14. $y = e^{x/\sqrt{4+x^2}}$

วิธีทำ $\dfrac{dy}{dx} = e^{x/\sqrt{4+x^2}} \dfrac{d}{dx} \dfrac{x}{\sqrt{4+x^2}}$

$$= e^{x/\sqrt{4+x^2}} \frac{\left(\sqrt{4+x^2} - x \frac{d}{dx}(4+x^2)^{\frac{1}{2}}\right)}{4+x^2}$$

$$= \frac{e^{x/\sqrt{4+x^2}}}{4+x^2}\left(\sqrt{4+x^2} - \frac{1}{2}x(4+x^2)^{-\frac{1}{2}}\frac{d}{dx}(4+x^2)\right)$$

$$= \frac{e^{x\sqrt{4+x^2}}}{4+x^2}\left(\sqrt{4+x^2} - \frac{x}{\sqrt{4+x^2}}\right)$$

จากข้อ 15 ถึงข้อ 18 จงหาค่า $\frac{dy}{dx}$ โดยวิธี Implicit differentiation

15. $e^x + e^y = e^{x+y}$

วิธีทำ

$$\frac{d}{dx}(e^x + e^y) = \frac{d}{dx} e^{x+y}$$

$$e^x + e^y \frac{dy}{dx} = e^{x+y}\frac{d}{dx}(x+y)$$

$$= e^{x+y}\left(1 + \frac{dy}{dx}\right)$$

$$e^y \frac{dy}{dx} - e^{x+y}\frac{dy}{dx} = e^{x+y} - e^x$$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = \frac{e^{x+y} - e^x}{e^y - e^{x+y}}$$

16. $ye^{2x} + xe^{2y} = 1$

วิธีทำ

$$y\frac{d}{dx}e^{2x} + e^{2x}\frac{dy}{dx} + x\frac{d}{dx}e^{2y} + e^{2y}\frac{dx}{dx} = 0$$

$$2ye^{2x} + e^{2x}\frac{dy}{dx} + 2xe^{2y}\frac{dy}{dx} + e^{2y} = 0$$

$$\therefore \quad \frac{dy}{dx}(e^{2x} + 2xe^{2y}) = -(e^{2y} + 2ye^{2x})$$

$$\therefore \quad \frac{dy}{dx} = \frac{-(e^{2y} + 2ye^{2x})}{(e^{2x} + 2xe^{2y})}$$

17. $y^2e^{2x} + xy^3 = 1$

วิธีทำ

$$y^2\frac{d}{dx}e^{2x} + e^{2x}\frac{d}{dx}y^2 + x\frac{d}{dx}y^3 + y^3\frac{dx}{dx} = 0$$

$$2y^2e^{2x} + 2ye^{2x}\frac{dy}{dx} + 3y^2x\frac{dy}{dx} + y^3 = 0$$

$$\therefore \quad \frac{dy}{dx}(2ye^{2x} + 3y^2x) = -(y^3 + 2y^2e^{2x})$$

$$\therefore \quad \frac{dy}{dx} = \frac{-(y^3 + 2y^2e^{2x})}{2ye^{2x} + 3y^2x}$$

$$= \frac{-(y^2 + 2ye^{2x})}{2e^{2x} + 3xy}$$

18) $e^y = \ln(x^3+3y)$

วิธีทำ

$$\frac{d}{dx}e^y = \frac{d}{dx}\ln(x^3+3y)$$

$$e^y\frac{dy}{dx} = \frac{1}{x^3+3y}\frac{d}{dx}(x^3+3y)$$

$$= \frac{3x^2}{x^3+3y} + \frac{3}{x^3+3y}\frac{dy}{dx}$$

$$\frac{dy}{dx}\left(e^y - \frac{3}{x^3+3y}\right) = \frac{3x^2}{x^3+3y}$$

$$\frac{dy}{dx}\frac{(e^yx^3+e^y\,3y-3)}{x^3+3y} = \frac{3x^2}{x^3+3y}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{3x^2}{e^y(x^3-3y)-3}$$

จากข้อ 19 ถึงข้อ 26 จงหาค่าของ indefinite integral

19) $\int e^{2-5x}\,dx$

วิธีทำ ให้ $u = 2-5x$

$$du = -5dx$$

$$dx = -\frac{1}{5}du$$

$$\int e^{2-5x}dx = -\frac{1}{5}\int e^u\,du$$

$$= -\frac{1}{5}e^u + c$$

$$= -\frac{1}{5}e^{2-5x} + c$$

20) $\int e^{2x+1}\,dx$

วิธีทำ ให้ $u = 2x+1$

$$du = 2dx$$

$$dx = \frac{1}{2}\,du$$

$$\int e^{2x+1}\,dx = \frac{1}{2}\int e^{u}\,du$$

$$= \frac{1}{2}e^{u} + c$$

$$= \frac{1}{2}e^{2x+1} + c$$

21) $\int \frac{1 + e^{2x}}{e^{x}}\,dx$

วิธีทำ $\int \frac{1 + e^{2x}}{e^{x}}\,dx = \int \frac{1}{e^{x}}\,dx + \int \frac{e^{2x}}{e^{x}}\,dx$

$$= \int e^{-x}\,dx + \int e^{x}\,dx$$

$$= -e^{-x} + e^{x} + C$$

22) $\int e^{3x}\;e^{2x}\,dx$

วิธีทำ $\int e^{3x}\;e^{2x}\,dx = \int e^{5x}\,dx$

$$= \frac{1}{5}e^{5x} + C$$

23) $\int \frac{e^{3x}}{(1-2e^{3x})^2}\, dx$

วิธีทำ ให้ $u = 1-2e^{3x}$

$du = -6e^{3x}\, dx$

$e^{3x}\, dx = -\frac{1}{6}\, du$

$$\therefore \int \frac{e^{3x}}{(1-2e^{3x})^2}\, dx = -\frac{1}{6} \int \frac{du}{u^2}$$

$$= -\frac{1}{6} \left(\frac{u^{-1}}{-1}\right) + c$$

$$= \frac{1}{6u} + c$$

$$= \frac{1}{6(1-2e^{3x})} + c$$

24) $\int x^2 e^{2x^3}\, dx$

วิธีทำ ให้ $u = 2x^3$

$du = 6x^2\, dx$

$x^2\, dx = \frac{1}{6}\, du$

$$\therefore \int x^2 e^{2x^3}\, dx = \frac{1}{6} \int e^u\, du$$

$$= \frac{1}{6} e^u + c$$

$$= \frac{1}{6} e^{2x^3} + c$$

25) $\int \frac{e^{2x}}{e^{x}+3}\, dx$

วิธีทำ $\frac{e^{2x}}{e^{x}+3} = e^{x}-3+\frac{9}{e^{x}+3}$

$\therefore \int \frac{e^{2x}}{e^{x}+3} = \int (e^{x} - 3 + \frac{9}{e^{x}+3})\, dx$

$= \int e^{x}\, dx - 3\int dx + 9\int \frac{dx}{e^{x}+3}$

พิจารณา $\int \frac{dx}{e^{x}+3} = \int \frac{e^{-x}}{e^{-x}(e^{x}+3)}\, dx$

$= \int \frac{e^{-x}}{1+3e^{-x}}\, dx$

ให้ $u = 1 + 3e^{-x}$

$du = -3e^{-x}\, dx$

$\therefore e^{-x}\, dx = -\frac{1}{3}\, du$

$\therefore \int \frac{e^{-x}}{1+3e^{-x}}\, dx = -\frac{1}{3}\int \frac{du}{u}$

$= -\frac{1}{3}\ln | u | + c$

$= -\frac{1}{3}\ln | 1+3e^{-x} | + c$

ดังนั้น $\int \frac{e^{2x}}{e^{x}+3}\, dx = e^{x} - 3x - 3\ln | 1 + 3e^{-x} | + c$

26) $\int \frac{dx}{1+e^{x}}\, dx$

วิธีทำ $\therefore \int \frac{dx}{1+e^{x}} = \int \frac{e^{-x}\, dx}{e^{-x}(1+e^{x})}$

$$= \int \frac{e^{-x}\,dx}{e^{-x}+1}$$

$$\text{ให้ } u = e^{-x} + 1$$

$$du = -e^{-x}\,dx$$

$$\therefore e^{-x}\,dx = -du$$

$$\therefore \int \frac{dx}{1+e^{x}} = \int \frac{e^{-x}\,dx}{e^{-x}+1}$$

$$= -\int \frac{du}{u}$$

$$= -\ln|u|$$

$$= -\ln|e^{-x}+1| + c$$

$$= -\ln\left|\frac{1}{e^{x}} + 1\right| + c$$

$$= -\ln\left|\frac{1+e^{x}}{e^{x}}\right| + c$$

จากข้อ 27 ถึงข้อ 30 จงหาค่าของ definite integral

27) $\int_{0}^{1} e^{2x}\,dx$

วิธีทำ $\because \int_{0}^{1} e^{2x}\,dx = \frac{1}{2}\int_{0}^{1} 2^{2x}\,d(2x)$

$$= \frac{1}{2} e^{2x} \Big]_{0}^{1}$$

$$= \frac{1}{2} e^{2} - \frac{1}{2} e^{0}$$

$$= \frac{1}{2}(e^{2} - 1)$$

28) $\int_{1}^{2} \frac{e^{2x}}{e^{x}+e}\,dx$

วิธีทำ

$$\because \frac{e^{2x}}{e^x+e} = e^x - e + \frac{e^2}{e^x+e}$$

และสามารถหา $\int \frac{e^2}{e^x+e}\,dx$ ได้โดย

ให้ $$\int \frac{e^2}{e^x+e}\,dx = \int \frac{e^{-x}e^2}{e^{-x}(e^x+e)}\,dx$$

$$= \int \frac{e^{2-x}}{1+e^{1-x}}\,dx$$

ให้ $u = 1+e^{1-x}$

$$du = -e^{1-x}\,dx$$

$$e^{1-x}\,dx = -du$$

$$e^{2-x}\,dx = -e\,du$$

$$\int \frac{e^{2-x}}{1+e^{1-x}}\,dx = -e\int \frac{du}{u}$$

$$= -e\ln|u| + c$$

$$= -e\ln|1+e^{1-x}| + C$$

ดังนั้น $$\int_1^2 \frac{e^{2x}}{e^x+e}\,dx = \int_1^2 e^x\,dx - \int_1^2 e\,dx + \int_1^2 \frac{e^x}{e^x+e}\,dx$$

$$= e^x\Big]_1^2 - ex\Big]_1^2 - e\ln|1+e^{1-x}|\Big]_1^2$$

$$= (e^2-e) - (2e-e) - e(\ln|1+e^{-1}|$$

$$- \ln|1+1|)$$

$$= e^2 - 2e - e\ln\left(\frac{1+e^{-1}}{2}\right)$$

$$= e^2 - 2e - e\ln\left(\frac{1+e}{2e}\right)$$

29) $\int_0^2 xe^{4-x^2}\,dx$

วิธีทำ ให้ $u = 4 - x^2$

$$du = -2xdx$$

$$xdx = -\frac{1}{2}du.$$

$$\therefore \int xe^{4-x^2}\,dx = -\frac{1}{2}\int e^u\,du$$

$$= -\frac{1}{2}e^u + c$$

$$= -\frac{1}{2}e^{4-x^2} + c$$

$$\int_0^2 xe^{4-x^2}\,dx = -\frac{1}{2}e^{4-x^2}\Big]_0^2$$

$$= -\frac{1}{2}(e^0 - e^4)$$

$$= -\frac{1}{2}(1 - e^4)$$

30) $\int_0^3 \frac{e^x + e^{-x}}{2}\,dx$

วิธีทำ

$$\because \int_0^3 \frac{e^x + e^{-x}}{2}\,dx = \frac{1}{2}\int_0^3 e^x\,dx + \frac{1}{2}\int_0^3 e^{-x}\,dx$$

$$= \frac{1}{2}e^x\Big]_0^3 - \frac{1}{2}e^{-x}\Big]_0^3$$

$$= \frac{1}{2}(e^3 - e\ \ ) - \frac{1}{2}(e^{-3} - e\ \ )$$

$$= \frac{1}{2}(e^3 - 1 - e^{-3} + 1)$$

$$= \frac{1}{2}(e^3 - e^{-3})$$

7.4 ฟังก์ชันลอการิธึมและฟังก์ชันเอ็กซ์โปเนนเชียลอื่น ๆ

นิยาม 7.4.1 ถ้า a เป็นจำนวนจริงบวกใด ๆ และ x เป็นจำนวนจริงใด ๆ แล้ว จะนิยามฟังก์ชัน f เมื่อ $f(x) = a^x$ ว่าเป็นฟังก์ชันเอ็กซ์โปเนนเชียลซึ่งมีฐาน a

ข้อสังเกต ฟังก์ชันเอ็กซ์โปเนนเชียลซึ่งมีฐาน a นี้จะมีคุณสมบัติเหมือนกับฟังก์ชันเอ็กซ์โปเนนเชียลซึ่งมีฐาน e นั่นคือ

1) $a^x \cdot a^y = a^{x+y}$

2) $a^x \div a^y = a^{x-y}$

3) $(a^x)^y = a^{xy}$

4) $(ab)^x = a^x b^x$

5) $a^\circ = 1$

สูตรการหาอนุพันธ์

1) $\frac{d}{dx}(a^x) = a^x \ln a$

2) ถ้าให้ u เป็นฟังก์ชันของ x ซึ่งสามารถหาอนุพันธ์ได้แล้ว

$\frac{d}{dx}(a^u) = a^u \ln a \frac{du}{dx}$

สูตรการอินทิเกรต

1) $\int a^u \, du = \frac{a^u}{\ln a} + C$

นิยาม 7.4.2 ให้ a เป็นเลขจำนวนจริงบวกใด ๆ ซึ่ง $a \neq 1$ ถ้า x เป็นเลขจำนวนจริงบวกใด ๆ จะมีเลขจำนวนจริง y เพียง 1 ตัวเท่านั้น ซึ่ง $a^y = x$ ค่า y นี้จะเป็นค่าของฟังก์ชันลอการิธึม ซึ่งมีฐาน a ที่ x และใช้สัญลักษณ์ว่า $\log_a x$

ดังนั้น $y = \log_a x$ ก็ต่อเมื่อ $a^y = x$

และ $\log_a x$ อ่านว่า ลอการิธึมของ x ซึ่งมีฐาน a

คุณสมบัติของ $\log_a x$ ก็คล้ายกับคุณสมบัติของ $\ln x$ นั่นคือ

1) $\log_a(xy) = \log_a x + \log_a y$

2) $\log_a(x \div y) = \log_a x - \log_a y$

3) $\log_a 1 = 0$

4) $\log_a x^y = y \log_a x$

ความสัมพันธ์ระหว่าง $\log_a x$ กับ $\ln a$

ได้ว่า $\log_a x = \frac{\ln x}{\ln a}$

ดังนั้น $\log_a e = \frac{\ln e}{\ln a} = \frac{1}{\ln a}$

สูตรการหาอนุพันธ์

1) $\frac{d}{dx}(\log_a x) = \log_a e \cdot \frac{1}{x}$

2) ถ้า u เป็นฟังก์ชันของ x ซึ่งหาอนุพันธ์ได้แล้ว จะได้ว่า

$\frac{d}{dx}(\log_a u) = \frac{\log_a e}{u} \cdot \frac{du}{dx}$

ทฤษฎีบท 7.4.1 ถ้า n เป็นจำนวนจริงใด ๆ และฟังก์ชัน f นิยามโดย $f(x) = x^n$ เมื่อ $x > 0$ แล้ว $f'(x) = nx^{n-1}$

เฉลยแบบฝึกหัด 7.4

จากข้อ 1 ถึงข้อ 22 จงหาค่าของ f (X)

1) $f(x) = 10^{x}$

วิธีทำ

$$f'(x) = 10^{x} \ln 10$$

2) $f(x) = 2^{3x}$

วิธีทำ

$$f'(x) = 2^{3x} \ln 2 \frac{d}{dx}(3x)$$

$$= 3(2^{3x}) \ln 2$$

3) $f(x) = 3^{5x}$

วิธีทำ

$$f'(x) = 3^{5x} \ln 3 \frac{d}{dx}(5x)$$

$$= 5(3^{5x}) \ln 3$$

4) $f(x) = 6^{-3x}$

วิธีทำ

$$f'(x) = 6^{-3x} \ln 6 \frac{d}{dx}(-3x)$$

$$= -3(6^{-3x}) \ln 6$$

5) $f(x) = 8^{x^2}$

วิธีทำ

$$f'(x) = 8^{x^2} \ln 8 \frac{d}{dx}(x^2)$$

$$= 2x(8^{x^2}) \ln 8$$

6) $f(x) = 10^{x^3}$

วิธีทำ $f'(x) = 10^{x^3} \ln 10 \frac{d}{dx} x^3)$

$= 3x^2 (10^x) \ln 10$

7) $f(x) = 2^{5x}\, 3^{4x^2}$

วิธีทำ

$$f'(x) = 2^{5x} \frac{d}{dx}(3^{4x^2}) + 3^{4x^2} \frac{d}{dx}(2^{5x})$$

$$= (2^{5x})(3^{4x^2})(\ln 3) \frac{d}{dx}(4x^2)$$

$$+(3^{4x^2})(2^{5x})(\ln 2) \frac{d}{dx}(5x)$$

$$= (8x)(2^{5x})(3^{4x^2})(\ln 3) + (5)$$

$$(3^{4x^2})(2^{5x})(\ln 2)$$

8) $f(x) = (x^3 + 3)\, 2^{-7x}$

วิธีทำ

$$f'(x) = (x^3 + 3) \frac{d}{dx} 2^{-7x} + 2^{-7x} \frac{d}{dx}(x^3+3)$$

$$= (x^3+3)(2^{-7x})(\ln 2) \frac{d}{dx}(-7x)$$

$$+ (2^{-7x})(3x^2)$$

$$= (-7)(x^3 + 3)(2^{-7x})(\ln 2) + 3x^2\, 2^{-7x}$$

9) $f'(x) = \dfrac{\log_{10} x}{x}$

วิธีทำ

$$f'(x) = \frac{x \frac{d}{dx} \log_{10}x - \log_{10}x \frac{dx}{dx}}{x^2}$$

$$= \frac{\frac{x \log_{10}e}{x} - \log_{10}x}{x^2}$$

$$= \frac{\log_{10}e - \log_{10}x}{x^2}$$

$$= \frac{\log_{10} \frac{e}{x}}{x^2}$$

10) $f(x) = \log_{10} \dfrac{x}{x+1}$

วิธีทำ $\because$ $f(x) = \log_{10} \dfrac{x}{x+1}$

$$= \log_{10}x - \log_{10}(x+1)$$

$\therefore$ $f'(x) = \dfrac{\log_{10}e}{x} - \dfrac{\log_{10}e}{x+1}$

$$= \frac{x\log_{10}e + \log_{10}e - x\log_{10}e}{x(x+1)}$$

$$= \frac{\log_{10}e}{x(x+1)}$$

11) $f(x) = \sqrt{\log_a x}$

วิธีทำ

$$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{\log_a x}} \frac{d}{dx} \log_a x$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{\log_a x}} \frac{(\log_a e)}{x}$$

$$= \frac{\log_a e}{2x\sqrt{\log_a x}}$$

12) $f(x) = \log_{10} \frac{1+x}{1-x}$

วิธีทำ $\because f(x) = \log_{10} \frac{1+x}{1-x}$

$$= \log_{10}(1+x) - \log_{10}(1-x)$$

$$\therefore f'(x) = \frac{\log_{10}e}{1+x} + \frac{\log_{10}e}{1-x}$$

$$= \log_{10}e \left(\frac{1}{1+x} + \frac{1}{1-x} \right)$$

$$= \log_{10}e \left(\frac{1-x+1+x}{1-x^2} \right)$$

$$= \log_{10}e \left(\frac{2}{1-x^2} \right)$$

13) $f(x) = \log_{10}(\log_{10}(x+1))$

วิธีทำ $f'(x) = \frac{\log_{10}e}{\log_{10}(x+1)} \frac{d}{dx}(\log_{10}(x+1))$

$$= \frac{\log_{10}e}{\log_{10}(x+1)} \frac{(\log_{10}e)}{x+1}$$

$$= \frac{\log_{10}^2 e}{(x+1)(\log_{10}(x+1))}$$

14) $f(X) = \log_a (\log_a(\log_a (\log_a x))$

วิธีทำ

$$f'(x) = \frac{\log_a e}{\log_a(\log_a x)} \frac{d}{dx}\left(\log_a (\log_a x)\right)$$

$$= \frac{\log_a e}{\log_a(\log_a x)} \left(\frac{\log_a e}{\log_a x}\right) \frac{d}{dx} \log_a x$$

$$= \frac{\log_a e}{\log_a(\log_a x)} \left(\frac{\log_a e}{\log_a x}\right) \left(\frac{\log_a e}{x}\right)$$

$$= (\log_a^3 e) \left(\frac{1}{\log_a(\log_a x)}\right) \left(\frac{1}{\log_a x}\right) \left(\frac{1}{x}\right)$$

15) $f(X) = x^{\sqrt{x}}$

วิธีทำ

$$\ln f(X) = \ln x^{\sqrt{x}}$$

$$= \sqrt{x}\ (\ln x)$$

$$\frac{1}{f(x)} \frac{d}{dx} f(x) = \sqrt{x} \frac{d}{dx} \ln x + \ln x \frac{d}{dx}\sqrt{x}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{x}} + \frac{\ln x}{2\sqrt{x}}$$

$$\therefore \quad f'(x) = x^{x}\left(\frac{1}{x} + \frac{\ln x}{2\ x}\right)$$

16) $f(x) = x^{\ln x}$

วิธีทำ

$$\ln f(x) = \ln x(\ln x)$$

$$\frac{1}{f(x)}\frac{d}{dx} f(x) = \frac{1}{\ln x}\frac{d}{dx}(\ln x)$$

$$= \frac{1}{x\ln x}$$

$$\therefore \quad f'(x) = \frac{x^{\ln x}}{x \ln x}$$

17) $f(x) = x^{e^{x}}$

วิธีทำ

$$\ln f(x) = e^{x} \ln x$$

$$\frac{1}{f(x)}\frac{d}{dx} f(x) = e^{x}\frac{d}{dx} \ln x + \ln x\frac{d}{dx}e^{x}$$

$$= \frac{e^{x}}{x} + e^{x} \ln x$$

$$\therefore \quad f'(x) = x^{e^{x}}\left(\frac{e^{x}}{x} + e^{x} \ln x\right)$$

18) $f(x) = x^{x^2}$

วิธีทำ

$$\ln f(x) = x^2 \ln x$$

$$\frac{1}{f(x)}\frac{d}{dx}f(x) = x^2\frac{d}{dx}\ln x + \ln x\frac{d}{dx}x^2$$

$$= x + 2x(\ln x)$$

$$f'(x) = x^{x^2}(x+2x(\ln x))$$

19) $f(x) = (e^x)^x$

วิธีทำ

$$\ln f(x) = x \ln e^x$$

$$\frac{1}{f(x)}\frac{d}{dx}f(x) = x\frac{d}{dx}\ln e^x + \ln e^x \frac{dx}{dx}$$

$$= x\left(\frac{1}{e^x}\right)\frac{d}{dx}e^x + \ln e^x$$

$$= x + \ln e^x$$

$$f'(x) = x \ln e^x (x + \ln e^x)$$

20) $f(x) = (\ln x)^{\ln x}$

วิธีทำ

$$\ln f(x) = \ln x \ln(\ln x)$$

$$\frac{1}{f(x)}\frac{d}{dx}f(x) = \ln x\frac{d}{dx}\ln(\ln x) + \ln(\ln x)\frac{d}{dx}\ln x$$

$$= \ln x\left(\frac{1}{\ln x}\right)\frac{d}{dx}\ln x + \ln(\ln x)\left(\frac{1}{x}\right)$$

$$= \frac{1}{x} + \frac{\ln(\ln x)}{x}$$

$$f'(x) = (\ln x)^{\ln x}\frac{(1+\ln(\ln x))}{x}$$

21) $f(x) = (\ln x)^x$

วิธีทำ

$$\ln f(x) = x\ln(\ln x)$$

$$\frac{1}{f(x)}\frac{d}{dx}f(x) = x\frac{d}{dx}\ln(\ln x) + \ln(\ln x)\frac{dx}{dx}$$

$$= x\left(\frac{1}{\ln x}\right)\frac{d}{dx}\ln x + \ln(\ln x)$$

$$= x\left(\frac{1}{\ln x}\right)\left(\frac{1}{x}\right) + \ln(\ln x)$$

$$= \frac{1}{\ln x} + \ln(\ln x)$$

$$f'(x) = (\ln x)^x\left(\frac{1}{\ln x} + \ln(\ln x)\right)$$

22) $f(x) = (4e^x)^{3x}$

วิธีทำ

$$\ln f(x) = 3x\ln(4e^x)$$

$$\therefore \frac{1}{f(x)}\frac{d}{dx}f(x) = 3x\frac{d}{dx}\ln(4e^x) + \ln(4e^x)\frac{d}{dx}(3x)$$

$$= 3x\left(\frac{1}{4e^x}\right)\frac{d}{dx}(4e^x) + 3\ \ln(4e^x)$$

$$= 3x + 3\ln(4e^x)$$

$$\therefore f'(x) = (4e^x)^{3x}\ (3x+3\ \ln(4e^x)\ )$$

จากข้อ 23 ถึงข้อ 32 จงหาค่าของ indefinite integral

23) $\int 3^{2x}\ dx$

วิธีทำ ให้ $u = 2x$

$du = 2dx$

$\therefore dx = \frac{1}{2}\ du$

$$\therefore \int 3^{2x}\ dx = \frac{1}{2}\int 3^u\ du$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{3^u}{\ln\ 3}\right) + c$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{3^{2x}}{\ln 3}\right) + c$$

24) $\int a^{nx}\ dx$

วิธีทำ ให้ $u = nx$

$du = ndx$

$dx = \frac{1}{n}\ du$

$$\therefore \int a^{nx}\ dx = \frac{1}{n}\int a^u\ du$$

$$= \frac{1}{n}\left(\frac{a^u}{\ln a}\right) + c$$

$$= \frac{1}{n}\left(\frac{a^{nx}}{\ln a}\right) + c$$

25) $\int a^x e^x \, dx$

วิธีทำ

$$\int a^x e^x \, dx = \int (ae)^x \, dx$$
$$= \frac{(ae)^x}{\ln ae} + c$$
$$= \frac{a^x e^x}{\ln a + \ln e} + c$$
$$= \frac{a^x e^x}{1 + \ln a} + c$$

26) $\int (e^{3x} + a^{3x}) \, dx$

วิธีทำ ให้ $u = 3x$

$du = 3dx$

$dx = \frac{1}{3} du$

$$\therefore \int (e^{3x} + a^{3x}) \, dx = \frac{1}{3} \int (e^u + a^u) du$$
$$= \frac{1}{3} (e^u + \frac{a^u}{\ln a}) + c$$
$$= \frac{1}{3} (e^{3x} + \frac{a^{3x}}{\ln a}) + c$$

27) $\int x^2 \, 10^{x^3} \, dx$

วิธีทำ ให้ $u = x^3$

$du = 3x^2 \, dx$

$x^2 \, dx = \frac{1}{3} du$

$$\therefore \int x^2 \, 10^{x^3} \, dx = \frac{1}{3} \int 10^u \, du$$

$$= \frac{1}{3}\left(\frac{10^u}{\ln 10}\right) + c$$

$$= \frac{10^{x^3}}{3\ln 10} + c$$

28) $\int 5^{x^4+2x} \; (2x^3+1)\, dx$

วิธีทำ ให้ $u = x^4 + 2x$

$$du = (4x^3 + 2)\, dx$$

$$\therefore 2x^3 + 1dx = \frac{1}{2}\, du$$

$$\therefore \int 5^{x^4+2x}(2x^3+1)dx = \frac{1}{2}\int 5^u\, du$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{5^u}{\ln 5}\right) + c$$

$$= \frac{5^{x^4+2x}}{2\ln 5} + c$$

29). $\int \frac{10^{\ln x^2}}{x}\, dx$

วิธีทำ $\int \frac{10^{\ln x^2}}{x} dx = \int \frac{10^{2\ln x}}{x} dx$

ให้ $u = 2\ln x$

$$du = \frac{2}{x}\, dx$$

$$\therefore \frac{1}{x}\, dx = \frac{1}{2}\, du$$

$$\therefore \int \frac{10^{\ln x^2}}{x} dx = \int \frac{10^{2\ln x}}{x}\, dx$$

$$= \frac{1}{2}\int 10^u\, du$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{10^u}{\ln 10}\right) + c$$

$$= \frac{10^{2\ln x}}{2\ln 10} + c$$

30) $\int a^{x\ln x}(\ln x+1)\,dx$

วิธีทำ ให้ $u = x\ln x$

$du = (x(\frac{1}{x}) + \ln x)\,dx$

$= (1 + \ln x)\,dx$

$\therefore \int a^{x\ln x}(\ln x+1)dx = \int a^u\,du$

$= \frac{a^u}{\ln a} + c$

$= \frac{a^{x\ln x}}{\ln a} + c$

31) $\int e^x\, 2^{e^x}\, 3^{e^x}\,dx$

วิธีทำ $\int e^x\, 2^{e^x}\, 3^{e^x}\,dx = \int e^x\, 6^{e^x}dx$

ให้ $u = e^x$

$du = e^x\,dx$

$\therefore \int e^x\, 2^{e^x}\, 3^{e^x}\,dx = \int e^x\, 6^{e^x}\,dx$

$= \int 6^u\,du$

$= \frac{6^u}{\ln 6} + c$

$= \frac{6^{e^x}}{\ln 6} + c$

32) $\int \frac{4^{\ln(\frac{1}{x})}}{x}\,dx$

วิธีทำ $\int \frac{4^{\ln(\frac{1}{x})}}{x}\,dx = \int \frac{4^{-\ln x}}{x}\,dx$

ให้ $u = -\ln x$

$du = -\frac{1}{x}dx$

$\frac{1}{x}dx = -du$

$$\therefore \int \frac{4^{\ln(\frac{1}{x})}}{x}dx = \int \frac{4^{-\ln x}}{x}dx$$

$$= -\int 4^u du$$

$$= -\frac{4^u}{\ln 4} + c$$

$$= \frac{-4^{-\ln x}}{\ln 4} + c$$

$$= \frac{-4^{\ln(\frac{1}{x})}}{\ln 4} + c$$

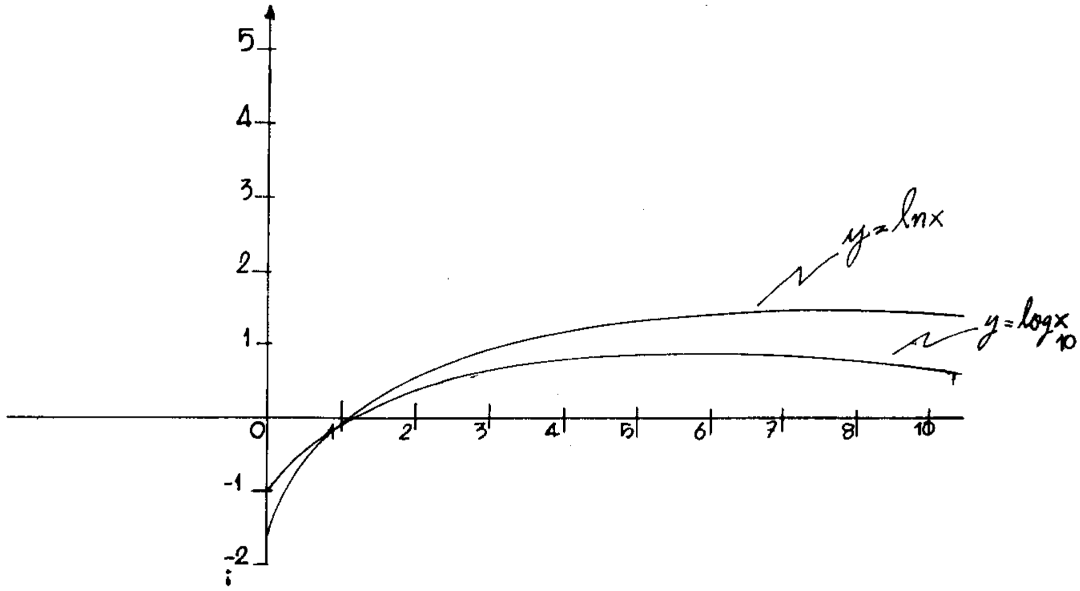
33) จงเขียนกราฟของ $y = \log_{10}x$ และ $y = \ln x$ บนแกนโคออร์ดิเนตเดียวกัน

วิธีทำ พิจารณาจากตารางข้างล่าง

x	0.25	0.5	1	2	4	8	10	100
$y=\log_{10}x$	-0.6	-0.3	0	0.3	0.6	0.9	1	2
$y=\ln x$	-1.38	-0.69	0	0.69	1.39	2.08	2.30	4.60

โดย $y = \log_{10}x = \frac{\ln x}{\ln 10}$

และจะได้ว่ากราฟ $y = \log_{10}x$ ตัดกันที่จุด (1,0)
ซึ่งเมื่อเขียนกราฟแล้วจะได้ดังสรุป



34) จงหาสมการของเส้นสัมผัสเส้นโค้ง $y = x^{x-1}$
ที่จุด (2,2)

วิธีทำ หาความชันของเส้นโค้ง $y=x^{x-1}$ ที่จุด(2,2)ก่อน

จาก $y = x^{x-1}$

$$\therefore \ln y = (x-1)\ln x$$

$$\therefore \frac{1}{y}\frac{dy}{dx} = (x-1)\frac{d}{dx}\ln x + \ln x\frac{d}{dx}(x-1)$$

$$= \frac{x-1}{x} + \ln x$$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = x^{x-1}\left(\frac{x-1}{x} + \ln x\right)$$

ที่ $x = 2$ จะได้ $\frac{dy}{dx} = 2^{2-1}\left(\frac{2-1}{2} + \ln 2\right)$

$$= 1+2\ln 2$$

$\therefore$ ความชันของเส้นสัมผัสที่ต้องการคือ 1+2 ln2
ดังนั้นสมการของเส้นสัมผัสที่ผ่านจุด (2,2) และมีความชัน 1+2 ln2 คือ

$$y - 2 = 1 + 2\ln x(x-2)$$

$$y = (1 + 2\ln 2)\, x - 4\ln 2$$

35) สมการของอุปสงค์ของสินค้าชนิดหนึ่งคือ $p = 10(4)^{-\frac{x}{2}}$ เมื่อ x หน่วยเป็นปริมาณของอุปสงค์และ p บาท เป็นราคาต่อหน่วยถ้าราคาตลาดเท่ากับ 5 บาท จงหาส่วนเกินของผู้บริโภค พร้อมทั้งวาดรูปแสดงถึงเส้นอุปสงค์และแสดงส่วนของพื้นที่ซึ่งเป็นส่วนเกินของผู้บริโภค

<u>วิธีทำ</u> จาก $p = 10(4)^{-\frac{x}{2}}$

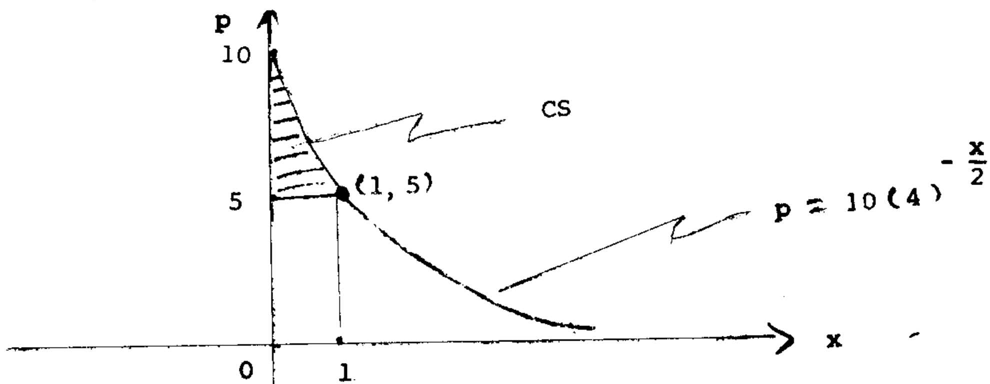
ถ้า $p = 5$ จะได้ว่า $5 = 10(4)^{-\frac{x}{2}}$

$$\therefore (2^2)^{-\frac{x}{2}} = \frac{1}{2}$$

$$2^{-x} = 2^{-1}$$

$$\therefore x = 1$$

ส่วนเกินของผู้บริโภคคือพื้นที่ของบริเวณที่แรเงาในรูป



$$CS = \int_0^1 10(4)^{-\frac{x}{2}} dx - (5 \times 1)$$

$$= 10(-2)\int_0^1 4^{-\frac{x}{2}}\, d(-\frac{x}{2}) - (5 \times 1)$$

$$= -20\ (\frac{4^{-\frac{x}{2}}}{\ln 4})\Big]_0^1 - 5$$

$$= \frac{-20}{2\ \ln 2}\ (4^{-\frac{1}{2}} - 4^0) - 5$$

$$= \frac{-10}{0.69}\ (\frac{1}{2} - 1) - 5$$

$$= \frac{5}{0.69} - 5$$

$$= 7.24 - 5$$

$$= 2.24$$

ดังนั้นส่วนเกินของผู้บริโภคเท่ากับ 2.24 บาท

36) สมการของอุปทานของสินค้าชนิดหนึ่งคือ $p = 5(3)^{\frac{x}{4}}$ เมื่อ x หน่วยเป็นปริมาณของการเสนอขาย และ p บาท เป็นราคาต่อหน่วยจงหาส่วนเกินของผู้ผลิตเมื่อราคาตลาดเท่ากับ 15 บาท ให้แสดงรูปของเส้นอุปทานและแสดงส่วนของพื้นที่ซึ่งเป็นส่วนเกินของผู้ผลิต

<u>วิธีทำ</u> จาก $p = 5(3)^{\frac{x}{4}}$

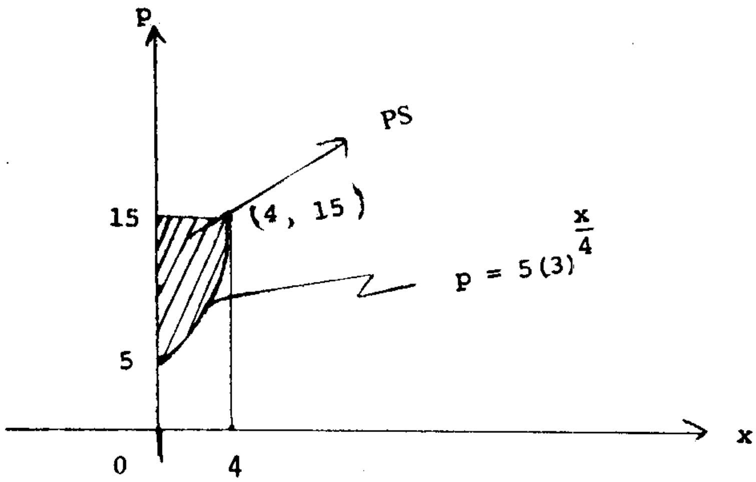
เมื่อ $p = 15$ จะได้ว่า $15 = 5(3)^{\frac{x}{4}}$

$$\therefore\ 3^{\frac{x}{4}} = 3$$

$$\therefore\ \frac{x}{4} = 1$$

$$\therefore\ x = 4$$

ส่วนเกินของผู้ผลิตคือพื้นที่ของบริเวณที่แรเงาในรูป



$$\therefore \quad PS = (15 \times 4) - \int_0^4 5(3)^{\frac{x}{4}}\, dx$$

$$= 60 - 5(4) \int_0^4 3^{\frac{x}{4}}\, d\left(\frac{x}{4}\right)$$

$$= 60 - 20 \left(\frac{3^{\frac{x}{4}}}{\ln 3} \right) \Bigg]_0^4$$

$$= 60 - \frac{20}{1.0986} \left(3^{\frac{4}{4}} - 3^{0} \right)$$

$$= 60 - \frac{40}{1.0986}$$

$$= 60 - 36.41$$

$$= 23.59$$

ดังนั้นส่วนเกินของผู้บริโภคเท่ากับ 23.59 บาท

37) รูปภาพทางประวัติศาสตร์ที่สำคัญรูปหนึ่ง ซึ่งซื้อมาเมื่อปี 1918 ในราคา 200 บาท มูลค่าของรูปจะเพิ่มขึ้นเป็น 2 เท่าของราคาที่ซื้อมาในทุก ๆ 10 ปี ถ้าให้ y บาท เป็นมูลค่าของรูปภาพในเวลา t ปี ที่ซื้อมา

a) แสดง y ในรูปของ x

b) มูลค่าของรูปจะเป็นเท่าไรในปี 1978

c) จงหาอัตราการเพิ่มขึ้นของมูลค่าของรูปภาพในปี 1978

<u>วิธีทำ</u>

a) แสดง y ในรูปของ t จะได้ว่า $y = 200(2^{\frac{t}{10}})$

b) จาก $y = 200(2^{\frac{t}{10}})$

เวลาจากปี 1918 ถึง 1978 = 60 ปี

$\therefore t = 60$ จะได้ว่า

$$y = 200(2^{\frac{60}{10}})$$

$$= 200(2^6)$$

$$= 12,800$$

c) จาก $y = 200(2^{\frac{t}{10}})$

$$\therefore \frac{dy}{dt} = 200(2^{\frac{t}{10}})(\ln 2)\left(\frac{d}{dt}\frac{t}{10}\right)$$

$$= (200)(2^{\frac{t}{10}})(\ln 2)\left(\frac{1}{10}\right)$$

เมื่อ $t = 60$

$$\therefore \frac{dy}{dt} = (200)(2^6)\left(\frac{1}{10}\right)(\ln 2)$$

$$= \left(\frac{12,800}{10}\right)(0.6931)$$

$$= 887.1681 \text{ บาท}$$

38) บริษัทหนึ่งคาดคะเนว่าในเวลา t ปี ปริมาณของคนงานจะเท่ากับ N เมื่อ $N = 1000(0.8)^{\frac{t}{2}}$

a) จงหาว่าเป็นปริมาณของคนงานจะเป็นเท่าไรใน 4 ปี

b) และอัตราการเปลี่ยนแปลงของคนงานจะเป็นเท่าไรใน 4 ปี

วิธีทำ

a) จาก $N = 1000(0.8)^{\frac{t}{2}}$

ถ้า $t = 4$ จะได้ว่า $N = 1000(0.8)^{\frac{4}{2}}$

$= 1000(.64)$

$= 640$

ดังนั้นปริมาณคนงานจะเป็น 640 คนในเวลา 4 ปี

b) จาก $N = 1000(0.8)^{\frac{t}{2}}$

$$\therefore \frac{dN}{dt} = 1000(0.8)^{\frac{t}{2}} (\ln 0.8) \frac{d}{dt}\left(\frac{t}{2}\right)$$

$$= 500(\ln 0.8)(0.8)^{\frac{t}{2}}$$

เมื่อ $t = 4$ จะได้ว่า $\frac{dN}{dt} = 500(\ln 0.8)(0.8)^{2}$

$= -71.4208$

39) บริษัทแห่งหนึ่งทราบว่าเมื่อมีการเริ่มแข่งขันทางด้านการขายใหม่ขึ้นปริมาณของการขายจะเพิ่มขึ้นต่อวันแต่อย่างไรก็ตาม ปริมาณการขายที่เพิ่มขึ้นแต่ละวันจะลดลงเนื่องจากอิทธิพลของการแข่งขันค่อย ๆ หมดไปในการแข่งขันครั้งหนึ่งบริษัทกำหนดให้ว่าถ้า s เป็นปริมาณของการขายที่เพิ่มขึ้นในแต่ละวันจากการแข่งขันและ x เป็นจำนวนวันนับจากการแข่งขันสิ้นสุดลงเมื่อ $s = 100(3)^{-\frac{x}{2}}$ จงหาอัตราของการลดลงของยอดขายที่เพิ่มขึ้นเมื่อ **a) x = 4, b) x = 10**

<u>วิธีทำ</u>

จาก $s = 100(3)^{-\frac{x}{2}}$

$$\therefore \frac{ds}{dx} = 100(3)^{-\frac{x}{2}}(\ln 3)\,\frac{d}{dx}\left(-\frac{x}{2}\right)$$

$$= 100(3)^{-\frac{x}{2}}(\ln 3)\left(-\frac{1}{2}\right)$$

$$= -54.93(3)^{-\frac{x}{2}}$$

a) เมื่อ $x = 4$ จะได้ว่า

$$\frac{ds}{dx} = -54.93(3)^{-\frac{4}{2}}$$

$$= -54.93(3^{-2})$$

$$= \frac{-54.93}{9}$$

$$= -6.10$$

b) เมื่อ $x = 10$ จะได้ว่า

$$\frac{ds}{dx} = -54.93(3)^{-\frac{10}{2}}$$

$$= -54.93(3)^{-5}$$

$$= \frac{-54.93}{243}$$

$$= -0.23$$

40. บริษัทผู้ผลิตสินค้าชนิดหนึ่งได้กำหนดให้ว่า ถ้า x เป็นหน่วยของผลผลิตที่ผลิตได้ต่อหนึ่งสัปดาห์ มีต้นทุนส่วนเพิ่มเท่ากับ $2^{\frac{x}{2}}$ และรายได้ส่วนเพิ่มเท่ากับ $8(2)^{-\frac{x}{2}}$ โดยให้ค่าใช้จ่าย และรายได้จากการผลิตคิดเป็นพันบาท ถ้าต้นทุนคงที่ต่อสัปดาห์เท่ากับ 2,000 บาท จงหาผลกำไรสูงสุดต่อหนึ่งสัปดาห์ที่จะได้รับ

<u>วิธีทำ</u> ให้ $C(x)$ บาท เป็นต้นทุนทั้งหมดของผลผลิต x หน่วย

$R(x)$ บาท เป็นฟังก์ชันรายได้ทั้งหมดจากการขายของ x หน่วย

$P(x)$ บาท เป็นกำไรทั้งหมดของการขายของ x หน่วย

จากต้นทุนเพิ่ม หรือ $C'(x) = 2^{\frac{x}{2}}$

$$\therefore C(x) = \int 2^{\frac{x}{2}} dx$$

$$= 2\int 2^{\frac{x}{2}} d(\frac{x}{2})$$

$$= \frac{2}{\ln 2} 2^{\frac{x}{2}} + C_1$$

จากต้นทุนคงที่เท่ากับ 2,000 บาท หรือ $C(0) = 2$

$$2 = \frac{2}{\ln 2}(2^0) + C_1$$

$$C_1 = 2 - \frac{2}{\ln 2}$$

$$\therefore C(x) = \frac{2}{\ln 2}(2^{\frac{x}{2}}) - \frac{2}{\ln 2} + 2$$

$$= \frac{2}{\ln 2}(2^{\frac{x}{2}} - 1) + 2$$

และจากรายได้เพิ่ม $R'(x) = 8(2)^{-\frac{x}{2}}$

$$\therefore R(x) = \int 8(2^{-\frac{x}{2}})dx$$

$$= 8(-2)\int 2^{-\frac{x}{2}} d(-\frac{x}{2})$$

$$= -16\frac{(2^{-\frac{x}{2}})}{\ln 2} + C_2$$

จากรายได้เท่ากับ 0 เมื่อสินค้าเท่ากับ 0 หรือ $R(0) = 0$

$$\therefore \frac{-16}{\ln 2} + C_2 = 0$$

$$\therefore C_2 = \frac{16}{\ln 2}$$

$$\therefore R(x) = \frac{-16}{\ln 2}\left(2^{-\frac{x}{2}}\right) + \frac{16}{\ln 2}$$

$\therefore$ กำไร = รายได้ - ต้นทุน

หรือ $P(x) = R(x) - C(x)$

$$= \frac{-16}{\ln 2}\left(2^{-\frac{x}{2}}\right) + \frac{16}{\ln 2} - \frac{2}{\ln 2}2^{\frac{x}{2}} + \frac{2}{\ln 2} - 2$$

อนึ่ง กำไรสูงสุดจะเกิดขึ้นได้ก็ต่อเมื่อรายได้เพิ่มมีค่าเท่ากับต้นทุนเพิ่ม

ดังนั้น $R'(x) = C'(x)$

$$8\left(2^{-\frac{x}{2}}\right) = 2^{\frac{x}{2}}$$

$$(2^3)\left(2^{-\frac{x}{2}}\right) = 2^{\frac{x}{2}}$$

$$2^{3-\frac{x}{2}} = 2^{\frac{x}{2}}$$

$$\therefore 3 - \frac{x}{2} = \frac{x}{2}$$

$$\therefore x = 3$$

และ $$P(3) = \frac{-16}{\ln 2}\left(2^{-\frac{3}{2}}\right) + \frac{16}{\ln 2} - \frac{2}{\ln 2}\left(2^{\frac{3}{2}}\right) + \frac{2}{\ln 2} - 2$$

$$= 7.7$$

แสดงว่ากำไรสูงสุดต่อหนึ่งสัปดาห์คือ 7,700 บาท โดยผลิตของได้ 300 หน่วย

7.5 กฎการเจริญเติบโตและการสลายตัว

จากการที่ได้ศึกษาเรื่องฟังก์ชันเอ็กซ์โปเนนเชียลมาแล้ว สามารถจะนำมาใช้ในการแก้ปัญหาทางด้านธุรกิจ, เศรษฐศาสตร์ และวิทยาศาสตร์ทั้งในสาขาวิชาชีววิทยา, เคมี, ฟิสิกส์ เป็นต้น โดย

ถ้าให้ t หน่วยแทนเวลา

A หน่วยแทนปริมาณ

แล้ว $\frac{dA}{dt} = kA$ เมื่อ k เป็นค่าคงที่

1) ถ้า A เพิ่มขึ้นขณะที่ t เพิ่มขึ้นแล้ว $k > 0$ เราจะได้ $\frac{dA}{dt} = kA$ เป็นกฎการเติบโตโดยธรรมชาติ

2) ถ้า A ลดลงขณะที่ t เพิ่มขึ้นแล้ว $k < 0$ เราจะได้ $\frac{dA}{dt} = kA$ เป็นกฎการสลายตัวโดยธรรมชาติ

เฉลยแบบฝึกหัด 7.5

ในอัตราการเพิ่มขึ้นของประชากรในเมือง ๆ หนึ่งเป็นสัดส่วนกับจำนวนประชากรในเมืองนั้น ๆ ถ้าจำนวนประชากรเพิ่มขึ้นจาก 40,000 คน เป็น 60,000 คน ในเวลา 40 ปี อยากทราบว่าเมื่อไรจะมีประชากรเป็น 80,000

วิธีทำ

ให้ A เป็นจำนวนของประชากรในเวลา t ปี

t เป็นจำนวนปี

t	0	40	?
A	40,000	60,000	80,000

จาก $\frac{dA}{dt} = kA$

หรือ $\frac{dA}{A} = kdt$

$\therefore \int \frac{dA}{A} = \int kdt$

$\therefore \ln|A| = kt + C_1$

$\therefore |A| = e^{kt+C_1}$

ให้ $e^{C_1} = C$

$\therefore |A| = Ce^{kt}$

หรือ $A = Ce^{kt}$ ------------- (1)

จาก t=0, A=40,000 แทนค่าใน (1) จะได้

$$\therefore\ 40{,}000 = Ce^{0} = C(1)$$

$$\therefore\ C = 40{,}000$$

และจาก $t=40$, $A=60{,}000$ แทนค่าใน (1) จะได้

$$\therefore\ 60{,}000 = 40{,}000\,e^{40k}$$

$$e^{40k} = 1.5$$

$$40k = \ln 1.5$$

$$\therefore\ k = \frac{\ln 1.5}{40}$$

$$= \frac{0.4055}{40}$$

$$= 0.0101$$

อยากทราบว่า $t=?$ เมื่อ $A=80{,}000$ จะได้ว่า

$$\therefore\ 80{,}000 = 40{,}000\,e^{0.0101t}$$

$$2 = e^{0.0101t}$$

$$\therefore\ \ln 2 = 0.0101t$$

$$\therefore\ t = \frac{\ln 2}{0.0101}$$

$$= \frac{0.6931}{0.0101}$$

$$= 68.6237$$

ดังนั้นจะมีประชากร 80,000 ในเวลา 68.6237 ปี

2) จำนวนประชากรของเมือง ๆ หนึ่งเพิ่มขึ้นเป็น 2 เท่า ในระยะเวลา 60 ปี จากปี 1890 ถึงปี 1950 ถ้าอัตราการเพิ่มขึ้นของประชากรในเวลาใดก็ตามเป็นสัดส่วนกับจำนวนประชากรในเวลานั้น และถ้าประชากรในปี 1950 มี 60,000 จงคำนวณจำนวนประชากรในปี 2000

วิธีทำ

ให้ A เป็นจำนวนประชากรในเวลา t ปี

t เป็นจำนวนปี โดยปีที่เริ่มต้นคือปี 1890

t	0	60	110	
A	30,000	60,000	?	

จาก $\frac{dA}{dt} = kA$

โดยการแยกตัวแปรค่าเช่นเดียวกับข้อ 1) เราจะได้รากของสมการทั่ว ๆ ไป คือ

$$A = C e^{kt} \quad \text{\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_} (1)$$

$\therefore$ เมื่อ $t=0$, $A=30{,}000$ แทนค่าใน (1) จะได้

$$30{,}000 = C e^{0}$$

$$\therefore C = 30{,}000$$

เมื่อ $t=60$, $A=60{,}000$ แทนค่าใน (1) จะได้

$$60{,}000 = 30{,}000 e^{60k}$$

$$e^{60k} = 2$$

$$60k = \ln 2$$

$$\therefore k = \frac{\ln 2}{60}$$

$$= \frac{0.๖931}{60}$$

$$= 0.0115$$

อยากทราบว่า เมื่อ t=110 แล้ว A=?

$$\therefore \quad A = 30000\ e^{0.0115(110)}$$

$$= 30000\ e^{1.265}$$

$$= 30000 \sim (3.54)$$

$$= 106{,}200 \text{ คน}$$

ดังนั้นจำนวนประชากรที่คาดว่าจะมีในปี 2000 คือ 106,200 คน

3) อัตราการเจริญเติบโตของแบคทีเรียชนิดหนึ่งในอุณหภูมิขณะหนึ่งเป็นสัดส่วนกับจำนวนแบคทีเรียในขณะนั้นและอุณหภูมินั้น ถ้าในระยะเริ่มแรกมีจำนวนแบค-ทีเรียในขณะนั้น เป็นจำนวน 1000 และจำนวนแบคทีเรียนี้จะเพิ่มเป็นจำนวน 2 เท่าของระยะเริ่มแรก โดยใช้เวลาใน 1 ชม. อยากทราบว่าจะมีจำนวนแบคทีเรียเท่าไรในเวลา 3 1/2 ชม.

วิธีทำ

ให้ A เป็นจำนวนของแบคทีเรียในเวลา t ชม.

t เป็นจำนวน ชม.

t	0	1	$3\frac{1}{2}$
A	1000	2000	?

จาก $\frac{dA}{dt} = kA$

โดยการแยกตัวแปรค่าเช่นเดียวกับข้อ 1) และจะได้รากของสมการทั่ว ๆ ไปคือ

ทั่ว ๆ ไป คือ

$$A = C e^{kt} \quad \text{\_\_\_\_\_\_\_\_} (1)$$

เมื่อ t=0, A=1,000 แทนค่าใน (1) จะได้

$$1,000 = C e$$

$$\therefore C = 1,000$$

เมื่อ t=1, A=2000 แทนค่าจะได้

$$2,000 = 1,000 e^{k}$$

$$\therefore e^{k} = 2$$

$$\therefore k = \ln 2$$

$$= 0.6931$$

อยากทราบว่า เมื่อ $t=3\frac{1}{2}$ แล้ว A=?

$$\therefore A = 1,000 e^{\frac{7}{2}(0.6931)}$$

$$= 1,000 e^{2.425}$$

$$= 1,000(11.302)$$

$$= 11302$$

ดังนั้นในเวลา $3\frac{1}{2}$ ชม. จะมีแบคทีเรีย 11302

4) ในอุณหภูมิที่แน่นอนแห่งหนึ่ง อัตราการเจริญเติบโตของแบคทีเรียเป็นสัดส่วนกับจำนวนของแบคทีเรียในขณะนั้น ถ้าใน 3 ชั่วโมง มีจำนวนแบคทีเรียเป็น 3 เท่าของจำนวนแบคทีเรียเมื่อเริ่มตั้งต้น และเมื่อใช้เวลา 12 ชั่วโมง จะมีจำนวนแบคทีเรียเป็น 10 ล้าน อยากทราบว่าเมื่อเริ่มแรกมีจำนวนแบคทีเรียเป็นจำนวนเท่าไร

วิธีทำ ให้ A เป็นจำนวนแบคทีเรียในขณะเวลา t ชั่วโมง

t เป็นจำนวนชั่วโมง

A เป็นจำนวนแบคทีเรียเมื่อเริ่มต้น

t	0	3	12
A	Ao	3Ao	10 ล้าน

จาก $\frac{dA}{dt} = kA$ จะได้ว่า

$$A = C e^{kt} \quad \text{\_\_\_\_\_\_(1)}$$

เมื่อ t=0, A=Ao แทนค่าใน (1) จะได้ว่า

$$\therefore A = C e^{0}$$

$$\therefore C = A_o$$

เมื่อ t=3, A=3A₀ แทนค่าใน (1) จะได้ว่า

$$3A_o = A_o e^{3k}$$

$$\therefore e^{3k} = 3$$

$$\therefore 3k = \ln 3$$

$$\therefore k = \frac{\ln 3}{3}$$

$$= \frac{1.0986}{3}$$

$$= 0.3662$$

และเมื่อ t=12, A=10,000,000 แทนค่าใน (1) จะได้ว่า

$$\therefore 10,000,000 = A_o e^{12(0.3662)}$$

$$= A_o (e^{4.39})$$

$$= A_o (80.640)$$

$$\therefore A_o = \frac{10,000,000}{80.640}$$

$$= 124007.93$$

ดังนั้น เมื่อเริ่มแรกมีจำนวนแบคทีเรียอยู่ 124007.93

5) หลังจากที่ใช้รถจักรยานยนต์ 1 ปี อัตราของการเสื่อมราคาในระยะเวลาใด ๆ เป็นสัดส่วนกับราคาในเวลานั้น ถ้ารถจักรยานยนต์คันหนึ่งมีราคาในวันที่ 1 มิถุนายน 1975 เป็นเงิน 3,500 บาท และในวันที่ 1 มิถุนายน 1977 เป็นเงิน 2,900 บาท อยากทราบว่า วันที่ 1 มิถุนายน 1981 รถคันนี้จะมีราคาเป็นเท่าไร

วิธีทำ ให้ A เป็นราคาของรถจักรยานยนต์ในปีที่ t

t เป็นจำนวนปี โดยเวลานับเริ่มต้นวันที่ 1 มิถุนายน 1975

t	0	2	6
A	3,500	2,900	?

จาก $\frac{dA}{dt} = kA$ จะได้ว่า

$$A = C e^{kt} \text{ \_\_\_\_\_\_ } (1)$$

เมื่อ t=0, A=3,500 แทนค่าใน (1) จะได้

$$3{,}500 = c\, e^{0}$$

$$\therefore \quad c = 3{,}500$$

เมื่อ $t=2$, $A=2{,}900$ แทนค่าจะได้ว่า

$$2{,}900 = 3{,}500\, e^{2k}$$

$$e^{2k} = \frac{29}{35}$$

$$\therefore \quad 2k = \ln \frac{29}{35}$$

$$= \ln 29 - \ln 35$$

$$= \ln(2.9)(10) - \ln(3.5)(10)$$

$$= \ln 2.9 + \ln 10 - \ln 3.5 - \ln 10$$

$$= \ln 2.9 - \ln 3.5$$

$$= 1.0647 - 1.2521$$

$$= -0.1881$$

$$\therefore \quad k = -0.13340$$

อยากทราบว่า เมื่อ $t=6$, $A=?$

$$\therefore A = 3500\, e^{6(-0.094)}$$

$$= 3506\, e^{-0.56}$$

$$= \frac{3500}{1.7507}$$

$$= 1999.20$$

ดังนั้นในวันที่ 1 มิถุนายน 1981 รถคันนี้จะมีราคาเป็น 1,999.20 บาท

6) อัตราการสลายตัวของน้ำตาลในน้ำ เป็นสัดส่วนกับปริมาณของน้ำตาลซึ่งยังไม่สลายตัว เมื่อเริ่มใส่น้ำตาล 50 ปอนด์ ลงในน้ำไปได้ 5 ชม. จะเหลือน้ำตาลอยู่ 20 ปอนด์ ถ้าต้องการจะให้น้ำตาลละลายไปถึง 90% จะต้องใช้เวลานานเท่าไร

วิธีทำ ให้ A เป็นน้ำหนักของน้ำตาลที่เหลือในเวลา t ชั่วโมง

t เป็นเวลาคิดเป็นชั่วโมง

t	0	5	?
A	50	20	5

(หมายเหตุ น้ำตาลละลายไป 90% แสดงว่าเหลือ 10% และ 10% ของ 50 ก็คือ 5)

จาก $\frac{dA}{dt} = kA$ ซึ่งจะได้ว่า

$$A = Ce^{kt} \quad \text{\_\_\_\_\_\_\_\_(1)}$$

เมื่อ t=0, A=50 แทนลงใน (1) จะได้

$$50 = Ce^{0}$$

$$\therefore c = 50$$

เมื่อ t=5, A=20 แทนลงใน (1) จะได้

$$20 = 50e^{5k}$$

$$e^{5k} = \frac{2}{5}$$

$$5k = \ln\frac{2}{5}$$

$$\therefore \quad k = \frac{\ln 2 - \ln 5}{5}$$

$$= \frac{0.6931 - 1.6094}{5}$$

$$= -0.1833$$

อยากทราบว่าเมื่อ A=5 แล้ว t=?

$$5 = 50\, e^{-0.1833t}$$

$$\therefore \quad e^{-0.1833t} = \frac{1}{10}$$

$$e^{0.1833t} = 10$$

$$0.1833t = \ln 10$$

$$\therefore \quad t = \frac{2.30259}{0.1833}$$

$$= 12.56$$

ดังนั้น ถ้าต้องการจะให้น้ำตาลละลายไปถึง 90% จะต้องใช้เวลา 12.56 ชั่วโมง

2-

7.6 ดอกเบี้ยเชิงเดียว ดอกเบี้ยทบต้น และดอกเบี้ยทบต้นแบบต่อเนื่อง

ดอกเบี้ยเชิงเดียว

ถ้าให้ A บาทเป็นจำนวนเงินที่ผู้ยืมส่งคืนให้เจ้าหนี้ทั้งต้นและดอกโดยผู้ยืมยืมเงินมา p บาท อัตราดอกเบี้ยเชิงเดียว 100i% ต่อปี ในระยะเวลา n ปี จะได้ว่า

$$A = p(1+ni) \text{ บาท}$$

หมายเหตุ ในการคิดคำนวณ เราจะคิด 1 ปีมี 360 วัน และ 1 เดือนมี 30 วัน

ดอกเบี้ยทบต้น

ถ้าให้ t เป็นจำนวนปีที่เราฝากเงินไว้กับธนาคารด้วยเงินต้น p อัตราดอกเบี้ย 100i% คิดดอกเบี้ยทบต้น m ครั้งต่อปี จำนวนครั้งที่เราคิดดอกเบี้ย (n) = mt ให้ A เป็นจำนวนเงินทั้งหมด เมื่อครบกำหนด t ปีแล้ว

$$A = p\left(1+\frac{i}{m}\right)^{mt}$$

ดอกเบี้ยทบต้นแบบต่อเนื่อง

ถ้า A บาทเป็นจำนวนเงินที่จะได้รับคืนเมื่อลงทุนไป p บาท ด้วยอัตราดอกเบี้ย 100i% คืออัตราดอกเบี้ยทบต้น m ครั้งต่อปี ลงทุนไปเป็นเวลา t ปี ในที่นี้ถ้ากำหนดให้คิดดอกเบี้ยทบต้นต่อเนื่องไปเรื่อย ๆ จนถึง t ปี จะได้ว่า

$$A = Pe^{it}$$

และจะได้ด้วยว่า

$$P = Ae^{-it}$$

เฉลยแบบฝึกหัด

ถ้าให้กู้ยืมเงินไป 1,000 บาท ด้วยอัตราดอกเบี้ย 6% เป็นระยะเวลา 4 ปี จงคำนวณหาเงินทั้งหมดที่จะได้เมื่อครบ 4 ปีแล้ว

a) เมื่อคิดดอกเบี้ยเชิงเดียว
b) เมื่อคิดดอกเบี้ยทบต้น ปีละครั้ง
c) เมื่อคิดดอกเบี้ยทบต้น ครึ่งปีครั้ง
d) เมื่อคิดดอกเบี้ยทบต้นต่อเนื่องกัน

a) เมื่อคิดดอกเบี้ยเชิงเดียว

วิธีทำ จากสูตร $A = P(1+ni)$

เมื่อ A เป็นจำนวนเงินทั้งหมดที่จะได้รับคืน

P คือเงินต้น

n เป็นจำนวนปีที่กู้ยืมเงินไป

i เป็นอัตราดอกเบี้ยเชิงเดียว

ในที่นี้ $P = 1{,}000$, $n = 4$, $i = 0.06$

$$\therefore A = 1{,}000(1+4(0.06))$$
$$= 1{,}240 \text{ บาท}$$

b) เมื่อคิดดอกเบี้ยทบต้นปีละครั้ง

วิธีทำ จากสูตร $A = P(1 + \frac{i}{m})^{mt}$ โดยหาเป็นจำนวนครั้งที่คิดดอกเบี้ยต่อปี และ t เป็นจำนวนปี เราให้กู้ยืมเงินไป ในที่นี้ $m = 1$, $t = 4$

$$\therefore A = 1000\left(1+\frac{0.06}{1}\right)^{(4)}$$
$$= 1000(1.26247)$$
$$= 1262.47 \text{ บาท}$$

C) เมื่อคิดดอกเบี้ยทบต้นครึ่งปีครั้ง

วิธีทำ จากสูตร $A = P(1+\frac{i}{m})^{mt}$

โดยในกรณีนี้ $m = 2$

$$\therefore A = 1,000(1+\frac{0.06}{2})^{(2)(4)}$$

$$= 1,000(1.26676)$$

$$= 1266.76 \text{ บาท}$$

d) เมื่อคิดดอกเบี้ยทบต้นต่อเนื่องกัน

จากสูตร $A = P e^{it}$

เมื่อ A เป็นจำนวนเงินทั้งหมดที่จะได้รับคืน
P เป็นเงินต้นที่ให้กู้ยืมไป
i เป็นอัตราดอกเบี้ยเชิงเดียว
t เป็นจำนวนปีที่ให้กู้ยืมไป

แทนค่าแล้วจะได้ $A = 1,000(e^{(0.06)4})$

$$= 1,000(1.2712)$$

$$= 1271.2 \text{ บาท}$$

2) ถ้าให้กู้ยืมเงินไป 500 บาท เป็นระยะเวลา 2 ปี ด้วยอัตราดอกเบี้ย 4% จงคำนวณหาดอกเบี้ยที่จะได้รับหลังจาก 2 ปี แล้ว

a) เมื่อคิดดอกเบี้ยเชิงเดียว
b) เมื่อคิดดอกเบี้ยทบต้นปีละครั้ง
c) เมื่อคิดดอกเบี้ยทบต้น ครั้งต่อปี
d) เมื่อคิดดอกเบี้ยทบต้นต่อเนื่องกัน

วิธีทำ a) เมื่อคิดดอกเบี้ยเชิงเดียว

ในที่นี้ $P = 500,\ n = 2,\ i = 0.04$

จากสูตร $A = P(1+ni)$

$\therefore\ A = 500(1+(2)(0.04))$

$= 540$ บาท

ดังนั้นดอกเบี้ย $= 540 - 500 = 40$ บาท

b) เมื่อคิดดอกเบี้ยทบต้นปีละครั้ง

ในที่นี้ $P = 500,\ i = 0.04,\ m = 1,\ t = 2$

จากสูตร $A = P(1+\frac{i}{m})^{mt}$

$\therefore\ A = 500(1+\frac{0.04}{1})^{(1)(2)}$

$= 500(1.0816)$

$= 540.80$ บาท

ดังนั้นดอกเบีย. $= 540.8 - 500 = 40.80$ บาท

c) เมื่อคิดดอกเบี้ยทบต้น 4 ครั้งต่อปี

ในที่นี้ $P = 500,\ i = 0.04,\ m = 4,\ t = 2$

จากสูตร $A = P(1 + \frac{i}{m})^{mt}$

$\therefore\ A = 500(1 + \frac{0.04}{4})^{(4)(2)}$

$= 500(1.08285)$

$= 541.42$

ดังนั้นดอกเบี้ย $= 541.42 - 500 = 41.42$ บาท

d) เมื่อคิดดอกเบี้ยทบต้นต่อเนื่องกัน

ในที่นี้ $P = 500,\ e = 0.04,\ t = 2$

จากสูตร $A = Pe^{it}$

$= 500(e^{(0.04)2})$

$= 500(1.0833)$

$= 541.65$

ดังนั้นดอกเบี้ย $= 541.65 - 500 = 41.65$ บาท

3) ในการฝากเงินธนาคารแห่งหนึ่ง ธนาคารคิดดอกเบี้ยให้ 5% ถ้าเราต้องการจะมีเงิน 500 บาท ในบัญชีใน 5 ปีข้างหน้า เราจะต้องฝากเงินปัจจุบันเป็นจำนวนเงินเท่าไร โดย

a) คิดอัตราดอกเบี้ยทบต้นปีละครั้ง

b) คิดอัตราดอกเบี้ยทบต้น 4 ครั้งต่อปี

วิธีทำ a) คิดอัตราดอกเบี้ยทบต้นปีละครั้ง

ในที่นี้ $A = 500,\ i = 0.05,\ m = 1,\ t = 5$

จากสูตร $A = P(1 + \frac{i}{m})^{mt}$

$\therefore \quad 500 = P(1 + \frac{0.05}{1})^{(1)(5)}$

$500 = P(1.2762)$

$\therefore \quad P = \frac{500}{1.2762}$

$= 391.78$

b) คิดอัตราดอกเบี้ยทบต้น 4 ครั้งต่อปี

ในที่นี้ $A = 500,\ i = 0.05,\ m = 4,\ t = 5$

จากสูตร $$A = P(1 + \frac{1}{m})^{mt}$$

$$\therefore\ 500 = P(1 + \frac{0.05}{4})^{20}$$

$$= P(1.2820)$$

$$\therefore\ P = \frac{500}{1.282}$$

$$= 390.01$$ บาท

4) เงินจำนวนหนึ่ง ได้ลงทุนไปเป็นเวลา 10 ปี จะได้เงินเป็น 2 เท่า โดยอัตราดอกเบี้ยทบต้นต่อเนื่องกัน อยากทราบว่า ถ้าต้องการได้เงินเป็น 3 เท่า จะใช้เวลานานเท่าไร

วิธีทำ จากสูตร $A = Pe^{it}$

ในเวลา 10 ปี ได้เงินเป็น 2 เท่าของเงินต้น

$\therefore$ ในที่นี้ $A = 2P$ และ $t = 10$

$$\therefore\ 2P = Pe^{10i}$$

$$\therefore\ 2 = e^{10i}$$

$$\ln 2 = 10i$$

$$\therefore\ i = \frac{\ln 2}{10}$$

$$= \frac{0.6931}{10}$$

$$= 0.06931$$

อยากทราบว่าจะได้เงิน 3 เท่า ในเวลากี่ปี

$\therefore$ ถ้า $A = 3P,\ i = 0.06931$ แล้ว $t = ?$

จากสูตร $A = Pe^{it}$

$$3p = Pe^{0.06931t}$$

$$\therefore\ 3 = e^{0.06931t}$$

$$\therefore\ \ln 3 = 0.06931t$$

$$\therefore\ t = \frac{\ln 3}{0.06331}$$

$$= \frac{1.0386}{0.06931}$$

$= 15.85$ ปี

5) ฝากเงินธนาคารแห่งหนึ่ง 500 บาท ธนาคารคิดอัตราดอกเบี้ยทบต้นต่อเนื่อง 6% อยากทราบว่าจะใช้เวลานานเท่าไรถึงจะได้เงิน 900 บาทในบัญชี

วิธีทำ จากสูตร $A = Pe^{it}$

ในที่นี้ $A = 900,\ P = 500,\ i = 0.06$

$$\therefore\ A\ 900 = 500\,l^{0.06t}$$

$$e^{0.06t} = \frac{9}{5}$$

$$0.06t = \ln\frac{9}{5}$$

$$= 0.5878$$

$$\therefore\ t = \frac{0.5878}{0.06}$$

$= 9.76$ ปี

6) นาย ก. ฝากเงินทรัสต์แห่งหนึ่ง โดยทรัสต์ได้จ่ายอัตราดอกเบี้ย 8% ถ้านาย ก.ต้องการจะได้เงินเป็น 2 เท่าของเงินฝาก อยากทราบว่า นาย ก.จะต้องใช้เวลานานเท่าไร

a) ทรัสต์คิดดอกเบี้ยทบต้นปีละครั้ง

b) ทรัสต์คิดดอกเบี้ยทบต้น 4 ครั้งต่อปี

c) ทรัสต์คิดดอกเบี้ยทบต้นต่อเนื่องกัน

วิธีทำ a) ทรัสต์คิดดอกเบี้ยทบต้นปีละครั้ง

จากสูตร $A = P(1 + \frac{i}{m})^{mt}$

ในที่นี้ $A = 2P,\ i = 0.08,\ m = 1,\ t = ?$

$$\therefore\ 2P = P(1 + 0.08)^{t}$$

$$(1.08)^{t} = 2$$

$$t\ \ln(1.08) = \ln 2$$

$$\therefore\ t = \frac{\ln 2}{\ln 1.08}$$

$$= \frac{0.6931}{0.0770}$$

$$= 9 \text{ ปี}$$

b) ทรัสต์คิดดอกเบี้ยทบต้น 4 ครั้งต่อปี

วิธีทำ จากสูตร $A = P(1 + \frac{i}{m})^{mt}$

ในที่นี้ $A = 2P,\ i = 0.08,\ m = 4$

$$\therefore\ 2P = P(1 + \frac{0.08}{4})^{4t}$$

$$(1.02)^{4t} = 2$$

$$4t\ \ln 1.02 = \ln 2$$

$$\therefore\ t = \frac{\ln 2}{4\ln 1.02}$$

$$= \frac{0.6931}{4(0.0198)}$$

$$= 8.75 \text{ ปี}$$

c) ทรัสต์คิดดอกเบี้ยทบต้นต่อเนื่องกัน

วิธีทำ จากสูตร $A = Pe^{it}$

ในที่นี้ $A = 2P$, $i = 0.08$

$$\therefore 2P = pe^{0.08t}$$

$$e^{0.08t} = 2$$

$$0.08t = \ln 2$$

$$t = \frac{\ln 2}{0.08}$$

$$= \frac{0.6931}{0.08}$$

$$= 8.66 \text{ ปี}$$

7) จงหาค่าของเงินปัจจุบัน เมื่อ 10 ปี เงินจำนวนนี้จะเป็น 10,000 บาท ถ้าเงินนี้คิดอัตราดอกเบี้ย 8% และคิดดอกเบี้ยทบต้น

a) ปีละครั้ง

b) ต่อเนื่องกัน

วิธีทำ a) คิดดอกเบี้ยทบต้นปีละครั้ง

จากสูตร $A = P(1 + \frac{i}{m})^{mt}$

ในที่นี้ $P = 10{,}000$, $i = 0.08$, $m = 1$, $t = 10$

$$\therefore A = 10{,}000(1 t \frac{0.08}{1})^{10}$$

$$= 10,000(1.08)^{10}$$

$$= 10,000(2.1589247)$$

$$= 21588.24 \text{ บาท}$$

b) คิดดอกเบี้ยทบต้นต่อเนื่องกัน

วิธีทำ จากสูตร $A = Pe^{it}$

ในที่นี้ $P = 10,000$, $i = 0.08$, $t = 10$

$$\therefore \quad A = 10,000\ e^{(0.08)(10)}$$

$$= 10,000\ e^{0.8}$$

$$= 10,000(2.2255)$$

$$= 22255 \text{ บาท}$$

8) ถ้าค่าของเงินบาทลดค่าลงด้วยอัตรา 5% ต่อปี คิดแบบดอกเบี้ยทบต้นต่อเนื่องกัน อยากทราบว่าอีกนานเท่าไรค่าของเงินบาทจึงจะเหลือเป็น 50 สตางค์

วิธีทำ จากสูตร $A = Pe^{it}$

ในที่นี้ $A = 1$, $P = 0.5$. $i = 0.08$, $t = ?$

$$\therefore \quad 1 = 0.5\ e^{0.08t}$$

$$e^{0.08t} = 2$$

$$0.08t = \ln 2$$

$$\therefore \quad t = \frac{\ln 2}{0.08}$$

$$= \frac{0.6931}{0.08}$$

$$= 8.66 \text{ ปี}$$

ดังนั้น อีก 8.66 ปี ค่าของเงินบาทจึงจะเหลือเป็น 50 สตางค์