ได้ $\Sigma_T = \frac{-1}{12}(2)(12)(\frac{1}{4})$

$= -\frac{1}{2}$

ดังนั้น $-0.5 \leq \Sigma_T \leq 0$ Ans.

14. จงหาขอบเขตความคลาดเคลื่อนของ $\int_2^3 \sqrt{1+x^2}\,dx,\ n = 6$

วิธีทำ หาค่าต่ำสุดสัมบูรณ์ และค่าสูงสุดสัมบูรณ์ของ $f(x)$

บน $[2,3]$ มี $\Delta x = \frac{3-2}{6} = \frac{1}{6}$

$$\text{และ}\quad f(x) = \sqrt{1+x^2} = (1+x^2)^{\frac{1}{2}}$$

$$f'(x) = \frac{1}{2}(1+x^2)^{-\frac{1}{2}}(2x) = x(1+x^2)^{-\frac{1}{2}}$$

$$f''(x) = x(-\frac{1}{2})(1+x^2)^{-\frac{3}{2}}(2x) + (1+x^2)^{-\frac{1}{2}}$$

$$= -x^2(1+x^2)^{-\frac{3}{2}} + (1+x^2)^{-\frac{1}{2}}$$

$$f'''(x) = \frac{3x^3}{(1+x^2)^{\frac{5}{2}}} - \frac{3x}{(1+x^2)^{\frac{3}{2}}}$$

$\because f'''(x) \angle 0$ สำหรับทุก ๆ ค่าของ x บนช่วง $[2,3]$

แล้ว f'' เป็นฟังก์ชันลดลงบนช่วง $[2,3]$

$\therefore$ ค่าต่ำสุดสัมบูรณ์ของ f'' บน $[2,3]$ คือ $f''(3)$

และค่าสูงสุดสัมบูรณ์ของ f'' บน $[2,3]$ คือ $f''(2)$

$$f''(3) = -9(1+9)^{-\frac{3}{2}} + (1+9)^{-\frac{1}{2}}$$

$$= 0.0316$$

$f''(2) \quad = \quad -4(1+4)^{-\frac{3}{2}} + (1+4)^{-\frac{1}{2}} = 0.894$

ให้ $\eta = 2$ แทนใน $\Sigma_T \quad = \quad -\frac{1}{12}(b-a)f''(\eta)(\Delta x)^2$

$\Sigma_T \quad = \quad -\frac{1}{12}(1)(0.894)\left(\frac{1}{36}\right) \quad = \quad -0.002$

ให้ $\eta = 3$ แทนใน $\Sigma_T \quad = \quad -\frac{1}{12}(1)(0.0316)\left(\frac{1}{36}\right)$

$= \quad -0.00007$

ดังนั้น $-0.002 \leq \Sigma_T \quad \leqslant \quad -0.00007$ Ans.

15. **โจทย์** จงหาขอบเขตความคลาดเคลื่อนของ $\int_0^1 e^{x^2}dx$, $n = 5$

วิธีทำ หาค่าต่ำสุดสัมบูรณ์ และค่าสูงสุดสัมบูรณ์ของ $f(x)$ บน $[0, 1]$

$$\Delta x \quad = \quad \frac{1-0}{5} \quad = \quad \frac{1}{5}$$

$$f(x) \quad = \quad e^{x^2}$$

$$f'(x) \quad = \quad 2e^{x^2}x$$

$$f''(x) \quad = \quad 4x^2e^{x^2} + 2e^{x^2}$$

$$f'''(x) \quad = \quad 8x^3e^{x^2} + 8xe^{x^2} + 4xe^{x^2}$$

$\because f'''(x) > 0$ สำหรับทุก ๆ x บนช่วง $[0, 1]$

f'' เป็นฟังก์ชันเพิ่มขึ้นบนช่วง $[0, 1]$

$\therefore$ ค่าต่ำสุดสัมบูรณ์ของ f'' บน $[0, 1]$ คือ $f''(0)$

และค่าสูงสุดสัมบูรณ์ของ f'' บน $[0, 1]$ คือ $f''(1)$

$$f''(0) \quad = \quad 2$$

$$f''(1) \quad = \quad 4e + 2e \quad = \quad 6e$$

ให้ $\eta = 0$ แทนใน Σ_T $= \frac{-1}{12}(b-a)f''(\eta)(\Delta x)^2$

$= \frac{-1}{12}(1)(2)(\frac{1}{25})$

$= -0.0067$

ให้ $\eta = 1$ แทนใน Σ_T

$$\therefore \Sigma_T = \frac{-1}{12}(1)(6e)\left(\frac{1}{25}\right) = -\frac{e}{50}$$

ดังนั้น $-\frac{e}{50} \leqslant \Sigma_T \leqslant -\frac{1}{150}$ Ans.

16. **โจทย์** จงหาขอบเขตของความคลาดเคลื่อนของ

$$\int_2^3 \ln(1+x^2)\,dx \ , \ n = 4$$

วิธีทำ หาค่าต่ำสุดสัมบูรณ์ และค่าสูงสุดสัมบูรณ์ ของ $f(x)$

บน $[2, 3]$ $\Delta x = \frac{3-2}{4} = \frac{1}{4}$

$$f(x) = \ln(1+x^2)$$

$$f'(x) = \frac{2x}{1+x^2}$$

$$f''(x) = \frac{(1+x^2)(2) - 2x(2x)}{(1+x^2)^2}$$

$$= \frac{2-2x^2}{(1+x^2)^2}$$

$$f'''(x) = \frac{(1+x^2)^2(-4x) - (2-2x^2)\frac{d}{dx}(1+x^2)^2}{(1+x^2)^4}$$

$$= \frac{-(12x+8x^3-4x^5)}{(1+x^2)^4}$$

$f''(x) < 0$ สำหรับทุก ๆ ค่าของ x บนช่วง $[2, 3]$ แล้ว $f''(x)$ เป็นฟังก์ชันที่ลดลง

ในช่วง [2, 3] ดังนั้นค่าต่ำสุดสัมบูรณ์ ของ f'' บน [2, 3] คือ $f''(3)$ และค่าสูงสุดสัมบูรณ์ของ f'' บน [2, 3] คือ $f''(2)$

$$f''(2) \quad = \quad \frac{2-8}{(1+4)^2} \quad = \quad -0.24$$

$$f''(3) \quad = \quad \frac{2-18}{(1+9)^2} \quad = \quad -0.12$$

ให้ $\eta = 2$ แทนใน $\Sigma_T \quad = \quad \frac{-1}{12}(b-a)f''(\eta)(\Delta x)^2$

$$= \quad \frac{-1}{12}(1)(-0.24)\left(\frac{1}{16}\right)$$

$$= \quad 0.00125$$

ให้ $\eta = 3$ แทนใน Σ_T

ได้ $\Sigma_T \quad = \quad \frac{-1}{12}(1)(-0.12)\left(\frac{1}{16}\right)$

$$= \quad 0.000625$$

ดังนั้น $\quad 0.000625 \leqslant \Sigma_T \leqslant 0.00125$ Ans.

คำสั่ง ข้อ 17–22 จงหาค่าประมาณของอินทิกรัลจำกัดเขตโดยกฎซิมสัน และ ข้อ 17, 18 จงหาค่าอินทิกรัลจำกัดเขตที่แน่นอน และจงเปรียบเทียบกับค่าประมาณที่หาได้

17. โจทย์ $\int_0^2 x^2 dx$, $2n = 4$

วิธีทำ จากกฎซิมสัน $2n = 4$

ได้ $\Delta x \quad = \quad \frac{b-a}{2n} \quad = \quad \frac{1}{2} = 0.5$

และ $\int_0^2 x^2 dx \quad \approx \quad \frac{0.5}{3}\left[f(x_0)+4f(x_1)+2f(x_2)+4f(x_3)+f(x_4)\right]$

เมื่อ $f(x) \quad = x^2$

คำนวณหาค่าในวงเล็บได้จากตารางข้างล่างนี้

i	xi	$f(x_i)$	K_i	$K_i f(x_i)$
0	0	0	1	0
1	0.5	0.25	4	1
2	1	1	2	2
3	1.5	2.25	4	9
4	2	4	1	4
				$\sum_{i=0}^{4} K_i f(x_i) = 16$

$$\therefore \int_0^2 x^2 dx \approx \frac{0.5}{3}(16) \approx \frac{8}{3}$$ Ans.

หาค่าที่แน่นอน

$$\because \int_0^2 x^2 dx = \frac{x^3}{3}\Big|_0^2$$

$$= \frac{8}{3}$$ Ans.

18. โจทย์ $\int_1^2 \frac{dx}{x+1}$, $2n = 8$

วิธีทำ จากกฎซิมสัน เมื่อ $2n = 8$

จะได้ $\Delta x = \frac{1}{8}(2-1) = \frac{1}{8} = 0.125$

$$\therefore \int_1^2 \frac{dx}{1+x} \approx \frac{0.125}{3}[f(x_0)+4f(_1)+2f(x_2)+4f(x_3)$$

$$+2f(x_4)+4f(x_5)+2f(x_6)$$

$$+4f(x_7)+f(x_8)]$$

เมื่อ $\int(x) = \frac{1}{x+1}$

ผลบวกในวงเล็บแสดงด้วยตารางข้างล่างนี้

i	x_i	$f(x_i)$	K_i	$K_i f(x_i)$
0	1	0.5	1	0.5
1	1.125	.4706	4	1.8824
2	1.25	.4444	2	0.8888
3	1.375	0.4211	4	1.6844
4	1.51	.3984	2	0.7968
5	1.635	.3795	4	1.5180
6	1.76	.3623	2	0.7246
7	1.885	.3466	4	1.3864
8	2.01	.3322	1	0.3322
				$\sum_{i=0}^{8} K_i f(x_i) = 9\ 7136$

$\therefore \int_1^2 \frac{dx}{x+1} \approx \frac{0.125}{3}(9.7136) \approx 0.405$ **Ans.**

19. **โจทย์** $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1+x^2}}$, $2n = 4$

วิธีทำ จากกฎซิมสัน เมื่อ $2n = 4$

ได้ $\Delta x = \frac{1}{4}(1-0) = \frac{1}{4} = 0.25$

และ $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1+x^2}} \approx \frac{0.25}{3}\left[f(x_0)+4f(x_1)+2f(x_2)+4f(x_3)+f(x_4)\right]$

เมื่อ $f(x) = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$

ผลบวกในวงเล็บแสดงด้วยตารางข้างล่างนี้

i	x_i	$f(x_i)$	K_i	$K_i f(x_i)$
0	0	1	1	1
1	0.25	0.9701	4	3.8804
2	0.5	0.8944	2	1.7888
3	0.75	0.8	4	3.2

4	1	0.7071	1	0.7071
				$\sum_{i=0}^{4} K_i f(x_i) = 10.5763$

$$\therefore \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1+x^2}} \approx \frac{0.25}{3}(10.5763)$$

$$\approx 0.881$$ Ans.

20. **โจทย์** $\int_{-\frac{1}{2}}^{0} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$, $2n=4$

วิธีทำ จากกฎซิมสัน ได้ $\Delta x = \frac{1}{4}\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{8} = 0.125$

$$\therefore \int_{-\frac{1}{2}}^{0} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} \approx \frac{0.125}{3}\left[f(x_0)+4f\,x_1)+2f(x_2)+4f(x_3)+f\,x_4)\right]$$

เมื่อ $f(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

ผลบวกในวงเล็บแสดงด้วยตารางข้างล้างนี้

i	x_i	$f(x_i)$	K_I	$K_i f(x_i)$
0	- 0.5	1.1547	1	1.1547
1	- 0.375	1.079	4	4.316
2	- 0.25	1.0328	2	2.0656
3	- 0.125	1.0079	4	4.0316
4	0	1	1	1
				$\sum_{i=0}^{4} K_i f(x_i) = 12.5679$

$$\therefore \int_{-\frac{1}{2}}^{0} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} \approx \frac{0.125}{3}(12.5679)$$

$$\approx 0.524$$ Ans.

21. โจทย์ $\int_0^1 \frac{dx}{x^2+x+1}$, $2n = 4$

วิธีทำ จากกฎซิมสัน เมื่อ $2n = 4$

$$\text{ได้ } \Delta x = \frac{b-a}{2n} = \frac{1}{4} = 0.25$$

$$\therefore \int_0^1 \frac{dx}{x^2+x+1}$$

$$\approx \frac{1}{12}\left[f(x_0)+4f(x_1)+2f(x_2)+4f(x_3)+f(x_4)\right]$$

$$\text{เมื่อ } f(x) = \frac{1}{x^2+x+1}$$

ผลบวกในวงเล็บแสดงด้วยตารางข้างล่างนี้

i	x_i	$f(x_i)$	K_i	$K_i f(x_i)$
0	0	1	1	1
1	0.25	0.7619	4	3.0476
2	0.5	0.5714	2	1.1428
3	0.75	0.4324	4	1.7296
4	1	0.3333	1	0.3333
				$\sum_{i=0}^{4} K_i f(x_i) = 7.2533$

$$\therefore \int_0^1 \frac{dx}{x^2+x+1} \approx \frac{1}{12}(7.2533)$$

$$\approx 0.6045$$

Ans.

22. โจทย์ $\int_0^1 \frac{dx}{1+x^2}$, $2n = 8$

วิธีทำ จากกฎซิมสัน เมื่อ $2n = 8$

ได้ $\Delta x = \frac{b-a}{2n} = \frac{1}{8} = 0.125$

และ $\int_0^1 \frac{dx}{1+x^2} \approx \frac{0.125}{3}[f(x_0) + 4f(x_1) + 2f(x_2) + 4f(x_3)$

$+ 2f(x_4) + 4f(x_5) + 2f(x_6) + 4f(x_7) + f(x_8)]$

เมื่อ $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$

ผลบวกในวงเล็บแสดงด้วยตารางข้างล่างนี้

i	x_i	$f(x_i)$	K_i	$K_i f(x_i)$
0	0	1	1	1
1	0.125	0.9846	4	3.9384
2	0.25	0.9412	2	1.8824
3	0.375	0.8767	4	3.5068
4	0.5	0.8	2	1.6
5	0.625	0.7191	4	2.8764
6	0.75	0.64	2	1.28
7	0.875	0.5664	4	2.2656
8	1	05	1	0.5
				$\sum_{i=0}^{8} K_i f(x_i) = 18.8496$

$$\therefore \int_0^1 \frac{dx}{1-x^2} \approx \frac{0.125}{3}(18.8496)$$

$$\approx 0.785$$

23. **โจทย์ จงหาขอบเขตของความ**คลาดเคลื่อน

ของ $\int_0^2 x^2 dx , 2n = 4$

วิธีทำ **หาค่าต่ำสุดสัมบูรณ์ และ ค่าสูงสุดสัมบูรณ์ของ**

$f(x)$ บน $[0, 2]$

$$\because \quad f(x) = x^2$$
$$f'(x) = 2x$$
$$f''(x) = 2$$
$$f'''(x) = 0$$

$\because f'''(x) = 0$ ดังนั้น f'' เป็นฟังก์ชันคงที่ในช่วง $[0, 2]$ $\therefore \Sigma_s = 0$ Ans.

24. โจทย์ จงหาขอบเขตของความคลาดเคลื่อนของ

$\int_1^2 \frac{dx}{x+1}$, $2n = 8$

วิธีทำ
$$f(x) = \frac{1}{x+1} = (x+1)^{-1}$$
$$f'(x) = -(x+1)^{-2}$$
$$f''(x) = 2(x+1)^{-3}$$
$$f'''(x) = -6(x+1)^{-4}$$
$$f^{IV}(x) = 24(x+1)^{-5}$$
$$f^{V}(x) = -120(x+1)^{-6}$$

$\because f^{V}(x) < 0$ สำหรับทุก ๆ ค่าของ x บน $[1, 2]$ และ $f^{IV}(x)$ ลดลงในช่วง $[1, 2]$ ดังนั้น ค่าต่ำสุดของ f^{IV} อยู่ที่จุดปลายทางขวา คือ 2

และค่าสูงสุดสัมบูรณ์ ของ f^{IV} บน $[1, 2]$ อยู่ที่จุดปลายทางซ้ายคือ 1

$$f^{IV}(1) = \frac{24}{(1+1)^5} = 0.75$$

$$f^{IV}(2) = \frac{24}{(2+1)^5} = 0.0988$$

ให้ $\eta = 1$ แทนในสมการ $\Sigma_s = \frac{-1}{180}(b-a) f^{IV}(\eta)(Dx)^4$

$$\therefore \quad \Sigma_s = \frac{-1}{180}(1)(0.75)\left(\frac{1}{8}\right)^4$$

$$= -0.00052$$

ให้ $\eta = 2$ แทนใน Σ_s

$$\therefore \quad \Sigma_s = \frac{-1}{180}(1)(0.0988)$$

$$= -0.00055$$

ดังนั้น $-0.00055 \leqslant \Sigma_s \leqslant -0.00052$ Ans

คำสั่ง ข้อ 25-28 จงใช้กฎซิมสัน ด้วยค่า 2n ที่กำหนดให้หาค่าของข้อต่อไปนี้

25. โจทย์ $\int_1^{1.8} \sqrt{1+x^3}\,dx$, $2n = 4$

วิธีทำ จากกฎซิมสัน เมื่อ $2n = 4$

ได้ $\Delta x = \frac{b-a}{2n} = \frac{1.8-1}{4} = 0.2$

$$\therefore \int_1^{1.8} \sqrt{1+x^3}\,dx \approx \frac{0.2}{3}\left[f(x_0)+4f(x_1)+2f(x_2)+4f(x_3)+f(x_4)\right]$$

เมื่อ $f(x) = \sqrt{1+x^3}$

ผลบวกในวงเล็บแสดงด้วยตารางข้างล่างนี้

i	x_i	$f(x_i)$	K_i	$K_i f(x_i)$
0	1	1.414	1	1.414
1	1.2	1.652	4	6.608
2	1.4	1.935	2	3.87
3	1.6	2.257	4	9.028
4	1.8	2.614	1	2.614
				$\sum_{i=0}^{K} k_i f(x_i) = 23.534$

$$\therefore \quad \int_1^{1.8} \sqrt{1+x^3\,dx} \quad \approx \quad \frac{0.2}{3}\,(23.534)$$

$$\approx \quad 1.569 \qquad \text{Ans.}$$

26. โจทย์ $\int_0^2 \sqrt{1+x^4}\,dx,\ 2n=6$

วิธีทำ จากกฎซิมซัน เมื่อ $2n=6$

ได้ $\Delta x \quad = \quad \frac{b-a}{2n} = \frac{2}{6} = 0.333$

$$\therefore \quad \int_0^2 \sqrt{1+x^4}\,dx \quad \approx \quad \frac{0.333}{3}\,[f(x_0)+4(f(x_1)+2f(x_2)+4f(x_3)+2f(x_4)+4f(x_5)+f(x_6)]$$

เมื่อ $f(x) \quad = \quad \sqrt{1+x^4}$

ผลบวกในวงเล็บแสดงด้วยตารางข้างล่างนี้

i	x_i	$f(x_i)$	K_i	$K_i f(x_i)$
0	0	1	1	1
1	0.333	1.006	4	4.024
2	0.666	1.094	2	2.188
3	0.999	1.4128	4	5.6512
4	1.332	2.0366	2	4.0732
5	1.665	2.9471	4	11.7884
6	1.998	4.1153	1	4.1153
				$\sum_{i=0}^{6} K_i f(x_i) = 32.8401$

$$\therefore \quad \int_0^2 \sqrt{1+x^4\,dx} \quad \approx \quad \frac{0.333}{3}\,(32.8401)$$

$$\approx \quad 3.645 \qquad \text{Ans.}$$

27. $\int_0^2 \frac{dx}{\sqrt{1+x^3}}$, $2n=8$

จากกฎซิมสัน เมื่อ $2n=8$

ได้ $\Delta x = \frac{b-a}{2n} = \frac{2}{8} = \frac{1}{4} = 0.25$

$$\therefore \int_0^2 \frac{dx}{\sqrt{1+x^3}} \approx \frac{1}{12}\left[f(x_0)+4f(x_1)+2f(x_2)+4f(x_3)+2f(x_4)+4f(x_5)+2f(x_6)+4f(x_7)+f(x_8)\right]$$

เมื่อ $f(x) = \frac{1}{\sqrt{1+x^3}}$

ผลบวกในวงเล็บแสดงด้วยตารางข้างล่างนี้

i	x_i	$f(x_i)$	K_i	$K_i f(x_i)$
0	0	1	1	1
1	0.25	1.0156	4	4.0624
2	0.5	.9428	2	1.8856
3	0.75	.8386	4	3.3544
4	1	.7071	2	1.4142
5	1.25	0.5819	4	2.3276
6	1.5	.4781	2	.9562
7	1.75	.3965	4	1.586
8	2	.5774	1	.5774
				$\sum_{i=0}^{8} K_i f(x_i) = 17.1638$

$$\therefore \int_0^2 \frac{dx}{\sqrt{1+x^3}} \approx \frac{1}{12}(17.1638)$$

$$\approx 1.43$$ Ans.

28. โจทย์ $\int_0^1 \sqrt[3]{1-x^2}\, dx,\ 2n = 4$

วิธีทำ จากกฎซิมสัน เมื่อ $2n = 4$

ได้ $\Delta x = \frac{1}{4}(1-0) = \frac{1}{4} = 0.25$

และ $\int_0^1 \sqrt[3]{1-x^2}\, dx \approx \frac{1}{12}\left[f(x_0)+4f(x_1)+2f(x_2)+4f(x_3)+f(x_4) \right]$

เมื่อ $f(x) = \sqrt[3]{1-x^2}$

ผลบวกในวงเล็บแสดงด้วยตารางข้างล่างนี้

i	x_i	$f(x_i)$	K_i	$K_i f(xi)$
0	0	1	1	1
1	0.25	.9787	4	3.9148
2	0.5	.9086	2	1.8172
3	0.75	.7591	4	3.0364
4	1	0	1	0
				$\sum_{i=0}^{4} K_i f(xi) = 9.7684$

$$\therefore \int_0^1 \sqrt[3]{1-x^2}\, dx \approx \frac{1}{12}[9.7684]$$

$$\approx 0.814$$

Ans.

29. โจทย์ จงใช้กฎสี่เหลี่ยมคางหมู ด้วย $n=6$ หาค่าประมาณ

ของ $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1+x^2}}$ ตอบทศนิยม 3 ตำแหน่ง

วิธีทำ $\because [a, b] = [0, 1]$ และ $n=6$

$$\Delta x = \frac{b-a}{n} = \frac{1}{6} = 0.167$$

$$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1+x^2}} \approx \frac{0.167}{2} [f(x_0)+2f(x_1)+2f(x_2)$$
$$+2f(x_3)+2f(x_4)+2f(x_5)+f(x_6)]$$

เมื่อ $f(x) = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$

ผลบวกในวงเล็บแสดงด้วยตาราง

i	x_i	$f(x_i)$	K_i	$K_i f(x_i)$
0	0	1	1	1
1	0.167	0.9863	2	1.9726
2	0.334	0.9485	2	1.897
3	0.501	0.8941	2	1.7882
4	0.668	0.8315	2	1.663
5	0.835	0.7676	2	1.5352
6	1.002	0.7064	1	0.7064
				$\Sigma K_i f(x_i) = 10.5624$

$$\therefore \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1+x^2}} \approx \frac{0.167}{2} (10.5624)$$

$$\approx 0.882$$ Ans.

30. โจทย์ สมการอุปสงค์ สำหรับโภคภัณฑ์อย่างหนึ่ง เป็น $p = 2\sqrt{100-x^3}$ และราคาตลาดเป็น 12 บาท จงเขียนขอบเขตเพื่อพิจารณาส่วนเกินของผู้บริโภค คำนวณค่าอินทิกรัลจำกัดเขต โดยใช้กฎซิมสัน ด้วย $2n = 4$ ตอบทศนิยม 2 ตำแหน่ง

วิธีทำ หาจำนวนหน่วยของสินค้าที่สมนัยกับราคาตลาด

แทนค่า $p = 12$ ในสมการ ได้ $x = 4$

$$\therefore \quad \bar{P} = 12, \bar{x} = 4$$

จากสูตร

$$CS = \int_0^{\bar{x}} f(x)\,dx - \bar{p}\bar{x}$$

$$\therefore \quad CS = 2\int_0^4 \sqrt{100-x^3}\,dx - (12\times 4)$$

หาค่าของ $\int_0^4 \sqrt{100-x^3}\,dx$ ด้วยกฎซิมสัน เมื่อ $\Delta x \; \frac{4-0}{4} = 1$

$$\therefore \quad \int_0^4 \sqrt{100-x^3}\,dx \approx \frac{1}{3}[f(xo)+4f(x_1)+2f(x_2)+4f(x_3)+f(x_4)]$$

คำนวณค่าในวงเล็บด้วยตารางข้างล่างนี้

i	x_i	$f(x_i)$	K_i	$K_i f(xi)$
0	0	10	1	10
1	1	9.9499	4	39.799
2	2	9.165	2	18.33
3	3	8.544	4	34.176
4	4	6	1	6
				$\sum_{i=0}^{4} K_i f(x_i) = 108.305$

$$\therefore \quad \int_0^4 \sqrt{100-x^3}\,dx \approx \frac{1}{3}\times 108.305 \approx 36.10$$

$$\therefore \quad CS = 2(36.10) - 48$$

$$= 24.20$$

$\therefore$ ส่วนเกินของผู้บริโภค = 24.20 บาท

31. **โจทย์** จงหาส่วนเกินของผู้ผลิต สำหรับโภคภัณฑ์อย่างหนึ่ง ซึ่งมีสมการอุปทานเป็น $p = \sqrt{x^4+68}$ และราคาตลาดเป็น 18 บาท จงเขียนขอบเขตซึ่งเป็นเนื้อที่พิจารณาส่วนเกินของผู้ผลิต พร้อมทั้งหาค่าอินทิกรัลจำกัดเขต โดยใช้กฎซิมสันด้วย $2n = 4$

วิธีทำ หาจำนวนหน่วยของสินค้าที่สมนัยกับราคาตลาด

แทนค่า $P = 18$ ลงในสมการ ได้ $x = 4$

จากสูตร $$PS = \overline{P}\overline{X} - \int_0^{\overline{X}} h(x)\,dx$$

$$\therefore PS = (18\times4) - \int_0^4 \sqrt{x^4+68}\,dx$$

หาค่า $\int_0^4 \sqrt{x^4+68}\,dx$ โดยใช้กฎซิมสัน

$$\Delta x = \frac{4-0}{4} = 1$$

$$\therefore \int_0^4 \sqrt{x^4+68}\,dx \approx \frac{1}{3}\left[f(x_0)+4f(x_1)+2f(x_2)+4f(x_3)+f(x_4)\right]$$

คำนวณค่าในวงเล็บได้จากตารางเมื่อ $f(x) = \sqrt{x^4 + 68}$

i	x_i	$f(x_i)$	K_i	$K_i f(xi)$
0	0	8.246	1	8.246
1	1	8.307	4	33.228
2	2	9.165	2	18.33
3	3	12.207	4	48.828
4	4	18	1	18
				$\sum_{i=0}^{4} K_i f(xi) = 126.632$

$$\therefore \int_0^4 \sqrt{x^4+68}\,dx \approx \frac{1}{3}(126.632) \approx 42.21$$

$$\therefore PS = 72 - 42.21$$

$$= 29.79$$

$\therefore$ ส่วนเกินของผู้บริโภค $= 29.79$ บาท

แบบฝึกหัด 8.6 (หน้า 193)

1. $$\int_{-\infty}^{1} e^x dx = \lim_{a \to -\infty} \int_{a}^{1} e^x dx$$

$$= \lim_{a \to -\infty} [e^x]_{a}^{1}$$

$$= \lim_{a \to -\infty} (e - e^a)$$

$$= e - e^{-\infty} = e - o = e$$ ตอบ

2. $$\int_{5}^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt{x-1}} = \lim_{b \to +\infty} \int_{5}^{b} \frac{dx}{\sqrt{x-1}}$$

$$= \lim_{b \to +\infty} \int_{5}^{b} (x-1)^{-\frac{1}{2}} d(x-1)$$

$$= \lim_{b \to +\infty} [2(x-1)^{\frac{1}{2}}]_{5}^{b}$$

$$= \lim_{b \to +\infty} (2(b-1)^{\frac{1}{2}} - 4) = +\infty$$

= หาค่าไม่ได้ เพราะลู่ออก ตอบ

3. $$\int_{1}^{+\infty} \ln x \, dx = \lim_{b \to +\infty} \int_{1}^{b} \ln x \, dx$$

$$= \lim_{b \to +\infty} [x \ln x - x]_{1}^{b}$$

$$= \lim_{b \to +\infty} (b \ln b - b + 1)$$

= หาค่าไม่ได้ เพราะลู่ออก ตอบ

4. $$\int_{0}^{1} \ln x \, dx = \lim_{\in \to 0^+} \int_{0+\in}^{1} \ln x \, dx$$

$$= \lim_{\in \to 0^+} [x \ln x - x]_{\in}^{1}$$

$$= \lim_{\in \to 0^+} (-1 - \in \ln \in + \in)$$

= หาค่าไม่ได้ เพราะลู่ออก ตอบ

5. $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x}}$ $= \lim_{\in\to 0^+} \int_0^{1-\in} \frac{dx}{\sqrt{1-x}}$

$= \lim_{\in\to 0^+} \int_0^{1-\in} -(1-x)^{-\frac{1}{2}}\, d(1-x)$

$= \lim_{\in\to 0^+} -[2(1-x)^{\frac{1}{2}}]_0^{1-\in}$

$= \lim_{\in\to 0^+} -(2(\in)^{\frac{1}{2}}-2) = 2$ ตอบ

6. $\int_{-2}^0 \frac{dx}{2x+3}$ $= \lim_{\in\to 0^+} \int_{-2}^{-\frac{3}{2}-\in} \frac{dx}{2x+3} + \lim_{\delta\to 0^+} \int_{-\frac{3}{2}+\delta}^{0} \frac{dx}{2x+3}$

$= \lim_{\in\to 0^+} \frac{1}{2}[\ln(2x+3)]_{-2}^{-\frac{3}{2}-\in}$

$+ \lim_{\delta\to 0^+} \frac{1}{2}[\ln(2x+3)]_{-\frac{3}{2}+\delta}^{0}$

$= \lim_{\in\to 0^+} (\frac{1}{2}\ln(-2\in) - \frac{1}{2}\ln(-1))$

$+ \lim_{\delta\to 0^+} (\frac{1}{2}\ln 3 - \frac{1}{2}\ln(2\delta))$

= หาค่าไม่ได้ เพราะลู่ออก ตอบ

7. $\int_1^{+\infty} 2^{-x}dx$ $= \lim_{b\to+\infty} -\int_1^b 2^{-x}\, d(-x)$

$= \lim_{b\to+\infty} -[\frac{2^{-x}}{\ln 2}]_1^b$

$= \lim_{b\to+\infty} -(\frac{2^{-b}}{\ln 2} - \frac{2^{-1}}{\ln 2})$

$= -0 + \frac{1}{2\ln 2} = \frac{1}{2\ln 2}$ ตอบ

8. $\int_{-\infty}^{0} x5^{-x^2}dx = \lim\limits_{a\to-\infty} \int_{a}^{0} x5^{-x^2}dx$

$= \lim\limits_{a\to-\infty} -\frac{1}{2}\int_{a}^{0} 5^{-x^2}d(-x^2)$

$= \lim\limits_{a\to-\infty} -\frac{1}{2}\left[\frac{5^{-x^2}}{\ln 5}\right]_{a}^{0}$

$= \lim\limits_{a\to-\infty} -\frac{1}{2}\left(\frac{1}{\ln 5}-\frac{5^{-a^2}}{\ln 5}\right)$

$= -\frac{1}{2\ln 5}+o = -\frac{1}{2\ln 5}$ ตอบ

9. $\int_{0}^{2} \frac{dx}{(x-1)^{2/3}} = \lim\limits_{\in\to o^+}\int_{0}^{1-\in}\frac{dx}{(x-1)^{2/3}} + \lim\limits_{\delta\to o^+}\int_{1+\delta}^{2}\frac{dx}{(x-1)^{2/3}}$

$= \lim\limits_{\in\to o^+}\left[3(x-1)^{\frac{1}{3}}\right]_{0}^{1-\in} + \lim\limits_{\delta\to o^+}\left[3(x-1)^{\frac{1}{3}}\right]_{1+\delta}^{2}$

$= \lim\limits_{\in\to o^+}\left(3(-\in)^{\frac{1}{3}}+3\right) + \lim\limits_{\delta\to o^+}\left(3-3(\delta)^{\frac{1}{3}}\right)$

$= 3+3 = 6$ ตอบ

10. $\int_{1}^{+\infty}\frac{dx}{x\ln x} = \lim\limits_{\in\to o^+}\int_{1+\in}^{2}\frac{dx}{x\ln x} + \lim\limits_{b\to+\infty}\int_{2}^{b}\frac{dx}{x\ln x}$

$= \lim\limits_{\in\to o^+}\left[\ln(\ln x)\right]_{1+\in}^{2} + \lim\limits_{b\to+\infty}\left[\ln(\ln x)\right]_{2}^{b}$

$= \lim\limits_{\in\to o^+}(\ln(\ln 2)-\ln(\ln(1+\in)))$

$+ \lim\limits_{b\to+\infty}(\ln(\ln b)-\ln(\ln 2))$

$= \ln(\ln 2) - \ln(\ln 1)+\ln(\ln{+\infty}) - \ln(\ln 2)$

$=$ หาค่าไม่ได้ เพราะลู่ออก ตอบ

11. $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-|x|}\,dx$

$$= \lim_{a\to-\infty}\int_a^0 e^{-|x|}\,dx + \lim_{b\to-0/0}\int_0^b e^{-|x|}\,dx$$

$$= \lim_{a\to-\infty}\left[e^x\right]_a^0 + \lim_{b\to+\infty} -\left[e^{-x}\right]_0^b$$

$$= \lim_{a\to-\infty}(e^{\circ}-e^{a}) + \lim_{b\to+\infty} -(e^{-b}-e^{-o})$$

$$= 1-e^{-\infty}-e^{-\infty}+1$$

$$= 2-\frac{2}{e^{+00}}$$

$$= 2-0 \quad = \quad 2$$ **ตอบ**

12. $\int_0^{+\infty}\frac{dx}{\sqrt{e^x}}$

$$= \lim_{b\to+\infty}\int_0^b\frac{dx}{\sqrt{e^x}} = \lim_{b\to+\infty} -2\int_0^b e^{-\frac{x}{2}}\,d(-\tfrac{x}{2})$$

$$= \lim_{b\to+\infty} -2\left[e^{-\frac{x}{2}}\right]_0^b$$

$$= \lim_{b\to+\infty} -2\left(e^{-\frac{b}{2}}-e^{-0}\right)$$

$$= -2e^{-\infty}+2 = 2$$ **ตอบ**

13. $\int_e^{+\infty}\frac{dx}{x(\ln x)^2}$

$$= \lim_{b\to+\infty}\int_e^b(\ln x)^{-2}\,d(\ln x)$$

$$= \lim_{b\to+\infty}\left[-\frac{1}{\ln x}\right]_e^b$$

$$= \lim_{b\to+\infty}\left(-\frac{1}{\ln b}+\frac{1}{\ln e}\right)$$

$$= -0+1 = 1$$ **ตอบ**

14. $\int^{+\infty} xe^{-x^2}\,dx$ $= \lim\limits_{a\to-\infty}\int_a^0 xe^{-x^2}dx+\lim\limits_{b\to+\infty}\int_0^b xe^{-x^2}dx$

$= \lim\limits_{a\to-\infty} -\frac{1}{2}\left[e^{-x^2}\right]_a^0 + \lim\limits_{b\to+\infty} -\frac{1}{2}\left[e^{-x^2}\right]_0^b$

$= \lim\limits_{a\to-\infty} -\frac{1}{2}\left(e^{-0}-e^{-a^2}\right)+\lim\limits_{b\to+\infty} -\frac{1}{2}\left(e^{-b^2}-e^{-0}\right)$

$= -\frac{1}{2}+0-0+\frac{1}{2} = 0$ ตอบ

15. $\int_1^2 \frac{x\,dx}{\sqrt{x^2-1}}$ $= \lim\limits_{\in\to o^+}\frac{1}{2}\int_{1+\in}^2 (x^2-1)^{-\frac{1}{2}}\,d(x^2-1)$

$= \lim\limits_{\in\to o^+}\frac{1}{2}\left[2(x^2-1)^{\frac{1}{2}}\right]_{1+\in}^2$

$= \lim\limits_{\in\to o^+}\frac{1}{2}\left(2\sqrt{2^2-1}-2\sqrt{(1+\in)^2-1}\right)$

$= \sqrt{3}-0=\sqrt{3}$ ตอบ

16. $\int_0^1 \frac{\ln x}{x}\,dx$ $= \lim\limits_{\in\to o^+}\int_{\in}^1 \ln x\,d(\ln x)$

$= \lim\limits_{\in\to o^+}\left[\frac{(\ln x)^2}{2}\right]_{\in}^1$

$= \lim\limits_{\in\to o^+}\left(\frac{1}{2}(\ln 1)^2-\frac{1}{2}(\ln\in)^2\right)$

$= 0-\frac{1}{2}(-\infty)^2$

= หาค่าไม่ได้ เพราะลู่ออก ตอบ

17. $\int_{-1}^1 \frac{dx}{x^2}$ $= \lim\limits_{\in\to o^+}\int_{-1}^{o-\in} x^{-2}dx+\lim\limits_{\delta\to o^+}\int_{o+\delta}^1 x^{-2}dx$

$= \lim\limits_{\in\to o^+}\left[-\frac{1}{x}\right]_{-1}^{-\in}+\lim\limits_{\delta\to o^+}\left[-\frac{1}{x}\right]_{\delta}^1$

$= \lim\limits_{\in\to o^+}\left(\frac{1}{\in}-1\right)+\lim\limits_{d\to o^+}\left(-1+\frac{1}{\delta}\right)$

$= \infty$ = หาค่าไม่ได้ เพราะลู่ออก ตอบ

18. $\int_0^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt{x}\, e^{\sqrt{x}}}$ $= \lim_{\epsilon \to 0^+} \int_{\epsilon}^{1} e^{-\sqrt{x}} \left(-2 \times \frac{1}{-2} \frac{dx}{\sqrt{x}} \right)$

$+ \lim_{b \to +\infty} \int_1^b e^{-\sqrt{x}} \left(-2 \times \frac{1}{-2} \frac{dx}{\sqrt{x}} \right)$

$= \lim_{\epsilon \to 0^+} -2 \left[e^{-\sqrt{x}} \right]_{\epsilon}^{1} + \lim_{b \to +\infty} -2 \left[e^{-\sqrt{x}} \right]_1^b$

$= \lim_{\epsilon \to 0^+} -2 \left(e^{-1} - e^{-\sqrt{\epsilon}} \right)$

$+ \lim_{b \to +\infty} -2 \left(e^{-\sqrt{b}} - e^{-1} \right)$

$= -\frac{2}{e} + 2 - 0 + \frac{2}{e} = 2$ ตอบ

19. $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{x^2 - a^2}$ $= \lim_{g \to -\infty} \int_g^0 \frac{dx}{x^2 - a^2} + \lim_{b \to +\infty} \int_0^b \frac{dx}{x^2 - a^2}$

$= \lim_{g \to -\infty} \left[\frac{1}{2a} \ln|x-a| - \frac{1}{2a} \ln|x+a| \right]_g^0$

$+ \lim_{b \to +\infty} \left[\frac{1}{2a} \ln|x-a| - \frac{1}{2a} \ln|x+a| \right]_0^b$

$= \lim_{g \to -\infty} \left[\frac{1}{2a} \ln|-a| - \frac{1}{2a} \ln|a| - \frac{1}{2a} \ln|g-a| \right.$

$\left. + \frac{1}{2a} \ln|g+a| \right]$

$= \lim_{b \to +\infty} \left[\frac{1}{2a} \ln|b-a| - \frac{1}{2a} \ln|b+a| \right.$

$\left. - \frac{1}{2a} \ln|-a| + \frac{1}{2a} \ln|a| \right]$

$= \frac{1}{2a} \ln|-a| - \frac{1}{2a} \ln|a| - \frac{1}{2a} \ln|-\infty| + \frac{1}{2a} \ln|-\infty|$

$+ \quad \frac{1}{2a}\ln|\infty| - \frac{1}{2a}\ln|\infty| - \frac{1}{2a}\ln|-a| + \frac{1}{2a}\ln|a|$

$= \quad 0$ $\quad |-a|$ **ตอบ**

20. $\int_0^2 \frac{x\,dx}{1-x}$

$$= \lim_{\epsilon\to 0^+}\int_0^{1-\epsilon}\frac{x\,dx}{1-x} + \lim_{\delta\to 0^+}\int_{1+\delta}^{2}\frac{x\,dx}{1-x}$$

$$= \lim_{\epsilon\to 0^+}\int_0^{1-\epsilon}\left(\frac{1}{1-x}-1\right)dx$$

$$+ \lim_{\delta\to 0^+}\int_{1+\delta}^{2}\left(\frac{1}{1-x}-1\right)dx$$

$$= \lim_{\epsilon\to 0^+}\left[-\ln|1-x|-x\right]_0^{1-\epsilon}$$

$$+ \lim_{\delta\to 0^+}\left[-\ln|1-x|-x\right]_{1+\delta}^{2}$$

$$= \lim_{\epsilon\to 0^+}\left[-\ln|1-1+\epsilon|-1+\epsilon+\ln|1|+0\right]$$

$$+ \lim_{\delta\to 0^+}\left[-\ln|-1|-2+\ln|1-1-\delta|+1+\delta\right]$$

$$= -\ln|0|-1+\ln|1|-\ln|-1|-2+\ln|0|+1$$

= หาค่าไม่ได้ เพราะลู่ออก **ตอบ**

21. $\int_0^4 \frac{dx}{x^2-2x-3}$

$$= \int_0^4 \frac{dx}{(x+1)(x-3)}$$

$$= \lim_{\epsilon\to 0^+}\int_0^{3-\epsilon}\frac{dx}{(x+1)(x-3)} + \lim_{\delta\to 0^+}\int_{3+\delta}^{4}\frac{dx}{(x+1)(x-3)}$$

$$= \lim_{\epsilon\to 0^+}\left[-\frac{1}{4}\int_0^{3-\epsilon}\frac{dx}{x+1}+\frac{1}{4}\int_0^{3-\epsilon}\frac{dx}{x-3}\right.$$

$$+ \lim_{\delta\to 0^+}\left[-\frac{1}{4}\int_{3+\delta}^{4}\frac{dx}{x+1}+\frac{1}{4}\int_{3+\delta}^{4}\frac{dx}{x-3}\right]$$

$$= \lim_{\epsilon\to 0^+}\left[-\frac{1}{4}\ln|x+1|+\frac{1}{4}\ln|x-3|\right]_0^{3-\epsilon}$$

$$+\lim_{\delta\to 0^+}\left[-\frac{1}{4}\ln|x+1|+\frac{1}{4}\ln|x-3|\right]_{3+\delta}^{4}$$

$$= \lim_{\in\to 0^+}\left[-\frac{1}{4}\ln|3-\in+1|+\frac{1}{4}\ln|3-\in-3|\right.$$

$$\left.+\frac{1}{4}\ln|1|-\frac{1}{4}\ln|-3|\right]$$

$$+\lim_{\delta\to 0^+}\left[-\frac{1}{4}\ln|4+1|+\frac{1}{4}\ln|4-3|+\frac{1}{4}\ln|3+\delta+1|\right.$$

$$\left.-\frac{1}{4}\ln|3+\delta-3|\right]$$

$$= -\frac{1}{4}\ln|4|+\frac{1}{4}\ln|0|+\frac{1}{4}\ln|1|-\frac{1}{4}\ln|-3|$$

$$-\frac{1}{4}\ln|5|+\frac{1}{4}\ln|1|+\frac{1}{4}\ln|4|-\frac{1}{4}\ln|0|$$

= หาค่าไม่ได้ เพราะลู่ออก **ตอบ**

22. $\int_0^6 \frac{dx}{x^2-6x+8}$ $= \int_0^6 \frac{dx}{(x-2)(x-4)}$

$$= \lim_{\in_1\to 0^+}\int_0^{2-\in_1}\frac{dx}{(x-2)(x-4)} + \lim_{\delta_1\to 0^+}\int_{2+\delta_1}^{3}\frac{dx}{(x-2)(x-4)}$$

$$+\lim_{\in_2\to 0^+}\int_3^{4-\in_2}\frac{dx}{(x-2)(x-4)} + \lim_{\delta_2\to 0^+}\int_{4+\delta_2}^{6}\frac{dx}{(x-2)(x-4)}$$

$$= \lim_{\in_1\to 0^+}\left[-\frac{1}{2}\int_0^{2-\in_1}\frac{dx}{x-2}+\frac{1}{2}\int_0^{2-\in_1}\frac{dx}{x-4}\right]$$

$$+ \lim_{\delta_1\to 0^+}\left[-\frac{1}{2}\int_{2+\delta_1}^{3}\frac{dx}{x-2}+\frac{1}{2}\int_{2+\delta_1}^{3}\frac{dx}{x-4}\right]$$

$$+\lim_{\in_2\to 0^+}\left[-\frac{1}{2}\int_3^{4-\in_2}\frac{dx}{x-2}+\frac{1}{2}\int_3^{4-\in_2}\frac{dx}{x-4}\right]$$

$$+ \lim_{d_2 \to 0^+} \left[-\frac{1}{2} \int_{4+\delta_2}^{6} \frac{dx}{x-2} + \frac{1}{2} \int_{4+\delta_2}^{6} \frac{dx}{x-4} \right]$$

$$= \lim_{\epsilon_1 \to 0^+} \left[-\frac{1}{2} \ln|x-2| + \frac{1}{2} \ln|x-4| \right]_{0}^{2-\epsilon_1}$$

$$+ \lim_{\delta_1 \to 0^+} \left[-\frac{1}{2} \ln|x-2| + \frac{1}{2} \ln|x-4| \right]_{2+\delta_1}^{3}$$

$$+ \lim_{\epsilon_2 \to 0^+} \left[-\frac{1}{2} \ln|x-2| + \frac{1}{2} \ln|x-4| \right]_{3}^{4-\epsilon_2}$$

$$+ \lim_{\delta_2 \to 0^+} \left[-\frac{1}{2} \ln|x-2| + \frac{1}{2} \ln|x-4| \right]_{4+\delta_2}^{6}$$

$$= \lim_{\epsilon_1 \to 0^+} \left[-\frac{1}{2} \ln|-\epsilon_1| + \frac{1}{2} \ln|-\epsilon_1-2| + \frac{1}{2} \ln|-2| \right.$$

$$\left. -\frac{1}{2} \ln|-4| \right]$$

$$+ \lim_{\delta_1 \to 0^+} \left[-\frac{1}{2} \ln|1| + \frac{1}{2} \ln|-1| + \frac{1}{2} \ln|\delta_1| - \frac{1}{2} \ln|\delta_1-2| \right]$$

$$+ \lim_{\epsilon_2 \to 0^+} \left[-\frac{1}{2} \ln|2-\epsilon_2| + \frac{1}{2} \ln|-\epsilon_2| + \frac{1}{2} \ln|1| - \frac{1}{2} \ln|-1| \right]$$

$$+ \lim_{\delta_2 \to 0^+} \left[-\frac{1}{2} \ln|4| + \frac{1}{2} \ln|2| + \frac{1}{2} \ln|2+\delta_2| - \frac{1}{2} \ln|\delta_2| \right]$$

$$= -\frac{1}{2} \ln|0| + \frac{1}{2} \ln|-2| + \frac{1}{2} \ln|-2| - \frac{1}{2} \ln|-4| - \frac{1}{2} \ln||1|$$

$$+ \frac{1}{2} \ln|-1| + \frac{1}{2} \ln|0| - \frac{1}{2} \ln|-2| - \frac{1}{2} \ln|2| + \frac{1}{2} \ln|0|$$

$$+ \frac{1}{2} \ln|1| - \frac{1}{2} \ln|-1| - \frac{1}{2} \ln|4| + \frac{1}{2} \ln|2|$$

$$+ \frac{1}{2} \ln|2| - \frac{1}{2} \ln|0|$$

= หาค่าไม่ได้ เพราะลู่ออก ตอบ

23. $\int_0^{\infty} \frac{dx}{x^2+1} = \lim_{b\to+\infty} \int_0^b \frac{dx}{x^2+1}$

$$= \lim_{b\to+\infty} \left[\tan^{-1}x\right]_0^b$$

$$= \lim_{b\to+\infty} \left[\tan^{-1} b - \tan^{-1} o\right]$$

$$= \tan^{-1}(\infty) - \tan^{-1} o$$

$$= \frac{\pi}{2} - o = \frac{\pi}{2}$$ ตอบ

24. $\int_0^{\infty} e^{-x}\cos x\,dx = \lim_{b\to\infty} \int_0^b e^{-x}\cos x\,dx$

$$= \lim_{b\to\infty}\left[e^{-x}\left(\frac{\sin x - \cos x}{2}\right)\right]_0^b$$

$$= \lim_{b\to\infty}\left[e^{-b}\left(\frac{\sin b - \cos b}{2}\right) - e^{-o}\left(\frac{\sin o - \cos o}{2}\right)\right]$$

$$= 0 - \left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}$$ ตอบ

25. $\int_0^4 \frac{dx}{\sqrt{4-x}} = \int_0^4 (4-x)^{-\frac{1}{2}}\,dx$

$$= \lim_{\epsilon\to o^+} \int_0^{4-\epsilon} (4-x)^{-\frac{1}{2}}\,dx$$

$$= \lim_{\epsilon\to o^+} \left[-2(4-x)^{-\frac{1}{2}}\right]_0^{4-\epsilon}$$

$$= \lim_{\epsilon\to o^+} \left[-2(4-4+\epsilon)^{\frac{1}{2}} + 2(4-0)^{\frac{1}{2}}\right]$$

$$= 0 + 4 = 4$$ ตอบ

26. $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \lim_{\epsilon\to o^+} \int_0^{1-\epsilon} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$

$$= \lim_{\epsilon\to o^+} \left[\sin^{-1} x\right]_0^{1-\epsilon}$$

$$= \lim_{\epsilon\to 0^+} [\sin^{-1}(1-\epsilon) - \sin^{-1}\delta]$$

$$= \sin^{-1} 1 - \sin^{-1} 0 = \frac{\pi}{2} - 0 = \frac{\pi}{2}$$ ตอบ

27. $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x}}$

$$= \lim_{\epsilon\to 0^+} \int_{0+\epsilon}^{1} \frac{dx}{\sqrt{x}}$$

$$= \lim_{\epsilon\to 0^+} [2\sqrt{x}]_{0+\epsilon}^{1} = \lim_{\epsilon\to 0^+} [2\sqrt{1} - 2\sqrt{\epsilon}]$$

$$= 2 - 0 = 2$$ ตอบ

28. $\int_{-1}^{1} \frac{dx}{x^{2/3}}$

$$\lim_{\epsilon\to 0^+} \int_{-1}^{0-\epsilon} \frac{dx}{x^{2/3}} + \lim_{\delta\to 0^+} \int_{0+\delta}^{1} \frac{dx}{x^{2/3}}$$

$$= \lim_{\epsilon\to 0^+} [3\sqrt[3]{x}]_{-1}^{0-\epsilon} + \lim_{\delta\to 0^+} [3\sqrt[3]{x}]_{0+\delta}^{1}$$

$$= \lim_{\epsilon\to 0^+} [3\sqrt[3]{-\epsilon} - 3\sqrt[3]{-1}] + \lim_{\delta\to 0^+} [3\sqrt[3]{1}$$

$$-3\sqrt[3]{\delta}]$$

$$= 0 - 3(-1) + 3(1) - 0 = 3+3$$

$$= 6$$ ตอบ

29. $\int_1^{\infty} \frac{dx}{x^{1.001}}$

$$= \lim_{b\to\infty} \int_1^b \frac{dx}{x^{1.001}}$$

$$= \lim_{b\to\infty} \left[\frac{x^{-0.001}}{-0.001}\right]_1^b$$

$$= \lim_{b\to\infty} \left[\frac{b^{-0.001}}{-0.001} - \frac{1^{-0.001}}{-0.001}\right]$$

$$= 0 + \frac{1}{0.001} = 1{,}000$$ ตอบ

30. $\int_0^1 \frac{dx}{x^{0.999}} = \lim_{\epsilon \to 0^+} \int_{0+\epsilon}^{1} \frac{dx}{x^{0.999}}$

$= \lim_{\epsilon \to 0^+} \left[\frac{x^{0.001}}{0.001}\right]_{0+\epsilon}^{1}$

$= \lim_{\epsilon \to 0^+} \left[\frac{1^{0.001}}{0.001} - \frac{\epsilon^{0.001}}{0.001}\right]$

$= \frac{1}{0.001} - 0 = 1{,}000$ **ตอบ**

แบบฝึกหัด 9.1

1. $|\overline{AB}| = \sqrt{(7-0)^2+(2-0)^2+(3-0)^2}$

$= \sqrt{7^2+2^2+3^2} = \sqrt{62}$ **ตอบ**

2. $|\overline{AB}| = \sqrt{(3-1)^2+(4-1)^2+(2-1)^2}$

$= \sqrt{2^2+3^2+1^2} = \sqrt{14}$ **ตอบ**

3. $|\overline{AB}| = \sqrt{(2+1)^2+(3-1)^2+(5-2)^2}$

$= \sqrt{3^2+2^2+3^2} = \sqrt{22}$ **ตอบ**

4. $|\overline{AB}| = \sqrt{(4-2)^2+(0+1)^2+(-1+3)^2}$

$= \sqrt{2^2+1^2+2^2} = \sqrt{9} = 3$ **ตอบ**

5. $|\overline{AB}| = \sqrt{(1-3)^2+(6-4)^2+(3-2)^2}$

$= \sqrt{(-2)^2+2^2+1^2} = \sqrt{9} = 3$ **ตอบ**

6. $|\overline{AB}| = \sqrt{(\frac{1}{2}-2)^2+(2+4)^2+(3-1)^2}$

$= \sqrt{(-\frac{3}{2})^2+6^2+2^2} = \sqrt{\frac{169}{4}} = \frac{13}{2}$ **ตอบ**

7. $$|\overline{AB}| = \sqrt{(-2-4)^2+(3+3)^2+(-5-2)^2}$$

$$= \sqrt{(-6)^2+6^2+(7)^2}$$

$$= \sqrt{121} = 11$$ **ตอบ**

8. $$|\overline{AB}| = \sqrt{(5+2)^2+(1+\frac{1}{2})^2+(-4-5)^2}$$

$$= \sqrt{7^2+(\frac{3}{2})^2+(-9)^2}$$

$$= \sqrt{\frac{529}{4}} = \frac{23}{2}$$ **ตอบ**

๙. ให้ A(1,-1,3), B(2,1,7) และ C(4,2,6) เป็นจุดยอดมุมของสามเหลี่ยมรูปหนึ่ง

$$|\overline{AB}| = \sqrt{(2-1)^2+(1+1)^2+(7-3)^2}$$

$$= \sqrt{1^2+2^2+4^2} = \sqrt{21}$$

$$|\overline{BC}| = \sqrt{(4-2)^2+(2-1)^2+(6-7)^2}$$

$$= \sqrt{2^2+1^2+(-1)^2} = \sqrt{6}$$

$$|\overline{AC}| = \sqrt{(4-1)^2+(2+1)^2+(6-3)^2}$$

$$= \sqrt{3^2+3^2+3^2} = \sqrt{27}$$

$$\because (\sqrt{27})^2 = (\sqrt{21})^2 + (\sqrt{6})^2$$

$$27 = 21+6$$

$$\because |\overline{AC}|^2 = |\overline{AB}|^2 + |\overline{BC}|^2$$

นั่นคือ ΔABC เป็นสามเหลี่ยมมุมฉาก และพื้นที่ ΔABC

$$= \frac{1}{2}\times\sqrt{21}\times\sqrt{6} = \frac{3}{2}\sqrt{14}$$ **ตอบ**

10. ให้ P(x, 4, 2) เป็นจุดบนเส้นตรงที่อยู่ห่างจากจุด (0, 4, 0) เป็นระยะทาง 10 หน่วย

$$\therefore \quad \sqrt{(x-0)^2+(4-4)^2+(2-0)^2} = 10$$

$$\sqrt{x^2+x^2} = 10$$

$$x^2+4 = 100$$

$$x^2 = 96$$

$$x = \pm\sqrt{96} = \pm 4\sqrt{6}$$

$\therefore$ โคออร์ดิเนตของจุด P คือ $(\pm 4\sqrt{6}, 4, 2)$ **ตอบ**

11. ให้ A(3, 2, 4), B(6, 1, 2) และ C(- 12, 3, 6) เป็นจุดทั้งสาม

$$|\overline{AB}| = \sqrt{(6+3)^2+(1-2)^2+(2-4)^2}$$

$$= \sqrt{9^2+(-1)^2+(-2)^2} = \sqrt{86}$$

$$|\overline{BC}| = \sqrt{(-12-6)^2+(3-1)2+(6-2)^2}$$

$$= \sqrt{(-18)^2+2^2+4^2} = \sqrt{344} = 2\sqrt{86}$$

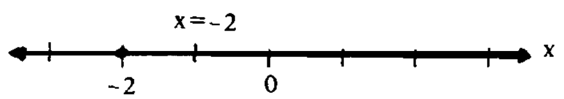
$$|\overline{AC}| = \sqrt{(-12+3)^2+(3-2)^2+(6-4)^2}$$

$$= \sqrt{(-9)^2+1^2+2^2} = \sqrt{86}$$

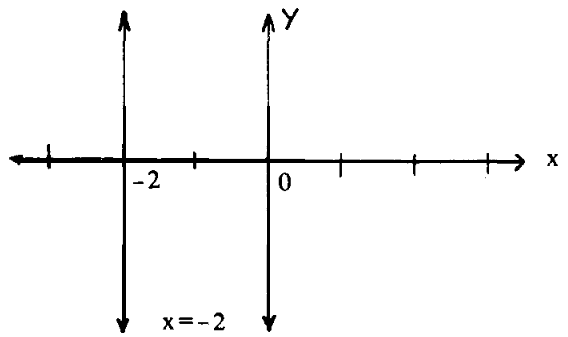
$$\because \quad |\overline{AB}|+|\overline{AC}| = \sqrt{86}+\sqrt{86} = 2\sqrt{86} = |\overline{BC}|$$

นั่นคือ จุด A, B และ C อยู่บนเส้นตรงอันเดียวกัน

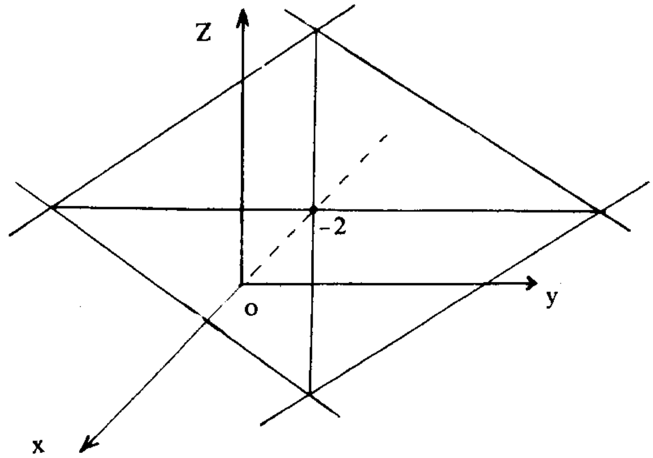
12. R^1 :



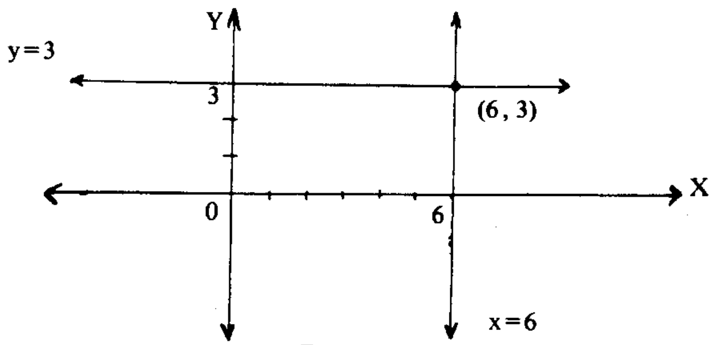
R^2 :



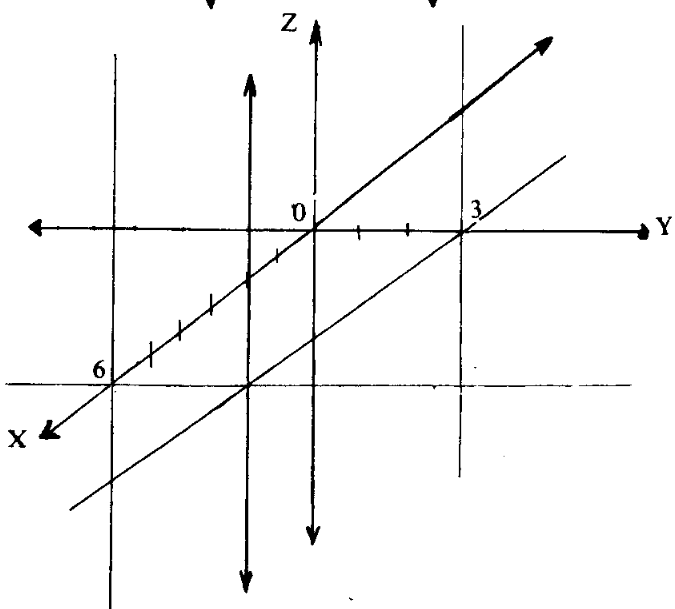
R^3 :



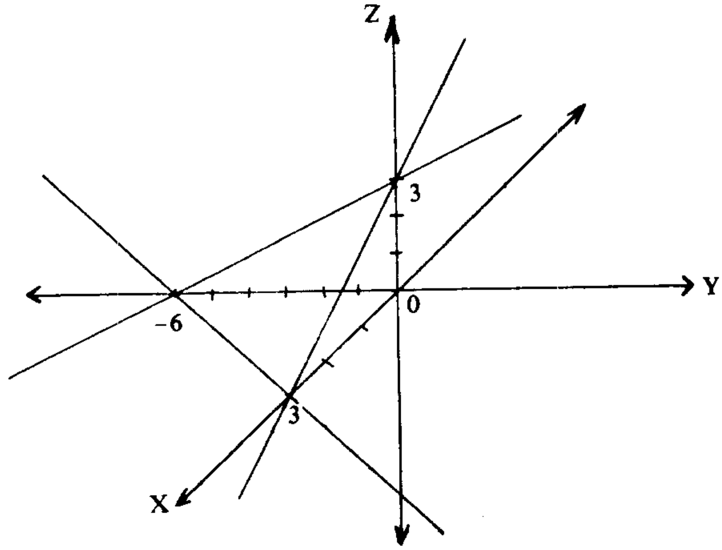
13. R^2 :



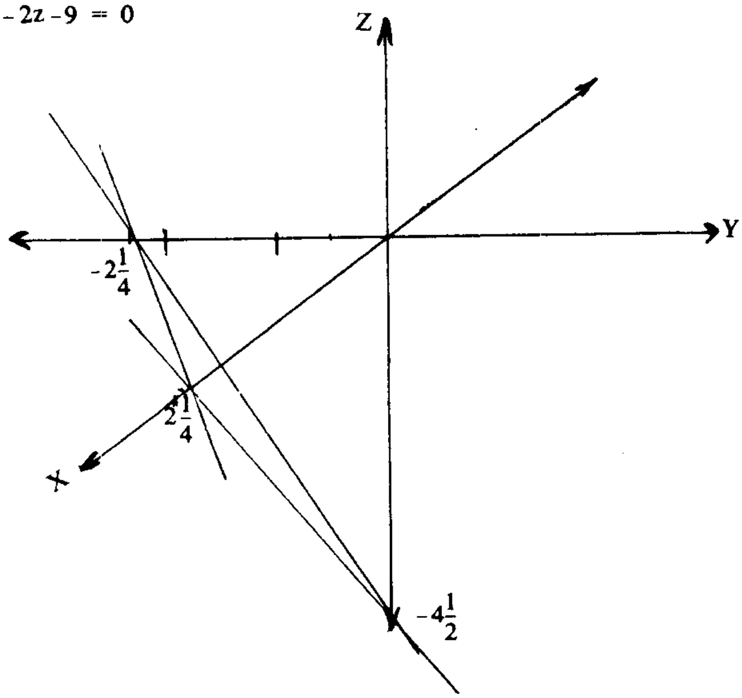
R^3 :



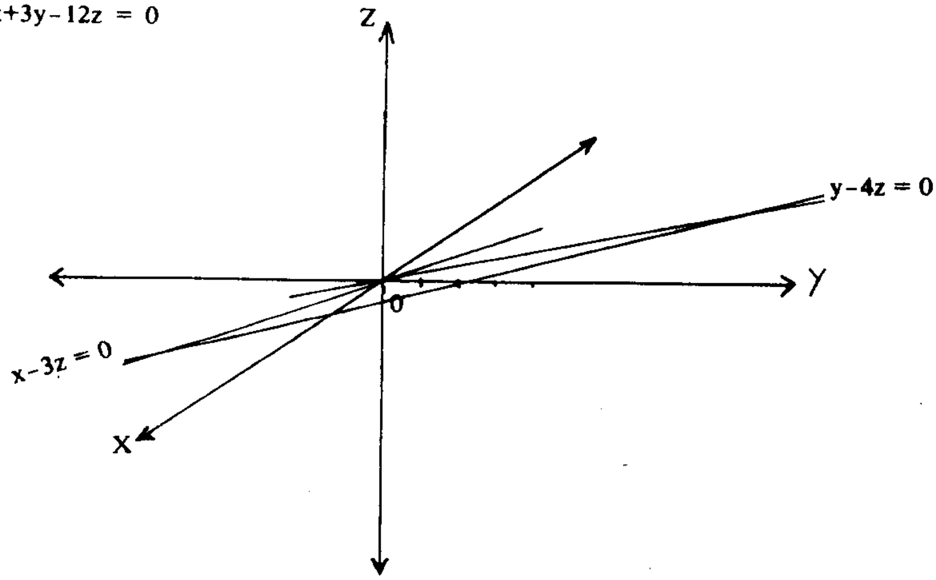
14. $2x-y+2z-6 = 0$



15. $4x-4y-2z-9 = 0$



16. $4x+3y-12z = 0$



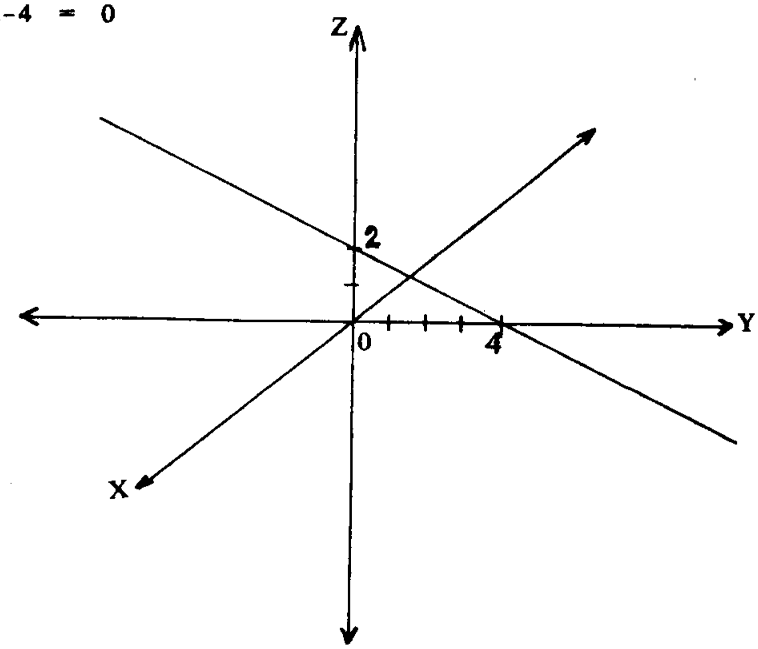
$x=0$

$\rightarrow \quad 3y-12z=0 \rightarrow \quad y-4z=0$

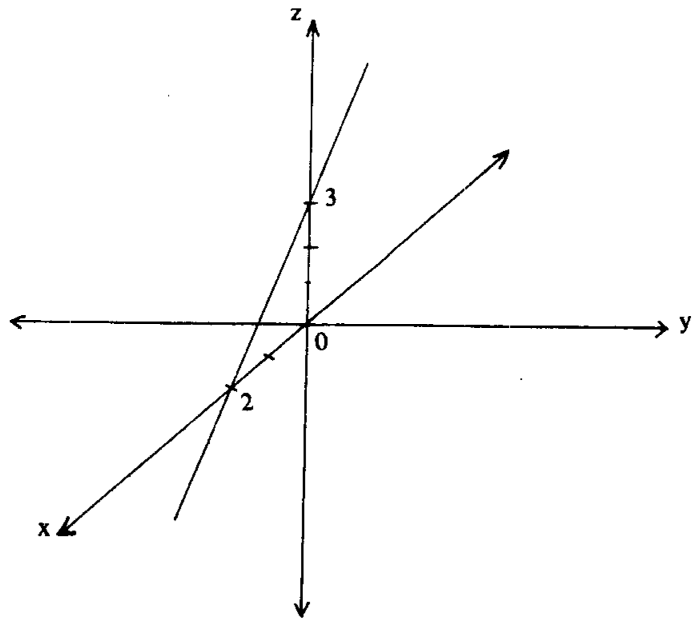
$y = 0$

$\rightarrow \quad 4x-12z = 0 \rightarrow \quad x-3z=0$

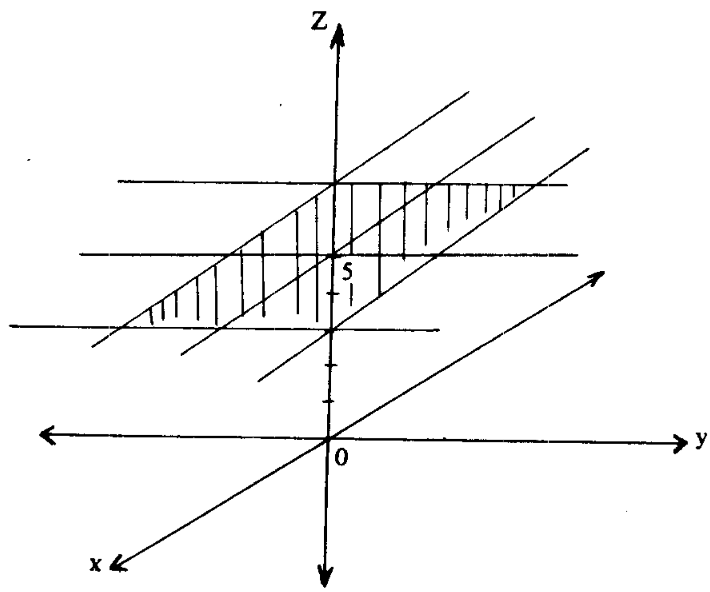
17. $y+2z-4 = 0$



18. $3x+2z-6 = 0$



19. $z = 5$



20. $(3,4,1):$ $\quad 3A+4B+C+D = 0$ ______ 1

$(1,7,1):$ $\quad A+7B+C+D = 0$ ______ 2

$(-1,-2,5):$ $\quad -A-2B+5C+D = 0$ ______ 3

$1 - 2$ $\quad 2A-3B = 0$ ______ 4

2×5 $\quad 5A+35B+5C+5D = 0$ ______ 5

$5 - 3$ $\quad 6A+37B+4D = 0$ ______ 6

4×3 $\quad 6A-9B = 0$ ______ 7

$6 - 7$ $\quad 46B+4D = 0$

$$B = -\frac{4D}{46} = -\frac{2D}{23}$$

จาก 4 $\quad 2A-3\left(\frac{-2D}{23}\right) = 0$

$$A = \frac{-3D}{23}$$

จาก 2 $\quad \frac{-3D}{23}+7\left(\frac{-2D}{23}\right)+C+D = 0$

$$C = \frac{3D}{23}+\frac{14D}{23}-D$$

$$= \frac{3D+14D-23D}{23} = \frac{-6D}{23}$$

$\therefore$ สมการของระนาบ :

$$-\frac{3D}{23}x-\frac{2D}{23}y-\frac{6D}{23}z+D = 0$$

$$-3x-2y-6z+23 = 0$$

$$3x+2y+6z-23 = 0$$ **ตอบ**

21. $(0,0,2):$ $\quad 2C+D = 0$ ______ 1

$(2,4,1):$ $\quad 2A+4B+C+D = 0$ ______ 2

$(-2,3,3):$ $\quad -2A+3B+3C+D = 0$ ______ 3

$2 + 3$ $\quad 7B+4C+2D = 0$ ______ 4

$1 \times 2 - 4$	$-7B = 0$	
	$B = 0$	
$2 \times 2 - 1$	$4A+8B+D = 0$	
	$4A = -D-8B$	
	$A = -\frac{D}{4}-2B$	
แทนค่า $B=0$	$A = -\frac{D}{4}$	
จาก 1	$C = -\frac{D}{2}$	

∴ สมการของระนาบ : $-\frac{D}{4}x-\frac{D}{2}z+D = 0$

$$x+2z+(-4) = 0$$

$$x+2z-4 = 0$$ **ตอบ**

22. $(-2,2,2)$:	$-2A+2B+2C+D = 0$	1
$(-8,1,6)$:	$-8A+B+6C+D = 0$	2
$(3,4,-1)$:	$3A+4B-C+D = 0$	3
$3 \times 2+1$	$4A+10B+3D = 0$	4
$3 \times 6+2$	$10A+25B+7D = 0$	5
$2 \times 5-4\times5$	$-D = 0$	
	$D = 0$	
$1 \times 4-2$	$7B+2C+3D = 0$	
แทน $D=0$	$C = -\frac{7}{2}B$	
จาก 4 แทน $D=0$	$A = -\frac{5}{2}B$	

∴ สมการของระนาบ : $-\frac{5}{2}Bx+By-\frac{7}{2}Bz = 0$

$$5x-2y+7z = 0$$ **ตอบ**

23. (a, b, o) : $aA+bB+D = 0$ ——— 1

(a, o, c) : $aA+cC+D = 0$ ——— 2

(o, b, c) : $bB+cC+D = 0$ ——— 3

1 - 2 $bB-cC = 0$ ——— 4

3 + 4 $2bB+D = 0$

$$B = -\frac{D}{2b}$$

2 - 3 $aA-bB = 0$ ——— 5

1 + 5 $2aA+D = 0$

$$A = \frac{-D}{2a}$$

3 - 4 $2cC+D = 0$

$$C = \frac{-D}{2c}$$

$\therefore$ สมการของระนาบ : $\frac{-D}{2a}x-\frac{D}{2b}y-\frac{D}{2c}z+D=0$

$$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}-2 = 0$$

$$bcx+acy+abz-2abc = 0$$ **ตอบ**

24. รัศมีของทรงกลมนี้ คือ

$$r = \sqrt{(5-3)^2+(1-7)^2+(-1+4)^2}$$

$$= \sqrt{2^2+(-6)^2+3^2} = \sqrt{4+36+9}$$

$$= \sqrt{49} = 7$$

$\therefore$ สมการของทรงกลมนี้ คือ

$$(x-3)^2+(y-7)^2+(z+4)^2 = 49$$

หรือ $$x^2-6x+9+y^2-14y+49+z^2+8z+16 = 49$$

$$x^2+y^2+z^2-6x-14y+8z+25 = 0$$ **ตอบ**

25. สมการของทรงกลมนี้คือ

$$(x-o)^2+(y+4)^2+(z+8)^2 = 36$$

หรือ $$x^2+y^2+8y+16+z^2+16z+64 = 36$$

$$x^2+y^2+z^2+8y+16z+44 = 0$$ **ตอบ**

26. $$\chi^2+y^2+z^2-2y+8z-9 = 0$$

$$(x-o)^2+(y^2-2y+1)+(z^2+8z+4^2) = 1+4^2+9$$

$$(x-o)^2+(y-1)^2+(z+4)^2 = 26$$

∴ ทรงกลมนี้มีจุดศูนย์กลางอยู่ที่ (0, 1, -4)

∴ สมการของทรงกลมนี้ คือ

$$(x-o)^2+(y-1)^2+(z+4)^2 = 4^2$$

หรือ $$x^2+y^2+z2-2y+8z+1 = 0$$

27. จุดศูนย์กลางของทรงกลมนี้ คือ (o, k, l)

$$(k-o)^2+(l-4)^2 = r^2 \quad \text{——— } 1$$

$$(o-2)^2+(k-1)^2+(l-3)^2 = r^2 \quad \text{——— } 2$$

$$(k-2)^2+(l-6)^2 = r^2 \quad \text{——— } 3$$

1 = 3 $$k^2+l^2-8l+16 = k^2-4k+4+l^2-12l+36$$

$$4l+4k = 24$$

$$l+k = 6 \quad \text{——— } 4$$

1 = 2 $$k^2+l^2-8l+16 = 4+k^2-2k+1+l^2-6l+9$$

$$-2l+2k = -2$$

$$l-k = 1 \quad \text{——— } 5$$

4 + 5 $$2l = 7$$

$$l = \frac{7}{2}$$

4 - 5 $$2k = 5$$

$$k = \frac{5}{2}$$

แทนค่า k และ l ใน 1

$$\left(\frac{5}{2}\right)^2 + \left(\frac{7}{2} - 4\right)^2 \quad r^2$$

∴ สมการของทรงกลมนี้ คือ (o, k, l)

$$(x-o)^2+(y-\frac{5}{2})^2 + (z-\frac{7}{2})^2 = \left(\frac{5}{2}\right)^2+\left(\frac{7}{2}-4\right)^2$$

$$x^2+y^2-5y+\left(\frac{5}{2}\right)^2+z^2-7z+\left(\frac{7}{2}\right)^2 = \left(\frac{5}{2}\right)^2+\left(-\frac{1}{2}\right)^2$$

$$x^2+y^2+z^2-5y-7z = -12$$

$$x^2+y^2+z^2-5y-7z+12 = 0$$

28.

$$x^2+y^2+z^2-8x+4y+2z-4 = 0$$

$$(x^2-8x+4^2)+(y^2+4y+2^2)+(z^2+2z+1) = 4+4^2+2^2+1$$

$$(x-4)^2+(y+2)^2+(z+1)^2 = 25 = 5^2$$

∴ สมการนี้เป็นสมการของทรงกลม มีจุดศูนย์กลางอยู่ที่ (4, -2, -1) และมีรัศมี 5

ตอบ

29.

$$x^2+y^2+z^2-8y+6z-25 = 0$$

$$(x-o)^2+(y^2-8y+4^2)+(z^2+6z+3^2) = 25+4^2+3^2$$

$$(x-o)^2+(y-4)^2+(z+3)^2 = 50 = (5\sqrt{2})^2$$

∴ สมการนี้เป็นสมการของทรงกลม มี

จุดศูนย์กลางอยู่ที่ (o, 4, -3) และมีรัศมี $5\sqrt{2}$

30.

$$x^2+y^2+z^2-6z+9 = 0$$

$$(x-o)^2+(y-o)^2+(z^2-6z+3^2) = -9+3^2$$

$$(x-o)^2+(y-o)^2+(z-3)^2 = 0$$

∴ สมการนี้คือจุด (0, 0, 3) ตอบ

31. $$x^2+y^2+z^2-x-y-3z+2 = 0$$

$$(x^2-x+(\tfrac{1}{2})^2)+(y^2-y+(\tfrac{1}{2})^2)+(z^2-3z+(\tfrac{3}{2})^2) = -2+(\tfrac{1}{2})^2+(\tfrac{1}{2})^2+(\tfrac{3}{2})^2$$

$$(x-\tfrac{1}{2})^2+(y-\tfrac{1}{2})^2+(z-\tfrac{3}{2})^2 = -2+\tfrac{1}{4}+\tfrac{1}{4}+\tfrac{9}{4}$$

$$= \tfrac{3}{4} = (\tfrac{\sqrt{3}}{2})^2$$

$\therefore$ สมการนี้เป็นสมการของทรงกลม มี

จุดศูนย์กลางอยู่ที่ $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{3}{2})$ และมีรัศมี $\frac{\sqrt{3}}{2}$ ตอบ

แบบฝึกหัด 9.2

1. (ก) $f(-3,4) = (-3+4)/(-3-4) = 1/-7 = -\frac{1}{7}$ ตอบ

(ข) $f(x^2, y^2) = (x^2+y^2)/(x^2-Y^2)$ ตอบ

(ค) $[f(x,y)]^2 = (x+y)^2/(x-y)^2$ ตอบ

(ง) $f(-x,y) - f(x,-y)$

$= (-x+y)/(-x-y) - (x-y)/(x+y)$

$= \frac{-(x-y)}{-(x+y)} - \frac{(x-y)}{(x+y)} = 0$ ตอบ

(จ) โดเมนของ f คือ เซตของจุดทั้งหมด (x, y) ใน R^2 ซึ่ง $x \neq y$ ตอบ

(ฉ) พิสัยของ f คือ $(-\infty,+\infty)$ ตอบ

2. (ก) $g(1,-1,-1) = \sqrt{4-1^2-(-1)^2-(-1)^2} = \sqrt{1} = 1$ ตอบ

(ข) $g(-a, 2b, \frac{1}{2}c)$ $\sqrt{4-(-a)^2-(2b)^2-(\frac{c}{2})^2}$

$= \sqrt{4-a^2-4b^2-c^2/4}$ ตอบ

(ค) $g(y, -x, -y) = \sqrt{4-y^2-(-x)^2-(-y)^2}$

$= \sqrt{4-x^2-2y^2}$ ตอบ

(ง) โดเมนของ g คือ เซต ของจุดทั้งหมด (x, y, z) ใน R^3

ซึ่ง $4-x^2-y^2-z^2 \geqslant 0$

หรือ $-(x^2+y^2+z^2) \geqslant -4$

หรือ $x^2+y^2+z^2 \leqslant 4$ ตอบ

(จ) พิสัยของ g คือ $[0, 2]$ ตอบ

(ฉ) $[g(x, y, z)^2 - g(x+2, y+2, z)]^2$

$= [4-x^2-y^2-z^2-\sqrt{4-(x+2)^2-(y+2)^2-z^2}]^2$

$= (4-x^2-y^2-z^2)^2 - 2(4-x^2-y^2-z^2)\sqrt{4-(x+2)^2-(y+2)^2-z^2}+4-(x+2)^2-(y+2)^2-z^2$

$= (4-x^2-y^2-z^2)(4-x^2-y^2-z^2-2\sqrt{4-x^2-4x-4-y^2-4y-4-z^2})$

$+4-x^2-4x-4-y^2-4y-4-z^2$

3. โดเมนของ f คือ เซตของจุดทั้งหมด (x, y) ใน R^2 ซึ่ง $25-x^2-y^2 \geqslant 0$ และ $x \neq 0$

หรือ $-(x^2+y^2) \geqslant -25$ และ $x \neq 0$

หรือ $x^2+y^2 \leqslant 25$ และ $x \neq 0$

พิสัยของฟังก์ชัน f คือ $(-\infty, +\infty)$

4. โดเมนของ f คือ เซตของจุดทั้งหมด (x, y) ใน R^2 ซึ่ง

$25-x^2-y^2 \geqslant 0$

หรือ $x^2+y^2 \leqslant 25$

พิสัยของ f คือ $(-\infty, +\infty)$

5. โดเมนของ f คือเซตของจุดทั้งหมด (x, y) ใน R^2 ซึ่ง

$25-x^2-y^2 > 0$

หรือ $x^2+y^2 < 25$ และจุดทั้งหมดบนแกน y ยกเว้น
จุด (0, 5) และ (0, -5)
พิสัยของ f คือ $(-\infty, +\infty)$

6. โดเมนของ f คือ เซตของจุดทั้งหมด (x, y) ใน R^2 ซึ่ง $x \neq y$
พิสัยของ f คือ $(-\infty, +\infty)$

7. โดเมนของ f คือ เซตของจุดทั้งหมด (x, y) ใน R^2 ซึ่ง $xy - 1 > 0$ หรือ $xy > 1$
พิสัยของ f คือ $(-\infty, +\infty)$

8. โดเมนของ f คือ เซตของจุดทั้งหมด (x, y) ใน R^2 ซึ่ง $x^2-4y > 0$
พิสัยของ f คือ $(-\infty, +\infty)$

9. โดเมนของ f คือ เซตของจุดทั้งหมด (x, y, z) ใน R^3 ซึ่ง
$z-2 \geqslant 0$ หรือ $z \geqslant 2$
พิสัยของ f คือ $(-\infty, +\infty)$

10. โดเมนของ f คือ เซตของจุดทั้งหมด (x, y, z) ใน R^3 ซึ่ง
$x^2+y^2+z^2 - 1 > 0$ หรือ $x^2+y^2+z^2 > 1$
พิสัยของ f คือ $(-\infty, +\infty)$

11. โดเมนของ f คือ เซตของจุดทั้งหมด (x, y, z) ใน R^3 ซึ่ง $z \neq 0$
พิสัยของ f คือ $[o, +\infty)$

12. โดเมนของ f คือ เซตของจุดทั้งหมด (x, y, z) ใน R^3 ซึ่ง
$|y| \neq |z|$
พิสัยของ f คือ $(-\infty, +\infty)$

13. โดเมนของ f คือ เซตของจุดทั้งหมด (x, y) ใน R^2
พิสัยของ f คือ $[0, +\infty)$

14. โดเมนของ f คือ เซตของจุดทั้งหมด (x, y) ใน R^2

พิสัยของ f คือ $[0, +\infty)$

15. โดเมนของ f คือ เซตของจุดทั้งหมด (x, y)ใน R^2

พิสัยของ f คือ $(-\infty, 16]$

16. โดเมนของ f คือ เซตของจุดทั้งหมด (x, y) ใน R^2 ซึ่ง

$$100 - x^2 - y^2 \geqslant 0$$

หรือ $-(x^2+y^2) \geqslant -100$

หรือ $x^2+y^2 \leqslant 100$

พิสัยของ f คือ $[0, 10]$

17.
$$\begin{aligned} h(x, y) &= (f \cdot g)(x, y) \\ &= f(g(x, y)) \\ &= f(e^x - e^y) \\ &= \sqrt{e^x - e^y} \end{aligned}$$
ตอบ

โดเมนของ h คือ เซตของจุดทั้งหมด (x, y) ใน R^2 ซึ่ง

$e^x - e^y \geqslant 0$ หรือ $e^x \geqslant e^y$ หรือ $x \geqslant y$

18.
$$\begin{aligned} h(x, y) &= (f \cdot g)(x, y) \\ &= f(g(x, y)) \\ &= f(y \ln x) \\ &= e^{y \ln x} = x^y \end{aligned}$$
ตอบ

โดเมนของ h คือ เซตของ จุดทั้งหมด (x, y) ใน R^2

19. (ก)
$$\begin{aligned} (g \cdot f)(5, 1) &= g(f(5, 1)) \\ &= g(5-1) = g(4) \\ &= \sqrt{4} = 2 \end{aligned}$$
ตอบ

(ข) $f(h(3), g(9)) = f(3^2, \sqrt{9})$

$= f(9, 3)$

$= 9-3 = 6$ ตอบ

(ค) $f(g(x), h(y)) = f(\sqrt{x}, y^2)$

$= \sqrt{x} - y^2$ ตอบ

(ง) $g((h \cdot f)(x, y)) = g(h(f(x, y)))$

$= g(h(x-y))$

$= g((x-y)^2)$

$= \sqrt{(x-y)^2}$

$= |x-y|$ ตอบ

(จ) $(g \cdot h)(f(x, y)) = (g \cdot h)(x-y)$

$= g(h(x-y))$

$= g((x-y)^2)$

$= \sqrt{(x-y)^2}$

$= |x-y|$ ตอบ

20. (ก) $(h \cdot f)(2, 1) = h(f(2, 1))$

$= h(2/1^2) = h(2) = \sqrt{2}$ ตอบ

(ข) $f(g(2), h(4), = f(2^2, \sqrt{4})$

$= f(4, 2) = 4/4 = 1$ ตอบ

(ค) $f(g(\sqrt{x}), h(x^2)) = f(x, \sqrt{x^2})$

$= f(x, x) = x/x^2$

$= 1/x$ ตอบ

(ง) $h((g \cdot f)(x, y)) = h(g(f(x, y)))$

$= h(g(x/y^2))$

$= h(x^2/y^4)$ ตอบ

$= \sqrt{x^2/y^4} = x/y^2$ ตอบ

(ข) $(h \cdot g)(f(x,y)) = h(g(x/y^2))$

$= h(x^2/y^4)$

$= \sqrt{x^2/y^4}$

$= x/y^2$ ตอบ

แบบฝึกหัด (หน้า 218)

1. $\lim_{(x,y)\to(3,2)} (3x-4y) = 9-8 = 1$ ตอบ

2. $\lim_{(x,y)\to(1,4)} (5x-3y) = 5-12$

$= -7$ ตอบ

3. $\lim_{(x,y)\to(1,1)} (x^2+y^2) = 1^2+1^2 = 2$ ตอบ

4. $\lim_{(x,y)\to(5,3)} (2x^2-y^2) = 50-9 = 41$ ตอบ

5. $\lim_{(x,y)\to(-2,-4)} (x^2+2x-y) = (-2)^2+2(-2)-(-4)$

$= 4-4+4 = 4$ ตอบ

6. $\lim_{(x,y)\to(3,-1)} (x^2+y^2-4x+2y) = 3^2+(-1)^2-4(3)+2(-1)$

$= 9+1-12-2 = -4$ ตอบ

7. $\lim_{(x,y)\to(-2,2)} y\sqrt[3]{x^3+4y} = 2\sqrt[3]{(-2)^3+4\times 2} = 0$ ตอบ

8. $\lim_{(x,y)\to(5,2)} \sqrt{(x^2+12y)/(x-y^2)} = \sqrt{(5^2+12(2))/(5-2^2)}$

$= \sqrt{49/1} = 7$ ตอบ

9. $\lim_{(x,y)\to(1,1)} \frac{x^2-y^2}{x-y} = \lim_{(x,y)\to(1,1)} (x+y) = 1+1 = 2$

ตอบ

10. $\lim_{(x,y)\to(2,-1)} \frac{x^3+8y^3}{x+2y} = \lim_{(x,y)\to(2,-1)} (x^2-2xy+4y^2)$

$= 2^2-2(2)(-1)+4(-1)^2 = 12$ ตอบ

11. $\lim\limits_{(x,y)\to(1,1)} \dfrac{e^x+e^y}{e^{-x}+e^{-y}} = \dfrac{e+e}{e^{-1}+e^{-1}} = \dfrac{2e}{2e^{-1}} = e^2$ ตอบ

12. $\lim\limits_{(x,y)\to(3,1)} \dfrac{x-3y}{9y^2-x^2} = \lim\limits_{(x,y)\to(3,1)} \dfrac{-1}{3y+x} = \dfrac{-1}{3+3} = -\dfrac{1}{6}$ ตอบ

13. $\lim\limits_{(x,y)\to(1,3)} \dfrac{3x-y}{27x^3-y^3} = \lim\limits_{(x,y)\to(1,3)} \dfrac{1}{9x^2+3xy+y^2}$

$= \dfrac{1}{9(1)+3(1)(3)+3^2} = \dfrac{1}{27}$ ตอบ

14. $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{y^2+4y}{2xy-3y} = \lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{y+4}{2x-3} = -\dfrac{4}{3}$ ตอบ

15. $\lim\limits_{(x,y)\to(3,2)} \dfrac{2x^2+xy-6y^2}{4x^2-8xy+3y^2} = \lim\limits_{(x,y)\to(3,2)} \dfrac{(2x-3y)(x+2y)}{(2x-3y)(2x-y)}$

$= \lim\limits_{(x,y)\to(3,2)} \dfrac{x+2y}{2x-y} = \dfrac{3+2(2)}{2(3)-2} = \dfrac{7}{4}$ ตอบ

16. $\lim\limits_{(x,y)\to(1,-1)} \dfrac{x^3-2x^2y-2xy^2+y^3}{x^2-y^2}$

$= \lim\limits_{(x,y)\to(1,-1)} \dfrac{(x+y)(x^2-xy+y^2)-2xy(x+y)}{(x+y)(x-y)}$

$= \lim\limits_{(x,y)\to(1,-1)} \dfrac{x^2-3xy+y^2}{x-y} = \dfrac{1^2-3(1)(-1)+(-1)^2}{1-(-1)}$

$= \dfrac{5}{2}$ ตอบ

17. $\lim\limits_{(x,y)\to(0,1)} \dfrac{\sqrt{x+y}-\sqrt{y}}{x} \times \dfrac{\sqrt{x+y}+\sqrt{y}}{\sqrt{x+y}+\sqrt{y}}$

$= \lim\limits_{(x,y)\to(0,1)} \dfrac{x+y-y}{x(\sqrt{x+y}+\sqrt{y})}$

$= \lim\limits_{(x,y)\to(0,1)} \dfrac{1}{\sqrt{x+y}+\sqrt{y}} = \dfrac{1}{2}$ ตอบ

18. $\lim\limits_{(x,y)\to(1,1)} \dfrac{\sqrt[3]{x}-\sqrt[3]{y}}{x-y} = \lim\limits_{(x,y)\to(1,1)} \dfrac{x^{1/3}-y^{1/3}}{(x^{1/3}-y^{1/3})(x^{2/3}+x^{1/3}y^{1/3}+y^{2/3})}$

$= \lim\limits_{(x,y)\to(1,1)} \dfrac{1}{x^{2/3}+x^{1/3}y^{1/3}+y^{2/3}} = \dfrac{1}{1+1+1} = \dfrac{1}{3}$ ตอบ

19. พิสูจน์ ให้ S_1 เป็นเซตของจุดทั้งหมดบนแกน x แล้ว

$$\lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\(P \text{ ใน } S_1)}} f(x,y) = \lim_{x\to 0} f(x,0) = \lim_{x\to 0} \frac{x^2}{x^2} = 1$$

ให้ S_2 เป็นเซตของจุดทั้งหมดบนเส้นตรง $y = x$ แล้ว

$$\lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\(P \text{ ใน } S_2)}} f(x,y) = \lim_{x\to o} f(x,x) = \lim_{x\to o} \frac{o}{2x^2} = 0$$

$$\because \lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\(P \text{ ใน } S_1)}} f(x,y) \neq \lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\(P \text{ ใน } S_2)}} f(x,y)$$

$$\therefore \lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) \quad \text{หาค่าไม่ได้}$$

ช.ต.พ.

20. พิสูจน์

ให้ S_1 เป็นเซตของจุดทั้งหมดบนเส้นตรง $x+y = 0$ แล้ว

$$\lim_{\substack{(x,y)\to(o,o)\\(P \text{ ใน } S_1)}} f(x,y) = \lim_{x\to o} f(x,-x) = \lim_{x\to o} \frac{o}{2x^2} = 0$$

ให้ S_2 เป็นเซตของจุดทั้งหมดบนเส้นตรง $y = 1$ แล้ว

$$\lim_{\substack{(x,y)\to(o,o)\\(P \text{ ใน } S_2)}} f(x,y) = \lim_{x\to o} f(x,1) = \lim_{x\to o} \frac{x+1}{x^2+1} = 1$$

$$\because \lim_{(x,y)\to(o,o)} f(x,y) \neq \lim_{(x,y)\to(o,o)} f(x,y)$$

(P ใน S_1) (P ใน S_2)

$\therefore \lim_{(x, y)\to(0, 0)} f(x, y)$ หาค่าไม่ได้ ช.ต.พ.

21. **พิสูจน์** ให้ S_1 เป็นเซตของจุดทั้งหมดบนแกน x แล้ว

$$\lim_{(x, y)\to(0, 0)} f(x, y) = \lim_{x\to 0} f(x, 0) = \lim_{x\to 0} \frac{x^2}{x^2} = 1$$

(P ใน S_1)

ให้ S_2 เป็นเซตของจุดทั้งหมดบนเส้นตรง $y = x$ แล้ว

$$\lim_{(x, y)\to(0, 0)} f(x, y) = \lim_{x\to 0} f(x, x) = \lim_{x\to 0} \frac{x^2}{x^2+x^2} = \frac{1}{2}$$

(P ใน S_2)

$$\therefore \lim_{(x, y)\to(0, 0)} f(x, y) \neq \lim_{(x, y)\to(0, 0)} f(x, y)$$

(P ใน S_1) (P ใน S_2)

$\therefore \lim_{(x, y)\to(0, 0)} f(x, y)$ หาค่าไม่ได้ ช.ต.พ.

22. **พิสูจน์** ให้ S_1 เป็นเซตของจุดทั้งหมดบนแกน x แล้ว

$$\lim_{(x, y)\to(0, 0)} f(x, y) = \lim_{x - 0} f(x, 0) = \lim_{x - 0} \frac{0}{(x^2+0)^3} \quad 0$$

(P ใน S_1)

ให้ S_2 เป็นเซตของจุดทั้งหมดบนเส้นโค้ง $y^4 = x^2$ แล้ว

$$\lim_{(x, y)\to(0, 0)} f(x, y) = \lim_{x\to 0} f(x, x^{1/2}) = \lim_{x\to 0} \frac{x^6}{(x^2+x^2)^3}$$

0.4 **อนุพันธ์ย่อย** (Partial Derivatives)

นิยาม ถ้า $z = f(x,y)$ เป็นฟังก์ชันของตัวแปร x และ y **อนุพันธ์ย่อยของ** $f(x,y)$ **เทียบกับ** x **ที่จุด** (x,y) **คือ**

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x,y) - f(x,y)}{\Delta x} \text{ เมื่อลิมิตหาค่าได้}$$

ซึ่งเขียนแทนด้วย $\frac{\partial z}{\partial x}$, $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)$, z_x หรือ $D_1 f$

และอนุพันธ์ย่อยของ $f(x,y)$ **เทียบกับ** y **คือ**

$$\lim_{\Delta y \to 0} \frac{f(x,y+\Delta y) - f(x,y)}{\Delta y} \text{ เมื่อลิมิตหาค่าได้}$$

เขียนแทนด้วย $\frac{\partial z}{\partial y}$, $\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)$, z_y หรือ $D_2 f$

ในการหา z_x นอกจากจะใช้นิยามหาแล้ว อาจจะทำได้ง่ายโดยอาศัยสูตรการหาอนุพันธ์ของฟังก์ชันที่มีตัวแปรตัวเดียว โดยคิดว่า y เป็นค่าคงที่

เช่น กำหนดให้ $z = 2x^2 - 5xy + 3y^2$

$$z_x = \frac{\partial z}{\partial x} = 4x - 5y + 0 = 4x - 5y$$

และ ในการหา z_y ก็เช่นเดียวกันโดยใช้สูตรการหาอนุพันธ์ของฟังก์ชันที่มีตัวแปรตัวเดียว โดยคิดว่า x เป็นค่าคงที่

(P ใน S_2)

$$= \lim_{x \to 0} \frac{x^6}{2x^6} = \frac{1}{2}$$

$$\because \lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) \neq \lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$$

(P ใน S_1) **(P ใน S_2)**

$$\therefore \lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) \text{ หาค่าไม่ได้}$$

ช.ต.พ.