้ $f(x_0,y_0) \leqslant f(x,y)$ สำหรับทุก ๆ (x,y) ใน S เราจะกล่าวว่า f **มีค่าต่ำสุดสัมบูรณ์บน** S ที่จุด (x_0,y_0) และ $f(x_0,y_0)$ คือค่าต่ำสุดสัมบูรณ์ของ f บน S และ (x_0,y_0) คือจุดต่ำสุดสัมบูรณ์ของ f บน S

2. ถ้ามีจุด (x_0,y_0) ใน S ซึ่งทำให้ $f(x_0,y_0) \geqslant f(x,y)$ สำหรับทุก ๆ (x,y) ใน S เรากล่าวว่า f **มีค่าสูงสุดสัมบูรณ์** บน S ที่จุด (x_0,y_0) และ $f(x_0,y_0)$ คือค่าสูงสุดสัมบูรณ์ของ f บน S และ (x_0,y_0) คือจุดสูงสุดสัมบูรณ์ของ f บน S

ทฤษฎีบท ถ้า R เป็นเซ็ตปิด และ f เป็นฟังก์ชันของ 2 ตัวแปรซึ่งมีความต่อเนื่องบน R แล้วจะมีจุดใน R อย่างน้อย 1 จุดที่ f มีค่าสูงสุดสัมบูรณ์หรือต่ำสุดสัมบูรณ์

นิยาม

1. ถ้ามีเซ็ตเปิด $B((x_0, y_0); r) \subseteq D$ ซึ่งทำให้ $f(x_0,y_0) \leqslant f(x,y)$ สำหรับทุก ๆ (x,y) ใน B เรากล่าวว่า f **มีค่าต่ำสดสัมพัทธ์ที่จุด** (x_0,y_0) และ $f(x_0,y_0)$ คือค่าต่ำสุดสัมพัทธ์ของ f

2. ถ้ามีเซ็ตเปิด $B((x_0, y_0); r) \subseteq D$ ซึ่งทำให้ $f(x_0,y_0) \geqslant f(x,y)$ สำหรับทุก ๆ (x,y) ใน B เรากล่าวว่า f **มีค่าสูงสุดสัมพัทธ์ที่จุด** (x_0,y_0) และ $f(x_0,y_0)$ คือค่าสูงสุดสัมพัทธ์ของ f

นิยาม จุด (x_0,y_0) เรียกว่า **จุดวิกฤต** ของ f ก็ต่อเมื่อ

$$f_x(x_0,y_0) = f_y(x_0,y_0) = 0$$

ตัวอย่าง จงหาจุดวิกฤตของ $f(x,y) = x^2+y^2-2x$

$$f_x(x,y) = 2x-2$$

$$f_y(x,y) = 2y$$

เมื่อ $2x-2 = 0$ จะได้ $x = 1$

และ $2y = 0$ จะได้ $y = 0$

$\therefore$ จุดวิกฤตของ f คือ (1,0)

การทดสอบว่าจุดวิกฤตใด ๆ จะเป็นจุดปลายสุดสัมพัทธ์หรือไม่โดยอนุพันธ์ย่อยอันดับสองของฟังก์ชันสองตัวแปรจะใช้ทฤษฎีบทต่อไปนี้ตรวจสอบ

ทฤษฎีบท

ให้ f เป็นฟังก์ชันของสองตัวแปร ซึ่งมี (a,b) เป็นจุดวิกฤต ถ้ามีเซ็ตเปิด P((a,b);r) ซึ่งอนุพันธ์ย่อยอันดับสอง f_{xx} , f_{xy} และ f_{yy} หาค่าได้และต่อเนื่องใน P((a,b);r) แล้วจะได้ว่า

1. ถ้า $f_{xx}(a,b)f_{yy}(a,b) - [f_{xy}(a,b)]^2 > 0$ และ $f_{xx}(a;b) > 0$ แล้ว f จะมีค่าต่ำสุดสัมพัทธ์ที่จุด (a,b)
2. ถ้า $f_{xx}(a,b)f_{yy}(a,b) - [f_{xy}(a,b)]^2 > 0$ และ $f_{xx}(a,b) < 0$ แล้ว f จะมีค่าสูงสุดสัมพัทธ์ที่จุด (a,b)
3. ถ้า $f_{xx}(a,b)f_{yy}(a,b) - [f_{xy}(a,b)]^2 < 0$ แล้ว f ไม่มีจุดปลายสุดสัมพัทธ์
4. ถ้า $f_{xx}(a,b)f_{yy}(a,b) - [f_{xy}(a,b)]^2 = 0$ สรุปไม่ได้

แบบฝึกหัด 9.5

1. จงหาจุดวิกฤตของฟังก์ชันต่อไปนี้

1.1
$$z(x, y) = 5x^2-2y^2+10x+8y-9$$
$$z_x(x, y) = 10x+10 = 0$$
$$\therefore\ x = -1$$
$$z_y(x, y) = -4y+8 = 0$$
$$\therefore\ y = 2$$
$\therefore$ $(-1, 2)$ เป็นจุดวิกฤต

1.2
$$z(x, y) = x^3-2y^3-12x+6y+7$$
$$z_x(x, y) = 3x^2-12 = 0$$
$$x = \pm 2$$
$$z_y(x, y) = -6y^2+6 = 0$$
$$y = \pm 1$$
$\therefore$ (-2,1) , (-2-1) , (2,1) , (2-1) เป็นจุดวิกฤต

1.3
$$f(x, y) = 3x^2-5y^2-5xy-27x-20y-2$$
$$f_x(x, y) = 6x-5y-27 = 0$$
$$f_y(x, y) = -10y-5x-20 = 0$$
$$\therefore\ x = 2,\ y = 3$$
จุดวิกฤตคือ $(2, 3)$

1.4
$$f(x, y) = 7x^3+5y^3+3x+5y-2$$
$$f_x(x, y) = 21x^2+3 = 0$$
x หาค่าไม่ได้
$$f_y(x, y) = 15y^2+5 = 0$$
y หาค่าไม่ได้

ไม่มีจุดวิกฤต

1.5 $$f(t, y) = 4t^2+3y^2-ty+10t-4y+1$$

$$f_t(t, y) = 8t-y+10 = 0$$

$$f_y(x, y) = 6y-t-4 = 0$$

$$\therefore \quad t = \frac{-56}{47}, y = -\frac{22}{47}$$

จุดวิกฤต คือ $\left(-\frac{56}{47}, -\frac{22}{47}\right)$

2. จงหาค่าปลายสุดสัมพัทธ์ (ถ้ามี) ของฟังก์ชันต่อไปนี้

2.1 $$f(x, y) = 2x^2+y^2-8x-2y+14$$

$$f_x(x, y) = 4x-8 = 0 \therefore x = 2$$

$$f_y(x, y) = 2y-2 = 0 \therefore y = 1$$

$\therefore$ (2, 1) เป็นจุดวิกฤต

$$f_{xx}(x, y) = 4$$

$$f_{xy}(x, y) = 0$$

$$f_{yy}(x, y) = 2$$

$$f_{xx}(2, 1) = 4, f_{xy}(2, 1) = 0, f_{yy}(x, y) = 2$$

$f_{xx}(2, 1) f_{yy}(2, 1) - \left[f_{xy}(2, 1)\right]^2 = 8 > 0$ และ

$$\phi_{xx}(z, 1) = 4 > 0$$

$\therefore$ f มีค่าต่ำสุดสัมพัทธ์ที่ (2,1) ซึ่งเท่ากับ f(2,1) = 5

2.2 $$z(x, y) = \frac{1}{x} - \frac{64}{y} + xy$$

$$z_y(x, y) = -\frac{1}{x^2} + y = 0$$

$$z_y((x, y) = \frac{+64}{y^2} + x = 0$$

แก้สมการทั้งสองได้ y = 0, 16 เมื่อ y = 0 หาค่า x ไม่ได้

$$\therefore y = 16, \quad x = -\frac{1}{4}$$

$\therefore$ จุด $(-\frac{1}{4}, 16)$ เป็นจุดวิกฤต

$$z_{xx} = \frac{2}{x^3} \;,\; z_{xx}(-\tfrac{1}{4}, 16) = 128$$

$$z_{xy} = 1 \;,\; Z_{xy}(-\tfrac{1}{4}, 16) = 1$$

$$z_{yy} = \frac{-128}{y^3} \;,\; z_{yy}(-\tfrac{1}{4}, 16) = -\frac{1}{32}$$

$$z_{xx}(-\tfrac{1}{4}, 16)\, z_{yy}(-\tfrac{1}{4}, 16) - [\, z_{xy}(-\tfrac{1}{4}, 16)\,]^2 = 4-1 = 3 > 0$$

แต่ $z_{xx}(-\frac{1}{4}, 16) > 0$

$\therefore$ z มีค่าสูงสุดสัมพัทธ์ที่ $(-\frac{1}{4}, 16)$

ค่าสูงสุดสัมพัทธ์ที่ $(-\frac{1}{4}, 16)$ คือ $z(-\frac{1}{4}, 16)\, 16) = -12$

2.3 $z(x, y) = 4xy^2 - 2x^2y - x$

$$z_x(x, y) = 4y^2 - 4xy - 1 = 0 \qquad \text{———— } 1$$

$$z_y(x, y) = 8xy - 2x^2 = 0 \qquad \text{———— } 2$$

จาก 2 , $2x(4y - x) = 0$

$x = 0$ หรือ $x = 4y$

แทนใน 1 $x = 0,\ y = \pm\frac{1}{2}$

$x = 4y\, ;\, y^2 = -\frac{1}{12}$ หาค่า y ไม่ได้

$\therefore$ จุดวิกฤต คือ $(0, \frac{1}{2})$, $(0, \frac{1}{2})$

$$z_{xx}(x, y) = -4y$$

$$z_{xy}(x, y) = 8y - 4x$$

$$z_{yy}(x, y) = 8x$$

ที่ $(0, \frac{1}{2})$, $z_{xx}(0, \frac{1}{2})\, z_{yy}(0, \frac{1}{2}) - [\, z_{xy}(0, \frac{1}{2})\,]^2 = -16 < 0$

$\therefore$ z ไม่มีค่าสูงสุดหรือต่ำสุดที่ $(0, \frac{1}{2})$

ที่ $(0, -\frac{1}{2})$, $z_{xx}(0, -\frac{1}{2})\, z_{yy}(0, -\frac{1}{2}) - [\, z_{xy}(0, -\frac{1}{2})\,]^2 = -16 < 0$

$\therefore$ z ไม่มีค่าสูงสุดหรือต่ำสุดที่ $(0, -\frac{1}{2})$

2.4

$$g(x, y) = x^3+x^2+y^2-xy+8$$

$$g_x(x, y) = 3x^2+2x-y = 0$$

$$g_y(x, y) = 2y-x = 0$$

แก้สมการหาค่า x, y ได้ $x = 0, -\frac{1}{2}, y = 0, -\frac{1}{4}$

$\therefore$ จุดวิกฤตของ g คือ (0, 0) และ $(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{4})$

$$g_{xx}(x, y) = 6x+2$$

$$g_{xy}(x, y) = -1$$

$$g_{yy}(x, y) = 2$$

ที่จุด (0, 0)

$$g_{xx}(0, 0)\, g_{yy}(0, 0) - [g_{xy}(0, 0)]^2 = 4-(-1)^2 = 5 > 0$$

และ $g_{xx}(0, 0) = 2 > 0$

$\therefore$ g มีค่าต่ำสุดสัมพัทธ์ที่ (0, 0)

ค่าต่ำสุดสัมพัทธ์ของ g ที่ (0, 0) คือ $g(0, 0) = 8$

ที่จุด $(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{4})$

$$g_{xx}(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{4})\ g_{yy}(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{4}) - [g_{yy}(\frac{1}{2}, -\frac{1}{4})]^2 = -3 < 0$$

g ไม่มีค่าสูงสุดหรือต่ำสุด

3. ถ้าในการผลิตสินค้าชนิดหนึ่ง ซึ่งใช้เครื่องจักรเป็นจำนวน x เครื่องจักร/ชั่วโมง และใช้ y คน/ชั่วโมง จะเสียค่าต้นทุนในการผลิตเป็น

$$f(x, y) = 2x^3-6xy+y^2+500$$

จงหาจำนวนเครื่องจักร/ชั่วโมง และจำนวนคน/ชั่วโมงที่จะทำให้ต้นทุนค่าใช้จ่ายต่ำสุด

วิธีทำ $f(x,y) = 2x^3-6xy+y^2+500$

$f_x(x,y) = 6x^2-6y = 0$

$f_y(x,y) = -6x+2y = 0$

แก้สมการทั้งสองได้ $x = 0, 3, y = 0, 9$

$\therefore$ จุดวิกฤต คือ $(0,0)$, $(3,9)$

$f_{xx}(x,y) = 12x$

$f_{xy}(x,y) = -6$

$f_{yy}(x,y) = 2$

ที่ $(0,0)$

$$[f_{xx}(0,0) f_{yy}(0,0)] - [f_{xy}(0,0)]^2 = -(-6)^2 = -36 < 0$$

$\therefore$ f ไม่มีค่าสูงสุดหรือต่ำสุดที่ $(0,0)$

ที่ $(3,9)$ $f_{xx}(3,9) f_{yy}(3,9) - [f_{xy}(3,9)]^2 = (36)\ 2 - (-6)^2 = 36 > 0$

$\therefore$ f มีค่าต่ำสุดสัมพัทธ์ที่ $(3,9)$

$\therefore$ ต้องใช้เครื่องจักร 3 เครื่อง / ชั่วโมง และใช้คน 9 คน / ชั่วโมง

4. ในการสร้างกล่องสี่เหลี่ยมผืนผ้า แบบไม่มีฝาปิด โดยใช้วัสดุในราคา 10 บาท ถ้าค่าวัสดุในการทำด้านฐานของกลุ่มเท่ากับ 15 สตางค์/ตารางฟุต และ สำหรับด้านข้างของกล่องเท่ากับ 30 สตางค์/ตารางฟุต จงหาขนาดของกล่องที่มีปริมาตรสูงสุด

วิธีทำ ให้ x เป็นด้านยาวของด้านฐานของกล่องหน่วยเป็นฟุต

y เป็นด้านกว้างของด้านฐานของกล่องหน่วยเป็น ฟุต

z เป็นความสูงของกล่องหน่วยเป็นฟุต

S เป็นพื้นที่ด้านข้างของกล่อง

V เป็นปริมาตรของกล่อง

$\therefore S = xy+2xz+2yz$

$V = xyz$

$\therefore 10 = .15xy+.60(xz+yz)$

$200 = 3xy+12z(x+y)$

$$\therefore \quad z = \frac{}{xy}$$

$$\frac{12V}{xy}(x+y) = 200 - 3xy$$

$$V = \frac{200-3xy}{12(\frac{1}{y}+\frac{1}{x})}$$

$$V_x = \frac{-3y}{12(\frac{1}{y}+\frac{1}{x})} - \frac{(200-3xy)}{12(\frac{1}{y}+\frac{1}{x})^2}\left(-\frac{1}{x^2}\right) = \frac{-3-\frac{6y}{x}+\frac{200}{x^2}}{12(\frac{1}{y}+\frac{1}{x})^2}$$

$$= \frac{-3x^2-6xy+200}{12x^2(\frac{1}{y}+\frac{1}{x})^2} = 0$$

$$V_y = \frac{-3x}{12(\frac{1}{y}+\frac{1}{x})} - \frac{(200-3xy)(-\frac{1}{y^2})}{12(\frac{1}{y}+\frac{1}{x})^2}$$

$$= \frac{-3y^2-6xy+200}{12y^2(\frac{1}{y}+\frac{1}{x})^2} = 0$$

$\therefore$ แก้สมการ หาค่า x, y จาก $-3x^2-6xy+200 = 0$ และ

$-3y^2-6xy+200 = 0$

$$x = \frac{10}{3}\sqrt{2}, \quad y = \frac{10}{3}\sqrt{2}$$

$\therefore$ จุดวิกฤตคือ $\left(\frac{10}{3}\sqrt{2}, \frac{10}{3}\sqrt{2}\right)$

$$V_{xx} = \frac{\frac{6y}{x^2}-\frac{400}{x^3}}{12(\frac{1}{y}+\frac{1}{x})^2} - \frac{2(-3-\frac{6y}{x}+\frac{200}{x^2})(-\frac{1}{x^2})}{12(\frac{1}{y}+\frac{1}{x})^3} = \frac{\frac{6y-12}{x^3}-\frac{400}{x^3 y}}{12(\frac{1}{y}+\frac{1}{x})^3}$$

$$V_{xy} = \frac{-\frac{6}{y}}{12(\frac{1}{y}+\frac{1}{x})^2} - \frac{2(-3-\frac{6x}{y}+\frac{200}{y^2})(-\frac{1}{x^2})}{12(\frac{1}{y}+\frac{1}{x})^3} = \frac{-\frac{6}{y^2}-\frac{6}{xy}-\frac{6}{x^2}-\frac{12}{x^2 y}+\frac{400}{x^2y^2}}{12(\frac{1}{y}+\frac{1}{x})^3}$$

$$V_{yy} = \frac{\frac{6x}{y^2}-\frac{400}{y^3}}{12(\frac{1}{y}+\frac{1}{x})^2} - \frac{2(-3-\frac{6x}{y}+\frac{200}{y^2})(-\frac{1}{y^2})}{12(\frac{1}{y}+\frac{1}{x})^3} = \frac{\frac{6x-12}{y^3}-\frac{400}{xy^3}}{12(\frac{1}{y}+\frac{1}{x})^3}$$

$$V_{xx}\left(\frac{10\sqrt{2}}{3}, \frac{10\sqrt{2}}{3}\right)V_{yy}\left(\frac{10\sqrt{2}}{3}, \frac{10\sqrt{2}}{3}\right) - \left[V_{xy}\left(\frac{10\sqrt{2}}{3}, \frac{10\sqrt{2}}{3}\right)\right]^2 > 0$$

แต่ $$V_{xx}\left(\frac{10\sqrt{2}}{3}, \frac{10\sqrt{2}}{3}\right) < 0$$

$\therefore$ V มีค่าสูงสุดสัมพัทธ์ที่ $\left(\frac{10\sqrt{2}}{3}, \frac{10\sqrt{2}}{3}\right)$

จากสมการ $200 = 3xy + 12z(x+y)$

เมื่อ $x = \frac{10\sqrt{2}}{3}$, $y = \frac{10\sqrt{2}}{3}$

$$z = \frac{200 - \frac{200}{3}}{12\left(\frac{20\sqrt{2}}{3}\right)} = \frac{5}{6\sqrt{2}}$$

$\therefore$ ด้านยาวยาว $= \frac{10\sqrt{2}}{3}$ ฟุต

ด้านกว้างกว้าง $= \frac{10\sqrt{2}}{3}$ ฟุต

ด้านสูง $= \frac{5}{6\sqrt{2}}$ ฟุต

จึงจะทำให้กล่องมีปริมาตรมากที่สุด

5. บริษัทแห่งหนึ่งผลิตใบมีดโกนหนวดออกมา 2 แบบ คือแบบ A กับแบบ B ด้วยราคาต้นทุนใบละ 80 สตางค์ และ 60 สตางค์ ตามลำดับ ถ้า x และ y เป็นราคาขายของใบมีดโกนหนวดแบบ A และแบบ B จะได้ว่าความต้องการ Q_A ของใบมีดโกนหนวดแบบ A และความต้องการ Q_B ของใบมีดโกนหนวดแบบ B เป็น

$$Q_A = 160 - 7x + 6y$$
$$Q_B = 140 + 4x - 5y$$

จงหาราคาขายใบมีดโกนหนวดทั้งสองแบบที่จะทำให้บริษัทได้กำไรสูงสุด

วิธีทำ กำไร = (กำไรต่อหน่วยของ A) (จำนวนที่ขาย) + (กำไรต่อหน่วยของ B) (จำนวนที่ขาย)

ให้ $f(x, y)$ เป็นฟังก์ชันกำไร

$$f(x, y) = (x-0.80)(160-7x+6y)+(y-0.60)(140+4x-5y)$$

$$= 163.2x+138.2y-7x^2-5y^2+10xy-212$$

$$f_x(x, y) = 163.2-14x+10y = 0$$

$$f_y(x, y) = 138.2-10y+10x = 0$$

แก้สมการทั้งสอง หาค่า $x = 75.35$, $y = 61.53$

$$f_{xx}x, y) = -14$$

$$f_{xy}(x, y) = 10$$

$$f_{yy}(x, y) = -10$$

$$f_{xx}(75.35, 61.53)\, f_{yy}(75.35, 61.53) - [\, f_{xy}(75.35, 61.53)\,]^2 > 0$$

แต่ $f_{xx}(75.35, 61.53) < 0$

$\therefore$ f มีค่าสูงสุดสัมพัทธ์ที่ (75.35, 61.53)

$\therefore$ ราคาขายของใบมีดโกนหนวดแบบ A ในราคา 75.35 บาท และราคาขายของใบมีดโกนหนวดแบบ B ในราคา 61.53 บาท

6. ร้านขายเสื้อผ้าขายเสื้อกีฬา 2 ชนิด ซึ่งเหมือนกันแต่ทำจากต่างโรงงานเสื้อกีฬาชนิดที่หนึ่งและชนิดที่สองทางร้านซื้อมาด้วยราคา 40 บาท และ 50 บาท ตามลำดับ จากประสบการณ์ทางร้านรู้ว่าถ้าขายเสื้อกีฬาชนิดที่หนึ่งในราคา x บาท และชนิดที่สองในราคา y บาท จำนวนเสื้อกีฬาชนิดที่หนึ่งจะมียอดขายประจำเดือนเป็น

$$f(x, y) = 3200-50x+25y$$

ส่วนยอดขายประจำเดือนของเสื้อกีฬาชนิดที่สองเป็น

$$g(x, y) = 25x-25y$$

จงหาราคาขายของเสื้อกีฬาทั้งสองชนิดที่จะทำให้ได้กำไรสูงสุด

วิธีทำ

กำไร = (กำไรต่อหน่วยของเสื้อกีฬาชนิดที่ 1) (จำนวนที่ขาย) + (กำไรต่อหน่วยของเสื้อกีฬาชนิดที่ 2) (จำนวนที่ขาย)

ให้ $P(x, y)$ เป็นฟังก์ชันกำไร

$$P(x,y) = (x-40)(3200-50x+25y)+(y-50)(25x-25y)$$

$$P(x, y) = 3,950x+250y-50x^2-25y^2+50xy-128,000$$

$$P_x(x, y) = 3,950-100x+50y = 0$$

$$P_y(x, y) = 250-50y+50x = 0$$

แก้สมการทั้งสอง $x = 84,\ y = 89$

$\therefore$ $(84, 89)$ เป็นจุดวิกฤต

$$P_{xx} = -100$$

$$P_{xy} = 50$$

$$P_{yy} = -50$$

$$P_{xx}(84, 89)\,P_{yy}(84, 89) - (P_{xy}(84, 89))^2 > 0$$

และ $P_{xx} < 0$

$\therefore$ P มีค่าสูงสุดสัมพัทธ์ ที่ $(84, 89)$

$\therefore$ ต้องขายเสื้อกีฬาชนิดที่ 1 ในราคา 84 บาท และเสื้อกีฬาชนิดที่ 2 ในราคา 89 บาท จึงจะได้กำไรสูงสุด

7. บริษัทแห่งหนึ่งผลิตออร์แกนออกมาสองชนิดคือแบบ A และแบบ B ถ้า x และ y เป็นจำนวนของออร์แกนแบบ A และแบบ B ที่จะผลิตออกมาจำหน่าย บริษัทประมาณว่าราคาที่ออร์แกนแบบ A จะขายได้ ถูกกำหนดด้วย

$$f(x, y) = 1650+x-2y$$

และราคาของออร์แกนแบบ B ถูกกำหนดโดย

$$g(x, y) = 2200-3x+5y$$

ถ้าต้นทุนทั้งหมดสำหรับการผลิตออร์แกนแบบ A และแบบ B เป็นจำนวน x หน่วย และ y หน่วยคือ $3xy+990x+1,100y$

จงหาว่าควรจะผลิตออร์แกน ทั้ง 2 แบบ เป็นจำนวนอย่างละเท่าใด เพื่อให้ได้กำไรสูงสุด

วิธีทำ รายได้จากการขายออร์แกนแบบ A คือ $x(1650+x-2y)$

รายได้จากการขายออร์แกนแบบ B คือ $y(2200-3x+5y)$

ถ้า $h(x, y)$ เป็นกำไรของบริษัท

$$h(x,y) = x(1650+x-2y) \quad (3xy+990x+1)\ t$$
$$y(2200-3x+5y) - 100y$$
$$= x^2-8xy+5y^2+660x+2100y-1$$
$$h_x = 2x-8y+660 = 0$$
$$h_y = -8x+10y+2100 = 0$$

แก้สมการหาค่า x, y จากสมการ $x = \frac{5850}{11}, y = \frac{2310}{11}$

$$h_{xx} = 2$$

$$h_{xy} = -8$$
$$h_{yy} = 10$$
$$\therefore \quad h_{xx} \cdot h_{yy} - (h_{xy})^2 < 0$$

$\therefore$ ไม่มีค่าสูงสุดสัมพัทธ์

ประโยชน์บางประการของอนุพันธ์ย่อย

นิยาม กำหนดให้ f และ g เป็นฟังก์ชันอุปสงค์ของสินค้าทั้ง 2 ประเภทโดย

$$x = f(P,Q)$$
$$y = g(P,Q)$$

เมื่อ P เป็นราคาต่อหน่วยของสินค้าประเภทแรกซึ่งมีจำนวน x หน่วย

และ Q เป็นราคาต่อหน่วยของสินค้าประเภทสองซึ่งมีจำนวน y หน่วย

ดังนั้น $\frac{\partial x}{\partial P}$ เรียกว่าความต้องการเพิ่มใน x เมื่อเทียบกับ P

$\frac{\partial x}{\partial Q}$ เรียกว่าความต้องการเพิ่มใน x เมื่อเทียบกับ Q

$\frac{\partial y}{\partial P}$ เรียกว่าความต้องการเพิ่มใน y เมื่อเทียบกับ P

$\frac{\partial y}{\partial Q}$ เรียกว่าความต้องการเพิ่มใน y เมื่อเทียบกับ Q

ตัวอย่าง ถ้าสมการอุปสงค์เป็น

$$x = 5-2P+3Q$$
$$y = 7-3P-4Q$$

ความต้องการสินค้าเพิ่มทั้ง 4 แบบคือ

$$\frac{\partial x}{\partial P} = -2 \quad , \quad \frac{\partial x}{\partial Q} = 3$$
$$\frac{\partial y}{\partial P} = -3 \quad , \quad \frac{\partial y}{\partial P} = -4$$

นิยาม สินค้าสองประเภทเรียกว่าเป็น **ส่วนเติมเต็มต่อกันและกัน** ก็ต่อเมื่อ $\frac{\partial x}{\partial Q} < 0$ และ $\frac{\partial y}{\partial P} < 0$

สินค้าสองประเภทเรียกว่าเป็น **ส่วนทดแทนกัน** ก็ต่อเมื่อ $\frac{\partial x}{\partial Q} > 0$ และ $\frac{\partial y}{\partial P} > 0$

ถ้า $\frac{\partial x}{\partial Q}$ และ $\frac{\partial y}{\partial P}$ มีเครื่องหมายตรงกันข้าม สินค้าทั้งสองประเภทไม่เรียกว่า เป็นส่วนเติมเต็ม หรือเป็นส่วนทดแทนกัน

นิยาม สมการอุปสงค์

$$x = f(P,Q)$$
$$y = g(P,Q)$$

ความยืดหยุ่นของอุปสงค์บางส่วนของ x เทียบกับ P คือ $\frac{Ex}{EP}$

ซึ่งหาได้โดย $\frac{Ex}{EP} = \frac{P}{x} \frac{\partial x}{\partial P}$

ความยืดหยุ่นของอุปสงค์บางส่วนอีก 3 แบบคือ

$$\frac{Ex}{EQ} = \frac{Q}{x} \cdot \frac{\partial x}{\partial Q}$$
$$\frac{Ey}{EP} = \frac{P}{y} \cdot \frac{\partial y}{\partial P}$$
$$\frac{Ey}{EQ} = \frac{Q}{y} \cdot \frac{\partial y}{\partial Q}$$

แบบฝึกหัดที่ 9.6

1. จงหาความต้องการ (อุปสงค์) เพิ่มทั้ง 4 แบบ จากสมการอุปสงค์ที่กำหนดให้ต่อไปนี้

1.1
$$x = 5-2P-Q$$
$$y = 7-P-2Q$$

วิธีทำ โดยใช้นิยาม 9.6.1 กับสมการอุปสงค์ จะได้ว่า ความต้องการเพิ่มทั้ง 4 แบบ คือ

$$\frac{\partial x}{\partial P} = -2 \quad , \quad \frac{\partial x}{\partial Q} = -1$$

$$\frac{\partial y}{\partial P} = -1 \quad , \quad \frac{\partial y}{\partial Q} = -2$$

1.2
$$x = P^{-(0.6)}\,Q^{(0.2)}$$
$$y = P^{(0.6)}Q^{(-0.2)}$$

โดยนิยาม 9.6.1 จะได้ว่าความต้องการเพิ่มทั้ง 4 แบบ คือ

$$\frac{\partial x}{\partial P} = -0.6P^{-1.6}\,Q^{0.2}$$

$$\frac{\partial x}{\partial Q} = 0.2\,P^{-0.6}\,Q^{-0.8}$$

$$\frac{\partial y}{\partial P} = 0.6P^{-0.4}\,Q^{-0.2}$$

$$\frac{\partial y}{\partial Q} = -0.2\,P^{0.6}\,Q^{-1.2}$$

1.3 $x = \bar{a}^{(P+Q)}$

$y = b^{-PQ}$ โดยที่ a, b เป็นค่าคงที่

ความต้องการเพิ่มทั้ง 4 แบบ คือ

$$\frac{\partial x}{\partial P} = -a^{-(P+Q)} \ln a$$

$$\frac{\partial x}{\partial Q} = -a^{-(P+Q)} \ln a$$

$$\frac{\partial y}{\partial P} = -Q\, b^{-PQ} \ln b$$

$$\frac{\partial y}{\partial Q} = -P\, b^{-PQ} \ln b$$

1.4 $x = \frac{Q}{P}$

$Y = \frac{P^2}{Q}$

ความต้องการเพิ่มทั้ง 4 แบบ คือ

$$\frac{\partial x}{\partial P} = \frac{-Q}{P^2}, \quad \frac{\partial x}{\partial Q} = \frac{1}{P}$$

$$\frac{\partial y}{\partial P} = \frac{2P}{Q}, \quad \frac{\partial y}{\partial Q} = \frac{-P^2}{Q^2}$$

1.5 $x = 3-5P+Q$

$y = 3+6P-2Q$

ความต้องการเพิ่มทั้ง 4 แบบ คือ

$\frac{\partial x}{\partial P} = -5$, $\frac{\partial x}{\partial Q} = 1$

$\frac{\partial y}{\partial P} = 6$ $\frac{\partial y}{\partial Q} = -2$

1.6 $x = 3-6P+Q$

$y = 4+P-3Q$

ความต้องการเพิ่มทั้ง 4 แบบ คือ

$\frac{\partial x}{\partial P} = -6$ $\frac{\partial x}{\partial Q} = 1$

$\frac{\partial y}{\partial P} = 1$ $\frac{\partial y}{\partial Q} = -3$

1.7 $x = 2e^{P-Q}$

$y = 3e^{Q-P}$

ความต้องการเพิ่มทั้ง 4 แบบคือ

$\frac{\partial x}{\partial P} = 2e^{P-Q}$, $\frac{\partial x}{\partial Q} = -2e^{P-Q}$

$\frac{\partial y}{\partial P} = -3e^{Q-P}$ $\frac{\partial y}{\partial Q} = 3e^{Q-P}$

1.8 $x = \frac{1}{P^2Q}$, $y = \frac{I}{PQ^2}$

ความต้องการเพิ่มทั้ง 4 แบบ คือ

$$\frac{\partial x}{\partial P} = \frac{-2}{P^3Q} \quad , \quad \frac{\partial x}{\partial Q} = \frac{1}{P^2Q^2}$$

$$\frac{\partial y}{\partial P} = \frac{-1}{P^2Q^2} \quad , \quad \frac{\partial y}{\partial Q} = \frac{-2}{PQ^3}$$

2. จากสมการอุปสงค์ที่กำหนดให้คือ

2.1 $x = 8-4P-3Q$ 2.2 $x = 6-2P+Q$

$y = 7-2P-Q$ $y = 12+3P-5Q$

ถ้าสินค้าชนิด A จำนวน x หน่วย มีราคาต่อหน่วยเป็น Puln และสินค้าชนิด B จำนวน y หน่วย มีราคาต่อหน่วยเป็น Q บาท จงใช้ความต้องการเพิ่มพิจารณาว่าจำนวนความต้องการสินค้าเปลี่ยนแปลงไปอย่างไร สำหรับกรณีที่

ก. Q คงที่และราคาสินค้าชนิด A เพิ่มขึ้น 1 บาท

ข. P คงที่ และราคาสินค้าชนิด B เพิ่มขึ้น 1 บาท

ค. Q คงที่ และราคาสินค้าชนิด A ลดลง 1 บาท

ง. P คงที่ และราคาสินค้าชนิด B ลดลง 1 บาท

วิธีทำ (2.1) จาก $x = 8-4P-3Q$

$y = 7-2P-Q$

หาความต้องการเพิ่มทั้ง 4 แบบ

$$\frac{\partial}{\partial P} = -4 \quad , \quad \frac{\partial x}{\partial Q} = -3$$

$$\frac{\partial y}{\partial P} = -2 \quad , \quad \frac{\partial y}{\partial Q} = -1$$

ก. ความต้องการสินค้าชนิด A ลดลง 4 หน่วย และ
ความต้องการสินค้าชนิด B ลดลง 2 หน่วย

ข. ความต้องการสินค้าชนิด A ลดลง 3 หน่วย และ
ความต้องการสินค้าชนิด B ลดลง 1 หน่วย

ค. ความต้องการสินค้าชนิด A เพิ่มขึ้น 4 หน่วย และ
ความต้องการสินค้าชนิด B เพิ่มขึ้น 2 หน่วย

ง. ความต้องการสินค้าชนิด A เพิ่มขึ้น 3 หน่วย และ
ความต้องการสินค้าชนิด B เพิ่มขึ้น 1 หน่วย

(2.2)
$$x = 6-2P+Q$$
$$y = 12+3P-5Q$$

หาความต้องการเพิ่มทั้ง 4 แบบ

$$\frac{\partial x}{\partial P} = -2 \quad , \quad \frac{\partial x}{\partial Q} = 1$$
$$\frac{\partial y}{\partial P} = 3 \quad , \quad \frac{\partial y}{\partial Q} = -5$$

ก. ความต้องการสินค้าชนิด A ลดลง 2 หน่วย และ
ความต้องการสินค้าชนิด B เพิ่มขึ้น 3 หน่วย

ข. ความต้องการสินค้าชนิด A เพิ่มขึ้น 1 หน่วย และ
ความต้องการสินค้าชนิด B ลดลง 5 หน่วย

ค. ความต้องการสินค้าชนิด A เพิ่มขึ้น 2 หน่วย และ
ความต้องการสินค้าชนิด B ลดลง 3 หน่วย

ง. ความต้องการสินค้าชนิด A ลดลง 1 หน่วย และ
ความต้องการสินค้าชนิด B เพิ่มขึ้น 5 หน่วย

3. ถ้าสมการอุปสงค์สำหรับสินค้าชนิด A และ B เป็น

$$x = 5Q^2-2PQ \quad \text{และ} \quad y = 7P^2-6PQ$$

โดยที่ x และ y เป็นจำนวนหน่วยของสินค้าชนิด A และ B ที่ต้องการเมื่อราคาต่อหน่วยของสินค้าชนิด A และ B เป็น P บาท และ Q บาท ตามลำดับ

ก. จงหาจำนวนความต้องการของสินค้าแต่ละชนิด เมื่อราคาสินค้าชนิด A เป็น 10 บาท ต่อหนึ่งหน่วย และราคาสินค้าชนิด B เป็น 8 บาท ต่อหนึ่งหน่วย

ข. จงหาความต้องการเพิ่มทั้ง 4 แบบ เมื่อ $P = 10$ และ $Q = 8$

ค. จงใช้ผลจากข้อ ข. หาจำนวนความต้องการของสินค้าแต่ละชนิดที่เปลี่ยนแปลงไปเมื่อสินค้าชนิด A มีราคาเพิ่มขึ้นจาก 10 บาท เป็น 11 บาท ส่วนสินค้าชนิด B มีราคาคงเดิม (8 บาท)

ง. จงใช้ผลจากข้อ ข. หาจำนวนความต้องการของสินค้าแต่ละชนิดที่เปลี่ยนแปลงไปเมื่อสินค้าชนิด B มีราคาเพิ่มขึ้นจาก 8 บาทเป็น 9 บาท ส่วนสินค้าชนิด A มีราคาคงเดิม (10 บาท)

ก. จากสมการอุปสงค์ทั้งสอง

$$x = 5Q^2-2PQ$$

$$y = 7P^2-6PQ$$

แทนค่า P = 10 และ Q = 8

$$x = 5(8)^2-2(10)(8) = 160$$

$$y = 7(10)^2-6(10)(8) = 220$$

$\therefore$ ความต้องการสินค้า A เท่ากับ 160 หน่วย เมื่อราคาสินค้าชนิด A เป็น 10 บาท ต่อ 1 หน่วย

และความต้องการสินค้า B เท่ากับ 220 หน่วย เมื่อราคาสินค้าชนิด B เป็น 8 บาท ต่อ 1 หน่วย

ข. หาความต้องการเพิ่มทั้ง 4 แบบ

$$\frac{\partial x}{\partial P} = -2Q \ , \quad \frac{\partial x}{\partial P} = 10Q-2P$$

$$\frac{\partial y}{\partial P} = 14P-6Q \ , \quad \frac{\partial y}{\partial Q} = -6P$$

เมื่อ P = 10 และ Q = 8

$$\therefore \frac{\partial x}{\partial P} = -16 \ , \quad \frac{\partial x}{\partial Q} = 60$$

$$\frac{\partial y}{\partial P} = 92 \ , \quad \frac{\partial y}{\partial Q} = -60$$

ค. จาก $\frac{\partial x}{\partial P} = -16$ และ $\frac{\partial y}{\partial P} = 92$

แสดงว่าเมื่อราคาสินค้าชนิด A เพิ่มขึ้นจาก 10 บาท เป็น 11 บาท ในขณะที่ราคาสินค้า B คงที่ ความต้องการสินค้า A จะลดลง 16 หน่วย ในขณะที่ความต้องการสินค้าชนิด B จะเพิ่มขึ้น 92 หน่วย

ง. ในทำนองเดียวกัน

$$\frac{\partial x}{\partial Q} = 60 \quad \frac{\partial y}{\partial Q} = -60$$

แสดงว่าเมื่อราคาสินค้าชนิด B เพิ่มขึ้นจาก 8 บาท เป็น 9 บาท ในขณะที่ราคา

สินค้า ชนิด A คงที่ ความต้องการสินค้า ชนิด A จะเพิ่มขึ้น 60 หน่วย ส่วนความต้องการสินค้าชนิด B จะลดลง 60 หน่วย

4. จากสมการอุปสงค์ที่กำหนดให้แต่ละข้อ จงหา

ก. ความยืดหยุ่นของอุปสงค์บางส่วนทั้ง 4 แบบ

ข. ที่ P = 1 และ Q = 2 ถ้า Q คงที่ และ P เพิ่มขึ้น 1% จงหาเปอร์เซนต์เปลี่ยนแปลงใน x และ y

ค. ที่ P = 1 และ Q=2 ถ้า P คงที่ และ Q เพิ่มขึ้น 1% จงหาเปอร์เซนต์เปลี่ยนแปลงใน x และ y

ง. ที่ P = 1 และ Q = 2 ถ้า Q คงที่ และ P ลดลง 1% จงหาเปอร์เซนต์เปลี่ยนแปลงใน x และ y

จ. ที่ P = 1 และ Q = 2 ถ้า P คงที่ และ Q ลดลง 1% จงหาเปอร์เซนต์เปลี่ยนแปลงใน x และ y

4.1) $x = 5-2P+Q$

$y = 6+3P-Q$

ก. ความยืดหยุ่นของอุปสงค์บางส่วนทั้ง 4 แบบคือ

$$\frac{Ex}{EP} = \frac{P}{x}\cdot\frac{\partial x}{\partial P} = -\frac{2P}{x}$$

$$\frac{Ex}{EQ} = \frac{Q}{x}\cdot\frac{\partial x}{\partial Q} = \frac{Q}{x}$$

$$\frac{Ey}{EP} = \frac{P}{y}\cdot\frac{\partial y}{\partial P} = \frac{3P}{y}$$

$$\frac{Ey}{EQ} = \frac{Q}{y}\cdot\frac{\partial y}{\partial Q} = \frac{-Q}{y}$$

ที่ P = 1, Q = 2

$$x = 5-2P+Q = 5-2+2 = 5$$

$$y = 6+3P-Q = 6+3-2 = 7$$

$$\frac{Ex}{EP} = \frac{-2P}{x} = -\frac{2}{5}$$

$$\frac{Ex}{EQ} = \frac{Q}{x} = \frac{2}{5}$$

$$\frac{Ey}{EP} = \frac{3P}{y} = \frac{3}{7}$$

$$\frac{Ey}{EQ} = \frac{-Q}{y} = \frac{-2}{7}$$

$$Ex/EP = -\frac{2}{5}\times 100 = -40\%$$
$$Ex/EQ = \frac{2}{5}\times 100 = 40\%$$
$$Ey/EP = \frac{3}{7}\times 100 = 42\frac{6}{7}\%$$
$$Ey/EQ = -\frac{2}{7}\times 100 = -28\frac{4}{7}\%$$

ข. ถ้า Q คงที่ และ P เพิ่มขึ้น 1% x จะลดลง 40% แต่ y จะเพิ่มขึ้น $42\frac{6}{7}\%$

ค. ถ้า P คงที่ และ Q เพิ่มขึ้น 1% x จะเพิ่มขึ้น 40% และ y จะลดลง $28\frac{4}{7}\%$

ง. ถ้า Q คงที่ และ P ลดลง 1% x จะเพิ่มขึ้น 40% และ y จะลดลง $42\frac{6}{7}\%$

จ. ถ้า P คงที่และ Q ลดลง 1% x จะลดลง 40% และ y จะเพิ่มขึ้น $28\frac{4}{7}\%$

4.2 $x = P^{-(0.4)}Q^{0.5}$

$y - P^{(0.4)}Q^{-(1.5)}$

ก. ความยืดหยุ่นของอุปสงค์บางส่วนทั้ง 4 แบบคือ

$$\frac{Ex}{EP} = \frac{P}{x}\cdot\frac{\partial x}{\partial P} = \frac{P}{P^{-0.4}Q^{0.5}}(-0.4)\,P^{-1.4}Q^{0.5} = -0.4$$
$$\frac{Ex}{EQ} = \frac{Q}{x}\cdot\frac{\partial x}{\partial Q} = 0.5$$
$$\frac{Ey}{EP} = \frac{P}{y}\cdot\frac{\partial Y}{\partial P} = 0.4$$
$$\frac{EY}{EQ} = \frac{Q}{y}\cdot\frac{\partial y}{\partial Q} = -1.5$$

ข.ถ้า Q คงที่ และ P เพิ่มขึ้น 1% x จะลดลง 0.4% แต่ y จะเพิ่มขึ้น 0.4%

ค. ถ้า P คงที่และ Q เพิ่มขึ้น 1% x จะเพิ่มขึ้น 05% แต่ y จะลดลง 1.5%

ง. ถ้า Q คงที่ และ P ลดลง 1% x จะเพิ่มขึ้น 0.4% แต่ y จะลดลง 0.4%

จ. ถ้า P คงที่ และ Q ลดลง 1% x จะลดลง 0.5% แต่ y จะเพิ่มขึ้น 1.5%

4.3) $x = 5\iota^{(Q-P)}$

$y = 3\iota^{(P-Q)}$

ก. ความยืดหยุ่นของอุปสงค์บางส่วนทั้ง 4 แบบคือ

$$\frac{Ex}{EP} = \frac{P}{x}\;\frac{\partial x}{\partial P} = \frac{-P}{5\iota^{(Q-P)}}\;.5\iota^{Q-P} = -P$$
$$\frac{Ex}{EQ} = \frac{Q}{x}\cdot\frac{\partial x}{\partial Q} = \frac{Q}{5\iota^{Q-P}}\;5\iota^{(Q-P)} = Q$$
$$\frac{Ey}{EP} = \frac{P}{y}\cdot\frac{\partial Y}{\partial P} = \frac{P}{3\iota^{P-Q}}\;.3\iota^{P-Q} = P$$
$$\frac{Ey}{EQ} = \frac{Q}{y}\cdot\frac{\partial y}{\partial Q} = \frac{Q}{3\iota^{P-Q}}\,.(-1)\;3\iota^{P-Q} = -Q$$

ถ้า $P = 1, \quad Q = 2$

$\therefore \frac{Ex}{EP} = -1, \frac{Ex}{EQ} = 2, \frac{Ey}{EP} = 1, \frac{Ey}{EQ} =$

ข. x จะลดลง 1%, y จะเพิ่มขึ้น 1%

ค. x จะเพิ่มขึ้น 2%, y จะลดลง 2%

ง. x จะเพิ่มขึ้น 1%, y จะลดลง 1%

จ. x จะลดลง 2%, y จะเพิ่มขึ้น 2%

4.4) $x = \frac{1}{PQ} \quad y = \frac{1}{P^2Q}$

ก) ความยืดหยุ่นของอุปสงค์บางส่วนทั้ง 4 แบบคือ

$$\frac{Ex}{EP} = \frac{P}{x} \cdot \frac{\partial x}{\partial P} = \frac{P}{1/PQ} \cdot \left(\frac{-1}{P^2Q}\right) = -1$$

$$\frac{Ex}{EQ} = \frac{Q}{x} \cdot \frac{\partial x}{\partial Q} = \frac{Q}{1/PQ} \cdot \left(\frac{-1}{PQ^2}\right) = -1$$

$$\frac{Ey}{EP} = \frac{P}{Y} \cdot \frac{\partial y}{\partial P} = \frac{P}{1/P^2Q} \cdot \left(\frac{-2}{P^3Q}\right) = -2$$

$$\frac{Ey}{EQ} = \frac{Q}{y} \cdot \frac{\partial y}{\partial Q} = \frac{Q}{1/p^2Q} \cdot \left(\frac{-1}{P^2Q^2}\right) = -1$$

ข) x จะลดลง 1%, y จะลดลง 2%

ค) x จะลดลง 1%, y จะลดลง 1%

ง) x จะเพิ่มขึ้น 1%, y จะเพิ่มขึ้น 2%

จ) x จะเพิ่มขึ้น 1%, y จะเพิ่มขึ้น 1%

4.5) $x = 14-P-2Q$

$y = 17-2P-Q$

ก) ความยืดหยุ่นของอุปสงค์บางส่วนทั้ง 4 แบบคือ

$$\frac{Ex}{EP} = \frac{P}{x} \cdot \frac{\partial x}{\partial P} = \frac{-P}{x}$$

$$\frac{Ex}{EQ} = \frac{Q}{x} \cdot \frac{\partial x}{\partial Q} = \frac{-2Q}{x}$$

$$\frac{Ey}{EP} = \frac{P}{y} \cdot \frac{\partial y}{\partial P} = \frac{-2P}{y}$$

$$\frac{Ey}{EQ} = \frac{Q}{y} \cdot \frac{\partial y}{\partial Q} = \frac{-Q}{y}$$

ที่ P = 1, Q = 2

$x = 14-P-2Q = 14-1-4 = 9$

$y = 17-2P-Q = 17-2-2 = 13$

$\therefore \frac{Ex}{EP} = -\frac{1}{9}, \quad \frac{Ex}{EQ} = -\frac{4}{9} \quad \frac{Ey}{EP} = -\frac{2}{13}, \quad \frac{Ey}{EQ} = -\frac{2}{13}$

ข) x จะลดลง = $\frac{1}{9} \times 100 = 11\frac{1}{9}\%$

y จะลดลง = $\frac{2}{13} \times 100 = 15\frac{5}{13}\%$

ค. x จะลดลง = $\frac{4}{9} \times 100 = 44\frac{4}{9}\%$

y จะลดลง = $\frac{2}{13} \times 100 = 15\frac{5}{13}\%$

ง. x จะเพิ่มขึ้น $11\frac{1}{9}\%$ และ y จะเพิ่มขึ้น $15\frac{5}{13}\%$

จ. x จะเพิ่มขึ้น $44\frac{4}{9}\%$ และ y จะเพิ่มขึ้น $15\frac{5}{13}\%$

4.6 $x = 3^{-(P+Q)}$

$y = 2^{-(PQ)}$

ก. ความยืดหยุ่นของอุปสงค์บางส่วนทั้ง 4 แบบคือ

$$\frac{Ex}{EP} = \frac{P}{x}\frac{\partial x}{\partial P} = -(\ln 3)P$$
$$\frac{Ex}{EQ} = \frac{Q}{x}\cdot\frac{\partial x}{\partial Q} = (-\ln 3)Q$$
$$\frac{Ey}{EP} = \frac{P}{y}\cdot\frac{\partial y}{\partial P} = -PQ\ln 2$$
$$\frac{Ey}{EQ} = \frac{Q}{y}\cdot\frac{\partial y}{\partial Q} = -PQ\ln 2$$

ที่ P = 1, Q = 2 $\frac{Ex}{EP} = -\ln 3, \quad \frac{Ex}{EQ} = -2\ln 3, \quad \frac{Ey}{Ep} = -2\ln 2, \quad \frac{Ey}{EQ} = -2\ln 2$

$\frac{Ex}{EP} = -1.0986, \quad \frac{Ex}{EQ} = -2.1972, \quad \frac{Ey}{EP} = -1.3862, \quad \frac{Ey}{EQ} = -1.3862$

ข. x ลดลง 1.10% และ y ลดลง 1.39%

ค. x ลดลง 2.20% และ y ลดลง 1.39%

ง. x เพิ่มขึ้น 1.10% และ y เพิ่มขึ้น 1.39%

จ. x เพิ่มขึ้น 2.20% และ y เพิ่มขึ้น 1.39%

5. ถ้าจำนวนผ้าพันคอที่มีผู้ต้องการซื้อเป็น x ผืน เมื่อราคา P บาทต่อหนึ่งผืนและจำนวนเสื้อเชิ้ตที่มีผู้ต้องการซื้อเป็น y ผืน เมื่อราคา Q บาท ต่อหนึ่งตัว ถ้าสมการอุปสงค์เป็น

$$x = P^{-(0.5)} Q^{-(0.2)}$$

$$y = P^{-(1.3)} Q^{-(0.8)}$$

ก. จงแสดงว่าสินค้าทั้งสองชนิดเป็นส่วนเติมเต็มกันและกัน

ข. จงหาความยืดหยุ่นของอุปสงค์บางส่วนทั้ง 4 แบบ

ค. จงหาเปอร์เซ็นต์เปลี่ยนแปลงของความต้องการผ้าพันคอและเสื้อเชิ้ต
ถ้าราคาเสื้อเชิ้ตคงที่แต่ราคาผ้าพันคอเพิ่มขึ้น 1% และ
ถ้าราคาผ้าพันคอคงที่ แต่ราคาเสื้อเชิ้ตเพิ่มขึ้น 1%

วิธีทำ

$$\frac{\partial x}{\partial P} = (-0.5)\, P^{-1.5} Q^{-0.2}$$

$$\frac{\partial x}{\partial Q} = -0.2\, P^{-0.5} Q^{-1.2}$$

$$\frac{\partial y}{\partial P} = -1.3\, P^{-2.3}\, Q^{-0.8}$$

$$\frac{\partial y}{\partial Q} = -0.8 P^{-1.3} Q^{-1.8}$$

$$\because \quad \frac{\partial x}{\partial Q} < O \text{ และ } \frac{\partial y}{\partial P} < O$$

$\therefore$ สินค้าทั้งสองชนิดเป็นเส้นเติมเต็มกันและกัน

ข. ความยืดหยุ่นของอุปสงค์บางส่วนทั้ง 4 แบบ

$$\frac{Ex}{EP} = \frac{P}{x}\frac{\partial x}{\partial P} = -0.5$$

$$\frac{Ex}{EQ} = \frac{Q}{x}\cdot\frac{\partial x}{\partial Q} = -0.2$$

$$\frac{Ey}{EP} = \frac{P}{y}\cdot\frac{\partial y}{\partial P} = -1.3$$

$$\frac{Ey}{EQ} = \frac{Q}{Y} \cdot \frac{\partial y}{\partial Q} = -0.8$$

ค. x จะลดลง 0.5% y จะลดลง 1.3%

x จะลดลง 0.2% y จะลดลง 0.8%

6. ถ้าร่มมีราคา P บาท จะขายร่มได้ x คัน และถ้าเสื้อฝนมีราคา Q บาท จะขายเสื้อฝนได้ y ตัว ถ้ากำหนดให้สมการอุปสงค์

$$x = 4e^{-P/100Q}$$

$$\text{และ} \quad y = 8e^{-Q/200P}$$

ก. จงแสดงให้เห็นว่าสินค้าทั้งสองชนิดทดแทนกันได้

ข. จงหาความยืดหยุ่นของอุปสงค์บางส่วนทั้ง 4 แบบ

ค. ถ้าร่มมีราคา 100 บาท และเสื้อฝนมีราคา 200 บาท จงหาเปอร์เซ็นต์เปลี่ยนแปลงของความต้องการร่มและเสื้อฝน เมื่อราคาร่มลดลง 1% และเมื่อราคาเสื้อฝนลดลง 1%

วิธีทำ

$$\frac{\partial x}{\partial P} = \frac{-4}{100Q} e^{-P/100Q}$$

$$\frac{\partial x}{\partial Q} = \frac{4P}{100Q^2} e^{-P/100Q}$$

$$\frac{\partial y}{\partial P} = \frac{8.Q}{200p^2} e^{-Q/200P}$$

$$\frac{\partial y}{\partial Q} = \frac{-8}{200P} e^{-Q/200P}$$

$P > 0, Q > 0$

$$\therefore \quad \frac{\partial x}{\partial Q} > 0 \text{ และ } \frac{\partial y}{\partial P} > 0$$

$\therefore$ **สินค้าทั้งสองชนิดทดแทนกันได้**

ข. ความยืดหยุ่นของอุปสงค์บางส่วนทั้ง 4 แบบ

$$\frac{Ex}{EP} = \frac{P}{x} \cdot \frac{\partial x}{\partial P} = -\frac{P}{100Q}$$

$$\frac{Ex}{EQ} = \frac{Q}{x} \cdot \frac{\partial x}{\partial Q} = \frac{P}{100Q}$$

$$\frac{Ey}{EP} = \frac{P}{Y} \cdot \frac{\partial y}{\partial P} = \frac{Q}{2ooP}$$

$$\frac{Ey}{EQ} = \frac{Q}{Y} \cdot \frac{\partial y}{\partial Q} = -\frac{Q}{2ooP}$$

n. ถ้า $P = 100, Q = 200$

$$\frac{Ex}{Ep} = -1/200 \; , \quad \frac{Ex}{EQ} = 1/200 \; , \quad \frac{Ey}{EP} = 1/100 \; , \quad \frac{Ey}{EQ} = -1/100$$

เมื่อราคาร่มลดลง 1% x จะเพิ่มขึ้น 0.5% และ y จะลดลง 1%

เมื่อราคาเสื้อฝนลดลง 1% x จะลดลง 0.5% และ y จะเพิ่มขึ้น 1%

7. ถ้าสมการอุปสงค์ของสินค้าสองชนิดเป็น

$$x = 6 - 2P + Q$$

$$y = 7 + P - Q$$

โดยที่ 100x หน่วยจะเป็นจำนวนที่ลูกค้าต้องการ เมื่อสินค้าชนิดแรกมีราคา P บาทต่อหน่วย และ 100y หน่วย เป็นจำนวนที่ลูกค้าต้องการเมื่อสินค้าชนิดที่ 2 มีราคา Q บาทต่อหน่วย

จงแสดงว่าสินค้าทั้งสองประเภททดแทนกันได้ และถ้าต้นทุนในการผลิตสินค้าชนิดแรกกับชนิดที่สองเป็น 2 บาท และ 3 บาท ตามลำดับ จงหาจำนวนสินค้าทั้งสองประเภทที่จะต้องผลิตและราคาที่จะขาย เพื่อให้ได้กำไรสูงสุด

วิธีทำ $\quad \frac{\partial x}{\partial Q} = 1 > 0, \; \frac{\partial y}{\partial P} = 1 > 0$

$\therefore$ สินค้าทั้งสองประเภททดแทนกันได้

ต้นทุนการผลิตทั้งหมด $= 200x + 300y$

รายได้จากการขายสินค้าทั้ง 2 ชนิด $= 100Px + 100Qy$

$\therefore$ กำไรทั้งหมด = รายได้ - ต้นทุน

$$= (100Px+100Qy) - (200x+300y)$$

แต่ $\quad x = 6 - 2P + Q$

$y = 7+P-Q$

ให้ $B(P,Q)$ เป็นกำไรทั้งหมด

$$B(P,Q) = [100P(6-2P+Q) + 100Q(7+P-Q)] - [200(6-2P+Q) + 300(7+P-Q)]$$
$$= 100(-2P^2+2PQ-Q^2+7P+8Q-33)$$

ใช้ทฤษฎีค่าจุดปลาย

หาจุดวิกฤตของ B ที่ $\frac{\partial B}{\partial P}$ และ $\frac{\partial B}{\partial Q}$ เป็นศูนย์

$$\frac{\partial B}{\partial P} = 100(-4P+2Q+7)$$

$$\frac{\partial B}{\partial Q} = 100(2P-2Q+8)$$

$\therefore$ $-4P+2Q+7 = 0$ และ $2P-2Q+8 = 0$

$P = \frac{15}{2}$, $Q = \frac{23}{2}$ จุดวิกฤตคือ $(\frac{15}{2}, \frac{23}{2})$

$$B_{pp} = -400$$
$$B_{PQ} = 200$$
$$B_{QQ} = -200$$

$B_{pp} \cdot B_{QQ} - [B_{pQ}]^2 > 0$ และ $B_{pp} < 0$

$\therefore$ B มีค่าสูงสุดสัมพัทธ์ที่จุด $(\frac{15}{2}, \frac{23}{2})$

แทนค่า $P = \frac{15}{2}$, $Q = \frac{23}{2}$ ใน $B(P,Q)$

$$B\left(\frac{15}{2}, \frac{23}{2}\right) = 3925$$

แสดงว่าค่าสูงสุดสัมบูรณ์ของ B จะต้องเกิดที่จุด $(\frac{15}{2}, \frac{23}{2})$ หรือบนเส้นรอบเขตของ B ซึ่งพิจารณาดังนี้

บนแกน P (Q เป็นศูนย์)

$B(P,0) = -100(2P^2-7P+33)$

แต่ $2P^2-7P+33 > 0$

$\therefore$ $B(P,0) < 0$ สำหรับทุกค่า P

$\therefore$ ค่าสูงสุดของ B ไม่อยู่บนแกน P

บนแกน Q $\quad B(0,Q) = -100(Q^2-8Q+33)$

$Q^2-8Q+33 > 0$

$\therefore B(0,Q) < 0$ สำหรับทุกค่า Q

$\therefore$ ค่าสูงสุดไม่อยู่บนแกน Q

บนเส้น $7+P-Q = 0, P = Q-7$

$B(Q-7,Q) = 100(-Q^2+29Q-180)$

ให้ $h(Q) = -Q^2+29Q-180$

$h'(Q) = -2Q+29$

$h''(Q) = -2$

$\therefore$ h มีค่าสูงสุดสัมบูรณ์ที่จุด $\frac{29}{2}$

$h\left(\frac{29}{2}\right) = \frac{121}{4}$

$\therefore$ บนเส้น $7+P-Q = 0$

$B(Q-7,Q) = 100\left(\frac{121}{4}\right) = 3025 < B\left(\frac{15}{2},\frac{23}{2}\right)$

$\therefore$ ค่าสูงสุดสัมบูรณ์ไม่อยู่บนเส้น $7+P-Q = 0$

ในทำนองเดียวกัน บนเส้น $6-2P+Q = 0$

$Q = 2P-6$ แทนค่าใน $B(P,Q)$

$B(P,2P-6) = 100(-2P^2+35P-117)$

ให้ $g(P) = -2P^2+35P-117$

$g'(P) = -4P+35$

$g''(P) = -4$

g มีค่าสูงสุดสัมบูรณ์ที่ $\frac{35}{4}$

$g\left(\frac{35}{4}\right) = \frac{289}{8}$

$B(P,2P-6) = 100\left(\frac{289}{8}\right) = 3612.5 < B\left(\frac{15}{2},\frac{23}{2}\right)$

$\therefore$ ค่าสูงสุดสัมบูรณ์เกิดที่จุด $B\left(\frac{15}{2},\frac{23}{2}\right)$

ที่ $P = \frac{15}{2}, Q = \frac{23}{2}$

$X = 6-2\left(\frac{15}{2}\right)+\frac{23}{2} = \frac{5}{2}$

$Y = 7+\frac{15}{22}-\frac{23}{2} = \frac{6}{2} = 3$

∴ สรุปได้ว่าถ้าผลิตสินค้าชนิดที่หนึ่งจำนวน 250 หน่วย แล้วขายในราคา 7.50 บาท และถ้าผลิตสินค้าชนิดที่ 2 เป็นจำนวน 300 หน่วย และขายในราคา 11.50 บาท บริษัทจะได้กำไรสูงสุด เป็นเงิน 3925 บาท

8. ถ้าบริษัทแห่งหนึ่งผลิตเครื่องเย็บกระดาษ และลวดเย็บกระดาษ ซึ่งมีสมการอุปสงค์เป็น

$$x = \frac{10}{PQ} \text{ และ } y = \frac{20}{PQ}$$

ซึ่งถ้าเครื่องเย็บกระดาษราคาเครื่องละ P บาท จำนวนที่มีผู้ต้องการจะเป็น 1000x เครื่อง และถ้าลวดเย็บกระดาษราคากล่องละ Q บาท จำนวนที่มีผู้ต้องการจะเป็น 1000y กล่อง ในการผลิตลวดเย็บกระดาษหนึ่งกล่อง และเครื่องเย็บกระดาษหนึ่งเครื่อง ต้องใช้ต้นทุนในการผลิต 10 บาท และ 20 บาทตามลำดับ จงหาราคาขายของสินค้าแต่ละชนิดที่จะทำให้ได้กำไรสูงสุด

วิธีทำ ต้นทุนการผลิตทั้งหมด $= 20{,}000x + 10{,}000y$

รายได้จากการขายทั้งหมด $= 1000\,Px + 1000\,Qy$

∴ กำไรทั้งหมด $= (1000Px + 1000Qy) - (20{,}000x + 10{,}000y)$

แต่ $x = \frac{10}{PQ}, y = \frac{20}{PQ}$

ให้ B(P, Q) เป็นกำไรทั้งหมด

$$B(P,Q) = \left[1000\left(\frac{10}{Q}\right) + 1000\left(\frac{20}{P}\right)\right] - \left[20{,}000\left(\frac{10}{PQ}\right) + 10{,}000\left(\frac{20}{PQ}\right)\right]$$

$$= 10{,}000\left[\frac{1}{Q} + \frac{2}{P} - \frac{40}{PQ}\right]$$

$$B_P = 10{,}000\left(-\frac{2}{P^2} + \frac{40}{P^2Q}\right) = 0 \quad \therefore -2Q+40 = 0, Q = 20$$

$$B_Q = 10{,}000\left(-\frac{1}{Q^2} + \frac{40}{PQ^2}\right) = 0 \quad \therefore -P+40 = 0, P = 40$$

∴ (40, 20) เป็นจุดวิกฤต

$$B_{PP} = 10{,}000\left(\frac{4}{P^3} - \frac{80}{P^3Q}\right)$$

$$B_{PQ} = 10{,}000\left(-\frac{40}{P^2Q^2}\right)$$

$$B_{QQ} = 10{,}000\left(\frac{2}{Q^3} - \frac{80}{PQ^3}\right)$$

$$B_{PP}(40,20)\ B_{QQ}(40,20) - \left[B_{PQ}(40,20)\right]^2 < 0$$

∴ (40, 20) เป็นจุดอานม้า **(saddle point)** ของ B

9. บริษัทแห่งหนึ่งผลิตสินค้าสองชนิด ซึ่งมีสมการอุปสงค์เป็น

$$x = 16 - 3P - 2Q$$

$$y = 11 - 2P - 2Q$$

โดยที่ x และ y เป็นจำนวนความต้องการสินค้าชนิดที่หนึ่ง และชนิดที่สอง เมื่อสินค้าชนิดแรกมีราคา P บาท ต่อหน่วย และสินค้าชนิดที่สองมีราคา Q บาท ต่อหน่วย จงแสดงให้เห็นว่าสินค้าทั้งสองชนิดเป็นส่วนเติมเต็มกันและกัน และถ้าต้นทุนการผลิตสินค้าชนิดที่หนึ่งและชนิดที่สอง แต่ละหน่วยเป็น 1 บาทและ 3 บาท ตามลำดับ จงหาจำนวนที่จะต้องผลิตสินค้าทั้งสองชนิด และราคาขายเพื่อให้ได้กำไรสูงสุด

วิธีทำ $\frac{\partial x}{\partial Q} = -2 < 0$ และ $\frac{\partial y}{\partial P} = -2 < 0$

$\because$ สินค้าทั้งสองชนิดเป็นส่วนเติมเต็มกันและกัน

รายได้จากการขายสินค้าทั้งสองชนิด $= Px + Qy$

ต้นทุนการผลิตทั้งหมด $= x + 3y$

กำไรทั้งหมด $= (Px + Qy) - (x + 3y)$

แต่ $x = 16 - 3P - 2Q,\ y = 11 - 2P - 2Q$

ให้ $B(P,Q)$ เป็นฟังก์ชั่นกำไรทั้งหมด

$$B(P,Q) = \left[P(16-3P-2Q) + Q(11-2P-2Q)\right] - \left[(16-3P-2Q) + 3(11-2P-2Q)\right]$$

$$= -3P^2 - 2Q^2 - 4PQ + 25P + 19Q - 49$$

$\frac{\partial B}{\partial P} = -6P - 4Q + 25 = 0$

$\frac{\partial B}{\partial Q} = -4Q - 4P + 19 = 0$

$\because P = 3,\ Q = \frac{7}{4}$

$B_{PP} = -6$

$B_{PQ} = -4$

$B_{QQ} = -4$

$B_{PP}(3,\frac{7}{4})\, B_{QQ}(3,\frac{7}{4}) - \left[B_{PQ}(3,\frac{7}{4})\right]^2 > 0$

และ $B_{PP} < 0$

$\therefore$ B มีค่าสูงสุดสัมพัทธ์ที่ $(3, \frac{7}{4})$

$$B(3, \tfrac{7}{4}) = \frac{41}{8} = 5.125$$

ค่าสูงสุดสัมบูรณ์ของ B อาจจะเกิดบนเส้นรอบเขตของ B ซึ่งพิจารณาได้

บนแกน P $(Q = O)$

$$B(P,Q) = -3P^2 + 25P - 49 = -(3P^2 - 25P + 49) < 0 \text{ ทุก } P$$

$\therefore$ ค่าสูงสุดของ B ไม่อยู่บนแกน P

บนแกน Q $(P = 0)$

$$B(0, Q) = -2Q^2+19Q-49 = -(2Q^2-19Q+49) < 0 \text{ ทุก } P$$

$\therefore$ ค่าสูงสุดของ B ไม่อยู่บนแกน Q

บนเส้น $16-3P-2Q=0 \;\therefore\; Q \; 16-3P/2$

$$B(P, \frac{16-3P}{2}) = -3P^2-2\left(\frac{16-3P}{2}\right)^2 - 4P\left(\frac{16-3P}{2}\right) + 25P+19\left(\frac{16-3P}{2}\right) - 49$$

ให้ $h(P) = -\frac{3}{2}P^2+\frac{25}{2}P - 25$

$$h'(P) = -3P+\frac{25}{2}$$

$$h''(P) = -3$$

$\therefore$ h มีค่าสูงสุดสัมบูรณ์ที่ $P = \frac{25}{6}$

$$B(P, \frac{16-3P}{2}) = -\frac{3}{2}\left(\frac{25}{6}\right)^2+\frac{25}{2}\left(\frac{25}{6}\right)-\frac{25}{2} = \frac{25}{24} = 1.04$$

$$B(P, \frac{16-3P}{2}) < B(3, 7/4)$$

ค่าสูงสุดสัมบูรณ์ไม่อยู่บนเส้น $16-3P-2Q=0$

บนเส้น $11-2P-2Q=0 \quad P=\frac{11-2Q}{2}$

$$B(\frac{11-2Q}{2}, Q) = -3\left(\frac{11-2Q}{2}\right)^2 - 2Q^2-4\left(\frac{11-2Q}{2}\right) Q + 25\left(\frac{11-2Q}{2}\right) + 19Q-49$$

ให้ $g(Q) = -Q^2+5Q-\frac{9}{4}$

$$g'(Q) = -2Q+5$$

$$g''(Q) = -2$$

$\therefore$ g มีค่าสูงสุดสัมบูรณ์ที่ $Q = \frac{5}{2}$

$B(\frac{11-2Q}{2}, Q) = -(\frac{5}{2})^2 + 5(\frac{5}{2}) - \frac{9}{4} = 4 < B(3, 7/4)$

$\therefore$ บนเส้น $11 - 2P - 2Q = 0$ ไม่มีค่าสูงสุดสัมบูรณ์

$\therefore$ ค่าสูงสุดสัมบูรณ์เกิดที่จุด $(3, \frac{7}{4})$

$$x = 16 - 3.3 - 2(\frac{7}{4}) = 3.5$$

$$y = 11 - 2.3 - 2(\frac{7}{4}) = 1.5$$

ถ้าบริษัทผลิตสินค้าชนิดที่หนึ่ง 3.5 หน่วยแล้วขายในราคาหน่วยละ 3 บาท และผลิตสินค้าชนิดที่สอง 1.5 หน่วยแล้วขายในราคาหน่วยละ 1.75 บาท จะได้กำไรสูงสุดเท่ากับ 5.125 บาท

10. ฟังก์ชั่นการผลิตสินค้าชนิดหนึ่งมีค่าฟังก์ชั่นเป็น

$Z = f(x,y) = x + \frac{5}{2}y - \frac{1}{8}x^2 - \frac{1}{4}y^2 - \frac{9}{8}$

จำนวนวัตถุดิบที่จะต้องใช้ในการผลิตคือ 100x และ 100 y ซึ่งมีต้นทุนของวัตถุดิบแต่ละหน่วยเป็น 4 บาท และ 8 บาทตามลำดับ ถ้าผลิตสินค้าได้เป็นจำนวน 100 Z และขายในราคา 16 บาทต่อหน่วย จงหากำไรสูงสุด

วิธีทำ ถ้าให้กำไรเป็น B บาท จะได้ว่า

$B(x,y,z) = 16(100z) - 4(100x) - 8(100y)$

แทนค่า $Z = f(x,y) = x + \frac{5}{2}y - \frac{1}{8}x^2 - \frac{1}{4}y^2 - \frac{9}{8}$

$B(x,y) = 1600(x + \frac{5}{2}y - \frac{x^2}{8} - \frac{y^2}{4} - \frac{9}{8}) - 400x - 800y$

$= 1200x + 3200y - 200x^2 - 400y^2 - 1800$

$Bx = 1200 - 400x = 0 \quad \therefore x = 3$

$By = 3200 - 800y = 0 \quad \therefore y = 4$

$\therefore$ จุดวิกฤต คือ (3,4)

$Bxx = -400$

$Bxy = 0$

$B_{yy} \quad = -800$

$B_{xx}(3,4)\, B_{yy}(3.4) \cdot (B_{xy}(3,4))^2 = 320{,}000 > 0$

$B_{xx} < 0$

$\therefore$ B มีค่าสูงสุดสัมพัทธ์ที่ (3,4)

$\because$ $x,y \in (0, \infty)$ และ B มีค่าน้อยกว่าศูนย์เมื่อ x,y มีค่าเข้าใกล้ศูนย์

$\therefore$ ค่าสูงสุดสัมพัทธ์ของ B คือค่าสูงสุดสัมบูรณ์

กำไรสูงสุดคือ $B(3,4) = 1200(3) + 3200(4) - 200(9) - 400(16) - 1800$

$= 6400$

$\therefore$ กำไรสูงสุด $= 6400$ บาท

9.7 ตัวคูณของลากรานจ์ (Lagrange Multipliers)

การหาค่าสูงสุดหรือต่ำสุดของฟังก์ชัน $f(x,y,z)$ โดยวิธีตัวคูณของลากรานจ์จะกำหนดเงื่อนไข $g(x,y,z) = 0$ แล้วสร้างฟังก์ชัน F โดยให้

$$F(x,y,z,\lambda) = f(x,y,z) + \lambda g(x,y,z)$$

แล้วหาค่า x,y,z,λ ซึ่งทำให้ $F_x = 0$, $F_y = 0$, $F_z = 0$ และ $F_\lambda = 0$

ตัวอย่าง จงหาจุดต่ำสุดสัมพัทธ์ของ $f(x,y,z) = x^2$ t $y^2 + z^2$

ซึ่งมีเงื่อนไข $2x - 3y + 5z = 19$

วิธีทำ

ให้ $g(x,y,z) = 2x - 3y + 5z - 19 = 0$

ให้ $F(x,y,z,\lambda) = f(x,y,z) + \lambda g(x,y,z)$

$= x^2 + y^2 + z^2 + \lambda(2x - 3y + 5z - 19)$

$F_x = 2x+21 = 0$

$F_y = 2y - 3\lambda = 0$

$F_z = 2z + 5\lambda = 0$

$F_\lambda = 2x - 3y + 5z - 19 = 0$

แก้สมการได้ $x = -\lambda$, $y = \frac{3}{2}\lambda$, $z = -\frac{5}{2}\lambda$

แทนค่า x,y,z จะได้ $\lambda = -1$

$x = 1$, $y = -\frac{3}{2}$, $z = \frac{5}{2}$

$\therefore$ ค่าต่ำสุดของฟังก์ชันที่ $(1, -\frac{3}{2}, \frac{5}{2}) = f(1, -\frac{3}{2}, \frac{5}{2}) = 18$

แบบฝึกหัดที่ 9.7

1. จงใช้วิธีตัวคูณของ ลากรานจ์หาจุดวิกฤตของฟังก์ชั่นที่กำหนดเงื่อนไขต่อไปนี้

1.1 $f(x,y) = x^2 + 2xy + y^2$, มีเงื่อนไข $x - y = 3$

โดยวิธีของลากรานจ์

ให้ $g(x,y) = x-y-3 = 0$

สร้างฟังก์ชั่นช่วย F โดยให้

$F(x,y,\lambda) = f(x,y) + \lambda g(x,y)$

$= x^2 + 2xy + y^2 + \lambda(x-y-3)$

$F_x(x,y,\lambda) = 2x + 2y + \lambda = 0$

$F_y(x,y,\lambda) = 2x + 2y - \lambda = 0$

$F\lambda(x,y,\lambda) = x - y - 3 = 0$

แก้สมการได้ $x = \frac{3}{2}$, $y = -\frac{3}{2}$, $\lambda = 0$

จุดวิกฤตคือ $(\frac{3}{2}, -\frac{3}{2})$

1.2 $f(x,y) = x^2 + xy + 2y^2 - 2x$ มีเงื่อนไข $x-2y+1 = 0$

ให้ $g(x,y) = x-2y+1 = 0$

ให้ F ซึ่ง

$F(x,y,\lambda) = f(x,y) + \lambda g(x,y)$

$= x^2 + xy + 2y^2 - 2x + \lambda(x-2y+1)$