บทที่ 6
อินทิกรัลจำกัดเขต (The Definite Integral)

6.1 พื้นที่ (Area)

Σ ซิกม่า สำหรับผลรวมของเทอมหลายเทอมซึ่งแต่ละเทอมเป็นฟังก์ชันของจำนวนเต็ม สามารถเขียนแทนโดยใช้เครื่องหมายรวมยอด Σ อ่านว่า ซิกม่า ได้ดังนี้

$$\sum_{i=m}^{n} F(i) = F(m) + F(m+1) + \ldots + F(n-1) + F(n)$$

สูตรที่ช่วยในการหาผลรวมที่สำคัญ ๆ มี

1. $\sum_{i=1}^{n} c = cn$ เมื่อ c เป็นค่าคงที่
2. $\sum_{i=1}^{n} cF(i) = c\sum_{i=1}^{n} F(i)$ เมื่อ c เป็นค่าคงที่
3. $\sum_{i=1}^{n} (F(i)+G(i)) = \sum_{i=1}^{n} F(i) + \sum_{i=1}^{n} G(i)$
4. $\sum_{i=1}^{n} (F(i)-F(i-1)) = F(n)-F(0)$
5. $\sum_{i=1}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2}$
6. $\sum_{i=1}^{n} i^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$
7. $\sum_{i=1}^{n} i^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$
8. $\sum_{i=1}^{n} i^4 = \frac{n(n+1)(6n^3+9n^2+n-1)}{30}$

พื้นที่ใต้เส้นโค้ง ถ้า $f(x)$ เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องบน $[a,b]$ และ $f(x) > 0$ และ R คือ บริเวณซึ่งล้อมรอบด้วยเส้นโค้ง $y = f(x)$ แกน x เส้นตรง $x=a$, $x=b$ แล้ว พื้นที่ของบริเวณ R นี้หาได้โดย แบ่งช่วง $[a,b]$ เป็น n ช่วงเท่า ๆ กัน ยาวช่วงละ $\frac{b-a}{n} = \Delta x$

และให้ $f(c_i)$ เป็นค่าต่ำสุดสัมบูรณ์ของ f ในช่วงที่ i เป็นความสูงของสี่เหลี่ยมผืนผ้ารูปที่ i ดังนั้น เมื่อ $n \to \infty$ จะได้พื้นที่ของบริเวณ R คือ

$$A = \lim_{n \to \infty} \sum_{i=1}^{n} f(c_i)\Delta x$$

($f(c_i)\Delta x$ = พื้นที่ของสี่เหลี่ยมผืนผ้ารูปที่ i)

หรือถ้าให้ความสูงของสี่เหลี่ยมผืนผ้าเป็นค่าสูงสุดสัมบูรณ์ของ f ในแต่ละช่วงแบ่ง ดังนั้น พื้นที่ของบริเวณ R คือ

$$A = \lim_{n \to \infty} \sum_{i=1}^{n} f(d_i)\Delta x$$

($f(d_i)$ คือ ค่าสูงสุดสัมบูรณ์ของ f ในช่วงที่ i และ
$f(d_i)\Delta x$ คือ พื้นที่ของสี่เหลี่ยมผืนผ้ารูปที่ i)

6.2 อินทิกรัลจำกัดเขต (The Definite Integral)

ผลรวมรีมานน์ (Riemann Sum) ถ้า f เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องบน [a,b] และแบ่งช่วง [a,b] ออกเป็น n ช่วง โดยไม่จำกัดว่าจะต้องแบ่งอย่างไร ให้ $\Delta_i x$ เป็นความยาวของช่วงที่ i และ ξ_i เป็นจุดใด ๆ ในช่วงที่ i แล้ว ผลรวมรีมานน์ คือ

$$\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta_i x$$

สำหรับผลรวมรีมานน์นี้ไม่ได้จำกัดว่า f(x) ต้องมากกว่าศูนย์บน [a,b] f(x) อาจจะเป็นค่าลบก็ได้ ซึ่งในแง่เรขาคณิตแล้วผลรวมรีมานน์ ก็คือ ผลรวมของพื้นที่ของสี่เหลี่ยมผืนผ้าที่อยู่เหนือแกน x และ **ค่าลบ** ของพื้นที่สี่เหลี่ยมผืนผ้าที่อยู่ใต้แกน x

ฟังก์ชันที่อินทิเกรตได้ (Integrable Function) ถ้า f เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องบน [a,b] แล้ว กล่าวว่า f เป็นฟังก์ชันที่อินทิเกรตได้บน [a,b] เมื่อมีค่าคงที่ L ค่าหนึ่ง ซึ่งเราสามารถทำให้ค่าของ

$$\left| \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta_i x - L \right|$$ น้อยเท่าใดก็ได้

เมื่อ $\|\Delta\|$ (ความยาวของช่วงแบ่งของขีดที่ยาวที่สุด) มีค่าน้อยพอ

นั่นก็คือ $\lim_{\|\Delta\| \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta_i x = L$

และเขียน $\int_a^b f(x)dx = \lim_{\|\Delta\| \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta_i x$

อินทิกรัลจำกัดเขต ของ f บน [a,b] เขียน $\int_a^b f(x)dx$ ก็คือ f เป็นฟังก์ชันที่อินทิเกรตได้บน [a,b] นั่นก็คือ

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\|\Delta\| \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta_i x$$

อ่าน $\int_a^b f(x)dx$ ว่า อินทิกรัลจำกัดเขตของ f(x) จาก a ถึง b หรือ
อินทิเกรต f(x) ตาม x จาก a ถึง b

เงื่อนไขสำหรับ f เป็นฟังก์ชันที่อินทิเกรตได้คือ f แบบฟังก์ชันต่อเนื่องบนช่วงของการอินทิเกรต

คุณสมบัติเกี่ยวกับ $\int_a^b f(x)dx$

1) ถ้า $a > b$ แล้ว $\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx$

2) $\int_a^a f(x)dx = 0$

3) $\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$ เมื่อ a, b, c คือจุดใด ๆ ในช่วงการอินทิเกรต

6.3 กฎหลักมูลของแคลคูลัส (The Fundamental Theorem of The Calculus)

ทฤษฎีกฎหลักมูลของแคลคูลัส ถ้า f เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องบน [a,b] และ g เป็นฟังก์ชันซึ่งมีอนุพันธ์เป็น f นั่นก็คือ

$g'(x) = f(x)$ สำหรับแต่ละ x ใน [a,b]

และ $\int_a^b f(t)dt = g(b) - g(a)$

ทฤษฎีนี้ทำให้การหาค่าของอินทิกรัลจำกัดเขตง่ายขึ้น นั่นก็คือ พยายามหาฟังก์ชัน g ซึ่งมีอนุพันธ์เป็น f แทนการหาค่าของลิมิตของผลรวมรีมานน์ซึ่งยุ่งยากกว่า สำหรับการหาฟังก์ชัน g นี้ อาจใช้สูตรอินทิกรัลได้โดยตรง หรืออาศัยเทคนิคในการอินทิเกรต

อินทิกรัลไม่จำกัดเขต (Indefinite Integral) **ของ** $f(x)$ **เขียน** $\int f(x)dx$ **มีนิยาม คือ**

$$\int f(x)dx = g(x) + C \text{ เมื่อ } C \text{ คือ ค่าคงที่ใด ๆ}$$

เมื่อ $g'(x) = f(x)$

6.4 พื้นที่ของบริเวณในระนาบ

ถ้า f เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องบน $[a,b]$ และ $f(x) \geqslant 0$ แล้วพื้นที่ของบริเวณซึ่งล้อมรอบด้วย เส้นโค้ง $y = f(x)$ แกน x เส้นตรง $x = a$, $x = b$ คือ

$$\int_a^b f(x)dx$$

ถ้า $f(x) < 0$ แล้ว พื้นที่ซึ่งต้องมีค่าเป็นบวก จึงนิยามโดย

$$-\int_a^b f(x)dx$$

ในกรณีที่ต้องการหาพื้นที่ระหว่างเส้นโค้ง $y = f(x)$ และ $y = g(x)$ ซึ่งเป็นฟังก์ชันต่อเนื่องบน $[a,b]$ พื้นที่ของบริเวณที่ปิดล้อมด้วย $y = f(x)$, $y = g(x)$ เส้นตรง $x = a$, $x = b$ หาได้โดย

1) ถ้า $f(x) > g(x)$ บน $[a,b]$ แล้ว พื้นที่ คือ

$$\int_a^b (f(x) - g(x))dx$$

2) ถ้า $g(x) > f(x)$ บน $[a,b]$ แล้ว พื้นที่ คือ

$$\int_a^b (g(x) - f(x))dx$$

อาจมีบางกรณีที่เราต้องหาจุดตัดของเส้นโค้ง $y = f(x)$ และ $y = g(x)$ เสียก่อน เมื่อหาจุดตัดได้แล้ว เราแยกพิจารณาแต่ละช่วงจากจุดตัดหนึ่งไปยังจุดถัดไปว่า $f(x)$ มากกว่า $g(x)$ หรือ $g(x)$ มากกว่า $f(x)$ แล้วหาพื้นที่ตามใน 1 และ 2

ส่วนเกินของผู้บริโภคและผู้ผลิต (Consumer's Surplus and Producer's Surplus)

ส่วนเกินของผู้บริโภค ถ้าสมการอุปสงค์ของสินค้าชนิดหนึ่ง คือ $p = f(x)$ หรือ $x = g(p)$ โดยที่ p คือราคาต่อหน่วย เมื่อจำนวนหน่วยของสินค้าที่ต้องการคือ x ให้ $\overline{p}$ บาทเป็นราคาตลาด และ $\overline{x}$ เป็นจำนวนหน่วยของสินค้าที่สมนัยกัน แล้วส่วนเกินของผู้บริโภคคือ พื้นที่ของบริเวณซึ่งอยู่ต่ำกว่าเส้นอุปสงค์และเหนือเส้นตรง $p = \overline{p}$ นั่นก็คือ ถ้า CS เป็นจำนวนบาทของส่วนเกินของผู้บริโภค แล้ว

$$CS = \int_{0}^{\bar{x}} f(x)dx - \bar{p}\bar{x}$$

หรือ

$$CS = \int_{\bar{p}}^{p_0} g(p)dp \quad \text{เมื่อ} \quad p_0 = f(0)$$

ส่วนเกินของผู้ผลิต ถ้าสมการอุปทานของสินค้าชนิดหนึ่งคือ $p = h(x)$ หรือ $x = \lambda(p)$ โดยที่ p คือราคาต่อหน่วย เมื่อจำนวนหน่วยของสินค้าที่ขายคือ x ให้ $\bar{p}$ บาท เป็นราคาตลาด และ $\bar{x}$ เป็นจำนวนหน่วยของสินค้าที่สมนัยกัน แล้วส่วนเกินของผู้ผลิต คือ พื้นที่ของบริเวณซึ่งอยู่เหนือเส้นอุปทาน และต่ำกว่าเส้นตรง $p = \bar{p}$ นั่นก็คือ ถ้า PS เป็นจำนวนบาทของส่วนเกินของผู้ผลิต แล้ว

$$PS = \bar{p}\bar{x} - \int_{0}^{\bar{x}} h(x)dx$$

หรือ

$$PS = \int_{p_0}^{\bar{p}} \lambda(p)dp \quad \text{เมื่อ} \quad p_0 = h(o)$$

แบบฝึกหัด 6.1

จงหาค่าของผลรวมยอดต่อไปนี้

1. $\sum_{i=1}^{6} (3i-2)$

วิธีทำ $$\sum_{i=1}^{6} (3i-2) = \sum_{i=1}^{6} (3i) + \sum_{i=1}^{6} (-2)$$

$$= 3\sum_{i=1}^{6} (i) + 6(-2)$$

$$= 3(1+2+3+4+5+6) - 12$$

$$= 3(21) - 12$$

$$= 63 - 12 = 51$$

2. $\sum_{i=2}^{5} \frac{i}{i-1}$

วิธีทำ $$\sum_{i=2}^{5} \frac{i}{i-1} = \frac{2}{2-1} + \frac{3}{3-1} + \frac{4}{4-1} + \frac{5}{5-1}$$

$$= 2 + \frac{3}{2} + \frac{4}{3} + \frac{5}{4}$$

$$= \frac{73}{12}$$

3. $\sum_{k=-2}^{3} 2^k$

วิธีทำ $\sum_{k=-2}^{3} 2^k = 2^{-2}+2^{-1}+2^0+2^1+2^2+2^3$

$= \frac{1}{4}+\frac{1}{2}+1+2+4+8$

$= \frac{63}{4}$

4. $\sum_{k=1}^{4} \frac{(-1)^{k+1}}{k}$

วิธีทำ $\sum_{k=1}^{4} \frac{(-1)^{k+1}}{k} = \frac{(-1)^2}{1}+\frac{(-1)^3}{2}+\frac{(-1)^4}{3}+\frac{(-1)^5}{4}$

$= 1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}$

$= \frac{7}{12}$

5. $\sum_{m=0}^{4} \frac{m}{m+1}$

วิธีทำ $\sum_{m=0}^{4} \frac{m}{m+1} = \frac{0}{0+1}+\frac{1}{1+1}+\frac{2}{2+1}+\frac{3}{3+1}+\frac{4}{4+1}$

$= 0+\frac{1}{2}+\frac{2}{3}+\frac{3}{4}+\frac{4}{5}$

$= \frac{163}{60}$

6. $\sum_{i=1}^{25} 2i(i-1)$

วิธีทำ $\sum_{i=1}^{25} 2i(i-1) = \sum_{i=1}^{25} (2i^2 - 2i)$

$= 2\sum_{i=1}^{25} i^2 - 2\sum_{i=1}^{25} i$

$= 2\left[\frac{25(25+1)(50+1)}{6}\right] - 2\left[\frac{25(25+1)}{2}\right]$

(โดยใช้สูตร (6.1.7) และสูตร (6.1.6))

$= 11050 - 650$

$= 10400$

7. $\sum_{i=1}^{n} (10^{i+1} - 10^{i})$

วิธีทำ $\sum_{i=1}^{n} (10^{i+1} - 10^{i}) = (10^2 - 10^1) + (10^3 - 10^2) + (10^4 - 10^3) + \cdots + (10^{n+1} - 10^n)$

$= 10^{n+1} - 10$

$= 10(10^n - 1)$

หมายเหตุ กระจายเทอมในเครื่องหมายผลรวมยอดออกมา เห็นว่ามีเทอมเหมือนกันที่ตัดกันออกไปได้ จึงเหลือเพียง -10 และ 10^{n+1} ในผลรวมเท่านั้น

8. $\sum_{k=1}^{100} \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}\right)$

วิธีทำ $\sum_{k=1}^{100} \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}\right) = \left(1 - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right) + \ldots + \left(\frac{1}{99} - \frac{1}{100}\right) + \left(\frac{1}{100} - \frac{1}{101}\right)$

$= 1 - \frac{1}{101}$

$= \frac{100}{101}$

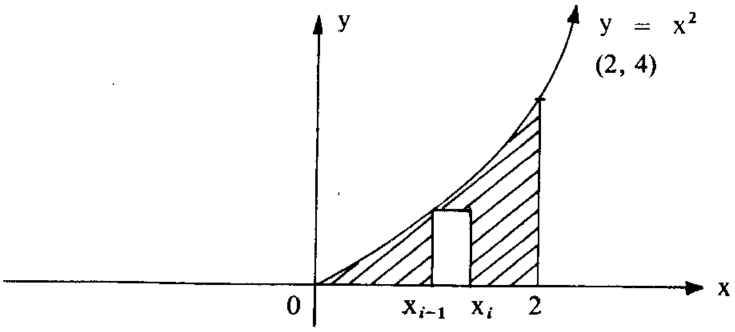
หมายเหตุ 1. เช่นเดียวกับข้อ 7. ใช้วิธีกระจายเทอมในผลรวมยอดออกมา และเห็นว่ามีเทอมที่ตัดกันออกไปได้ เหลือเพียง 1 และ $-\frac{1}{101}$ จากวงเล็บแรกและวงเล็บท้าย เท่านั้น

2. เมื่อต้องการหาค่าของ $\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i+1}$ จะเขียน

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i+1} = \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{1}{i} - \frac{1}{i+1}\right)$$

9. จงหาพื้นที่บริเวณซึ่งล้อมรอบด้วย $y = x^2$, แกน x และเส้นตรง $x = 2$ โดยใช้สี่เหลี่ยมผืนผ้าบรรจุภายใน

วิธีทำ



บริเวณที่ต้องการหาพื้นที่คือส่วนที่แรเงาในรูป โดยแบ่งพื้นที่เป็นรูปสี่เหลี่ยมผืนผ้าที่บรรจุอยู่ภายใน และใช้สมการ (6.1.2)

แบ่งช่วง $[0, 2]$ ออกเป็น n ช่วง แต่ละช่วงยาว $\Delta x = \frac{2-0}{n} = \frac{2}{n}$

ดังนั้น $x_0 = 0, x_1 = 0+\Delta x, x_2 = 2\Delta x, \ldots, x_i = 1+\Delta x, \ldots, x_n = 2$

เพราะว่า $f(x) = x^2$ เป็นฟังก์ชันที่เพิ่มขึ้นบนช่วง $[0, 2]$ ดังนั้น ค่าต่ำสุดบน $[x_{i-1}, x_i]$ คือ $(x_{i-1})^2 = [(i-1)\Delta x]^2$ และเป็นความสูงของสี่เหลี่ยมผืนผ้าบนช่วง $[x_{i-1}, x_i]$ ด้วย

ดังนั้น พื้นที่ $= \lim\limits_{n \to \infty} \sum_{i=1}^{n} (x_{i-1})^2 \Delta x$ (จากสมการ 6.1.2)

$$= \lim_{n \to \infty} \sum_{i=1}^{n} ((i-1)\Delta x)^2 \Delta x$$

$$= \lim_{n \to \infty} (\Delta x)^3 \sum_{i=1}^{n} (i-1)^2$$

$$= \lim_{n \to \infty} \left(\frac{2}{n}\right)^3 \sum_{i=1}^{n} (i^2 - 2i + 1)$$

$$= \lim_{n \to \infty} \left(\frac{2}{n}\right)^3 \left[\sum_{i=1}^{n} i^2 - 2\sum_{i=1}^{n} i + n\right]$$

$$= \lim_{n \to \infty} \left(\frac{2}{n}\right)^3 \left[\frac{n(n+1)(2n+1)}{6} - 2\,\frac{n(n+1)}{2} + n\right]$$

$$= \lim_{n \to \infty} \frac{8}{n^3} \left[\frac{2n^3+3n^2+n-6n^2-6n+6n}{6}\right]$$

$$= \lim_{n \to \infty} \frac{4}{3}\left[\frac{2n^2 - 3n + 1}{n^2}\right]$$

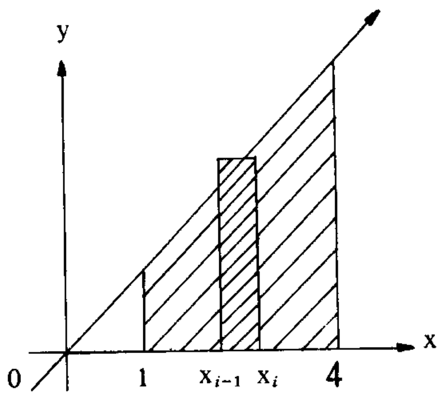
$$= \frac{4}{3} \lim_{n \to \infty} \left[2 - \frac{3}{n} + \frac{1}{n^2}\right]$$

$$= \frac{4}{3}(2 - 0 - 0)$$

$$= \frac{8}{3}$$

10. **จงหาพื้นที่ของบริเวณซึ่งล้อมรอบด้วย $y = 2x$, แกน x และเส้นตรง $x = 1$ และ $x = 4$ โดยใช้สี่เหลี่ยมผืนผ้าที่ล้อมรอบ**

วิธีทำ



บริเวณที่ต้องการหาพื้นที่คือส่วนที่แรเงาในรูป โดยแบ่งพื้นที่เป็นรูปสี่เหลี่ยมผืนผ้าที่มีความสูงเป็นค่าสูงสุดในแต่ละช่วงแบ่ง และใช้สมการ (6.1.3)

แบ่งช่วง $[1, 4]$ ออกเป็น n ช่วง แต่ละช่วงยาว $\Delta x = \frac{4-1}{n} = \frac{3}{n}$

ดังนั้น $x_0 = 1, x_1 = 1 + \Delta x, x_2 = 1 + 2\Delta x, \ldots, x_i = 1 + i\Delta x, \ldots, x_n = 4$

เพราะว่า $f(x) = 2x$ เป็นฟังก์ชันเพิ่มขึ้นบน $[1, 4]$ ดังนั้น ค่าสูงสุดบนช่วง $[x_{i-1}, x_i]$ คือ $2x_i = 2[1 + i\Delta x]$

$\therefore$ **พื้นที่** $= \lim_{n \to \infty} \sum_{i=1}^{n} 2[1 + i\Delta x]\Delta x$ (จากสมการ 6.1.3)

$$= \lim_{n \to \infty} \sum_{i=1}^{n} [\Delta x + i(\Delta x)^2]$$

$$= \lim_{n \to \infty} 2\left[n\Delta x + (\Delta x)^2 \sum_{i=1}^{n} i\right]$$

$$= \lim_{n \to \infty} 2\left[n \cdot \frac{3}{n} + \left(\frac{3}{n}\right)^2 \cdot \frac{n(n+1)}{2} \right]$$

$$= \lim_{n \to \infty} 2\left[3 + \frac{9}{2}\left(1 + \frac{1}{n}\right) \right]$$

$$= 6 + 9 \lim_{n \to \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)$$

$$= 6 + 9(1 + 0)$$

$$= 15$$

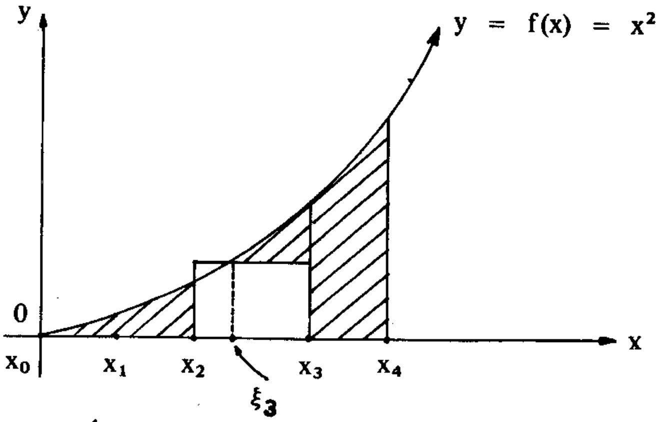
แบบฝึกหัด 6.2

จงหาผลรวมรีมานน์ สำหรับฟังก์ชันต่อไปนี้บนช่วงปิด โดยใช้ผลแบ่งกั้น Δ และจุด ξ_i ที่กำหนดให้เขียนกราฟของฟังก์ชัน และเขียนรูปสี่เหลี่ยมผืนผ้ารูปใดรูปหนึ่ง ซึ่งเป็นเทอมหนึ่งในผลรวมรีมานน์

1. $f(x) = x^2, 0 \leqslant x \leqslant 3$, Δ คือ $x_0 = \frac{1}{2}, x_2 = 1\frac{1}{4}, x_3 = 2\frac{1}{4}, x_4 = 3, \xi_1 = \frac{1}{4},$

$\xi_2 = 1, \xi_3 = 1\frac{1}{2}, \xi_4 = 2\frac{1}{2}$

วิธีทำ



ผลรวมรีมานน์ $= \sum_{i=1}^{4} f(\xi_i)\, \Delta_i(x) \qquad (\Delta_i x = x_i - x^{i-1})$

$$= f(\xi_i)(x_1 - x_0) + f(\xi_2)(x_2 - x_1) + f(\xi_3)(x_3 - x_2) + f(\xi_4)(x_4 - x_3)$$

$$= f\left(\frac{1}{4}\right)\left(\frac{1}{2} - 0\right) + f(1)\left(1\frac{1}{4} - \frac{1}{2}\right) + f\left(1\frac{1}{2}\right)\left(2\frac{1}{4} - 1\frac{1}{4}\right) + f\left(2\frac{1}{2}\right)$$

$$\left(3-2\frac{1}{4}\right)$$

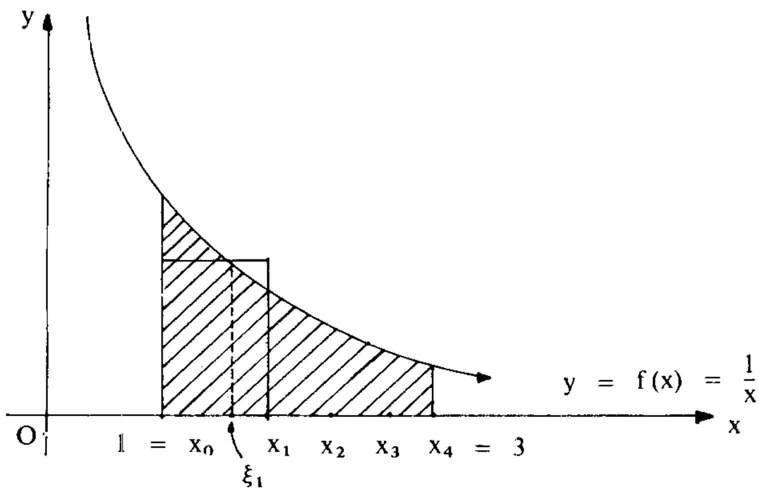
$$= \left(\frac{1}{4}\right)^2\left(\frac{1}{2}\right)+(1)^2\left(\frac{3}{4}\right)+\left(\frac{3}{2}\right)^2(1)+\left(\frac{5}{2}\right)^2\left(\frac{3}{4}\right)$$

$$= \frac{247}{32}$$

2. $f(x) = \frac{1}{x}$, $1 \leqslant x \leqslant 3$, Δ คือ $x_0 = 1$, $x_1 = 1\frac{2}{3}$, $x_2 = 2\frac{1}{4}$, $x_3 = 2\frac{2}{3}$, $x_4 = 3$,

$\xi_1 = 1\frac{1}{4}$, $\xi_2 = 2$, $\xi_3 = 2\frac{1}{2}$, $\xi_4 = 2\frac{3}{4}$

วิธีทำ



ผลรวมรีมานน์ $= \sum_{i=1}^{4} f(\xi_i)\,\Delta_i x \qquad (\Delta_i x = x_i - x_{i-1})$

$$= f(\xi_1)(x_1-x_0)+f(\xi_2)(x_2-x_1)+f(\xi_3)(x_3-x_2)+f(\xi_4)(x_4-x_3)$$

$$= f\left(1\frac{1}{4}\right)\left(1\frac{2}{3}-1\right)+f(2)\left(2\frac{1}{4}-1\frac{2}{3}\right)+f\left(2\frac{1}{2}\right)\left(2\frac{2}{3}-2\frac{1}{4}\right)+f\left(2\frac{3}{4}\right)$$

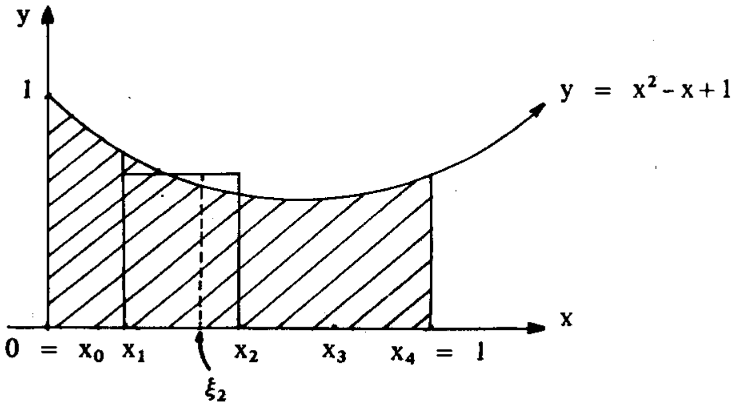
$$\left(3-2\frac{2}{3}\right)$$

$$= \left(\frac{4}{5}\right)\left(\frac{2}{3}\right)+\left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{7}{12}\right)+\left(\frac{2}{5}\right)\left(\frac{5}{12}\right)+\left(\frac{4}{11}\right)\left(\frac{1}{3}\right)$$

$$= \frac{1469}{1320}$$

3. $f(x) = x^2-x+1, 0 \leq x \leq 1, \Delta$ คือ $x_0 = 0, x_1 = 0.2, x_2 = 0.5, x_3 = 0.7,$
$x_4 = 1, \xi_1 = 0.1, \xi_2 = 0.4, \xi_3 = 0.6, \xi_4 = 0.9$

วิธีทำ



ผลรวมรีมานน์ $= \sum_{i=1}^{4} f(\xi_i)\,\Delta_i x \qquad (\Delta_i x = x_i - x_{i-1})$

$= f(\xi_1)(x_1-x_0)+f(\xi_2)(x_2-x_1)+f(\xi_3)(x_3-x_2)+f(\xi_4)(x_4-x_3)$

$= f(0.1)(0.2-0)+f(0.4)(0.5-0.2)+f(0.6)(0.7-0.5)+f(0.9)(1-0.7)$

[แทนค่า $x = 0.1, 0.4, 0.6, 0.9$ ใน $f(x) = x^2-x+1$]

$= 0.835$

จงหาค่าของอินทิกรัลจำกัดเขตตามตัวอย่าง 6.2.2 2n n

4. $\int_0^3 x^2 dx$

วิธีทำ แบ่งช่วง [0, 3] เป็น n ช่วงเท่า ๆ กัน แต่ละช่วงยาว $= \Delta x = \frac{3-0}{n} = \frac{3}{n}$

เลือก ξ_i **ให้เป็นจุดขวาสุดของแต่ละช่วงแบ่ง ดังนั้น**

$$\xi_1 = 0+\frac{3}{n}, \xi_2 = 0+2\left(\frac{3}{n}\right), \ldots, \xi_i = 0+i\left(\frac{3}{n}\right), \ldots, \xi_n = 0+n\left(\frac{3}{n}\right) = 3$$

เพราะว่า $f(x) = x^2 \qquad \therefore f(\xi_i) = \left(\frac{3i}{n}\right)^2$

ดังนั้น $\int_0^3 x^2 dx = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{3i}{n}\right)^2 \frac{3}{n}$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{27}{n^3} \sum_{i=1}^{n} (i)^2$$

$$= \lim_{n \to \infty} \frac{27}{n^3} \left[\frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \right]$$

$$= \frac{27}{6} \lim_{n \to \infty} \left[\frac{2n^2+3n+1}{n^2} \right]$$

$$= \frac{27}{6} \lim_{n \to \infty} \left[2+\frac{3}{n}+\frac{1}{n} \right]$$

$$= \frac{27}{6} (2+0+0)$$

$$= 9$$

5. $\int_0^1 (x^2-x+1)\, dx$

วิธีทำ แบ่งช่วง $[0, 1]$ เป็น n ช่วงเท่า ๆ กัน แต่ละช่วงยาว $= \Delta x = \frac{1-0}{n} = \frac{1}{n}$

เลือก ξ_i ให้เป็นจุดขวาสุด (ξ_i เป็นจุดใด ๆ ก็ได้ในช่วงที่ i) ของแต่ละช่วงแบ่ง **ดังนั้น**

$$\xi_1 = 0+\frac{1}{n},\ \xi_2 = 0+2\left(\frac{1}{n}\right), \ldots, \xi_i = 0+i\left(\frac{1}{n}\right), \ldots, \xi_n = 0+n\left(\frac{1}{n}\right) = 1$$

$\because f(x) = x^2-x+1 \qquad \therefore f(\xi_i) = f\left(\frac{i}{n}\right) = \left(\frac{i}{n}\right)^2-\frac{i}{n}+1$

ดังนั้น $\int_0^1 (x^2-x+1)\, dx = \lim_{n \to \infty} \sum_{i=1}^{n} \left[\left(\frac{i}{n}\right)^2-\frac{i}{n}+1 \right] \frac{1}{n}$

$$= \lim_{n \to \infty} \frac{1}{n} \left[\frac{1}{n^2} \sum_{i=1}^{n} i^2 - \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} i + n \right]$$

$$= \lim_{n \to \infty} \frac{1}{n} \left[\frac{1}{n^2} \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} - \frac{1}{n} \frac{n(n+1)}{2} + n \right]$$

$$= \lim_{n \to \infty} \frac{1}{n} \left[\frac{2n^2+3n+1}{6n} - \frac{n+1}{2} + n \right]$$

$$= \lim_{n \to \infty} \left[\frac{1}{3}+\frac{1}{2n}+\frac{1}{6n^2}-\frac{1}{2}-\frac{1}{2n}+1 \right]$$

$$= \frac{1}{3}+0+0-\frac{1}{2}-0+1$$

$$= \frac{5}{6}$$

6. $\int_{-2}^{2}(x^3+1)\,dx$

วิธีทำ แบ่งช่วง $[-2, 2]$ เป็น n ช่วงเท่า ๆ กัน แต่ละช่วงยาว $= \Delta x = \frac{2-(-2)}{n}$

$= \frac{4}{n}$ เลือก ξ_i เป็นจุดขวาสุดของแต่ละช่วงแบ่ง $\therefore \xi_1 = -2+\frac{4}{n}, \xi_2 = -2+2\left(\frac{4}{n}\right),$

$\ldots, \xi_i = -2+i\left(\frac{4}{n}\right), \ldots, \xi_n = -2+n\left(\frac{4}{n}\right) = 2$

$\because f(x) = x^3+1 \quad \therefore f(\xi_i) = f\left(-2+i\frac{4}{n}\right) = \left(-2+\frac{4i}{n}\right)^3+1$

$$= -7+48\frac{i}{n}-96\left(\frac{i}{n}\right)^2+64\left(\frac{i}{n}\right)^3$$

ดังนั้น $\int_{-2}^{2}(x^3+1)\,dx = \lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{i=1}^{n}\left[-7+48\frac{i}{n}-96\left(\frac{i}{n}\right)^2+64\left(\frac{i}{n}\right)^3\right]\frac{4}{n}$

$$= \sum_{i=1}^{n}\frac{4}{n}\left[-7n+\frac{48}{n}\sum_{i=1}^{n} i-\frac{96}{n^2}\sum_{i=1}^{n} i^2+\frac{64}{n^3}\sum_{i=1}^{n} i^3\right]$$

$$= \lim_{n\to\infty}\frac{4}{n}\left[-7n+\frac{48}{n}\frac{n(n+1)}{2}-\frac{96}{n^2}\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}+\frac{64}{n^3}\frac{n^2(n+1)^2}{4}\right]$$

$$= \lim_{n\to\infty}\left[(-28)+\left(96+\frac{96}{n}\right)-\left(128+\frac{192}{n}+\frac{64}{n^2}\right)+\left(64+\frac{128}{n}+\frac{64}{n^2}\right)\right]$$

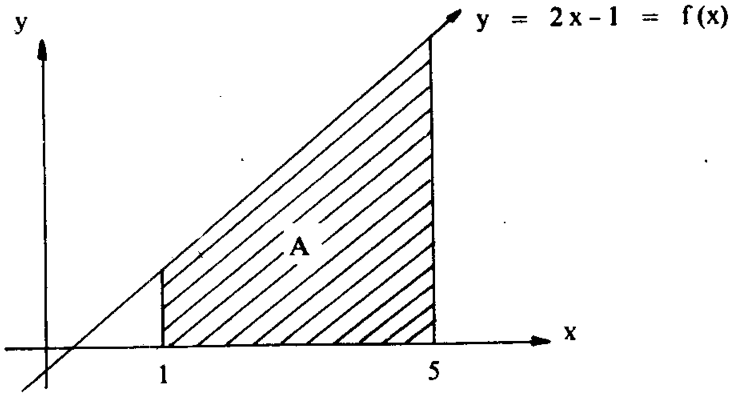
$$= -28+96+0-128-0-0+64+0+0$$

$$= -156+160 = 4$$

จงหาพื้นที่ของบริเวณในข้อต่อไปนี้ โดย ก) เขียนพื้นที่ของบริเวณในรูปของลิมิตของผลรวมรีมานน์โดยใช้ผลแบ่งกั้นแบบสม่ำเสมอ ข) เขียนลิมิตนี้ในรูปของอินทิกรัลจำกัดเขต ค) หาค่าของอินทิกรัลจำกัดเขตนี้ ตามตัวอย่าง 6.2.2

7. ล้อมรอบด้วย เส้นตรง $y = 2x-1$, แกน x และเส้นตรง $x = 1$ และ $x = 5$

วิธีทำ



แบ่ง [1, 5] เป็นแบบสม่ำเสมอ $\therefore \Delta x = \frac{5-1}{n} = \frac{4}{n}$ (n ช่วงเท่า ๆ กัน) ดังนั้น

พื้นที่แรเงาในรูป คือ

ก. $A = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i) \cdot \frac{4}{n}$

ข. $\lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i) \frac{4}{n} = \int_1^5 f(x)\,dx$

$$= \int_1^5 (2x-1)\,dx$$

ค. เลือก ξ_i เป็นจุดขวาสุดของแต่ละช่วงแบ่ง

$$\therefore \xi_1 = 1+\frac{4}{n},\ \xi_2 = 1+2\left(\frac{4}{n}\right), \ldots, \xi_i = 1+i\left(\frac{4}{n}\right), \ldots, \xi_n = 1+n\left(\frac{4}{n}\right) = 5$$

และ $f(\xi_i) = f\left(1+\frac{4i}{n}\right) = 2\left(1+\frac{4i}{n}\right)-1 = 1+\frac{8i}{n}$

$$\therefore \int_1^5 (2x-1)\,dx = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} \left(1+\frac{8i}{n}\right)\frac{4}{n}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \left[\frac{4}{n} \sum_{i=1}^{n} 1 + \frac{32}{n^2} \sum_{i=1}^{n} i\right]$$

$$= \lim_{n\to\infty} \left[\frac{4}{n}\ n + \frac{32}{n^2}\frac{n(n+1)}{2}\right]$$

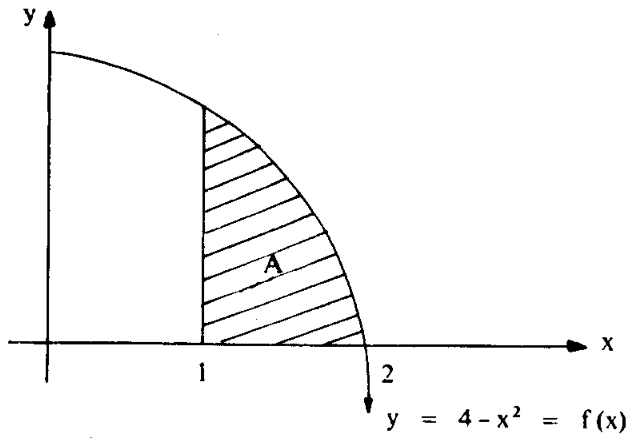
$$= \lim_{n\to\infty} \left[4+16+\frac{16}{n}\right]$$

$$= 4+16+0$$

$$= 20$$

8. ล้อมรอบด้วย เส้นโค้ง $y = 4-x^2$ แกน x และเส้นตรง $x = 1$ และ $x = 2$

วิธีทำ



แบ่ง [1, 2] เป็นแบบสม่ำเสมอ นั่นก็คือ แบ่งเป็น n ช่วงเท่า ๆ กัน

แต่ละช่วงยาว $\Delta x = \frac{2-1}{n} = \frac{1}{n}$

ดังนั้น พื้นที่แรเงาในรูป คือ

ก. $A = \lim\limits_{n \to \infty} \sum\limits_{i=1}^{n} f(\xi_i) \cdot \frac{1}{n}$

ข. $\lim\limits_{n \to \infty} \sum\limits_{i=1}^{n} f(\xi_i) \cdot \frac{1}{n} = \int_1^2 f(x)\,dx = \int_1^2 (4-x^2)\,dx$

ค. เลือก ξ_i เป็นจุดขวาสุดของแต่ละช่วงแบ่ง

$\therefore \xi_1 = 1+\frac{1}{n}, \xi_2 = 1+2\left(\frac{1}{n}\right), \ldots, \xi_i = 1+i\left(\frac{1}{n}\right), \ldots, \xi_n = 1+n\left(\frac{1}{n}\right) = 2$

และ $f(\xi_i) = f\left(1+\frac{i}{n}\right) = 4-\left(1+\frac{i}{n}\right)^2 = 4-1-\frac{2i}{n}-\frac{i^2}{n^2}$

$$= 3-\frac{2i}{n}-\frac{i^2}{n^2}$$

$$\therefore \int_1^2 (4-x^2)\,dx = \lim_{n \to \infty} \sum_{i=1}^{n} \left(3-\frac{2i}{n}-\frac{i^2}{n^2}\right) \cdot \frac{1}{n}$$

$$= \lim_{n \to \infty} \left[\frac{3}{n} \cdot \sum_{i=1}^{n} 1 - \frac{2}{n^2} \sum_{i=1}^{n} i - \frac{1}{n^3} \sum_{i=1}^{n} i^2\right]$$

$$= \lim_{n \to \infty} \left[\frac{3}{n} \cdot n - \frac{2}{n^2} \frac{n(n+1)}{2} - \frac{1}{n^3} \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}\right]$$

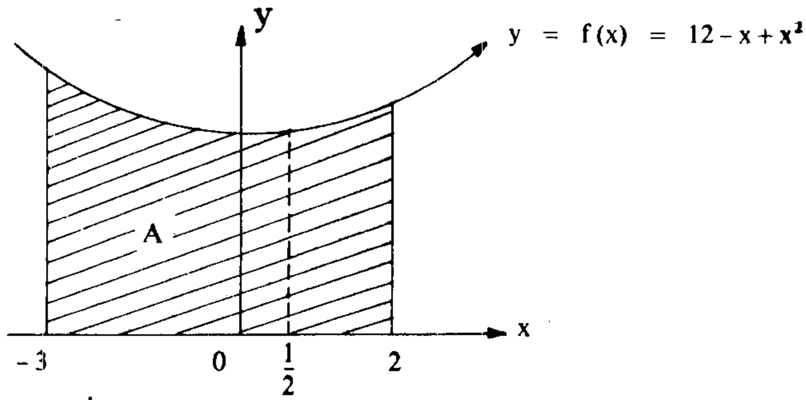
$$= \lim_{n \to \infty} \left[3 - \left(1 + \frac{1}{n} \right) - \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{2n} + \frac{1}{6n^2} \right) \right]$$

$$= 3 - 1 - 0 - \frac{1}{3} - 0 - 0$$

$$= 1\frac{2}{3}$$

9. ล้อมรอบด้วย เส้นโค้ง $y = 12 - x + x^2$ แกน x เส้นตรง $x = -3$ และ $x = 2$

วิธีทำ



แบ่ง $[-3, 2]$ เป็นแบบสม่ำเสมอ โดยแบ่งเป็น n ช่วงเท่า ๆ กัน แต่ละช่วงยาว Δx $= \frac{2-(-3)}{n} = \frac{5}{n}$ ดังนั้น พื้นที่แรเงาในรูป คือ

ก. $A = \lim_{n \to \infty} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i) \frac{5}{n}$

ข. $\lim_{n \to \infty} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i) \frac{5}{n} = \int_{-3}^{2} f(x)\,dx = \int_{-3}^{2} (12 - x + x^2)\,dx$

ค. เลือก ξ_i เป็นจุดขวาสุดของแต่ละช่วงแบ่ง

$\therefore \xi_1 = -3 + \frac{5}{n}, \xi_2 = -3 + 2\left(\frac{5}{n}\right), \ldots, \xi_i = -3 + i\left(\frac{5}{n}\right), \ldots, \xi_n = -3 + n\left(\frac{5}{n}\right)$

$= 2$

และ $f(\xi_i) = f\left(-3 + \frac{5i}{n}\right) = 12 - \left(-3 + \frac{5i}{n}\right) + \left(-3 + \frac{5i}{n}\right)^2$

$$= 24 - \frac{35i}{n} + 25\left(\frac{i}{n}\right)^2$$

$$\therefore \int_{-3}^{2} (12 - x + x^2)\, dx = \lim_{n \to \infty} \sum_{i=1}^{n} \left(24 - \frac{35\,i}{n} + 25\left(\frac{i}{n}\right)^2 \right) \frac{5}{n}$$

$$= \lim_{n \to \infty} \left[\frac{120}{n} \sum_{i=1}^{n} 1 - \frac{175}{n^2} \sum_{i=1}^{n} i + \frac{125}{n^3} \sum_{i=1}^{n} i^2 \right]$$

$$= \lim_{n \to \infty} \left(\frac{120}{n} \cdot n - \frac{175}{n^2} \cdot \frac{n(n+1)}{2} + \frac{125}{n^3} \cdot \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \right]$$

$$= \lim_{n \to \infty} \left[120 - \left(\frac{175}{2} + \frac{175}{2n} \right) + \left(\frac{125}{3} + \frac{125}{2n^2} + \frac{125}{6n^2} \right) \right]$$

$$= 120 - \frac{175}{2} - 0 + \frac{125}{3} + 0 + 0$$

$$= 74\frac{1}{6}$$

10. จงแสดงว่า ถ้า f เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องบน $[-1, 2]$ แล้ว

$$\int_{-1}^{2} f(x)\, dx + \int_{2}^{0} f(x)\, dx + \int_{0}^{1} f(x)\, dx + \int_{1}^{-1} f(x)\, dx = 0$$

วิธีทำ $\because$ $\int_{-1}^{2} f(x)\, dx = \int_{-1}^{0} f(x)\, dx + \int_{0}^{2} f(x)\, dx = \int_{-1}^{0} f(x)\, dx - \int_{2}^{0} f(x)\, dx$

และ $\int_{1}^{-1} f(x)\, dx = -\int_{-1}^{1} f(x)\, dx = -\left[\int_{-1}^{0} f(x)\, dx + \int_{0}^{1} f(x)\, dx \right]$

$$\therefore \int_{-1}^{2} f(x)\, dx + \int_{2}^{0} f(x)\, dx + \int_{0}^{1} f(x)\, dx + \int_{1}^{-1} f(x)\, dx$$

$$= \int_{-1}^{0} f(x) - \int_{2}^{0} f(x)\, dx + \int_{2}^{0} f(x)\, dx + \int_{0}^{1} f(x)\, dx - \int_{-1}^{0} f(x)\, dx - \int_{0}^{1} f(x)\, dx$$

$$= 0$$

แบบฝึกหัด 6.3

จงหาค่าของอินทิกรัลจำกัดเขตในข้อต่อไปนี้ โดยใช้ทฤษฎีกฎหลักมูลของแคลคูลัส

1. $\int_{-2}^{2} (x^3 + 1)\, dx$

วิธีทำ $\int_{-2}^{2} (x^3 + 1)\, dx = \int_{-2}^{2} x^3 dx + \int_{-2}^{2} dx$

$$= \frac{x^4}{4}\Big]_{-2}^{2} + x\Big]_{-2}^{2}$$

$$= (4-4) + (2-(-2)) = 4$$

2. $\int_0^1 (x^2 - x + 1)\, dx$

วิธีทำ $\int_0^1 (x^2 - x + 1)\, dx = \int_0^1 x^2 dx - \int_0^1 x dx + \int_0^1 dx$

$$= \frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} + x\Big]_0^1$$

$$= \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{2} + 1\right) - 0 = \frac{5}{6}$$

3. $\int_1^3 \frac{2x^2+1}{x^2}\, dx$

วิธีทำ $\int_1^3 \frac{2x^2+1}{x^2}\, dx = \int_1^3 \frac{2x^2}{x^2}\, dx + \int_1^3 \frac{1}{x^2}\, dx$

$$= 2x + \frac{x^{-1}}{-1}\Big]_1^3$$

$$= \left(6 - \frac{1}{3}\right) - \left(2 - 1\right) = 4\frac{2}{3}$$

4. $\int_1^{10} \sqrt{3y-1}\, dy$

วิธีทำ $\int_1^{10} \sqrt{3y-1}\, dy = \frac{1}{3}\int_1^{10} \sqrt{3y-1}\; 3\, dy$

$$= \frac{1}{3} \frac{(3y-1)^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}\Big]_1^{10}$$

$$= \frac{2}{9}\left[29^{\frac{3}{2}} - 2^{\frac{3}{2}}\right]$$

5. $\int_{-1}^3 \frac{dy}{(y+2)^2}$

วิธีทำ $\int_{-1}^3 \frac{dy}{(y+2)^2} = \frac{(y+2)^{-1}}{-1}\Big]_{-1}^{3}$

$$= -\frac{1}{5} + 1 = \frac{4}{5}$$

6. $\int_{-2}^{0} 3u\sqrt{4-u^2}\,du$

วิธีทำ $\int_{-2}^{0} 3u\sqrt{4-u^2}\,du \;=\; -\frac{3}{2}\int_{-2}^{0}\sqrt{4-u^2}\,(-2u)\,du$

$$= -\frac{3}{2}\,\frac{(4-u^2)^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}\Big]_{-2}^{0}$$

$$= -(4^{\frac{3}{2}})+0 \;=\; -8$$

7. $\int_{1}^{2} \frac{u\,du}{(3u^2-1)^2}$

วิธีทำ $\int_{1}^{2} \frac{u\,du}{(3u^2-1)^2} \;=\; \frac{1}{6}\int_{1}^{2}\frac{6u}{(3u^2-1)^2}\,du$

$$= \frac{1}{6}\,\frac{(3u^2-1)^{-1}}{-1}\Big]_{1}^{2}$$

$$= \frac{1}{6}\left(-\frac{1}{11}\right)-\frac{1}{6}\left(-\frac{1}{2}\right) \;=\; \frac{3}{44}$$

8. $\int_{0}^{1} \frac{z^2+2z}{\sqrt[3]{z^3+3z^2+1}}\,dz$

วิธีทำ $\int_{0}^{1} \frac{z^2+2z}{\sqrt[3]{z^3+3z^2+1}}\,dz \;=\; \frac{1}{3}\int_{0}^{1}\frac{3z^2+6z}{\sqrt[3]{z^3+3z^2+1}}\,dz$

$$= \frac{1}{3}\,\frac{(z^3+3z^2+1)^{\frac{2}{3}}}{\frac{2}{3}}\Big]_{0}^{1}$$

$$= \frac{1}{2}(1+3+1)^{\frac{2}{3}}-\frac{1}{2}(0+0+1)^{\frac{2}{3}}$$

$$= \frac{\sqrt[3]{25}}{2}-\frac{1}{2}$$

9. $\int_{2}^{3} z^2\sqrt{z-2}\,dz$

วิธีทำ ไม่สามารถอินทิเกรตได้โดยตรง แต่อาจทำได้โดยแทน

$$\sqrt{z-2} = u$$

$$\therefore \quad z-2 = u^2 \qquad \therefore dz = 2u\,du$$

และ $z = 3,\ u = \sqrt{3-2} = 1$ (เปลี่ยนลิมิตของการอินทิเกรตจากของตัวแปร

$z = 2,\ u = \sqrt{2-2} = 0$ z มาเป็นของตัวแปร u)

$$\therefore \int_2^3 z^2 \sqrt{z-2}\,dz = \int_0^1 (u^2+2)^2 u \cdot 2u\,du$$

$$= 2\int_0^1 (u^4+4u^2+4)\,u^2 du$$

$$= 2\int_0^1 (u^6+4u^4+4u^2)\,du$$

$$= 2\left(\frac{u^7}{7}+\frac{4}{5}u^5+\frac{4u^3}{3}\right)\Big]_0^1$$

$$= 2\left(\frac{1}{7}+\frac{4}{5}+\frac{4}{3}\right) - 0 = \frac{156}{35}$$

10. $\int_0^{15} \frac{x}{\quad}\,dx$

วิธีทำ $\int_0^{15} \frac{x}{(1+x)^{\frac{3}{4}}}\,dx = \int_0^{15} \frac{x+1-1}{(1+x)^{\frac{3}{4}}}\,dx$

$$= \int_0^{15} \left((1+x)^{\frac{1}{4}} - \frac{1}{(1+x)^{\frac{3}{4}}} \right) dx$$

$$= \int_0^{15} (1+x)^{\frac{1}{4}}\,dx - \int_0^{15} \frac{dx}{(1+x)^{\frac{3}{4}}}$$

$$= \frac{(1+x)^{\frac{5}{4}}}{\frac{5}{4}} - \frac{(1+x)^{\frac{1}{4}}}{\frac{1}{4}}\Big]_0^{15}$$

$$= \left(\frac{4}{5}(16)^{\frac{5}{4}} - 4(16)^{\frac{1}{4}}\right) - \left(\frac{4}{5} - 4\right)$$

$$= \frac{4}{5}(32) - 4(2) - \frac{4}{5} + 4 = \frac{104}{5}$$

หรือ อาจแทน $1+x = z$ $\therefore x = z-1$ และ $dx = dz$

เมื่อ $x = 15,\ z = 16$

$x = 0,\ z = 1$

$$\therefore \int_0^{15} \frac{x}{(1+x)^{\frac{3}{4}}}\,dx = \int_1^{16} \frac{z-1}{z^{\frac{3}{4}}}\,dz = \int_1^{16} \left(z^{\frac{1}{4}} - \frac{1}{z^{\frac{3}{4}}} \right) dz$$

11. $\int_{-2}^{5} |x-3|\,dx$

วิธีทำ $\because |x-3| = \begin{cases} x-3, & x \geq 3 \\ -(x-3), & x < 3 \end{cases}$

$\therefore$ ต้องแบ่งช่วงของการอินทิเกรตเป็นดังนี้

$$\int_{-2}^{5} |x-3|\,dx = \int_{-2}^{3} |x-3|\,dx + \int_{3}^{5} |x-3|\,dx$$

$$= \int_{-2}^{3} -(x-3)\,dx + \int_{3}^{5} (x-3)\,dx$$

$$= -\frac{x^2}{2} + 3x \Big]_{-3}^{3} + \frac{x^2}{2} - 3x \Big]_{3}^{5}$$

$$= \left(-\frac{9}{2} + 9\right) - \left(-\frac{4}{2} - 6\right) + \left(\frac{25}{2} - 15\right) - \left(\frac{9}{2} - 9\right)$$

$$= \frac{29}{2}$$

12. $\int_{-1}^{1} \sqrt{|x|-x}\,dx$

วิธีทำ $\because \sqrt{|x|-x} = \begin{cases} \sqrt{x-x} = 0, & x \geq 0 \\ \sqrt{-x-x} = \sqrt{-2x}, & x < 0 \end{cases}$

ดังนั้น $\int_{-1}^{0} \sqrt{-2x\ dx} + \int_{0}^{1} 0\ dx$

$$= -\int_{0}^{-1} \sqrt{-2x\ dx}$$

$$= \sqrt{2}\,\frac{(-x)^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}\Bigg]_0^{-1}$$

$$= \frac{2}{3}\sqrt{2}$$

13. $\int_0^1 \sqrt{x}\,\sqrt{1+x\sqrt{x}}\,dx$

วิธีทำ ให้ $\sqrt{x} = u \quad \therefore x = u^2,\ dx = 2\,udu$

เมื่อ $x = 1,\ u = 1$

$x = 0,\ u = 0$

$$\therefore \int_0^1 \sqrt{x}\,\sqrt{1+x\sqrt{x}}\,dx = \int_0^1 u\,\sqrt{1+u^2}\cdot u\ 2\,udu$$

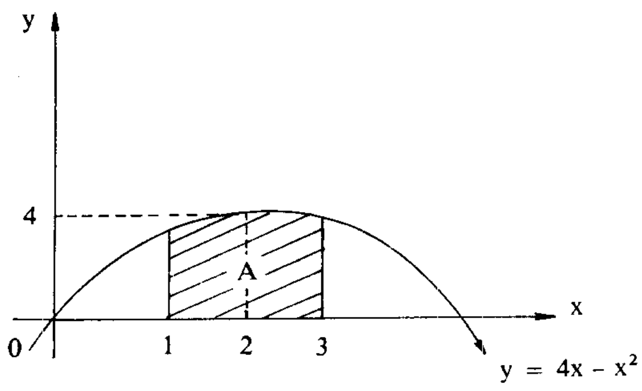
$$= \frac{2}{3}\int_0^1 \sqrt{1+u^3}\ 3\,u^2du$$

$$= \frac{2}{3}\,\frac{(1+u^3)^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}\Bigg]_0^1$$

$$= \frac{4}{9}\cdot 2\sqrt{2} - \frac{4}{9}\cdot 1 = \frac{8}{9}\sqrt{2} - \frac{4}{9}$$

14. **จงหาพื้นที่ของบริเวณล้อมรอบด้วย** $y = 4x - x^2$, **แกน** x **เส้นตรง** $x = 1$ **และ** $x = 3$

วิธีทำ



$\therefore$ พื้นที่ส่วนที่แรเงา A $= \int_1^3 (4x - x^2)\,dx$

$$= 4\frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3}\Big]_1^3$$

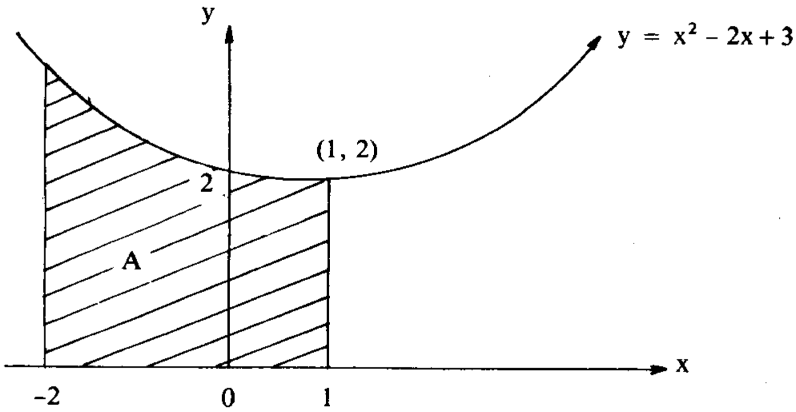
$$= \left(2(3)^2 - \frac{1}{3}(3)^3\right) - \left(2(1)^2 - \frac{1}{3}(1)^3\right)$$

$$= 18 - 9 - 2 + \frac{1}{3}$$

$$= \frac{22}{3}$$ ตารางหน่วย

15. **จงหาพื้นที่ของบริเวณล้อมรอบด้วย** $y = x^2 - 2x + 3$ **แกน** x **เส้นตรง** $x = -2,\ x = 1$

วิธีทำ



$\therefore$ พื้นที่ส่วนที่แรเงา A $= \int_{-2}^{1} (x^2 - 2x + 3)\,dx$

$$= \frac{x^3}{3} - x^2 + 3x\Big]_{-2}^{1}$$

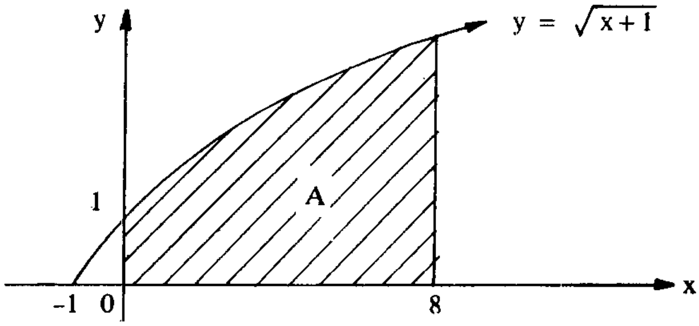
$$= \left(\frac{1}{3} - 1 + 3\right) - \left(\frac{(-2)^3}{3} - (-2)^2 + 3(-2)\right)$$

$$= \frac{1}{3} - 1 + 3 + \frac{8}{3} + 4 + 6$$

$= 15$ ตารางหน่วย

16. จงหาพื้นที่ของบริเวณล้อมรอบด้วย $y = \sqrt{x+1}$ แกน x แกน y และเส้นตรง $x = 8$

วิธีทำ



$\therefore$ พื้นที่ส่วนที่แรเงา $A = \int_0^8 \sqrt{x+1}\ dx$

$$= \frac{(x+1)^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}\Big]_0^8$$

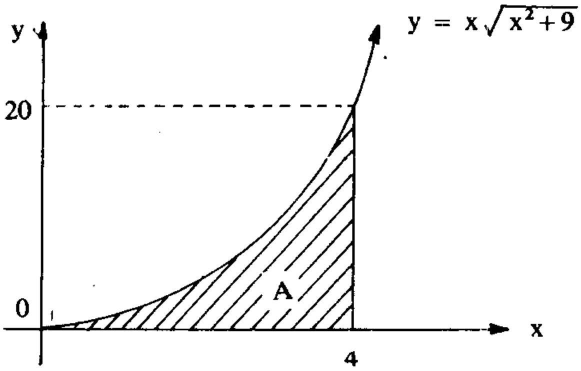
$$= \frac{2}{3}(9)^{\frac{3}{2}} - \frac{2}{3}(1)^{\frac{3}{2}}$$

$$= \frac{2}{3}(27) - \frac{2}{3}$$

$$= \frac{52}{3}$$ ตารางหน่วย

17. จงหาพื้นที่ของบริเวณล้อมรอบด้วย $y = x\sqrt{x^2+9}$ แกน x, แกน y และเส้นตรง $x = 4$

วิธีทำ



$\therefore$ พื้นที่ส่วนที่แรเงา A $= \int_0^4 x\sqrt{x^2+9}\,dx$

$$= \frac{1}{2}\int_0^4 \sqrt{x^2+9}\;2\,xdx$$

$$= \frac{1}{2}\left.\frac{(x^2+9)^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}\right]_0^4$$

$$= \frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3}(25)^{\frac{3}{2}} - \frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3}(9)^{\frac{3}{2}}$$

$$= \frac{1}{3}(125) - \frac{1}{3}(27)$$

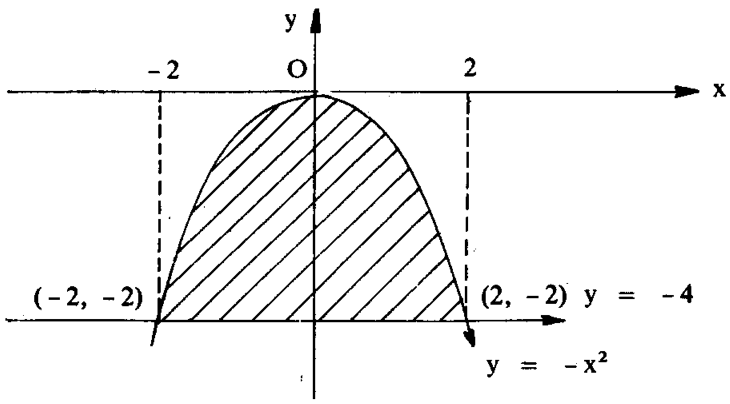
$$= \frac{98}{3}$$

แบบฝึกหัด 6.4

จงหาพื้นที่ของบริเวณที่ล้อมรอบด้วยเส้นโค้ง และเส้นตรงในข้อต่อไปนี้ โดยหาค่าของอินทิกรัลจำกัดเขตด้วยทฤษฎีกฎหลักมูลของแคลคูลัส และเขียนรูปแสดงบริเวณในแต่ละข้อด้วย

1. $x^2 = -y, y = -4$

วิธีทำ



จุดตัด ของ $y = -x^2$ **และ** $y = -4$ **คือที่** $(-2, -2)$ **และ** $(2, -2)$
และบนช่วง $[-2, 2]$ **เส้นโค้ง** $y = -x^2$ **อยู่เหนือ เส้นตรง** $y = -4$
ดังนั้น

พื้นที่ A $= \int_{-2}^{2} [-x^2-(-4)]\,dx$

$$= \int_{-2}^{2} [-x^2+4]\,dx$$

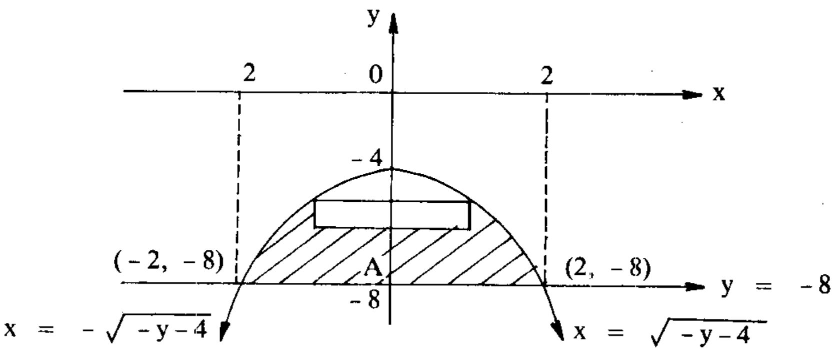
$$= -\frac{x^3}{3}+4x\Big]_{-2}^{2}$$

$$= \left(\frac{-(2)^3}{3}+4(2)\right)-\left(\frac{-(-2)^3}{3}+4(-2)\right)$$

$= \frac{32}{3}$ ตารางหน่วย

2. $x^2+y+4 = 0,\ y = -8$ โดยอินทิเกรตตามแนว y

วิธีทำ



จุดตัดของ $x^2+y+4 = 0$ และ $y = -8$ คือที่ $(-2, -8)$ และ $(2, -8)$

โดยการอินทิเกรตตามแนว y เพื่อหาพื้นที่ เราเขียน

$$x^2 = -y-4 \qquad \therefore x = \pm\sqrt{-y-4}$$

และตามแกน y บนช่วง $[-8, -4]$ เส้นโค้ง $\sqrt{-y-4}$ อยู่เหนือ $-\sqrt{-y-4}$

ดังนั้น

พื้นที่ A $= \int_{-8}^{-4} [\sqrt{-y-4}-(-\sqrt{-y-4})]\,dy$

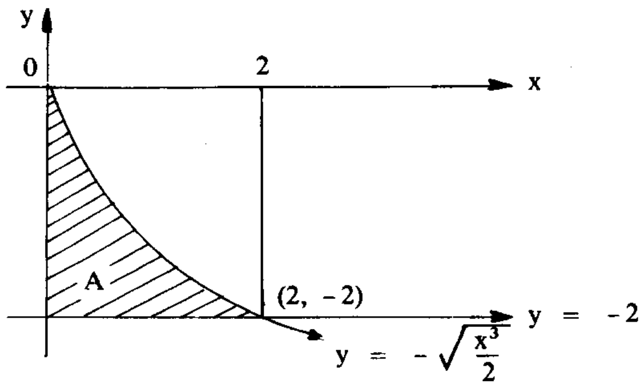
$$= 2\int_{-8}^{-4} \sqrt{-y-4}\,dy$$

$$= -2\,\frac{(-y-4)^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}\Big]_{-8}^{-4} = -\frac{4}{3}(4-4)^{\frac{3}{2}}+\frac{4}{3}(8-4)^{\frac{3}{2}}$$

$= \frac{32}{3}$ ตารางหน่วย

3. $x^3 = 2y^2, x = 0, y = -2$

วิธีทำ



จุดตัด ของ $x^3 = 2y^2$ และ $y = -2$ คือที่ $(2, -2)$

สมการของเส้นโค้ง $x^3 = 2y^2$ ที่อยู่ใต้แกน x คือ $y = -\sqrt{\frac{x^3}{2}}$ และตัดกับเส้นตรง $y = -2$ ที่ $(2, -2)$

และบนช่วง $[0, 2]$ เส้นโค้ง $y = -\sqrt{\frac{x^3}{2}}$ อยู่เหนือเส้นตรง $y = -2$

ดังนั้น

$$\text{พื้นที่ } A = \int_0^2 \left[-\sqrt{\frac{x^3}{2}} - (-2) \right] dx$$

$$= \int_0^2 \left[-\sqrt{\frac{x^3}{2}} + 2 \right] dx$$

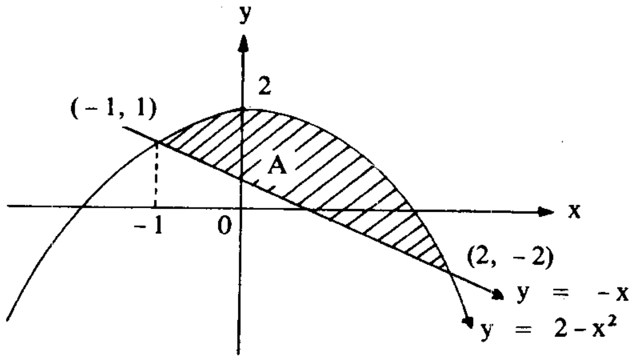
$$= \frac{-1}{\sqrt{2}} \frac{x^{\frac{5}{2}}}{\frac{5}{2}} + 2x \Big]_0^2$$

$$= \frac{-\sqrt{2}}{5}(2)^{\frac{5}{2}} + 4$$

$$= -\frac{8}{5} + 4 = \frac{12}{5} \text{ ตารางหน่วย}$$

4. $y = 2-x^2, y = -x$

วิธีทำ



จุดตัด ของ $y = 2-x^2$ และ $y = -x$ คือ $(-1, 1)$ และ $(2, -2)$
บนช่วง $[-1, 2]$ เส้นโค้ง $y = 2-x^2$ อยู่เหนือ $y = -x$
ดังนั้น

$$\text{พื้นที่ } A = \int_{-1}^{2} [(2-x^2)-(-x)]\, dx$$

$$= \int_{-1}^{2} [2-x^2+x]\, dx$$

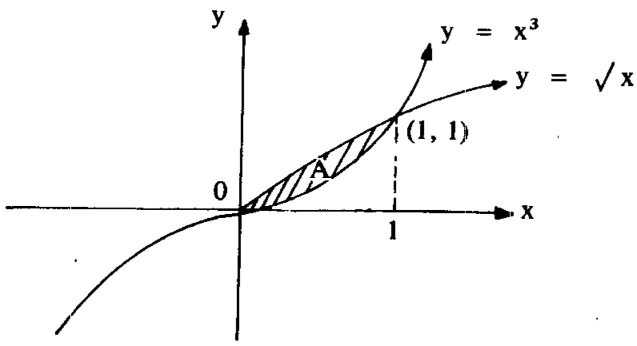
$$= 2x-\frac{x^3}{3}+\frac{x^2}{2}\Big]_{-1}^{2}$$

$$= \left(4-\frac{8}{3}+2\right)-\left(-2+\frac{1}{3}+\frac{1}{2}\right)$$

$$= \frac{9}{2} \text{ ตารางหน่วย}$$

5. $y = \sqrt{x, y} = x^3$

วิธีทำ



จุดตัดของ $y = \sqrt{x}$ และ $y = x^3$ คือ (1, 1) และ (0, 0)
บนช่วง [0, 1] เส้นโค้ง $y = \sqrt{x}$ อยู่เหนือ $y = x^3$
ดังนั้น

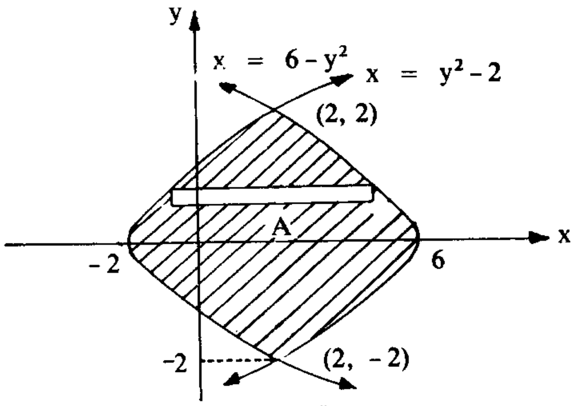
$$\text{พื้นที่ } A = \int_0^1 [\sqrt{x} - x^3]\, dx$$

$$= \frac{x^{\frac{3}{2}}}{3} - \frac{x^4}{4}\Big]_0^1$$

$$= \frac{2}{3} - \frac{1}{4} = \frac{5}{12} \text{ ตารางหน่วย}$$

6. $x = y^2 - 2, x = 6 - y^2$

วิธีทำ



จุดตัด ของ $x = y^2 - 2$ และ $x = 6 - y^2$ คือ
อินทิเกรตหาพื้นที่ตามแนวแกน y
ดังนั้นบนช่วง [-2, 2] บนแกน y เส้นโค้ง $x = 6 - y^2$ อยู่เหนือ $x = y^2 - 2$

$$\text{พื้นที่ } A = \int_{-2}^{2} (6 - y^2) - (y^2 - 2)]\, dy$$

$$= \int_{-2}^{2} (8 - 2y^2)\, dy$$

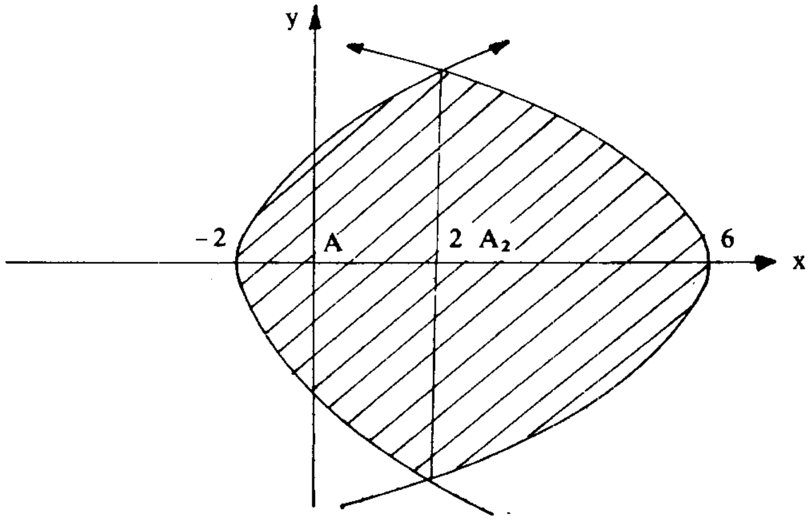
$$= 8y - \frac{2}{3}y^3\Big]_{-2}^{2}$$

$$= \left(16 - \frac{2}{3}(8)\right) - \left(-16 - \frac{2}{3}(-8)\right)$$

$$= 16-\frac{16}{3}+16-\frac{16}{3}$$

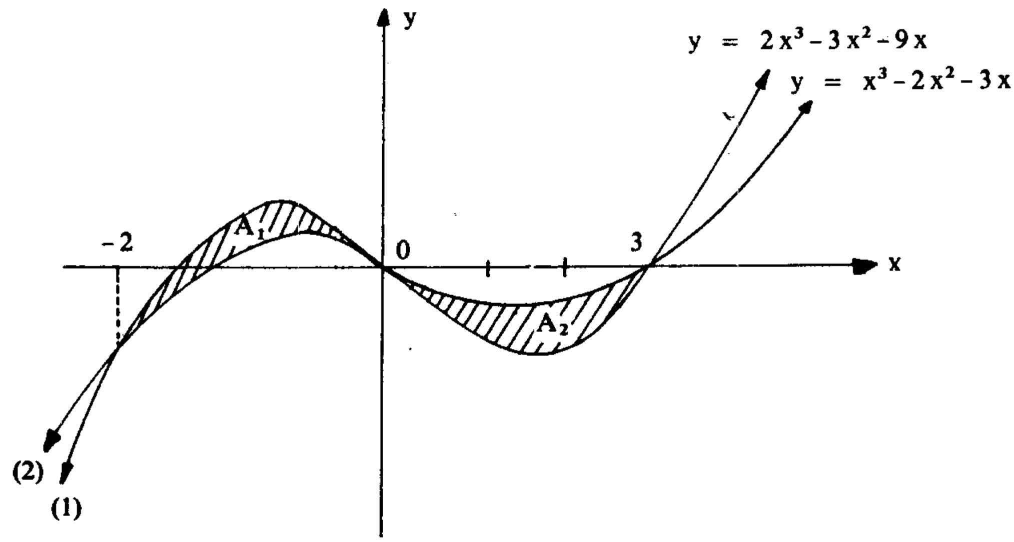
$$= \frac{64}{3} \text{ ตารางหน่วย}$$

ถ้าอินทิเกรตตามแนว x ต้องแบ่งช่วงการอินทิเกรต เป็น $[-2, 2]$ และ $[2, 6]$ ดังรูป



7. $y = 2x^3-3x^2-9x, y = x^3-2x^2-3x$

วิธีทำ



จุดตัดของ $y = 2x^3-3x^2-9x$ และ $y = x^3-2x^2-3x$ คือ $(-2, -10), (0, 0), (3, 0)$

บนช่วง $[-2, 0]$ เส้นโค้ง (1) อยู่เหนือ เส้นโค้ง (2)

บนช่วง $[0, 3]$ เส้นโค้ง (2) อยู่เหนือ เส้นโค้ง (1)

$\therefore$ พื้นที่ A_1 $= \int_{-2}^{0} [(2x^3-3x^2-9x)-(x^3-2x^2-3x)]\,dx$

$$= \int_{-2}^{0} (x^3-x^2-6x)\,dx$$

$$= \frac{x^4}{4}-\frac{x^3}{3}-3x^2\Big]_{-2}^{0}$$

$$= 0-\left(4+\frac{8}{3}-12\right) = 8-\frac{8}{3} = \frac{16}{3} \text{ ตารางหน่วย}$$

$\therefore$ พื้นที่ A_2 $= \int_{0}^{3} [(x^3-2x^2-3x)-(2x^3-3x^2-9x)]\,dx$

$$= \int_{0}^{3} [-x^3+x^2+6x]\,dx$$

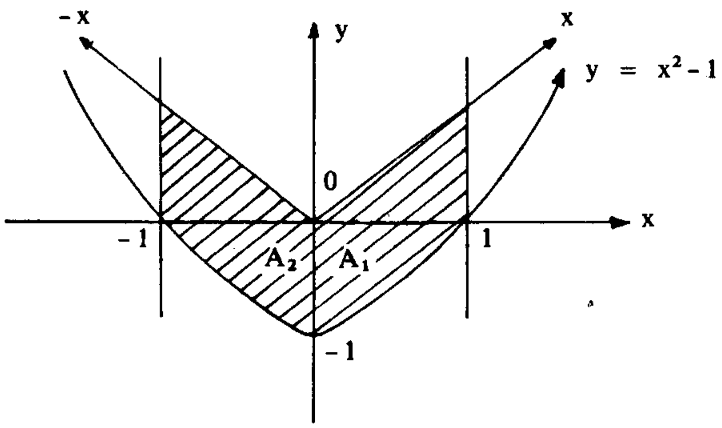
$$= -\frac{x^4}{4}+\frac{x^3}{3}+3x^2\Big]_{0}^{3}$$

$$= -\frac{81}{4}+9+27 = \frac{63}{4} \text{ ตารางหน่วย}$$

$\therefore$ พื้นที่ทั้งหมด $= A_1+A_2 = \frac{16}{3}+\frac{63}{4} = \frac{253}{12}$ ตารางหน่วย

8. $y = |x|,\ y = x^2-1,\ x = -1,\ x = 1$

วิธีทำ



พื้นที่ที่แรเงา A_1 และ A_2 เท่ากัน เพราะว่ากราฟสมมาตรของแกน y
ดังนั้น เราหาเพียง A_1 หรือ A_2
บนช่วง [0, 1] เส้นตรง $y = |x| = x$ อยู่เหนือ เส้นโค้ง $y = x^2 - 1$

ดังนั้น พื้นที่ $A_1 = \int_0^1 [x - (x^2 - 1)]\, dx$

$$= \int_0^1 (x - x^2 + 1)\, dx$$

$$= \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} + x \Big]_0^1$$

$$= \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + 1 = \frac{7}{6} \text{ ตารางหน่วย}$$

$\therefore$ พื้นที่ทั้งหมด $= 2 \times \frac{7}{6} = \frac{7}{3}$ ตารางหน่วย

9. $x^3 - x^2 + 2xy - y^2 = 0,\ x = 4$

วิธีทำ $x^3 - x^2 + 2xy - y^2 = 0$

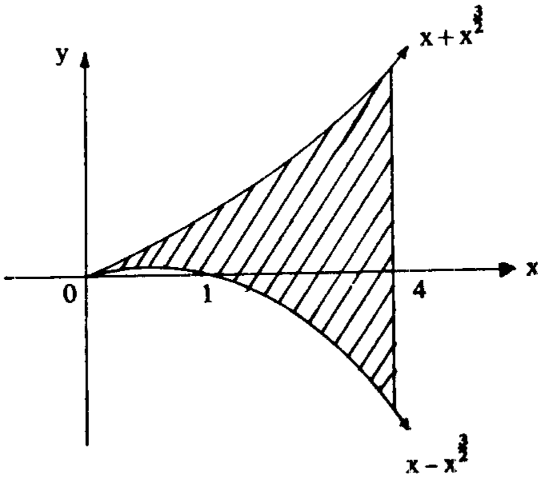
$$x^3 - (y - x)^2 = 0$$

$$(y - x)^2 = x^3$$

$$y = x \pm x^{\frac{3}{2}}$$

[domain คือค่าของ x ต้องเป็นค่าบวก $x \geqslant 0$]

$\therefore y = x + x^{\frac{3}{2}},\ x - x^{\frac{3}{2}}$ คือเส้นโค้งที่อยู่เหนือแกน x และใต้แกน x ดังรูป



บนช่วง $[0, 4]$ เส้นโค้ง $y = x+x^{\frac{3}{2}}$ อยู่เหนือ $y = x-x^{\frac{3}{2}}$
ดังนั้น

$$\text{พื้นที่ } A = \int_0^4 [(x+x^{\frac{3}{2}})-(x-x^{\frac{3}{2}})]\,dx$$

$$= 2\int_0^4 x^{\frac{3}{2}}\,dx$$

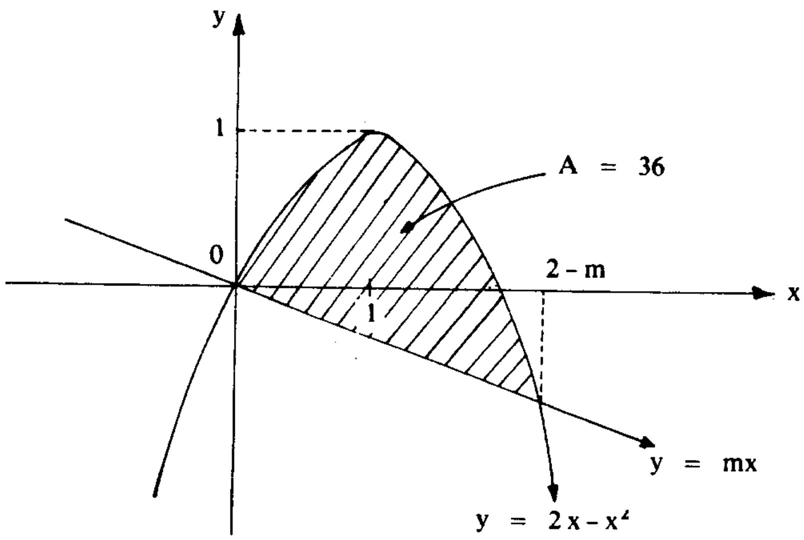
$$= 2\frac{x^{\frac{5}{2}}}{\frac{5}{2}}\Big]_0^4$$

$$= \frac{4}{5}\times 32$$

$$= \frac{128}{5} \text{ ตารางหน่วย}$$

10. จงหาค่าของ m ซึ่งทำให้บริเวณที่อยู่เหนือเส้นตรง $y = mx$ และต่ำกว่าเส้นโค้งพาราบอลา $y = 2x-x^2$ มีพื้นที่ 36 ตารางหน่วย

วิธีทำ



ส่วนที่แรเงาคือ พื้นที่ที่อยู่ใต้เส้นโค้งพาราบอลา $y = 2x-x^2$ และเหนือเส้นตรง $y = mx$

จุดตัด อยู่ที่ $(0, 0)$ และ $(2-m, 2m-m^2)$

พื้นที่ A $= 36 = \int_0^{2-m} [(2x - x^2) - mx]\,dx$

$$36 = \int_0^{2-m} [2x - x^2 - mx]\,dx$$

$$36 = x^2 - \frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2}\Big]_0^{2-m}$$

$$36 = (2-m)^2 - \frac{(2-m)^3}{3} - m\,\frac{(2-m)^2}{2}$$

$$\therefore\ (2-m)^3 = 36 \times 6$$

$$2 - m = 6$$

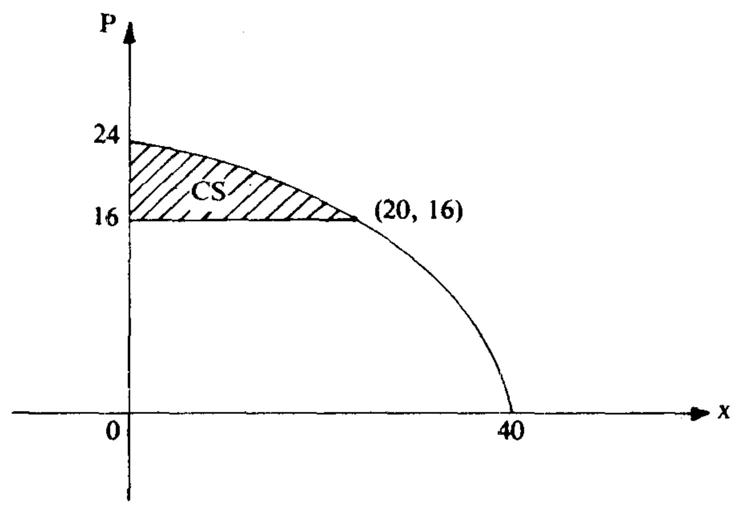
ดังนั้น $m = -4$

แบบฝึกหัด 6.5

จากข้อ 1 ถึง 6 P คือ จำนวนบาทของราคาต่อหน่วย และ x คือ จำนวนหน่วยของสินค้าที่ต้องการหรือขาย

1. สมการอุปสงค์สำหรับสินค้าชนิดหนึ่ง คือ $100P = 2400 - 20x - x^2$ และราคาตลาดคือ 16 บาท จงหาส่วนเกินของผู้บริโภค และเขียนรูปแสดงบริเวณที่ใช้แทนส่วนเกินของผู้บริโภคนี้

วิธีทำ



เมื่อ P = 16 บาท จำนวนหน่วยของสินค้าที่ซื้อหาได้จากสมการ

$$100.16 = 2400 - 20x - x^2$$

$\therefore \quad x = 20, -40$ ดังนั้น $x = 20$ หน่วย

$$\therefore CS = \int_0^{20} \frac{2400 - 20x - x^2}{100} dx - 16 \times 20$$

$$= \frac{1}{100}\left[2400x - 10x^2 - \frac{x^3}{3}) \right]_0^{20} - 320$$

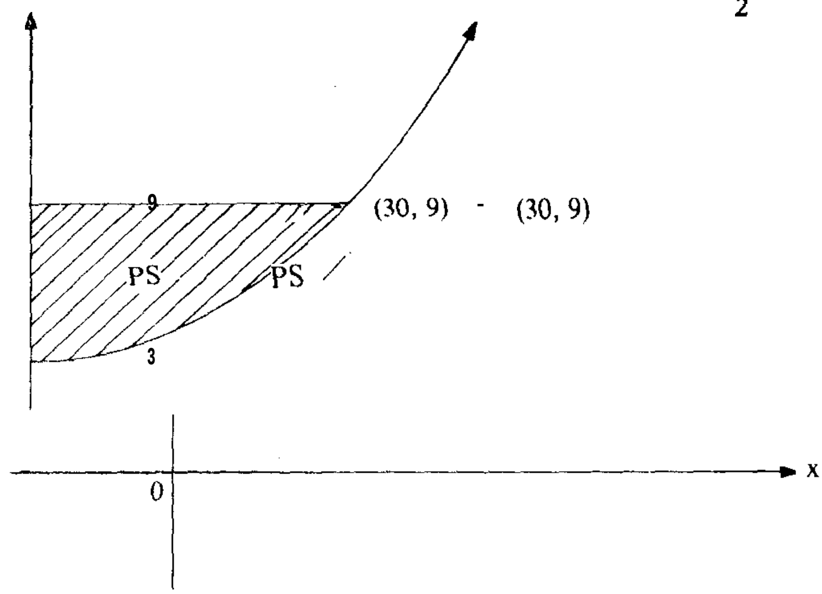
$$= 440 - \frac{80}{3} - 320$$

$$= \frac{280}{3} = 93.33 \text{ บาท}$$

2. สมการอุปทานสำหรับสินค้าชนิดหนึ่ง คือ $2x^2 - 300p + 900 = 0$ และราคาตลาดคือ 9 บาท จากส่วนเกินของผู้ผลิต และเขียนรูปแสดงบริเวณที่ใช้แทนส่วนเกินของผู้ผลิตนี้

วิธีทำ

$$x = \frac{\sqrt{300p - 900}}{2}$$



เมื่อ $p = 9$ บาท จำนวนหน่วยของสินค้าที่ซื้อหาได้จากการแก้สมการ

$2x^2 - 300(9) + 900 = 0 \qquad \therefore x = 30, -30$ (ค่าลบไม่ใช้)

ถ้าเราหาPS โดยการอินทิเกรตตามแกน p ก็อาจจะไม่จำเป็นที่จะต้องหา จุดตัดของเส้นตรง $p = 9$ และเส้นโค้ง $2x^2 - 300p + 900 = 0$

นั่นคือ อินทิเกรต จาก $p = 3$ ถึง $p = 9$ ได้โดยตรง
และเขียน x เป็น ฟังก์ชันของ p
ดังนั้นจาก $2x^2 - 300p + 900 = 0$

$$x^2 = \frac{1}{2}(300p-900)$$

$$x = \pm\sqrt{\frac{300p-900}{2}}$$

$\therefore x = \sqrt{\frac{300p-900}{2}}$ คือเส้นอุปทานแสดงในรูป

$$\therefore \ PS = \int_3^9 \sqrt{\frac{300p-900}{2}}\,dp$$

$$= \frac{1}{300\sqrt{2}} \frac{(300p-900)^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}\Big]_3^9$$

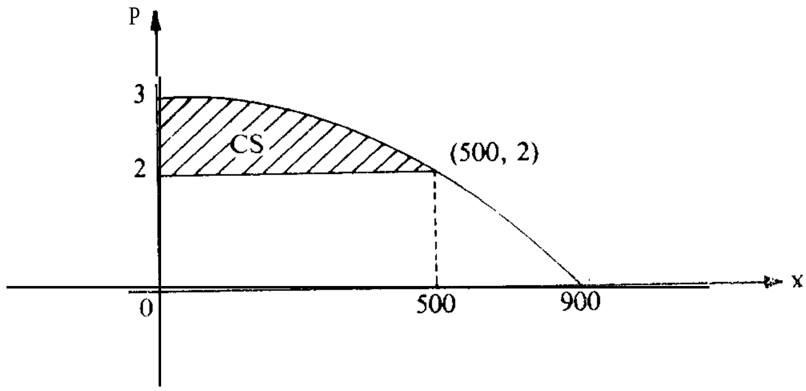
$$= \frac{1}{300\sqrt{2}} \cdot \frac{2}{3}(1800)^{\frac{3}{2}} - 0$$

$$= \frac{1}{300\sqrt{2}} \cdot \frac{2}{3}(1800)(30\sqrt{2})$$

$= 120$ บาท

3. ถ้าสมการอุปสงค์สำหรับสินค้าชนิดหนึ่งคือ $10p = \sqrt{900-x}$ และจำนวนอุปสงค์หรือจำนวนสินค้าที่ผู้บริโภคซื้อ คือ 500 หน่วย จงหาส่วนเกินของผู้บริโภคโดย
ก. อินทิเกรตตาม x ข. อินทิเกรตตาม p

วิธีทำ



$x = 500$ ได้ $10p = \sqrt{900-500}$ $\therefore p = 2$

ก. โดยอินทิเกรตตาม x

$$cs = \int_0^{500} \frac{\sqrt{900-x}}{10}\,dx - 500\times 2$$

$$= -\frac{1}{10}\frac{(900-x)^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}\Big]_0^{500} - 1000$$

$$= -\frac{1}{10}\cdot\frac{2}{3}(8000-27000) - 1000$$

$$= \frac{800}{3} = 266\frac{2}{3} \text{ บาท}$$

ข. โดยอินทิเกรตตามแกน p

ดังนั้นจาก $10p = \sqrt{900-x}$

$$100p^2 = 900 - x$$

$$\therefore \quad x = 900 - 100p^2$$

$$CS = \int_2^3 (900 - 100\,p^2)\,dp$$

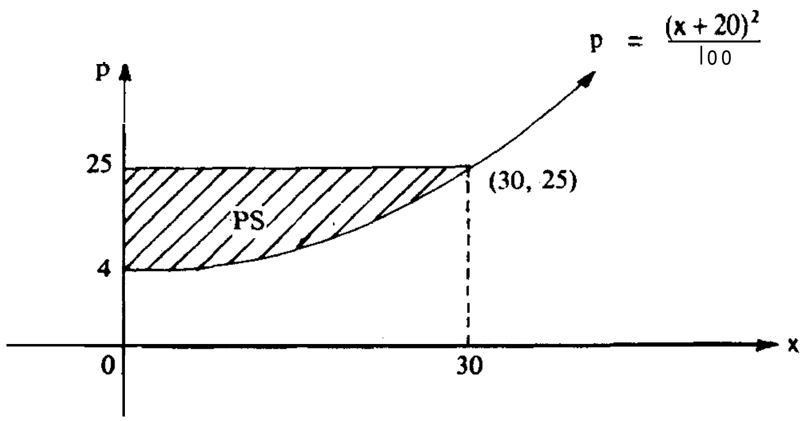
$$= 900p - \frac{100}{3}p^3\Big]_2^3$$

$$= (2700-900) - \left(1800 \quad \frac{800}{3}\right)$$

$$= \frac{800}{3} = 266\frac{2}{3} \text{ บาท}$$

4. ถ้าสมการอุปทาน สำหรับสินค้าชนิดหนึ่งคือ $100p = (x+20)^2$ และราคาตลาดคือ 25 บาท จงหาส่วนเกินของผู้ผลิตโดย ก. อินทิเกรตตาม x ข. อินทิเกรตตาม p

วิธีทำ



เมื่อ x = 25 หน่วย ราคาต่อหน่วย หาได้จากสมการ

$$100 \times 25 = (x+20)^2$$

$$\therefore \quad x = 30, \ -70 \text{ (ค่าลบไม่ใช้)}$$

ก. โดยอินทิเกรตตามตาม x

$$PS = 30 \times 25 - \int_0^{30} \frac{(x+20)^2}{100}\, dx$$

$$= (750) - \left[\frac{1}{100}\frac{(x+20)^3}{3}\right]_0^{30}$$

$$= 750 - \frac{1250}{3} + \frac{80}{3}$$

$$= \frac{1080}{3}$$

$$= 360 \text{ บาท}$$

ข. โดยอินทิเกรตตาม p

จาก $100p = (x+20)^2$

$$\therefore \quad x = -20 \pm 10\sqrt{p}$$

และ $x = -20 + 10\sqrt{p}$ คือ เส้นโค้งอุปทาน แสดงในรูป

$$PS = \int_4^{25} (-20 + 10\sqrt{p})\, dp$$

$$= -20p + 10\frac{p^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}\Bigg]_4^{25}$$

$$= \left(-500 + \frac{20}{3} \times 125\right) - \left(-80 + \frac{20}{3} \times 8\right)$$

$$= 360 \text{ บาท}$$

5. ถ้าเราใช้สมการอุปสงค์ในข้อ 1 และสมการอุปทานในข้อ 2 กับสินค้าชนิดหนึ่ง จงหาส่วนเกินของผู้บริโภคและส่วนเกินของผู้ผลิตเมื่อตลาดอยู่ในสภาพสมดุลย์ (ราคาตลาดในที่นี้คือ ราคาสมดุลย์ตลาด)

วิธีทำ ราคาสมดุลย์ตลาด ได้จากการหาจุดตัดของเส้นอุปสงค์ $100p = 2400 - 20x - x^2$ และเส้นอุปทาน $2x^2 - 300p + 900 = 0$ นั่นก็คือแก้สมการ หาค่า p และ x จาก

$$100p = 2400-20x-x^2$$

$$2x^2-300p+900 = 0$$

จาก (2) ได้ $100p = \frac{1}{3}(2x^2+900)$

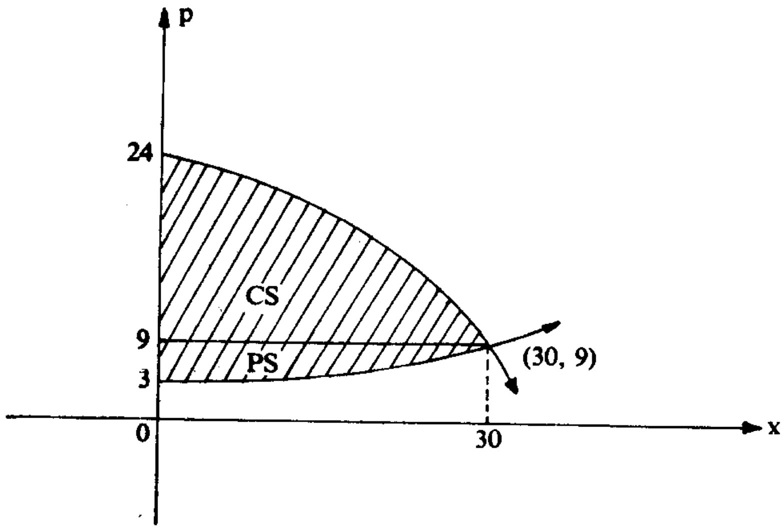
แทน $100p$ ใน (1) $\therefore \frac{1}{3}(2x^2+900) = 2400-20x-x^2$

$$5x^2+60x-6300 = 0$$

$$(5x+210)(x-30) = 0$$

$x = 30, -42$ (ค่าลบไม่ใช้)

เมื่อ $x = 30$ ได้ $p = 9$



$$CS = \int_0^{30} \frac{(2400-20x-x^2)}{100}\,dx - 30\times 9$$

$$= \frac{1}{100}\left(2400x - 10x^2 - \frac{x^3}{3}\right)\Big]_0^{30} - 270$$

$$= 540 - 270$$

$= 270$ บาท

$$PS = 30\times 9 - \int_0^{30} \frac{(2x^2+900)}{300}\,dx$$

$$= 270 - \left[\frac{1}{300} \left(\frac{2}{3} x^3 + 900x \right) \right]_0^{30}$$

$$= 270 - 150$$

$= 120$ บาท

6. สำหรับสินค้าชนิดหนึ่ง มีสมการอุปสงค์เป็น $30p = 3600 - x^2$ ฟังก์ชันต้นทุนการผลิตทั้งหมดของสินค้าชนิดนี้คือ $C(x) = (x+20)^2$ เมื่อ $C(x)$ บาท คือต้นทุนของการผลิตสินค้า x หน่วย ในสภาพที่ผู้ผลิตสินค้าชนิดนี้สามารถเป็นผู้ผลิตแต่เพียงผู้เดียว และสามารถควบคุมจำนวนหน่วยของสินค้าที่ผลิตและราคาเพื่อให้ได้กำไรสูงสุด (Monopoly) จงหาส่วนเกินของผู้บริโภค

วิธีทำ จาก $30p = 3600 - x^2$ ได้ $p = \frac{3600 - x^2}{30}$

$\therefore$ ฟังก์ชันรายได้ทั้งหมด $= R(x) = px = \left(\frac{3600 - x^2}{30} \right) x = 120x - \frac{x^3}{30}$

และ ฟังก์ชันรายได้เพิ่ม $= R'(x) = 120 - \frac{x^2}{10}$

และ ฟังก์ชันต้นทุนเพิ่ม $= C'(x) = 2(x+20)$

กำไรสูงสุดเมื่อ $R'(x) = C'(x)$

ดังนั้น $120 - \frac{x^2}{10} = 2(x+20)$

$$x^2 + 20x - 800 = 0$$

$$(x+40)(x-20) = 0$$

$x = 20, -40$ (ค่าลบไม่ใช้)

และเมื่อ $x = 20$, $p = \frac{3600 - (20)^2}{30} = \frac{320}{3}$

$$CS = \int_0^{20} \frac{(3600 - x^2)}{30} dx - \frac{320}{3} \times 20$$

$$= 120x - \frac{x^3}{90} \Big]_0^{20} - \frac{6400}{3}$$

$$= 2400 - \frac{800}{9} - \frac{6400}{3}$$

$$= \frac{100}{9}(216 - 8 - 192)$$

$$= \frac{1600}{9}$$

$$= 177\frac{7}{9}$$ บาท