บทที่ 7
ฟังก์ชันลอการิธึมธรรมชาติและฟังก์ชันเอกซ์โปเนนเชียล

7.1 ฟังก์ชันลอการิธึมธรรมชาติ

ในการศึกษาเรื่องราวของฟังก์ชันลอการิธึมนั้นต้องมีความรู้พื้นฐานเกี่ยวกับเรื่องเลขดรรชนีก่อน

คุณสมบัติของเลขดรรชนี

1) ถ้าให้ a เป็นเลขจำนวนจริง, x และ y เป็นเลขจำนวนเต็มบวกแล้ว

$$a^x \cdot a^y = a^{x+y}$$

2) $a^0 = 1$

3) ถ้า n เป็นเลขจำนวนเต็มบวกแล้ว $-n$ จะเป็นเลขจำนวนเต็มลบ และ

$a^{-n} = \frac{1}{a^n}$

4) ถ้าให้ $\frac{m}{n}$ เป็นเลขจำนวนตักยะ และ $a \geqslant 0$ แล้ว $a^{m/n} = (\sqrt[n]{a})^m$

5) ถ้า a เป็นเลขจำนวนจริง x และ y เป็นเลขจำนวนเต็มบวก

แล้ว $\frac{a^x}{a^y} = a^{x-y}$

นิยามของฟังก์ชันลอการิธึมที่เกี่ยวกับเลขดรรชนี

ถ้า a เป็นเลขจำนวนจริงบวกใด ๆ และ x เป็นเลขจำนวนจริงใด ๆ แล้ว a^x จะต้องมีค่าสมมุติให้ค่านั้นคือ N

ดังนั้น ถ้า $a^x = N$ แล้ว

$$x = \log_a N$$

a เรียกว่าฐานของ log ซึ่งโดยทั่ว ๆ ไปนิยมใช้ฐาน $a = 10$

กฎต่าง ๆ ของฟังก์ชันลอการิธึม

กฎข้อที่ 1 $\log_a MN = \log_a M + \log_a N$

กฎข้อที่ 2 $\log_a \frac{M}{N} = \log_a M - \log_a N$

กฎข้อที่ 3 $\log_a 1 = 0$

กฎข้อที่ 4 $\log_a M^n = n \log_a M$

กฎข้อที่ 5 $\log_a a = 1$

นิยามของฟังก์ชันลอการิธึมที่เกี่ยวกับเรื่องแคลคูลัส

นิยาม 7.1.1 ฟังก์ชันลอการิธึมธรรมชาติ คือฟังก์ชัน $\ln x$ ซึ่งกำหนดโดย

$$\ln x = \int_1^x \frac{1}{t}\, dt, \quad x > 0$$

โดเมนของฟังก์ชัน $\ln x$ คือ เซ็ตของเลขจำนวนจริงบวก

อนุพันธ์ของฟังก์ชันลอการิธึมธรรมชาติ

1) $\frac{d}{dx}(\ln x) = \frac{1}{x}$ สำหรับทุก $x > 0$

2) ถ้า u เป็นฟังก์ชันที่สามารถหาค่าอนุพันธ์เมื่อเทียบกับ x ได้ และ $u(x) > 0$ แล้ว $\frac{d}{dx}(\ln u) = \frac{1}{u}\frac{du}{dx}$

ทฤษฎีบท 7.1.1 ถ้า a และ b เป็นจำนวนจริงใด ๆ ซึ่ง $a > 0, b > 0$ แล้ว

$$\int_1^{ab} \frac{1}{t}\, dt = \int_1^{b} \frac{1}{t}\, dt$$

ทฤษฎีบท 7.1.2 ถ้า a และ b เป็นจำนวนจริงใด ๆ ซึ่ง $a > 0, b > 0$ แล้ว

$$\ln(ab) = \ln a + \ln b$$

ทฤษฎีบท 7.1.3 ถ้า a และ b เป็นจำนวนจริงใด ๆ ซึ่ง $a > 0, b > 0$ แล้ว

$$\ln \frac{a}{b} = \ln a - \ln b$$

ทฤษฎีบท 7.1.4 ถ้า a เป็นจำนวนจริงใด ๆ ซึ่ง $a > 0$ และ r เป็นจำนวนตักยะใด ๆ แล้ว

$$\ln a^r = r \ln a$$

ข้อสังเกต

1) $\lim_{x \to +\infty} \ln x = +\infty$

2) $\lim_{x \to 0^+} \ln x = -\infty$

สรุป คุณสมบัติของลอการิธึมธรรมชาติ มีดังนี้

1) โดเมนของฟังก์ชันนี้ คือ เซ็ตของเลขจำนวนจริงบวก
2) พิสัยของฟังก์ชันนี้ คือ เซ็ตของเลขจำนวนจริงทั้งหมด
3) ฟังก์ชันจะมีค่าเพิ่มขึ้นเมื่อ x มีค่าเพิ่มขึ้น
4) ฟังก์ชันนี้ต่อเนื่องที่ทุก ๆ จุดของ x ซึ่งอยู่ในโดเมน
5) กราฟของฟังก์ชันจะเว้าเข้าจากบนลงมาล่าง

นิยาม 7.1.2 เลขจำนวน e นี้เป็นเลขตัวเดียวเท่านั้นที่ทำให้

$$\ln(e) = 1$$

โดย e เป็นจำนวนอตักยะมีค่าประมาณ 2.7182818...

$$(e \approx 2.7182818)$$

เฉลยแบบฝึกหัด 7.1

ข้อ 1. ถึงข้อ 14. จงหาอนุพันธ์ของฟังก์ชันที่กำหนดให้

1. $f(x) = \ln(7x-4)$

วิธีทำ กำหนดให้ $u(x) = 7x - 4$

$$\therefore \quad \frac{du}{dx} = 7$$

จากสูตร $\frac{d \ln u}{dx} = \frac{1}{u}\frac{du}{dx}$

$$\therefore \frac{d}{dx} f(x) = \frac{d}{dx}\ln(7x-4) = \frac{1}{7x-4}\frac{d}{dx}(7x-4)$$

$$= \frac{7}{7x-4}$$

2. $g(x) = \ln(8-2x)$

วิธีทำ $\frac{d}{dx} g(x) = \frac{d}{dx} \ln(8-2x)$

$$= \frac{1}{8-2x} \frac{d}{dx}(8-2x)$$

$$= \frac{-2}{8-2x}$$

3. $h(x) = \ln\sqrt{7x-4}$

วิธีทำ $\frac{d}{dx} h(x) = \frac{d}{dx} \ln\sqrt{7x-4}$

$$= \frac{1}{\sqrt{7x-4}} \frac{d}{dx}(\sqrt{7x-4})$$

$$= \frac{1}{\sqrt{7x-4}}\left(\frac{7}{2\sqrt{7x-4}}\right)$$

$$= \frac{7}{2(7x-4)}$$

4. $f(x) = \ln (8-2x)^5$

วิธีทำ จาก $\ln (8-2x)^5 = 5 \ln (8-2x)$

$$\therefore \quad \frac{d}{dx} f(x) = \frac{d}{dx} 5 \ln (8-2x)$$

$$= 5 \frac{d}{dx} \ln (8-2x)$$

$$= \frac{5}{8-2x} \frac{d}{dx} (8-2x)$$

$$= \frac{-10}{8-2x}$$

$$= \frac{-5}{4-x}$$

5. $f(x) = \ln (1+4x^2)$

วิธีทำ $\frac{d}{dx} f(x) = \frac{d}{dx} \ln (1+4x^2)$

$$= \frac{1}{1+4x^2} \frac{d}{dx} (1+4x^2)$$

$$= \frac{8x}{1+4x^2}$$

6. $f(x) = \ln \sqrt{1+4x^2}$

วิธีทำ $\because \ln \sqrt{1+4x^2} = \frac{1}{2} \ln (1+4x^2)$

$$\therefore \quad \frac{d}{dx} f(x) = \frac{d}{dx} \frac{1}{2} \ln (1+4x^2)$$

$$= \frac{1}{2} \frac{d}{dx} \ln (1+4x^2)$$

$$= \frac{1}{2} \left(\frac{8x}{1+4x^2} \right)$$

$$= \frac{4x}{1+4x^2}$$

7. $g(x) = \ln \sqrt{4-x^2}$

วิธีทำ $\because \ln \sqrt{4-x^2} = \frac{1}{2} \ln (4-x^2)$

$$\therefore \quad \frac{d}{dx} g(x) = \frac{1}{2} \ln (4-x^2)$$

$$= \frac{1}{2(4-x^2)} d(4-x^2)$$

$$= \frac{-2x}{2(4-x^2)}$$

$$= \frac{-x}{4-x^2}$$

$$= \frac{x}{x^2-4}$$

8. $g(x) = \ln(\ln x)$

วิธีทำ $\frac{d}{dx} g(x) = \frac{d}{dx} \ln(\ln x)$

$= \frac{1}{\ln x} \frac{d}{dx} (\ln x)$

$= \frac{1}{\ln x} \left(\frac{1}{x} \right)$

$= \frac{1}{x \ln x}$

9. $h(x) = \ln(n^2 \ln x)$

วิธีทำ $\frac{d}{dx} h(x) = \frac{d}{dx} \ln(n^2 \ln x)$

$= \frac{1}{n^2 \ln x} \frac{d}{dx} (n^2 \ln x)$

$= \frac{1}{n^2 \ln x} \left(\frac{n^2}{x} \right)$

$= \frac{1}{x \ln x}$

10. $F(x) = \ln\sqrt{\frac{x^2-1}{x^2+1}}$

วิธีทำ $\because \ln\sqrt{\frac{x^2-1}{x^2+1}} = \frac{1}{2}\ln\frac{x^2-1}{x^2+1}$

$$= \frac{1}{2}(\ln(x^2-1) - \ln(x^2+1))$$

$$\therefore \quad \frac{d}{dx}F(x) = \frac{1}{2}\left(\frac{d}{dx}\ln(x^2-1) - \frac{d}{dx}\ln(x^2+1)\right)$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{x^2-1}(2x) - \frac{1}{x^2+1}(2x)\right)$$

$$= \frac{x}{x^2-1} - \frac{x}{x^2+1}$$

$$= \frac{x(x^2+1) - x(x^2-1)}{(x^2-1)(x^2+1)}$$

$$= \frac{x^3+x-x^3+x}{x^4-1}$$

$$= \frac{2x}{x^4-1}$$

11. $f(x) = \ln|x+1|$

วิธีทำ $\frac{d}{dx}f(x) = \frac{d}{dx}\ln|x+1|$

$$= \frac{1}{|x+1|}$$

12. $f(x) = \sqrt[3]{\ln x^3}$

วิธีทำ $\frac{d}{dx} f(x) = \frac{d}{dx} \sqrt[3]{\ln x^3}$

$$= \frac{1}{3} (\ln x^3)^{-\frac{2}{3}} \frac{d}{dx} \ln x^3$$

$$= \frac{1}{3(\ln x^3)^{\frac{2}{3}}} \left(\frac{1}{3} (3x^2) \right)$$

$$= \frac{1}{x(\ln x^3)^{\frac{2}{3}}}$$

13. $F(x) = \sqrt{x+1} - \ln (1 + \sqrt{x+1})$

วิธีทำ $\frac{d}{dx} F(x) = \frac{d}{dx} \sqrt{x+1} - \frac{d}{dx} \ln (1 + \sqrt{x+1})$

$$= \frac{1}{2\sqrt{x+1}} - \frac{1}{(1 + \sqrt{x+1})} \frac{d}{dx}(1 + \sqrt{x+1})$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{x+1}} - \frac{1}{2(1 + \sqrt{x+1}) (\sqrt{x+1})}$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{x+1}} \left(1 - \frac{1}{1 + \sqrt{x+1}} \right)$$

14. $G(x) = x\ln(x+\sqrt{1+x^2}) - \sqrt{1+x^2}$

วิธีทำ $\frac{d}{dx}G(x) = \frac{d}{dx}x\ln(x+\sqrt{1+x^2}) - \frac{d}{dx}(\sqrt{1+x^2})$

$= x\frac{d}{dx}\ln(x+\sqrt{1+x^2}) + \ln(x+\sqrt{1+x^2})\frac{dx}{dx} - \frac{d}{dx}(\sqrt{1+x^2})$

$= \frac{x}{x+\sqrt{1+x^2}}\frac{d}{dx}(x+\sqrt{1+x^2}) + \ln(x+\sqrt{1+x^2} - \frac{1}{2\sqrt{1+x^2}}\frac{d}{dx}(1+x^2)$

$= \frac{x}{x+\sqrt{1+x^2}}\left(1+\frac{2x}{2\sqrt{1+x^2}}\right) + \ln(x+\sqrt{1+x^2}) - \frac{2x}{2\sqrt{1+x^2}}$

$= \frac{x}{x+\sqrt{1+x^2}} + \frac{x^2}{(x+\sqrt{1+x^2})(\sqrt{1+x^2})} - \frac{x}{\sqrt{1+x}} + \ln(x+\sqrt{1+x^2})$

ข้อ 15. ถึงข้อ 18. จงหาค่าของ $\frac{dy}{dx}$

15. $\ln xy + x + y = 2$

วิธีทำ $\frac{d}{dx}(\ln xy + x + y) = \frac{d}{dx}(2)$

$\frac{1}{xy}\frac{d}{dx}(xy) + 1 + \frac{dy}{dx} = 0$

$\frac{1}{xy}\left(x\frac{dy}{dx} + y\right) + \frac{dy}{dx} = -1$

$\frac{1}{y}\frac{dy}{dx} + \frac{1}{x} + \frac{dy}{dx} = -1$

$\frac{dy}{dx}\left(\frac{1}{y}+1\right) = -1 - \frac{1}{x}$

$\frac{dy}{dx}\left(\frac{1+y}{y}\right) = -\frac{x-1}{x}$

$\frac{dy}{dx} = -\frac{y(x+1)}{x(y+1)}$

16. $\ln \frac{y}{x} + xy = 1$

วิธีทำ

$$\frac{d}{dx}\ln\frac{y}{x} + \frac{d}{dx}xy = 0$$

$$\frac{x}{y}\frac{d}{dx}\left(\frac{y}{x}\right) + x\frac{dy}{dx} + y = 0$$

$$\frac{x}{y}\frac{\left(x\frac{dy}{dx} - y\right)}{x^2} + x\frac{dy}{dx} + y = 0$$

$$\frac{1}{y}\frac{dy}{dx} - \frac{1}{x} + x\frac{dy}{dx} + y = 0$$

$$\frac{dy}{dx}\left(\frac{1}{y} + x\right) = \frac{1}{x} - y$$

$$\frac{dy}{dx}\left(\frac{1+xy}{y}\right) = \frac{1-xy}{x}$$

$$\therefore \quad \frac{dy}{dx} = \frac{y(1-xy)}{x(1+xy)}$$

17. $x = \ln(x+y+1)$

วิธีทำ

$$\frac{dx}{dx} = \frac{d}{dx}\ln(x+y+1)$$

$$\frac{1}{x+y+1}\frac{d}{dx}(x+y+1) = 1$$

$$\frac{1}{x+y+1}\left(1+\frac{dy}{dx}\right) = 1$$

$$1 + \frac{dy}{dx} = x+y+1$$

$$\therefore \quad \frac{dy}{dx} = x+y$$

18. $\ln(x+y) - \ln(x-y) = 4$

วิธีทำ
$$\frac{d}{dx}\ln(x+y) - \frac{d}{dx}\ln(x-y) = 0$$
$$\frac{1}{(x+y)}\left(1+\frac{dy}{dx}\right) - \frac{1}{(x-y)}\left(1-\frac{dy}{dx}\right) = 0$$
$$\frac{1}{x+y} - \frac{1}{x-y} + \frac{dy}{dx}\left(\frac{1}{x+y}+\frac{1}{x-y}\right) = 0$$
$$\frac{-2y}{x^2-y^2} + \frac{dy}{dx}\left(\frac{2x}{x^2-y^2}\right) = 0$$
$$\therefore \quad \frac{dy}{dx} = \left(\frac{2y}{x^2-y^2}\right)\left(\frac{x^2-y^2}{2x}\right)$$
$$= \frac{y}{x}$$

19. จงเขียนกราฟของ $y = \ln x$ โดยเขียนจุดซึ่งมีค่า x เป็น $\frac{1}{9}$, $\frac{1}{3}$, 1, 3, 9 โดยการใช้ $\ln 3 \approx 1.09861$ และใน 5 จุดนี้ จงหาความชันของเส้นสัมผัสของแต่ละจุดพร้อมทั้งวาดรูปเส้นสัมผัสในแต่ละจุดด้วย

วิธีทำ พิจารณาค่าจากตาราง

x	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{3}$	1	3	9
$y = \ln x$	-2.19	-1.09	0	1.09	2.19

และความชันของเส้นสัมผัส $y = \ln x$ นั้นหาได้จาก

$$\frac{d}{dx}\ln(x) = \frac{1}{x}$$

ณ ที่จุด $x = \frac{1}{9}$ จะได้ความชันของเส้นสัมผัส ณ จุดนี้ คือ 9

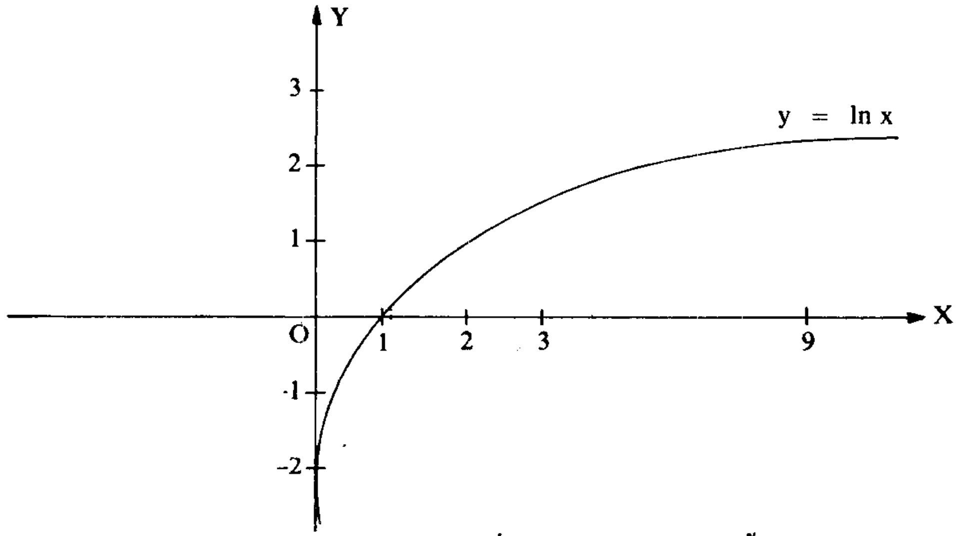
ณ ที่จุด $x = \frac{1}{3}$ จะได้ความชันของเส้นสัมผัส ณ จุดนี้ คือ 3

ณ ที่จุด x = 1 จะได้ความชันของเส้นสัมผัส ณ จุดนี้ คือ 1

ณ ที่จุด x = 3 จะได้ความชันของเส้นสัมผัส ณ จุดนี้ คือ $\frac{1}{3}$

ณ ที่จุด x = 0 จะได้ความชันของเส้นสัมผัส ณ จุดนี้ คือ $\frac{1}{9}$

ซึ่งวาดรูปแล้วจะได้ดังนี้



ข้อ 20. ถึง 27. จงวาดรูปกราฟของเส้นโค้ง ซึ่งมีสมการดังต่อไปนี้

20. $x = \ln y$

วิธีทำ จาก $x = \ln y$ (โดย $y > 0$)

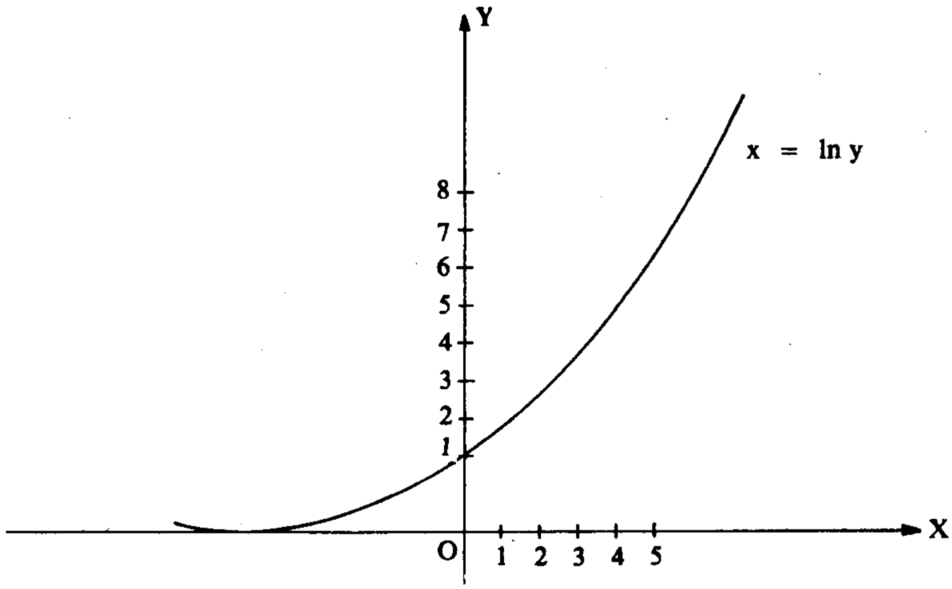
อาจเขียนใหม่ได้ว่า $e^x = y$

$\therefore$ **พิจารณาค่าจากตาราง**

x	0	0.1	−0.1	0.5	−0.5	1.10	−1.10	1.5	−1.5	2	−2
y	1	1.10	0.90	1.64	0.60	3	0.33	4.48	0.22	7.38	0.13

x	2.5	−2.5	3	−3	4	−4	5	−5
y	12.18	0.08	20.08	0.04	54.59	0.01	148.41	0.006

ซึ่งวาดรูปกราฟได้ดังต่อไปนี้

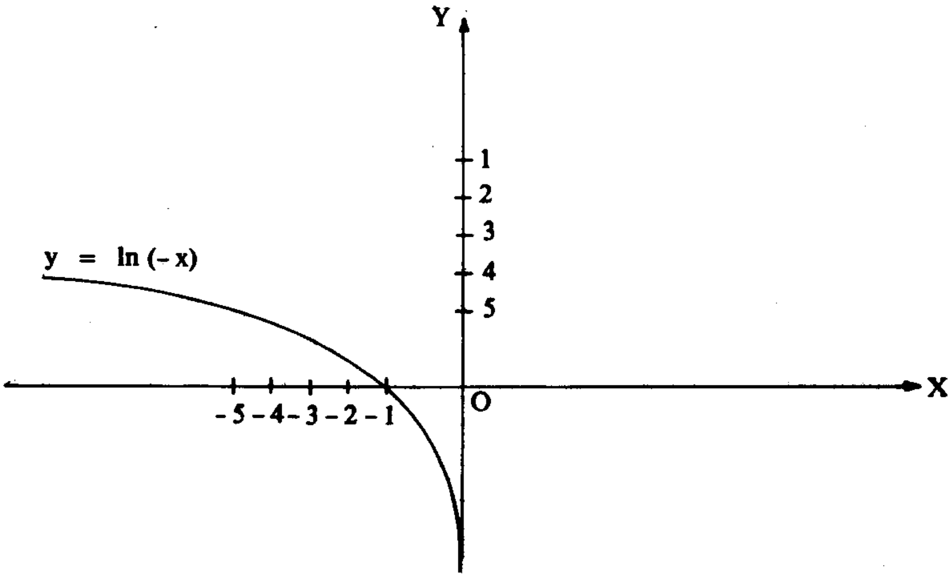


21. $y = \ln(-x)$

วิธีทำ พิจารณาค่าจากตาราง

x	-.1	-.5	-1	-2	-3	-4	-5	-10	-20	-100
y	-2.30	-.69	0	0.69	1.09	1.38	1.6	2.30	2.99	4.60

ซึ่งวาดรูปกราฟของเส้นโค้ง $y = \ln(-x)$ แล้วจะได้รูปดังนี้

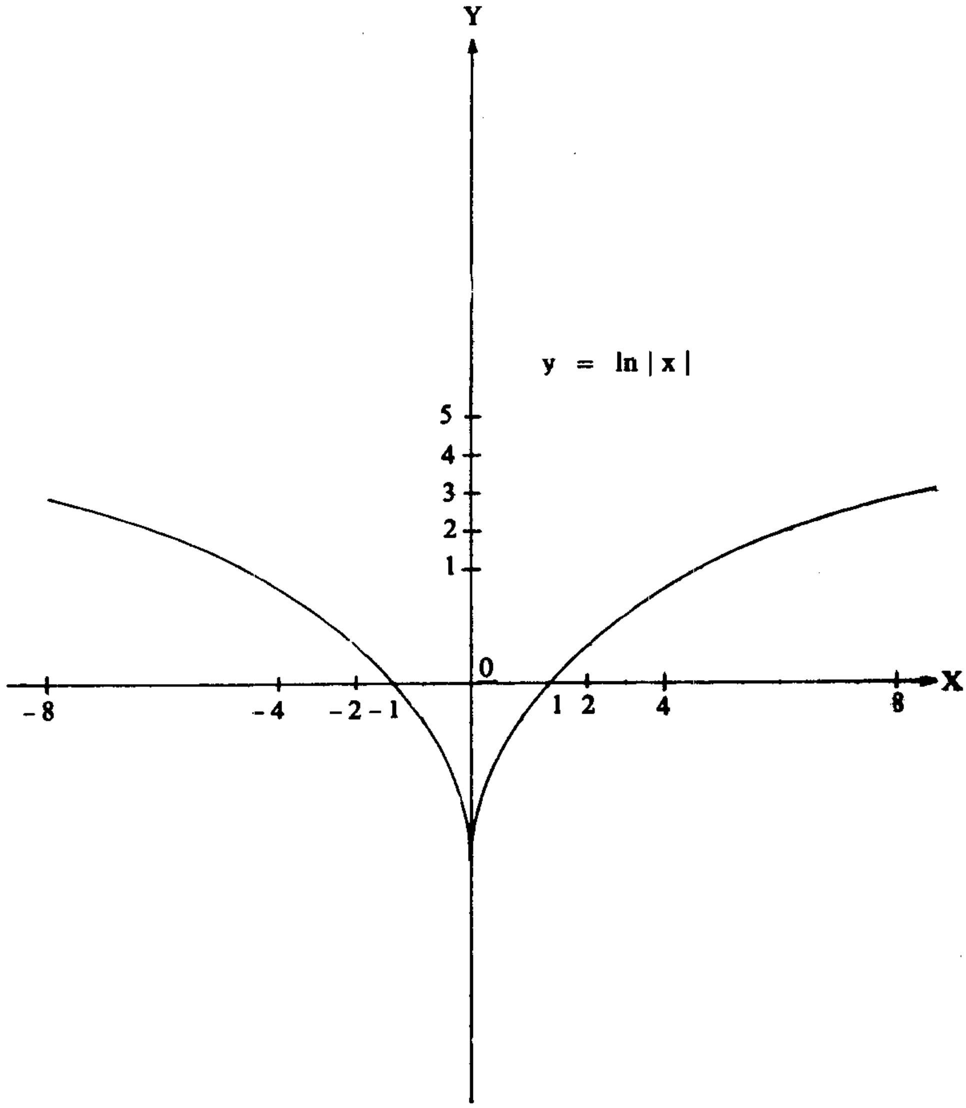


22. $y = \ln|x|$

วิธีทำ พิจารณาค่าจากตาราง

x	0.25	−0.25	0.5	−0.5	1	−1	2	−2	4	−4	8	−8
y	−1.38	−1.38	−.69	−0.69	0	0	.69	.69	1.39	1.39	2.08	2.08

ซึ่งวาดรูปกราฟของเส้นโค้ง $y = \ln|x|$ แล้วจะได้รูปดังนี้

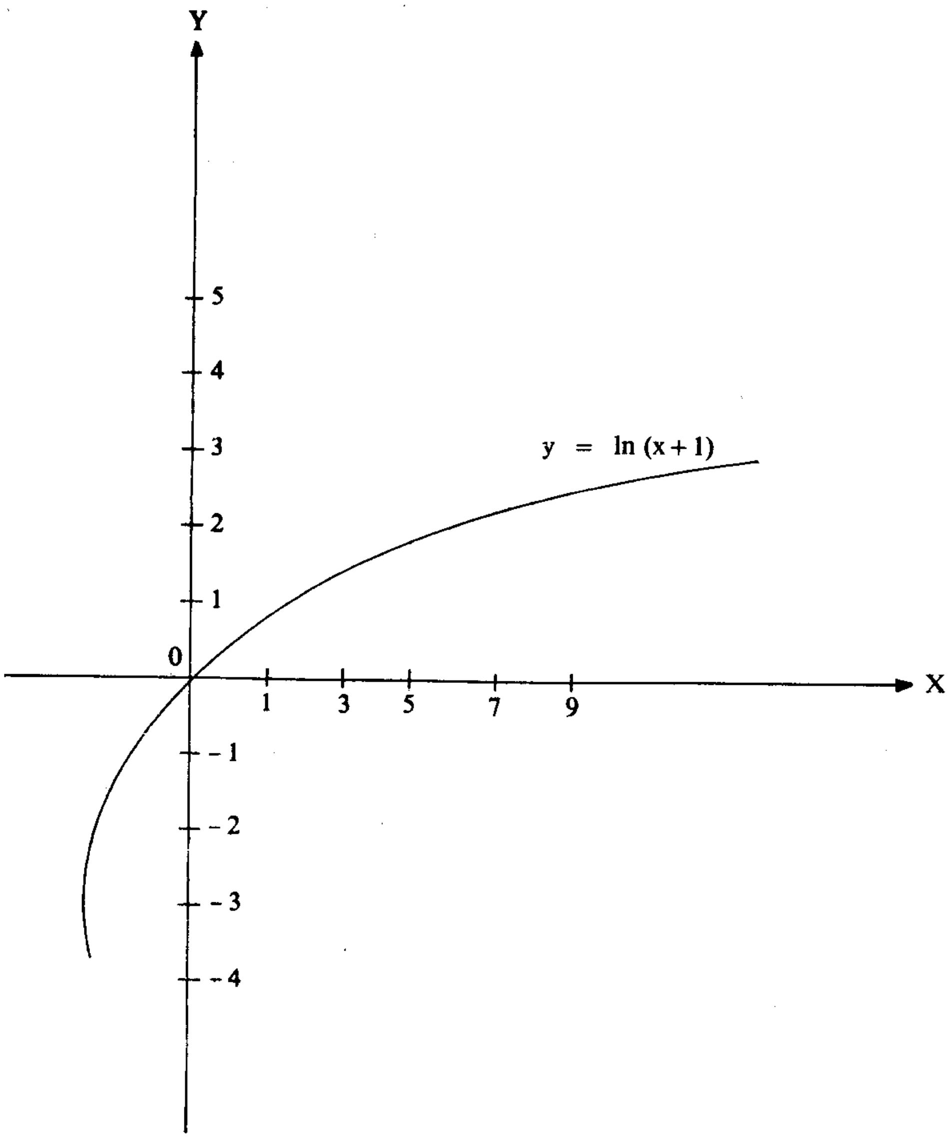


23. $y = \ln(x+1)$

วิธีทำ พิจารณาค่าจากตาราง

x	-.9	-.75	-.5	0	.5	1	3	5	7	9	99
y	-2.3	-1.38	-.69	0	.40	.69	1.38	1.79	2.07	2.30	4.6

ซึ่งวาดรูปกราฟของเส้นโค้ง $y = \ln(x+1)$ แล้วจะได้รูปดังนี้

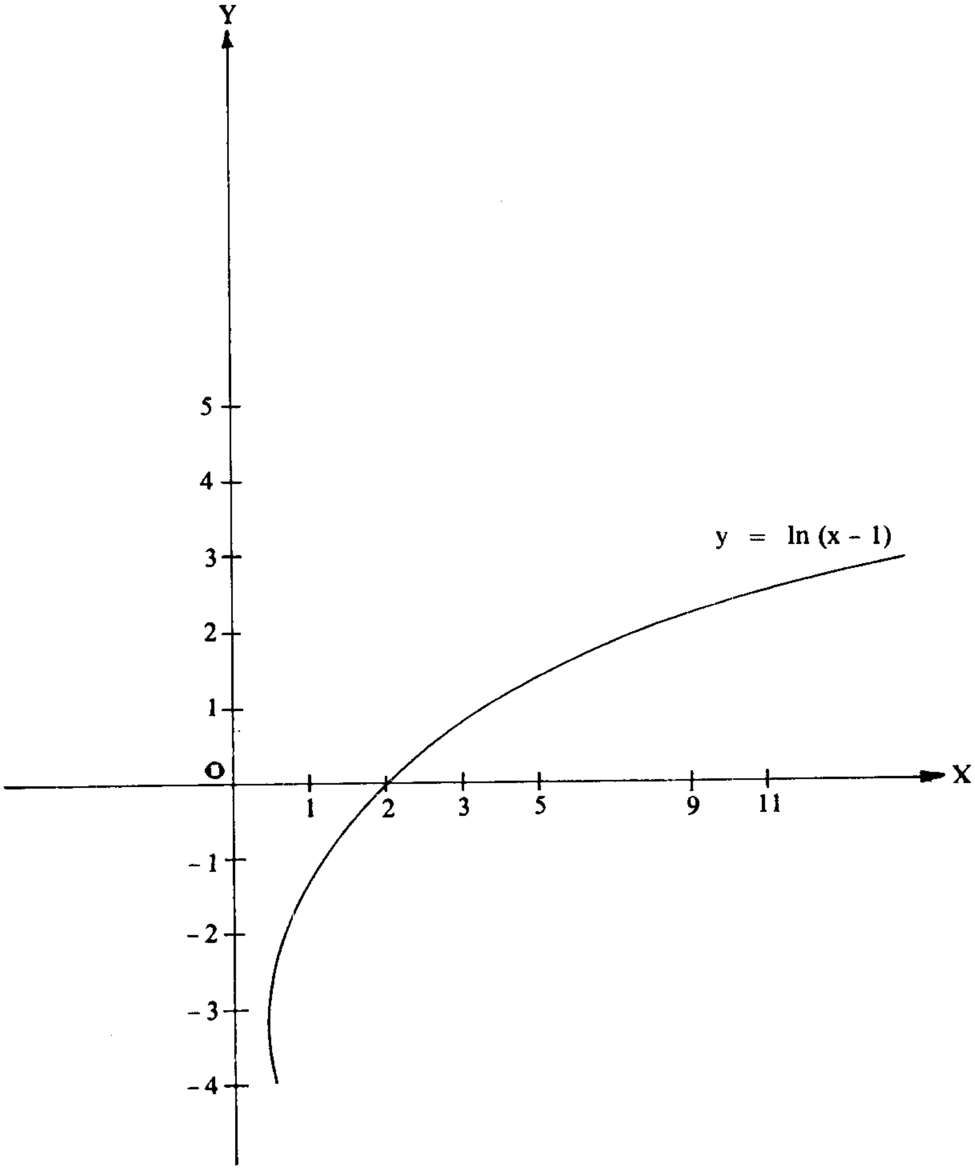


24. $y = \ln(x - 1)$

วิธีทำ พิจารณาค่าจากตาราง

x	1.10	1.5	2	3	5	9	11	101
y	-2.3	-.69	0	.69	1.38	2.07	2.3	4.6

ซึ่งวาดรูปกราฟของเส้นโค้ง $y = \ln(x - 1)$ แล้วจะได้รูปดังนี้

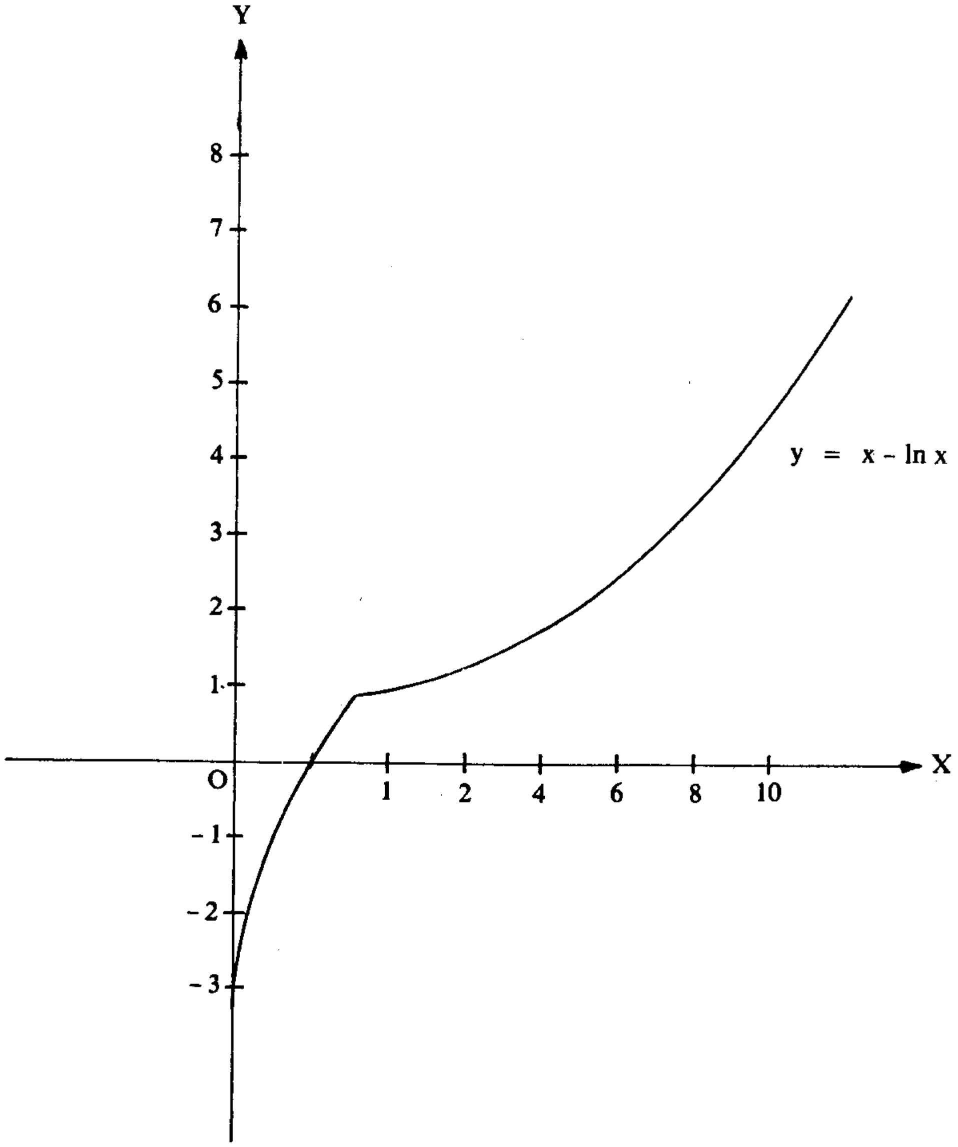


25. $y = x - \ln x$

วิธีทำ พิจารณาค่าจากตาราง

x	.1	.5	1	2	4	6	8	10	100
y	−2.4	−.19	1	1.31	2.62	4.21	5.93	7.70	95.4

ซึ่งวาดรูปกราฟของเส้นโค้ง $y = x - \ln x$ แล้วจะได้รูปดังนี้

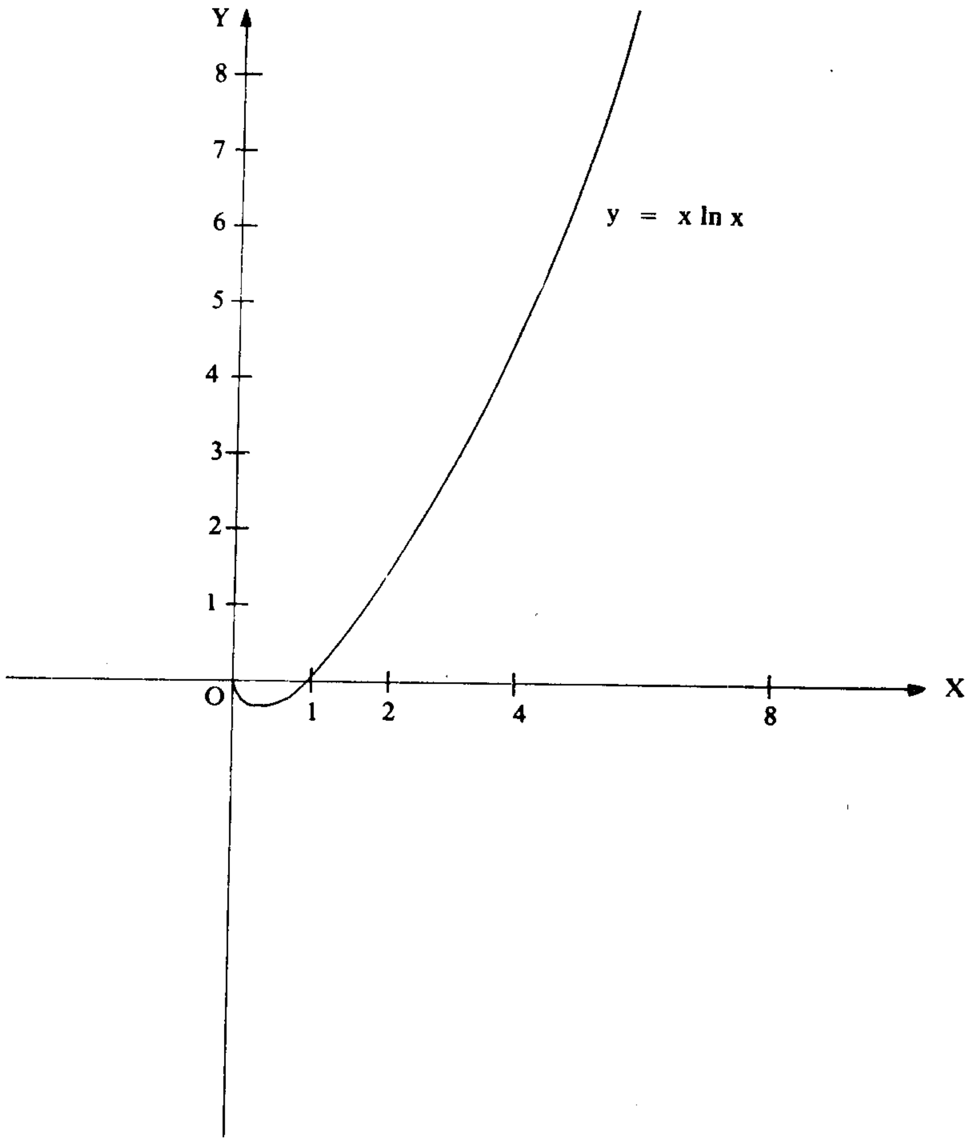


26. $y = x \ln x$

วิธีทำ พิจารณาค่าจากตาราง

x	0.1	0.25	0.5	1	2	4	8	10
y	-0.23	-0.34	-0.34	0	1.38	5.56	16.64	23.02

ซึ่งวาดรูปกราฟของเส้นโค้ง $y = x\ln x$ แล้วจะได้รูปดังนี้

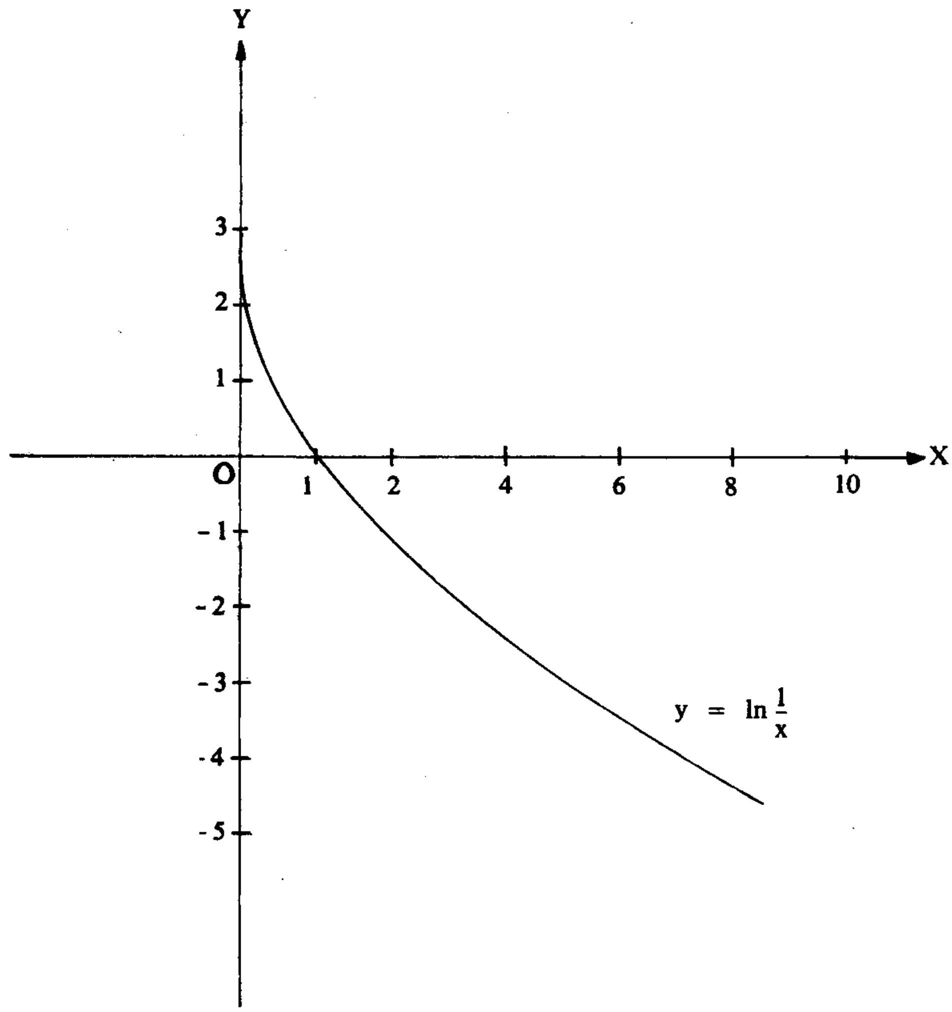


27. $y = \ln\frac{1}{x}$

วิธีทำ พิจารณาค่าจากตาราง

x	.1	.5	1	2	4	6	8	10	100	1000
y	2.3	.69	0	-.69	-1.38	-1.79	-2.07	-2.3	-4.6	-6.9

ซึ่งวาดรูปกราฟของเส้นโค้ง $y = \ln\frac{1}{x}$ แล้วจะได้รูปดังนี้



28. จงหาสมการของเส้นสัมผัสซึ่งสัมผัสกับเส้นโค้ง $y = \ln x$ ณ ที่จุดซึ่งมีค่า $x = 2$

วิธีทำ

จาก $y = \ln x$

$\therefore \frac{dy}{dx} = \frac{1}{x}$ ซึ่งเป็นความชันของเส้นสัมผัส ณ จุด (x, y) ใด ๆ

ณ ที่ $x = 2$ จะได้ว่า $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{2}$ ซึ่งเป็นความชันของเส้นสัมผัสที่สัมผัสเส้นโค้ง $y = \ln x$ ณ ที่จุด $x = 2$

และที่จุด $x = 2$ จะได้ว่า $y = \ln 2$

ดังนั้นสมการของเส้นสัมผัสที่ต้องการซึ่งมีความชัน $= \frac{1}{2}$ และผ่านจุด $(2, \ln 2)$ คือ

$$y - \ln 2 = \frac{1}{2}(x-2)$$

(จากสูตรสมการของเส้นตรงที่ผ่านจุด (x_1, y_1) และมีความชันเท่ากับ m คือ $y - y_1 = m(x - x_1)$)

นั่นคือ สมการของเส้นสัมผัสคือ $y = \frac{1}{2}x - 1 + \ln 2$

29. จงหาสมการของเส้นสัมผัส ซึ่งสัมผัสกับเส้นโค้ง $y = \ln\frac{1}{x}$ และมีความชันเป็น $-\frac{1}{2}$

วิธีทำ

จาก $y = \ln\frac{1}{x} = \ln 1 - \ln x = -\ln x$

$\therefore \frac{dy}{dx} = -\frac{1}{x}$ ซึ่งเป็นความชันของเส้นสัมผัส ณ จุด (x, y) ใด ๆ

$\therefore -\frac{1}{x} = -\frac{1}{2}$

$\therefore x = 2$

จาก $x = 2$ จะได้ว่า $y = -\ln 2$

ดังนั้นเส้นสัมผัสที่สัมผัสเส้นโค้ง $y = \ln\frac{1}{x}$ และมีความชันเป็น $-\frac{1}{2}$ จะผ่านจุด $(2, -\ln 2)$

∴ สมการของเส้นสัมผัส คือ

$$y-(-\ln 2) = -\frac{1}{2}(x-2)$$

$$y = -\frac{1}{2}x+1-\ln 2$$

30. สมการอุปสงค์ของสินค้าชนิดหนึ่งคือ $x = \ln 10 - \ln p$ เมื่อ x หน่วยเป็นปริมาณของอุปสงค์และ p บาท เป็นราคาต่อหน่วย

ก. จงหาเส้นอุปสงค์

ข. จงหาราคาสูงสุดที่ทุกคนจะจ่ายสำหรับสินค้า

วิธีทำ ก. จงหาเส้นอุปสงค์

จาก $x = \ln 10 - \ln p$

$$= \ln \frac{10}{P}$$

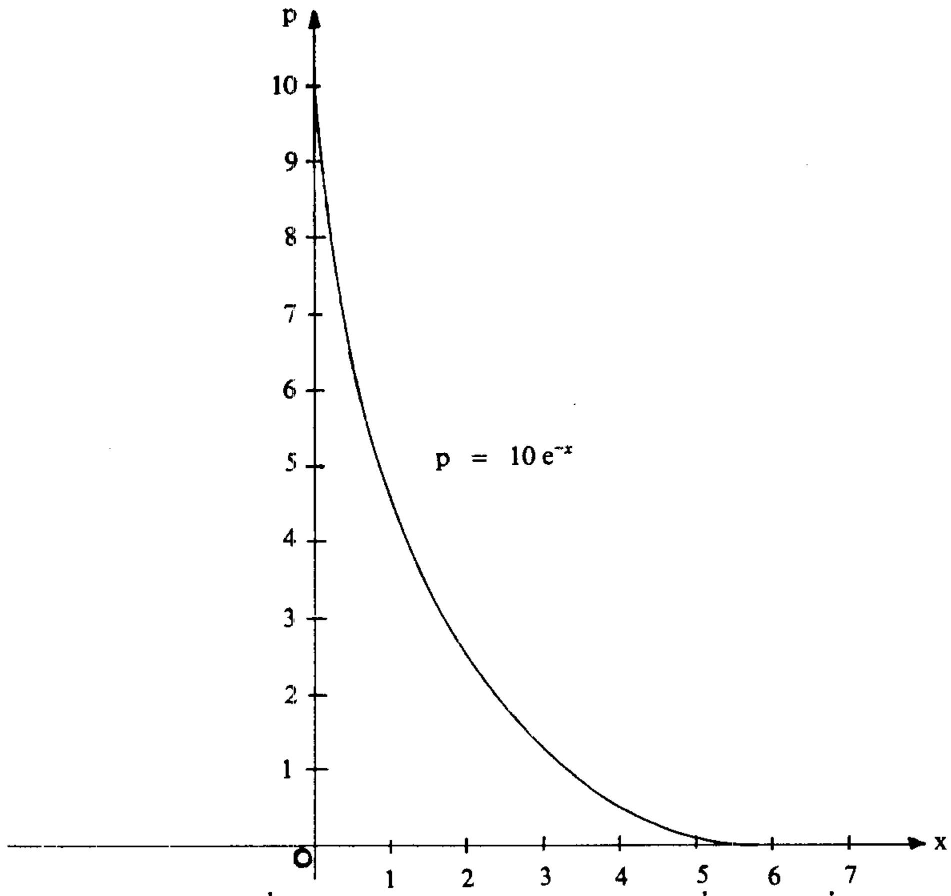
$$\therefore \quad e^x = \frac{10}{P}$$

หรือ $P = 10e^{-x}$ เป็นสมการอุปสงค์

พิจารณา

x	0	1	2	3	4	5	6	7
P	10	3.67	1.35	0.49	0.18	0.06	0.02	0.009

จากตารางสามารถเขียนเส้นอุปสงค์ได้เป็น



ข. ราคาสูงสุดที่ทุกคนจะจ่ายสำหรับสินค้าคือ ณ ที่ $x = 1$ ซึ่งจะได้ $p = \frac{10}{e}$

$= 3.67$ บาท

31. สมการของอุปทานของสินค้าชนิดหนึ่ง คือ

$p = 20 + 10 \ln(1+x)$ =

เมื่อ x หน่วยเป็นปริมาณของอุปทาน p บาท เป็นราคาต่อหน่วย

ก. จงหาเส้นอุปทาน

ข. จงหาราคาต่ำสุดของสินค้าที่มีการเสนอขาย

วิธีทำ ก. จากสมการอุปทานของสินค้า คือ

$$p = 20 + 10 \ln(1+x)$$

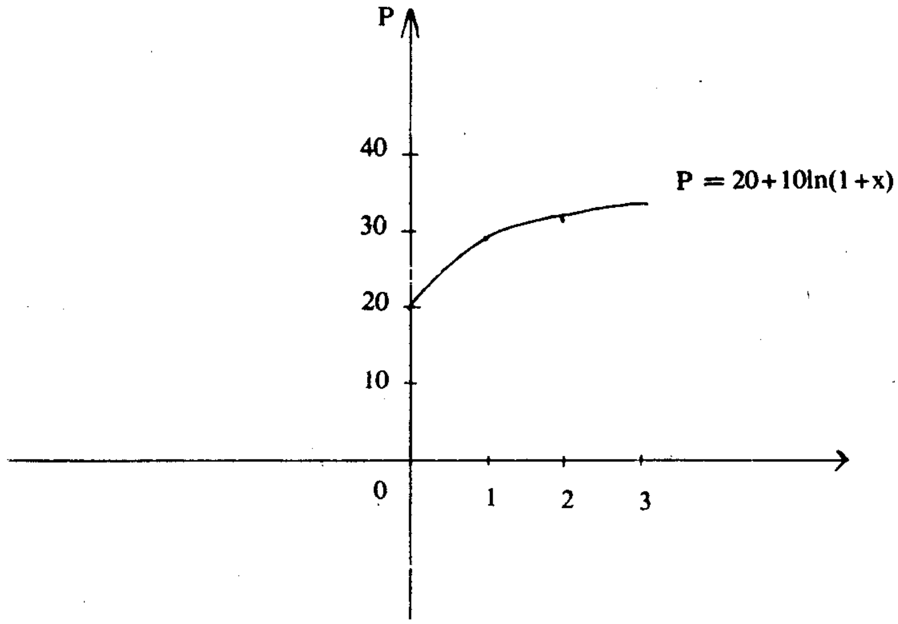
เมื่อ $x = 0$ จะได้ $p = 20$

และ $x = 2$ จะได้ $p = 30.9$

ฯลฯ

ดังนั้นจงสามารถเขียนเส้นอุปทานได้จากตารางต่อไปนี้

x	0	1	2	3
p	20	26.90	30.9	33.8



ข. จากกราฟ จะได้ว่าราคาต่ำสุดของสินค้าที่มีการเสนอขายคือ 20

32. บริษัทแห่งหนึ่งได้กำหนดค่าใช้จ่ายสำหรับการโฆษณาต่อหนึ่งสัปดาห์เท่ากับ x บาท ถ้ารายได้จากการขายต่อหนึ่งสัปดาห์ของบริษัทเท่ากับ 5 บาท จากสมการ $S = 4000 \ln x$

ก. จงหาอัตราการเปลี่ยนแปลงของรายได้จากการขายที่เกิดขึ้น เนื่องจากค่าใช้จ่ายของการโฆษณา เมื่อค่าโฆษณาต่อหนึ่งสัปดาห์เท่ากับ 800 บาท

ข. ถ้าค่าใช้จ่ายสำหรับการโฆษณาต่อสัปดาห์เพิ่มขึ้นเป็น 950 บาท รายได้จากการขายต่อหนึ่งสัปดาห์จะเพิ่มขึ้นเป็นปริมาณเท่าไร

วิธีทำ ก. จากสมการ $S = 4000 \ln x$

$$\therefore \frac{dS}{dx} = \frac{4000}{x}$$

เมื่อ $x = 800$ จะได้ $\frac{dS}{dx} = \frac{4000}{800} = 5$

$x = 800$

ดังนั้นเมื่อค่าโฆษณาต่อหนึ่งสัปดาห์เท่ากับ 800 บาท อัตราการเปลี่ยนแปลงของรายได้จากการขายจะเป็น 5 บาท

ข. จากสมการ $S = 4000 \ln x$

ถ้า $x = 800$ จะได้ $S = 4000 \ln (8 \times 10^2)$

$= 4000 (\ln 8 + 2 \ln 10)$

$= 4000 (2.07 + 4.60)$

$= 26680$

ถ้า $x = 950$ จะได้ $S = 4000 \ln (9.5 \times 10^2)$

$= 4000 (\ln 9.5 + 2 \ln 10)$

$= 4000 (2.25 + 4.60)$

$= 27400$

ดังนั้นถ้าค่าใช้จ่ายสำหรับการโฆษณาต่อสัปดาห์เพิ่มขึ้นเป็น 950 แล้วรายได้จากการขายต่อหนึ่งสัปดาห์จะเพิ่มขึ้น $27400 - 26680 = 720$ บาท

33. สมการของอุปสงค์ของน้ำปรุงสลัดชนิดหนึ่งคือ $x = 20 - 10 \ln p$ เมื่อมีอุปสงค์เป็น x ขวด และ p บาท เป็นราคาต่อขวด

ก. จงหาอัตราการยืดหยุ่นของอุปสงค์ต่อราคา เมื่อราคาเท่ากับ 1 บาทต่อขวด

ข. ให้ใช้คำตอบจากข้อ ก. หาการเปลี่ยนแปลงของอุปสงค์ เมื่อราคา 1 บาทเพิ่มขึ้นไปอีก 10 เปอร์เซ็นต์

วิธีทำ ก. จาก $x = 20 - 10 \ln p$

$\therefore \frac{dx}{dp} = \frac{-10}{p}$

เมื่อ $p = 1$ แล้ว $\left.\frac{dx}{dp}\right]_{p=1} = -10$

และจาก $x = 20 - 10 \ln p$

เมื่อ $p = 1$ จะได้ $x = 20$

ดังนั้นอัตราการยืดหยุ่นของอุปสงค์ต่อราคา เมื่อราคาเท่ากับ 1 บาทต่อขวด คือ

$$\left(\frac{p}{x}\right)\left(\frac{dx}{dp}\right) = \left(\frac{1}{20}\right)(-10)$$

$$= -\frac{1}{2}$$

ข. จากข้อ ก. จะได้ว่าการเปลี่ยนแปลงของอุปสงค์เมื่อราคา 1 บาทเพิ่มขึ้นไปอีก 10 เปอร์เซ็นต์คือ $\left(-\frac{1}{2}\right)(\ ^{10}\ )$ หรือ $^{-5}$ หรือลดลง 5 %

34. บริษัทผู้ผลิตเครื่องกำเหนิดไฟฟ้าเริ่มดำเนินการเมื่อวันที่ 1 มกราคม 1968 ในระหว่างปีแรกไม่มียอดขาย เนื่องจากบริษัทอยู่ในระหว่างทำการวิจัยและพัฒนาสินค้า ปีต่อมายอดรายได้เพิ่มขึ้นตามสมการ $y = x \ln x$ เมื่อ x เป็นจำนวนปีที่บริษัทดำเนินงาน และ y เป็นยอดขายคิดเป็นล้านบาท จงเขียนกราฟของสมการข้างบน และจงหาอัตราการเปลี่ยนแปลงของยอดขายที่เพิ่มขึ้นในวันที่ 1 มกราคม 1972 และในวันที่ 1 มกราคม 1978

วิธีทำ

ก. กราฟของสมการ $y = x \ln x$ ขอให้ดูข้อ 26 ของแบบฝึกหัดนี้

ข. ณ วันที่ 1 มกราคม 1972 แสดงว่าบริษัทได้ดำเนินการขายมาได้ 3 ปี หรือ $x = 3$

จาก $y = x \ln x$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = 1 + \ln x$$

เมื่อ $x = 3$ ดังนั้น $\left.\frac{dy}{dx}\right]_{x=3} = 1 + \ln 3$

$$= 1 + 1.09$$

$$= 2.09$$

ดังนั้น ณ วันที่ 1 มกราคม 1972 ยอดขายสูงขึ้นในอัตรา 2.09 ล้านบาทต่อปี

ค. ณ วันที่ 1 มกราคม 1978 แสดงว่า $x = 9$

และ $\left.\frac{dy}{dx}\right]_{x=9} = 1 + \ln 9$

$$= 1 + 2.19$$

$$= 3.19$$

ดังนั้น ณ วันที่ 1 มกราคม 1978 ยอดขายสูงขึ้นในอัตรา 3.19 ล้านบาทต่อปี

7.2 การหาอนุพันธ์และอินทิกรัลในเชิงลอการิธึม

อนุพันธ์เชิงลอการิธึม

1) $\frac{d}{dx}(\ln|x|) = \frac{1}{x}$

2) ถ้าให้ u เป็นฟังก์ชันของ x ซึ่งมีค่าอนุพันธ์เมื่อเทียบกับ x จะได้ว่า

$\frac{d}{dx}(\ln|u|) = \frac{1}{u}\frac{du}{dx}$

อินทิกรัลเชิงลอการิธึม

$$\int \frac{1}{u}\,du = \ln|u| + C$$

เฉลยแบบฝึกหัด 7.2

ข้อ 1 ถึงข้อ 10 จงหาค่าของ $\frac{dy}{dx}$ โดยใช้วิธี logarithmic differentiation

1. $y = x^2(x^2-1)^3(x+1)^4$

วิธีทำ

$$\ln y = \ln(x^2(x^2-1)^3(x+1)^4)$$

$$= \ln x^2 + \ln(x^2-1)^3 + \ln(x+1)^4$$

$$= 2\ln x + 3\ln(x^2-1) + 4\ln(x+1)$$

$$\therefore \frac{1}{y}\frac{dy}{dx} = 2\left(\frac{1}{x}\right) + 3\left(\frac{1}{x^2-1}\right)(2x) + 4\left(\frac{1}{x+1}\right)$$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = y\left(\frac{2}{x} + \frac{6x}{x^2-1} + \frac{4}{x+1}\right.$$

$$= x^2(x^2-1)^3(x+1)^4\left(\frac{12x^3+8x^2-6x-2}{x(x^2-1)(x+1)}\right)$$

$$= x(x^2-1)^2(x+1)^3(12x^3+8x^2-6x-2)$$

2. $y = \frac{x^5(x+2)}{x-3}$

วิธีทำ

$$\ln y = 5\ln x + \ln(x+2) - \ln(x-3)$$

$$\therefore \frac{1}{y}\frac{dy}{dx} = 5\left(\frac{1}{x}\right) + \frac{1}{x+2}(1) - \frac{1}{x-3}(1)$$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = y\left(\frac{5}{x} + \frac{1}{x+2} - \frac{11}{x-3}\right)$$

$$= \frac{x^5(x+2)}{(x-3)}\left(\frac{5x^2-10x-30}{x(x+2)(x-3)}\right)$$

$$= \frac{5x^5(x^2-2x-6)}{x(x-3)^2}$$

3. $y = \dfrac{x(x-1)(x+2)}{(x-4)^3}$

วิธีทำ

$$\ln y = \ln x + \ln(x-1) + \ln(x+2) - 3\ln(x-4)$$

$$\therefore \frac{1}{y}\frac{dy}{dx} = \frac{1}{x} + \frac{1}{x-1} + \frac{1}{x+2} - \frac{3}{x-4}$$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = \frac{x(x-1)(x+2)}{(x-4)^3}\left(\frac{8+4x-13x^2}{x(x-1)(x+2)(x-4)}\right)$$

$$= \frac{8+4x-13x^2}{(x-4)^4}$$

4. $y = (5x-4)(x^2+3)(3x^2-5)$

วิธีทำ

$$\ln y = \ln(5x-4) + \ln(x^2+3) + \ln(3x^2-5)$$

$$\therefore \frac{1}{y}\frac{dy}{dx} = \frac{1}{5x-4}(5) + \frac{1}{x^2+3}(2x) + \frac{1}{3x^2-5}(6x)$$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = (5x-4)(x^2+3)(3x^2-5)\left(\frac{75x^4-48x^3+60x^2-32x-75}{(5x-4)(x^2+3)(3x^2-5)}\right)$$

$$= 75x^4-48x^3+60x^2-32x-75$$

5. $y = \dfrac{x^3+2x}{\sqrt[5]{x^7+1}}$

วิธีทำ

$$\ln y = \ln(x^3+2x) - \frac{1}{5}\ln(x^7+1)$$

$$\therefore \frac{1}{y}\frac{dy}{dx} = \frac{1}{x^3+2x}(3x^2+2) - \frac{1}{5(x^7+1)}(7x^6)$$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = \frac{x^3+2x}{\sqrt[5]{x^7+1}}\left(\frac{3x^2+2}{x^3+2x} - \frac{7x^6}{5(x^7+1)}\right)$$

6. $y = \dfrac{x\sqrt{x+1}}{\sqrt[3]{x-1}}$

วิธีทำ

$$\ln y = \ln x + \frac{1}{2}\ln(x+1) - \frac{1}{3}\ln(x-1)$$

$$\therefore \frac{1}{y}\frac{dy}{dx} = \frac{1}{x} + \frac{1}{2(x+1)} - \frac{1}{3(x-1)}$$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = \frac{x\sqrt{x+1}}{\sqrt[3]{x-1}}\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{2(x+1)} - \frac{1}{3(x-1)}\right)$$

7. $y = \dfrac{3x}{\sqrt{(x+1)(x+2)}}$

วิธีทำ

$$\ln y = \ln 3x - \frac{1}{2}\ln(x+1) - \frac{1}{2}\ln(x+2)$$

$$\therefore \frac{1}{y}\frac{dy}{dx} = \frac{1}{3x}(3) - \frac{1}{2(x+1)} - \frac{1}{2(x+2)}$$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = \frac{3x}{(x+1)(x+2)}\left(\frac{1}{x} - \frac{1}{2(x+1)} - \frac{1}{2(x+2)}\right)$$

8. $y = \dfrac{\sqrt{1-x^2}}{(x+1)^{\frac{2}{3}}}$

วิธีทำ

$$\ln y = \frac{1}{2}\ln(1-x^2) - \frac{2}{3}\ln(x+1)$$

$$\therefore \frac{1}{y}\frac{dy}{dx} = \frac{1}{2(1-x^2)}(-2x) - \frac{2}{3(x+1)}$$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = -\frac{\sqrt{1-x^2}}{\sqrt[3]{(x+1)^2}}\left(\frac{x}{1-x^2} + \frac{2}{3(x+1)}\right)$$

9. $y = \dfrac{\sqrt[3]{x+1}}{(x+2)(\sqrt{x+3})}$

วิธีทำ

$$\ln y = \frac{1}{3}\ln(x+1) - \ln(x+2)(\sqrt{x+3})$$

$$= \frac{1}{3}\ln(x+1) - \ln(x+2) - \frac{1}{2}\ln(x+3)$$

$$\therefore \frac{1}{y}\frac{dy}{dx} = \frac{1}{3(x+1)} - \frac{1}{x+2} - \frac{1}{2(x+3)}$$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = \frac{\sqrt[3]{x+1}}{(x+2)(\sqrt{x+3})}\left(\frac{1}{3(x+1)} - \frac{1}{x+2} - \frac{1}{2(x+3)}\right)$$

10. $y = \dfrac{x\sqrt[3]{4+3x}}{\sqrt{3+2x}}$

วิธีทำ

$$\ln y = \ln x + \frac{1}{3}\ln(4+3x) - \frac{1}{2}\ln(3+2x)$$

$$\therefore \frac{1}{y}\frac{dy}{dx} = \frac{1}{x} + \frac{1}{3(4+3x)}(3) - \frac{1}{2(3+2x)}(2)$$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = \frac{x\sqrt[3]{4+3x}}{\sqrt{3+2x}}\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{4+3x} - \frac{i}{3+2x}\right)$$

ข้อ 11 ถึงข้อ 20 จงหาค่าของอินทิกรัลต่อไปนี้

11. $\int \frac{dx}{3-2x}$

วิธีทำ ให้ $u = 3-2x$

$\therefore du = -2\,dx$

$\therefore dx = -\frac{1}{2}\,du$

$\therefore \int \frac{dx}{3-2x} = -\frac{1}{2}\int \frac{du}{u}$

$= -\frac{1}{2}\ln|u|+C$

$= -\frac{1}{2}\ln|3-2x|+C$

12. $\int \frac{x^2dx}{x^3+1}$

วิธีทำ ให้ $u = x^3+1$

$du = 3x^2dx$

$\therefore x^2dx = \frac{1}{3}\,du$

$\therefore \int \frac{x^2dx}{x^3+1} = \frac{1}{3}\int \frac{du}{u}$

$= \frac{1}{3}\ln|u|+C$

$= \frac{1}{3}\ln|x^3+1|+C$

13. $\int \frac{3x}{5x^2-1}\,dx$

วิธีทำ ให้ $u = 5x^2-1$

$du = 10\,xdx$

$xdx = \frac{1}{10}\,du$

$3\,xdx = \frac{3}{10}\,du$

$$\therefore \int \frac{3\,x\,dx}{5\,x^2-1} = \frac{3}{10}\int \frac{du}{u}$$

$$= \frac{3}{10}\ln|u|+C$$

$$= \frac{3}{10}\ln|5\,x^2-1|+C$$

14. $\int \frac{2\,x-1}{x\,(x-1)}\,dx$

วิธีทำ ให้ $u = x\,(x-1) = x^2-x$

$du = (2\,x-1)\,dx$

$$\therefore \int \frac{2\,x-1}{x\,(x-1)}\,dx = \int \frac{du}{u}$$

$$= \ln|u|+C$$

$$= \ln|x\,(x-1)|+C$$

15. $\int \frac{2\,x^3}{x^2-4}\,dx$

วิธีทำ

จาก $\frac{2\,x^3}{x^2-4} = 2\,x+\frac{8\,x}{x^2-4}$

$$\therefore \int \frac{2\,x^3}{x^2-4}\,dx = \int \left(2\,x+\frac{8\,x}{x^2-4}\right)dx$$

$$= \int 2\,x\,dx+\int \frac{8\,x}{x^2-4}\,dx$$

$$= x^2+4\ln|x^2-4|+C$$

(โดย $\int \frac{8x}{x^2-4}dx$ นั้น หาได้ดังนี้

$$\text{ให้ } u = x^2-4$$
$$du = 2xdx$$
$$\therefore 8xdx = 4du$$
$$\therefore \int \frac{8x}{x^2-4}dx = 4\int \frac{du}{u}$$
$$= 4\ln|u|+C$$
$$= 4\ln|x^2-4|+C)$$

16. $\int \frac{5-4x^2}{3-2x}dx$

วิธีทำ

$$\text{จาก } \frac{5-4x^2}{3-2x} = 2x+3-\frac{4}{3-2x}$$
$$\therefore \int \frac{5-4x^2}{3-2x}dx = \int \left(2x+3-\frac{4}{3-2x}\right)dx$$
$$= 2\int xdx+3\int dx-\int \frac{4}{3-2x}dx$$

พิจารณา $\int \frac{4}{3-2x}dx$

$$\text{ให้ } u = 3-2x$$
$$du = -2dx$$
$$\therefore 4dx = -2du$$
$$\therefore \int \frac{4}{3-2x}dx = -2\int \frac{du}{u}$$
$$= -2\ln|u|+C$$
$$= -2\ln|3-2x|+C$$

$$\text{ดังนั้น } \int \frac{5-4x^2}{3-2x}dx = x^2+3x+2\ln|3-2x|+C$$

17. $\int \frac{dx}{x\ln x}$

วิธีทำ ให้ $u = \ln x$

$du = \frac{1}{x} dx$

$\therefore \int \frac{dx}{x\ln x} = \int \frac{du}{u}$

$= \ln|u| + C$

$= \ln|\ln x| + C$

18. $\int \frac{dx}{\sqrt{x}(1+\sqrt{x})}$

วิธีทำ ให้ $u = 1+\sqrt{x}$

$du = \frac{1}{2\sqrt{x}} dx$

$\therefore \frac{dx}{\sqrt{x}} = 2\,du$

$\therefore \int \frac{dx}{\sqrt{x}(1+\sqrt{x})} = 2\int \frac{du}{u}$

$= 2\ln|u| + C$

$= 2\ln|1+\sqrt{x}| + C$

19. $\int \frac{\ln^2 3x}{x} dx$

วิธีทำ ให้ $u = \ln 3x$

$du = \frac{1}{3x}(3\,dx)$

$\therefore \frac{dx}{x} = du$

$\therefore \int \frac{\ln^2 3x}{x} dx = \int u^2 du$

$= \frac{u^3}{3} + C$

$= \frac{\ln^3 3x}{3} + C$

20. $\int \frac{2+\ln^2 x}{x(1-\ln x)}\,dx$

$$\text{ให้ } u = 1-\ln x$$

$$du = -\frac{dx}{x}$$

$$\therefore \frac{dx}{x} = -du$$

$$\text{และจาก } u = 1-\ln x$$

$$\therefore \ln x = 1-u$$

$$\ln^2 x = 1-2u+u^2$$

$$\therefore 2+\ln^2 x = 3-2u+u^2$$

$$\therefore \int \frac{2+\ln^2 x}{x(1-\ln x)}\,dx = -\int \left(\frac{3-2u+u^2}{u}\right) du$$

$$= -3\int \frac{du}{u}+2\int du-\int u\,du$$

$$= -3\ln|u|+2u-\frac{u^2}{2}+C$$

$$= -3\ln|1-\ln x|+2(1-\ln x)-\frac{(1-2\ln x+\ln^2 x)}{2}+C$$

$$= -3\ln|1-\ln x|-\ln x-\frac{1}{2}\ln^2 x+C$$

ข้อ 21 ถึงข้อ 28 จงหาค่าของ definite integral ต่อไปนี้

21. $\int_1^{e^2} \frac{dx}{x}$

วิธีทำ

$$\int_1^{e^2} \frac{dx}{x} = \ln x\Big]_1^{e^2}$$

$$= \ln e^2-\ln 1$$

$$= 2\ln e-0$$

$$= 2$$

22. $$\int_{e}^{e^3} \frac{dx}{x} = \ln x \Big]_{e}^{e^3}$$

$$= \ln e^3 - \ln e$$

$$= 3 \ln e - 1$$

$$= 3(1) - 1 = 2$$

23. $$\int_{3}^{5} \frac{2x}{x^2-5}\, dx$$

วิธีทำ ให้ $u = x^2 - 5$

$du = 2x dx$

$$\therefore \int \frac{2x}{x^2-5}\, dx = \int \frac{du}{u}$$

$$= \ln|u| + C = \ln|x^2+5| + C$$

$$\therefore \int_{3}^{5} \frac{2x}{x^2-5}\, dx = \ln|x^2-5| \Big]_{3}^{5}$$

$$= \ln|25-5| - \ln|9-5|$$

$$= \ln|20| - \ln|4|$$

$$= \ln\left|\frac{20}{4}\right| = \ln|5| = \ln 5$$

24. $$\int_{4}^{5} \frac{x}{4-x^2}\, dx$$

วิธีทำ ให้ $u = 4 - x^2$

$du = -2x dx$

$$\therefore x dx = -\frac{1}{2} du$$

$$\therefore \int \frac{x}{4-x^2}\, dx = -\frac{1}{2} \int \frac{du}{u}$$

$$= -\frac{1}{2} \ln|u| + C$$

$$= -\frac{1}{2} \ln|4-x^2| + C$$

$$\therefore \int_4^5 \frac{x}{4-x^2}\,dx = -\frac{1}{2}\ln|4-x^2|\Big]_4^5$$

$$= -\frac{1}{2}\ln|4-25|+\frac{1}{2}\ln|4-16|$$

$$= -\frac{1}{2}\ln|-21|+\frac{1}{2}\ln|-12|$$

$$= \frac{1}{2}\ln\left|\frac{12}{21}\right|$$

$$= \frac{1}{2}\ln\left|\frac{4}{7}\right|$$

$$= \frac{1}{2}\ln\frac{4}{7}$$

25. $\int_0^2 \frac{x^2+2}{x+1}\,dx$

วิธีทำ จาก $\frac{x^2+2}{x+1} = x-1+\frac{3}{x+1}$

$$\therefore \int_0^2 \frac{x^2+2}{x+1}\,dx = \int_0^2 x\,dx-\int_0^2 dx+\int_0^2 \frac{3\,dx}{x+1}$$

$$= \frac{x^2}{2}\Big]_0^2 - x\Big]_0^2 + 3\ln|x+1|\Big]_0^2$$

$$= \left(\frac{4}{2}-0\right)-(2-0)+3(\ln|3|-\ln|1|)$$

$$= 2-2+3\ln 3$$

$$= 3\ln 3$$

26. $\int_1^5 \frac{4x^3-1}{2x-1}\,dx$

วิธีทำ จาก $\frac{4x^3-1}{2x-1} = 2x^2+x+\frac{1}{2}-\frac{1}{2(2x-1)}$

$$\therefore \int_1^5 \frac{4x^3-1}{2x-1}\,dx = \int_1^5 2x^2dx+\int_1^5 x\,dx+\int_1^5 \frac{dx}{2}-\frac{1}{2}\int_1^5 \frac{dx}{2x-1}$$

$$= \frac{2}{3}x^3\Big]_1^5+\frac{x^2}{2}\Big]_1^5+\frac{x}{2}\Big]_1^5-\frac{1}{4}\ln|2x-1|\Big]_1^5$$

$$= \frac{2}{3}(125-1)+\left(\frac{25}{2}-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{5}{2}-\frac{1}{2}\right)-\frac{1}{4}(\ln|9|-\ln|1|)$$

$$= \frac{290}{3}-\frac{1}{4}\ln 3^2$$

$$= \frac{290}{3}-\frac{1}{2}\ln 3$$

27. $\int_1^e \frac{\ln x}{x}\,dx$

วิธีทำ ให้ $u = \ln x$

$$du = \frac{1}{x}\,dx$$

$$\therefore \int \frac{\ln x}{x}\,dx = \int u\,du$$

$$= \frac{u^2}{2}+C = \frac{\ln^2 x}{2}+C$$

$$\therefore \int_1^e \frac{\ln x}{x}\,dx = \left.\frac{\ln^2 x}{2}\right]_1^e$$

$$= \frac{1}{2}(\ln^2 e-\ln^2 1)$$

$$= \frac{1}{2}$$

28. $\int_e^{e^2} \frac{1}{x(\ln x)^2}\,dx$

วิธีทำ ให้ $u = \ln x$

$$du = \frac{1}{x}\,dx$$

$$\therefore \int \frac{1}{(\ln x)^2}\frac{dx}{x} = \int \frac{1}{u^2}\,du$$

$$= \int u^{-2}du$$

$$= \frac{u^{-1}}{-1}+C = -\frac{1}{\ln x}+C$$

$$\therefore \int_e^{e^2} \frac{1}{x(\ln x)^2}\,dx = -\frac{1}{\ln x}\Big]_e^{e^2}$$

$$= -\left(\frac{1}{\ln e^2} - \frac{1}{\ln e}\right)$$

$$= -\left(\frac{1}{2\ln e} - 1\right)$$

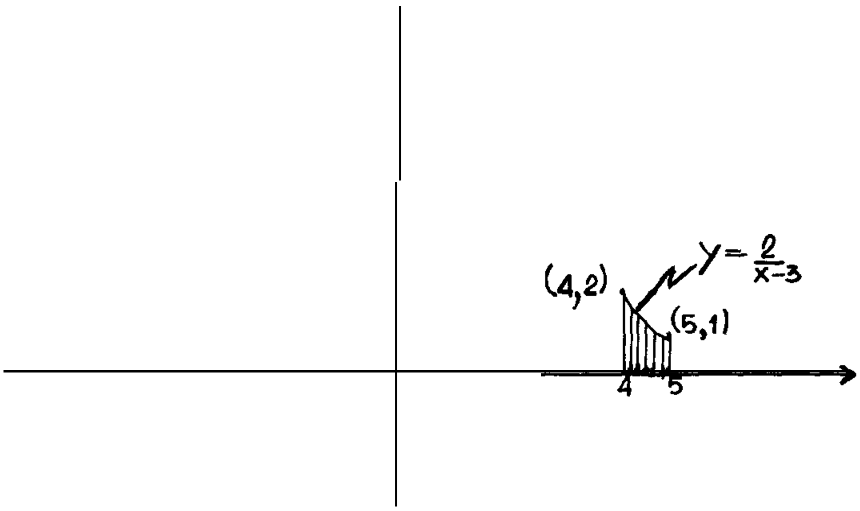
$$= -\left(\frac{1}{2} - 1\right) = \frac{1}{2}$$

๒๙. จงหาพื้นที่ของบริเวณหนึ่ง ซึ่งล้อมรอบโดยเส้น $y = \frac{2}{x-3}$, **แกน** x **และเส้น** $x = 4$

และ $x = 5$

วิธีทำ พิจารณาจากรูป

y x $(4, 2)$ 4 5 $(5, 1)$ $y = \frac{2}{x-3}$



ให้ A คือพื้นที่ของส่วนที่แรเงาที่โจทย์ต้องการ

$$\therefore A = \int_4^5 \frac{2}{x-3}\,dx$$

$$= 2\ln|x-3|\Big]_4^5$$

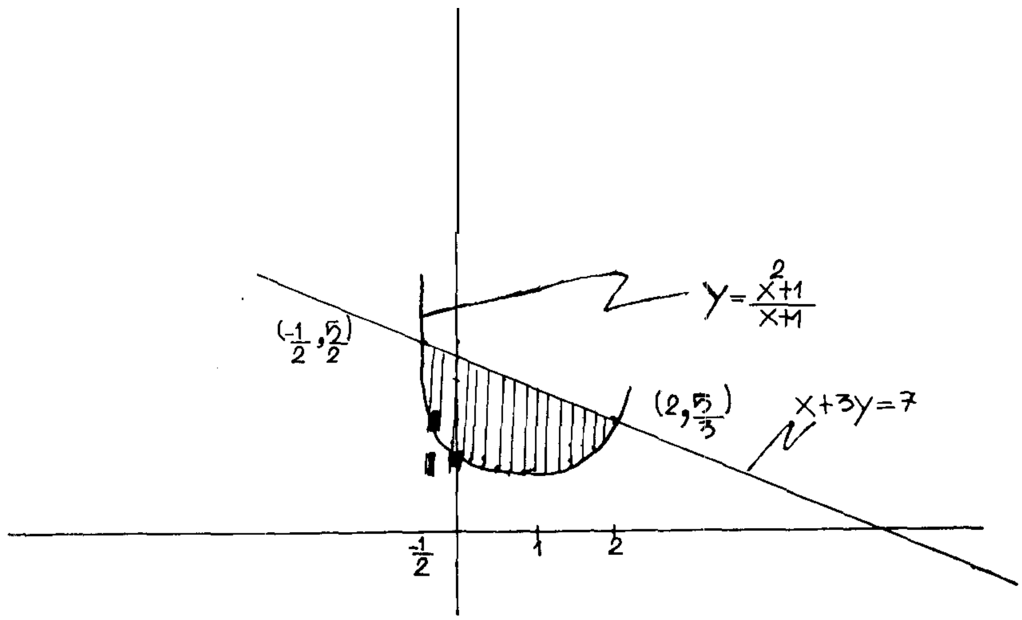
$$= 2(\ln 2 - \ln 1)$$

$$= 2\ln 2$$

30. จงหาพื้นที่ของบริเวณหนึ่ง ซึ่งล้อมรอบโดยเส้น $y = \frac{x^2+1}{x+1}$ และเส้น $x+3y = 7$

วิธีทำ พิจารณารูป

$x+3y = 7$ $y = \frac{x^2+1}{x+1}$ $\left(-\frac{1}{2}, \frac{5}{2}\right)$ $\left(2, \frac{5}{3}\right)$ $-\frac{1}{2}$ 1 2



จาก $y = \frac{x^2+1}{x+1}$ .... (1)

และ $x+3y = 7$ .... (2)

จากสมการ (1) และ (2) เราสามารถหาค่า (x, y) ที่สอดคล้องกับสมการได้ ซึ่งเป็นจุดที่เส้นทั้งสองตัดกันนั่นเอง

โดยจะได้ว่า $x = -\frac{1}{2}, y = \frac{5}{2}$ กับ $x = 2, y = \frac{5}{3}$

ให้ A เป็นพื้นที่ที่ต้องการ

$$\therefore A = \int_{-\frac{1}{2}}^{2} (F_1(x) - F_2(x))\, dx$$

$$= \int_{-\frac{1}{2}}^{2} \left(\frac{7-x}{3} - \frac{x^2+1}{x+1}\right) dx$$

โดย $\frac{x^2+1}{x+1} = x-1+\frac{2}{x+1}$

$$\therefore \int_{-\frac{1}{2}}^{2}\left(\frac{7-x}{3}-\frac{x^2+1}{x+1}\right)dx = \int_{-\frac{1}{2}}^{2}\frac{7}{3}\,dx - \int_{-\frac{1}{2}}^{2}\frac{x}{3}\,dx - \int_{-\frac{1}{2}}^{2}x\,dx + \int_{-\frac{1}{2}}^{2}dx - \int_{-\frac{1}{2}}^{2}\frac{2}{x-1}\,dx$$

$$= \frac{7}{3}x\Big]_{-\frac{1}{2}}^{2} - \frac{x^2}{6}\Big]_{-\frac{1}{2}}^{2} - \frac{x^2}{2}\Big]_{-\frac{1}{2}}^{2} + x\Big]_{-\frac{1}{2}}^{2} - 2\ln|x+1|\,\Big|_{-\frac{1}{2}}^{2}$$

$$= \frac{10x}{3}\Big]_{-\frac{1}{2}}^{2} - \frac{2}{3}x^2\Big]_{-\frac{1}{2}}^{2} - 2\ln|x+1|\,\Big]_{-\frac{1}{2}}^{2}$$

$$= \left(\frac{20}{3}+\frac{5}{3}\right) - \left(\frac{8}{3}-\frac{1}{6}\right) - 2\left(\ln 3 - \ln\frac{1}{2}\right)$$

$$= \frac{35}{6} - 2(\ln 3 + \ln 2)$$

31. กำหนดให้ฟังก์ชันรายได้ส่วนเพิ่มของสินค้าชนิดหนึ่งคือ $R'(x) = \frac{12}{x+2}$ เมื่อ $R(x)$ บาท เป็นรายได้รวม เมื่อยอดขายเท่ากับ x หน่วย จงหาสมการอุปสงค์

วิธีทำ จาก $R'(x) = \frac{12}{x+2}$

$$\therefore R\,x) = \int \frac{12}{x+2}\,dx$$

$$= 12\ln|x+2|+C$$

$$\because R(0) = 0$$

จึงได้ว่า $12\ln 2 + C = 0$

$$\therefore C = -12\ln 2$$

$$\therefore R(x) = 12\ln|x+2| - 12\ln 2$$

$$= 2\ln\left|\frac{x+2}{2}\right|$$

ถ้า f เป็นฟังก์ชันราคา, $R(x) = xf(x)$

ถ้าให้ p บาท เป็นราคาของผลผลิตหนึ่งหน่วยเมื่อ x หน่วยเป็นอุปสงค์

เพราะว่า $p = f(x)$ จะได้สมการอุปสงค์คือ

$$p = \frac{R(x)}{x}$$

$$= \frac{12}{x}\ln\left|\frac{x+2}{2}\right|$$

32. สมการของอุปสงค์ของสินค้าชนิดหนึ่งคือ $p = \frac{10}{x+1}$ มีอุปสงค์ของสินค้าเท่ากับ x หน่วย และมีราคาเท่ากับ p บาทต่อหน่วย จงหาส่วนเกินของผู้บริโภคเมื่อราคาตลาดเท่ากับ 4 บาท

วิธีทำ จาก $p = \frac{10}{x+1}$

เมื่อ $p = 4$ จะได้ว่า $4 = \frac{10}{x+1}$

$$\therefore x = \frac{3}{2}$$

ส่วนเกินของผู้บริโภค (CS.) คือ

$$CS = \int p\,dx - (4)\left(\frac{3}{2}\right)$$

$$= \int_0^{\frac{3}{2}} \frac{10}{x+1}\,dx - 6$$

$$= 10 \ln|x+1| \Big]_0^{\frac{3}{2}} - 6$$

$$= 10 \ln\frac{5}{2} - 6$$

$$= 10(\ln 5 - \ln 2) - 6$$

33. สมการของอุปสงค์และอุปทานของสินค้าชนิดหนึ่งคือ $p = \frac{600-2x}{x+100}$ และ $200p = 300 + x$ ตามลำดับ ปริมาณของอุปสงค์และอุปทานเท่ากับ x หน่วย เมื่อราคาเท่ากับ p บาทต่อหน่วย ถ้าราคาตลาดอยู่ที่ระดับดุลยภาพ จงหาส่วนเกินของผู้บริโภค

วิธีทำ จากสมการอุปสงค์คือ $p = \frac{600-2x}{x+100}$ ....(1)

และสมการอุปทานคือ $200p = 300 + x$ ....(2)

จาก (1) กับ (2) จะได้ว่า $\frac{600-2x}{x+100} = \frac{300+x}{200}$

$$\therefore \quad x = 100$$

จาก $x = 100$ จะได้ $p = 2$

$$\therefore \quad CS = \int p\,dx - (100)(2)$$

$$= \int_0^{100} \frac{600-2x}{x+100}\,dx - 200$$

$$= 600\int_0^{100} \frac{1}{x+100}\,dx - 2\int_0^{100} \frac{x}{x+100}\,dx - 200$$

$$= 600\int_0^{100} \frac{1}{x+100}\,dx - 2\int_0^{100}\left(1-\frac{100}{x+100}\right)dx - 200$$

$$= 600\ln|x+100|\Big]_0^{100} - 2x\Big]_0^{100} + 200\ln|x+100|\Big]_0^{100} - 200$$

$$= 600(\ln 200 - \ln 100) - 200 + 200(\ln 200 - \ln 100) - 200$$

$$= 800\ln 200 - 800\ln 100 - 400$$

$$= 800(\ln 200 - \ln 100) - 400$$

$$= 800\ln\frac{200}{100} - 400$$

$$= 800\ln 2 - 400$$

7.3 ฟังก์ชันเอกซ์โปเนนเชียล

นิยาม 7.3.1 ถ้า x เป็นเลขจำนวนจริงใด ๆ แล้วจะมีเลขจำนวนจริงบวก y หนึ่งตัวเท่านั้น ซึ่ง $\ln y = x$ สำหรับจำนวน y นี้ คือค่าของฟังก์ชันเอ็กโปเนนเชียลที่ x และใช้สัญลักษณ์ว่า exp(x)

ดังนั้น $y = \exp(x)$ ก็ต่อเมื่อ $x = \ln y$

exp(x) อ่านว่า ฟังก์ชันเอ็กซ์โปเนนเชียลที่ x โดย โดเมนฟังก์ชันเอ็กซ์โปเนนเชียลคือเซ็ตของเลขจำนวนจริงทั้งหมด และพิสัยของฟังก์ชันเอ็กซ์โปเนนเชียล ก็คือเซ็ตของจำนวนจริงบวก

หมายเหตุ ฟังก์ชันลอการิธึมธรรมชาติเป็นฟังก์ชันผกผันของฟังก์ชันเอ็กซ์โป-เนนเชียล และฟังก์ชันเอ็กซ์โปเนนเชียลก็เป็นฟังก์ชันผกผันของฟังก์ชันลอการิธึมธรรมชาติ

นิยาม 7.3.2 ถ้า a เป็นเลขจำนวนจริงบวกใด ๆ และ x เป็นเลขจำนวนจริงใด ๆ แล้วจะกำหนดให้

$$a^x = \exp(x \ln a)$$

ทฤษฎีบท 7.3.1 ถ้า a เป็นเลขจำนวนจริงบวกใด ๆ และ x เป็นเลขจำนวนจริงใด ๆ แล้ว $\ln a^x = x \ln a$

ทฤษฎีบท 7.3.2 ถ้า a และ b เป็นเลขจำนวนจริงใด ๆ แล้ว $e^a \cdot e^b = e^{a+b}$

ทฤษฎีบท 7.3.3 ถ้า a และ b เป็นเลขจำนวนจริงใด ๆ แล้ว $e^a \div e^b = e^{a-b}$

ทฤษฎีบท 7.3.4 ถ้า a และ b เป็นเลขจำนวนจริงใด ๆ แล้ว $(e^a)^b = e^{ab}$

สูตรสำหรับหาค่าอนุพันธ์ของฟังก์ชันเอ็กซ์โปเนนเชียล

1) $\frac{d}{dx}(e^x) = e^x$

2) ถ้าให้ u(x) เป็นฟังก์ชันซึ่งมีค่าอนุพันธ์เมื่อเทียบกับ x แล้ว จะได้ว่า

$$\frac{d}{dx}(e^u) = e^u \frac{du}{dx}$$

สูตรสำหรับการอินทิเกรตฟังก์ชันเอ็กซ์โปเนนเชียล

1) $\int e^x \, dx = e^x + C$

2) $\int e^u \, du = e^u + C$

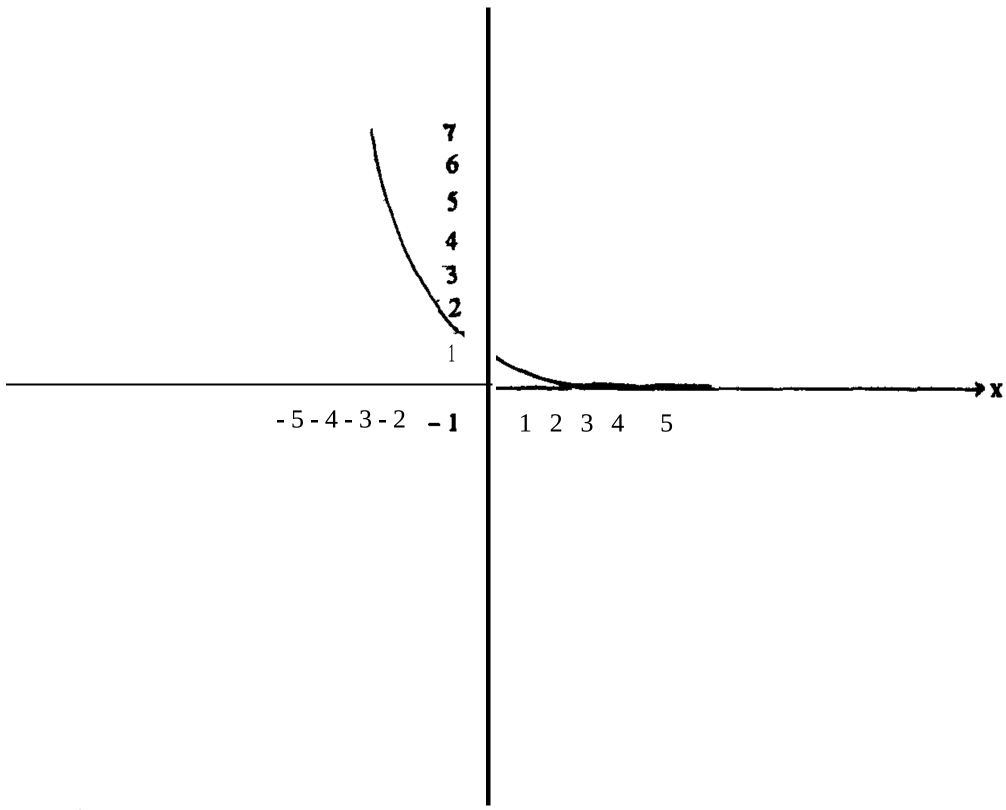
เฉลยแบบฝึกหัด 7.3

1. จงเขียนกราฟของ $y = e^{-x}$

วิธีทำ พิจารณาจากตารางข้างล่าง

x	-5	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5
$y = e^{-x}$	148.41	54.59	20.08	7.38	2.71	1	0.36	0.13	0.04	0.01	0.006

จากตารางสามารถเขียนกราฟของ $y = e^{-x}$ ได้ดังนี้

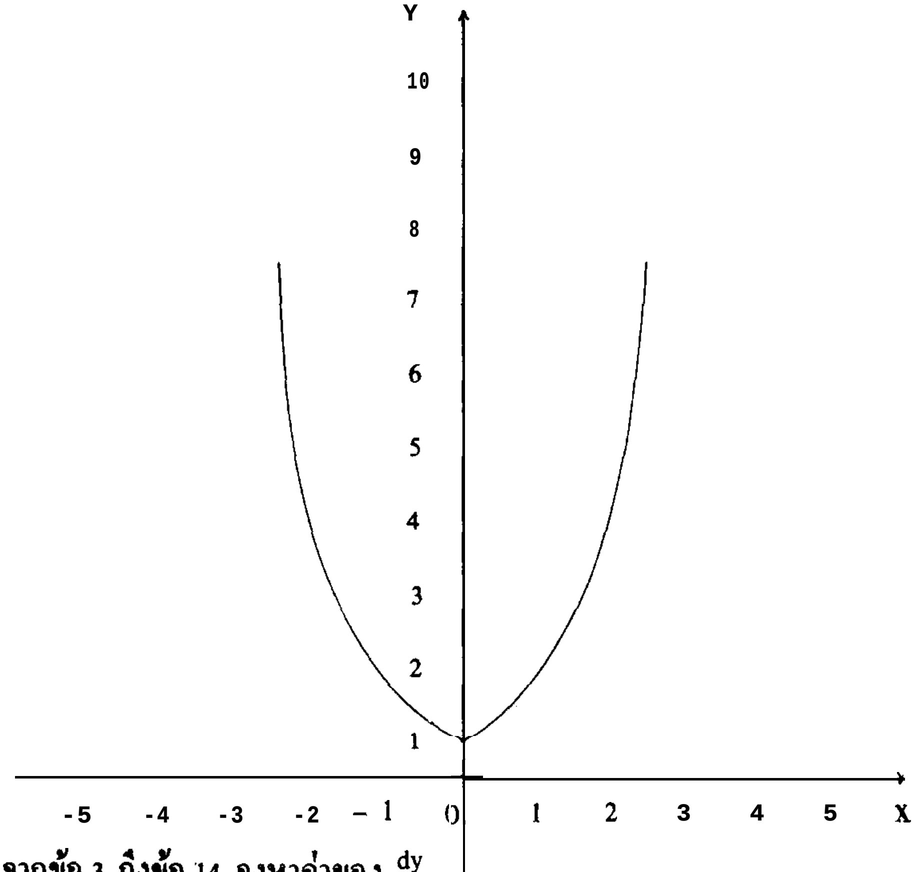


2. จงเขียนกราฟของ $y = e^{|x|}$

วิธีทำ พิจารณาจากตารางข้างล่าง

x	-5	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5
$y = e^{\|x\|}$	148.41	54.59	20.08	7.38	2.71	1	2.71	7.38	20.08	54.59	148.41

จากตารางสามารถเขียนกราฟ $y = e^{|x|}$ ได้ดังนี้



จากข้อ 3 ถึงข้อ 14 จงหาค่าของ $\frac{dy}{dx}$

3. $y = 2e^{-4x}$

วิธีทำ

$$\frac{dy}{dx} = 2\frac{d}{dx}\,e^{-4x}$$

$$= 2e^{-4x}\,\frac{d}{dx}(-4x)$$

$$= -8e^{-4x}$$

4. $y = e^{5x}$

วิธีทำ

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}e^{5x}$$

$$= e^{5x} \frac{d}{dx} 5x$$

$$= 5e^{5x}$$

5. $y = e^{-3x^2}$

วิธีทำ $$\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx} e^{-3x^2}$$

$$= e^{-3x^2} \frac{d}{dx}(-3x^2)$$

$$= -6xe^{-3x^2}$$

6. $y = \frac{e^x}{x}$

วิธีทำ $$\ln y = \ln e^x - \ln x$$

$$= x \ln e - \ln x$$

$$= x - \ln x$$

$$\therefore \frac{1}{y}\frac{dy}{dx} = 1 - \frac{1}{x}$$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = \frac{e^x}{x}\left(1 - \frac{1}{x}\right)$$

7. $y = \frac{e^{2x}}{x^2}$

วิธีทำ $$\ln y = \ln e^{2x} - \ln x^2$$

$$= 2x \ln e - 2\ln x$$

$$= 2x - 2\ln x$$

$$\therefore \frac{1}{y}\frac{dy}{dx} = 2 - \frac{2}{x}$$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = \frac{e^{2x}}{x^2}\left(2 - \frac{2}{x}\right)$$

8. $y = e^{e^x}$

วิธีทำ

$$\ln y = \ln e^{e^x}$$
$$= e^x \ln e$$
$$= e^x$$

$$\therefore \frac{1}{y}\frac{dy}{dx} = e^x$$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = e^{e^x} e^x$$

9. $y = \frac{e^x + e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$

วิธีทำ

$$\because y = \frac{e^x + e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$$
$$= 1$$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = 0$$

10. $y = \ln \frac{e^{4x} - 1}{e^{4x} + 1}$

วิธีทำ

$$y = \ln(e^{4x} - 1) - \ln(e^{4x} + 1)$$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = \frac{1}{e^{4x} - 1}\frac{d}{dx}(e^{4x} - 1) - \frac{1}{e^{4x} + 1}\frac{d}{dx}(e^{4x} + 1)$$

$$= \frac{1}{e^{4x} - 1}(e^{4x})(4) - \frac{1}{e^{4x} + 1}(e^{4x})(4)$$

$$= 4e^{4x}\left(\frac{1}{e^{4x} - 1} - \frac{1}{e^{4x} + 1}\right)$$

$$= 4e^{4x}\left(\frac{e^{4x} + 1 - e^{4x} + 1}{e^{8x} - 1}\right)$$

$$= \frac{8e^{4x}}{e^{8x} - 1}$$

11. $y = x^5 e^{-3\ln x}$

วิธีทำ

$$\ln y = \ln x^5 + \ln e^{-3\ln x}$$

$$= 5\ln x - 3\ln x$$

$$\therefore \frac{1}{y}\frac{dy}{dx} = \frac{5}{x} - \frac{3}{x}$$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = 2x^4 e^{-3\ln x}$$

12. $y = \ln(e^x + e^{-x})$

วิธีทำ

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{e^x + e^{-x}} \frac{d}{dx}(e^x + e^{-x})$$

$$= \frac{1}{e^x + e^{-x}}(e^x - e^{-x})$$

$$= \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$$

13. $y = e^{x\ln x}$

วิธีทำ

$$\ln y = \ln e^{x\ln x}$$

$$= x\ln x$$

$$\therefore \frac{1}{y}\frac{dy}{dx} = x\left(\frac{1}{x}\right) + \ln x$$

$$= 1 + \ln x$$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = e^{x\ln x}(1 + \ln x)$$