บทที่ 5
ดิฟเฟอเรนเชียลและปฏิยานุพันธ์

5.1 ดิฟเฟอเรนเชียล

1. ความหมายของดิฟเฟอเรนเชียล

ให้ $y = f(x)$ เมื่อ $f'(x)$ หาค่าได้

ดังนั้น $f'(x) = \lim_{\triangle x \to 0} \frac{\triangle y}{\triangle x}$

เมื่อ $\triangle y = f(x + \triangle x) - f(x)$

จะได้ $\triangle y \approx f'(x) \triangle x$ ($\approx$ แทนประมาณด้วย)

จะได้นิยามของดิฟเฟอเรนเชียลดังนี้

นิยาม ให้ $y = f(x)$ แล้ว ดิฟเฟอเรนเชียลของ y แทนด้วย dy คือ

$$dy = f'(x) \triangle x$$

ถ้า $y = x$ หรือ $f(x) = x$ แล้วจะได้ว่า ดิฟเฟอเรนเชียลของ x คือ

$$dx = \triangle x$$

ดังนั้นรูปดิฟเฟอเรนเชียลทั่วไป จะเขียนอยู่ในรูป

$$dy = f'(x)\, dx$$

2. ความแตกต่างของรูปอนุพันธ์ และรูปดิฟเฟอเรนเชียล

2.1) รูปอนุพันธ์ $\frac{dy}{dx} = f'(x)$

2.2) รูปดิฟเฟอเรนเชียล $dy = f'(x)dx$

3. ความหมายของดิฟเฟอเรนเชียลในรูปค่าประมาณ

จาก $f(x_0 + \triangle x) - f(x_0) = \triangle y$

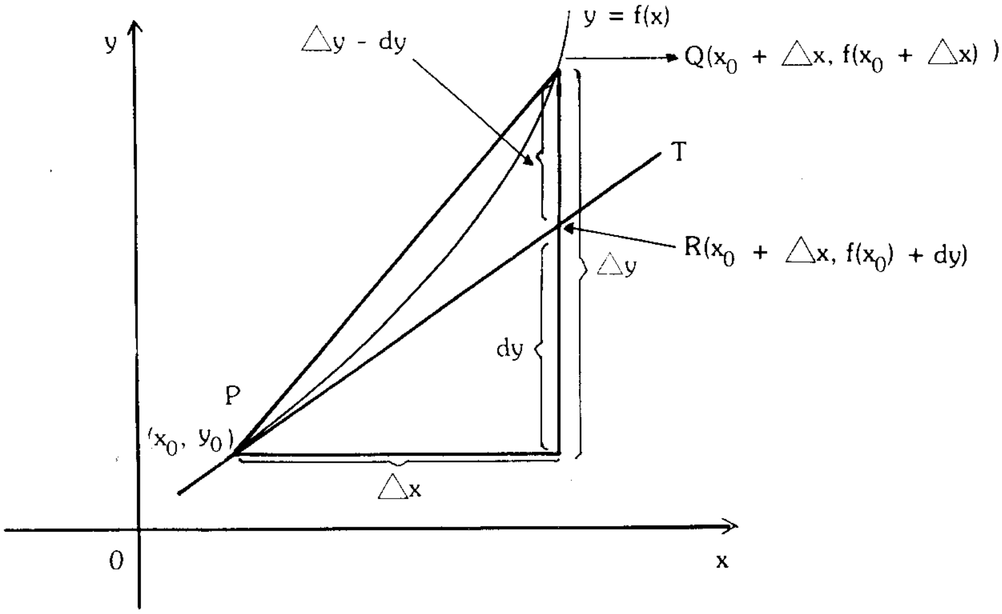
$f(x_0 + \triangle x) = f(x_0) + \triangle y$

แต่ dy เป็นค่าประมาณของ $\triangle y$

ดังนั้นจะได้ความสัมพันธ์ คือ

$$f(x_0 + \triangle x) \approx f(x_0) + dy$$

ซึ่งแสดงได้ดังรูป



ค่าประมาณจะดีก็ต่อเมื่อ $(\triangle y - dy) \to 0$

4. ดิฟเฟอเรนเชียลกับกฎลูกโซ่ (chain's rule)

ในบางครั้ง ความสัมพันธ์ที่กำหนดให้มีตัวแปรมากกว่า 2 ตัวแปร เช่น $y = f(x)$, $x = g(t)$ ต้องการดิฟเฟอเรนเชียล

$dy = \boxed{}\ dt$ ต้องอาศัยกฎลูกโซ่ดังนี้

$$dy = \frac{dy}{dt} \cdot dt$$

$$dy = \frac{dy}{dx} \cdot \frac{dx}{dt} \cdot dt$$

5. ทฤษฎีบทในรูปอนุพันธ์และรูปดิฟเฟอเรนเชียลที่ควรทราบ มีดังนี้

รูปอนุพันธ์	รูปดิฟเฟอเรนเชียล
1. $\frac{d}{dx}(c) = 0$	1. $dc = 0$
2. $\frac{d}{dx}x^n = nx^{n-1}$	2. $dx^{n-1} = nx^{n-1}\ dx$
3. $\frac{d}{dx}cu = c\frac{du}{dx}$	3. $dcu = cdu$
4. $\frac{d}{dx}(u+v) = \frac{du}{dx} + \frac{dv}{dx}$	4. $d(u+v) = du+dv$
5. $\frac{d}{dx}(u \cdot v) = \frac{udv}{dx} + \frac{vdu}{dx}$	5. $du \cdot v = udv + vdu$
6. $\frac{d}{dx}\left(\frac{u}{v}\right) = \frac{v\frac{du}{dx} - u\frac{dv}{dx}}{v^2}$	6. $d\left(\frac{u}{v}\right) = \frac{vdu - udv}{v^2}$
7. $\frac{d}{dx}(u^n) = nu^{n-1}\frac{du}{dx}$	7. $du^n = nu^{n-1}\ du$

หมายเหตุ ในการหารูปดิฟเฟอเรนเชียลทั้งหมด หาได้จากรูปอนุพันธ์ โดยการหาอนุพันธ์และย้ายข้าง dx ไปทางขวามือ

เช่น $\frac{dy}{dx} = 2x$

ดังนั้น $dy = 2xdx$

5.2 ปฏิยานุพันธ์

1. นิยามปฏิยานุพันธ์

สำหรับดิฟเฟอเรนเชียลใด ๆ อินเวอร์สโอเปอร์เรชันของดิฟเฟอเรนทิเอชัน เรียกว่า ปฏิยานุพันธ์

นิยาม : กำหนด $f(x)$ เป็นฟังก์ชัน แล้วเรียก $F(x)$ ว่า ปฏิยานุพันธ์ของ $f(x)$ บนช่วง I ก็ต่อเมื่อ

$$F'(x) = f(x) \quad \text{สำหรับทุก ๆ } x \in I$$

2. ทฤษฎีที่ควรทราบ

   1. f, g เป็นฟังก์ชันซึ่ง $f'(x) = g'(x) \ \forall x \in I$
      แล้ว $f(x) = g(x) + C$ (C เป็นค่าคงที่)
   2. ถ้า F เป็นปฏิยานุพันธ์ของ f บนช่วง I แล้ว ทุก ๆ ปฏิยานุพันธ์ของ f อยู่ในรูป

      $F(x)+C$

หมายเหตุ ใช้สัญลักษณ์ $\int f(x)dx = F(x) + C$

3. สูตรการหาปฏิยานุพันธ์ที่ควรทราบ

   1. $\int dx = x + C$
   2. $\int C\, f(x)dx = C\int f(x)dx$
   3. $\int (f(x) + g(x)dx = \int f(x)dx + \int g(x)dx$
   4. $\int x^n dx = \dfrac{x^{n+1}}{n+1} + C,\ n \neq -1$

4. กฎลูกโซ่สำหรับปฏิยานุพันธ์

   ถ้า $u = g(x)$ แล้ว

$$\begin{aligned}\int f(g(x))\, g'(x)dx &= \int f(u)du \\ &= F(u) + C \\ &= F(g(x)) + C\end{aligned}$$

ดังนั้น ถ้า u เป็นฟังก์ชันของ x จะได้ว่า

$$\int u^n du = \frac{u^{n+1}}{n+1} + C,\ n \neq -1$$

หรือ $$\int [g(x)]^n g'(x)dx = \frac{[g(x)]^{n+1}}{n+1} + C,\ n \neq -1$$

5.3 สมการเชิงอนุพันธ์

นิยาม สมการเชิงอนุพันธ์ คือ สมการที่อยู่ ในรูปสมการดิฟเฟอเรนเชียลคือมีอนุพันธ์ในสมการด้วย เช่น

$$\frac{dy}{dx} - 2y + 3 = 0$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} - 2x\frac{dy}{dx} - 3 = 0$$

การแก้สมการเชิงอนุพันธ์ คือการหาคำตอบที่สอดคล้องกับสมการที่กำหนดไว้ ซึ่งคำตอบมี 2 แบบคือ

1. คำตอบทั่วไป
2. คำตอบเฉพาะ (เมื่อมีเงื่อนไขกำหนดมาให้)

วิธีการแก้สมการดิฟเฟอเรนเชียลอย่างง่าย ๆ คือ ต้องจัดสมการในรูปดิฟเฟอ-เรนเชียลเสียก่อน แล้วจึงหาปฏิยานุพันธ์ทั้ง 2 ข้าง เช่น

$$\frac{dy}{dx} = 2xy$$

$$dy = 2xy^2dx$$

$$\frac{1}{y^2}dy = 2xdx$$

$$y^{-2}dy = 2x\,dx$$

$$\int y^{-2}\,dy = \int 2x\,dx$$

$$-\frac{1}{y} + C_1 = x^2 + C_2$$

$$x^2 + \frac{1}{y} = C_1 - C_2 = C$$

จะได้ $\frac{1}{y} = C - x^2$

$$y = \frac{1}{C - x^2}$$ เป็นต้น

5.4 การประยุกต์ของปฏิยานุพันธ์ในทางเศรษฐศาสตร์

เราทราบแล้วว่าฟังก์ชันต้นทุนเพิ่ม (marginal cost function) และฟังก์ชันรายได้เพิ่ม (marginal revenue function) เป็นอนุพันธ์อันดับที่ 1 ของฟังก์ชันต้นทุนทั้งหมด (total cost function) และฟังก์ชันรายได้ทั้งหมด (total revenue function) ตามลำดับ นั่นคือถ้าทราบฟังก์ชันต้นทุนเพิ่ม และรายได้เพิ่มแล้ว จะสามารถใช้ปฏิยานุพันธ์หาฟังก์ชันต้นทุนทั้งหมดและรายได้ทั้งหมดได้

นั่นคือ จะได้ว่า

$$TC = \int MC\, dx$$

$$TR = \int MR\, dx$$

เมื่อ TC แทน Total cost function

MC แทน Marginal cost function

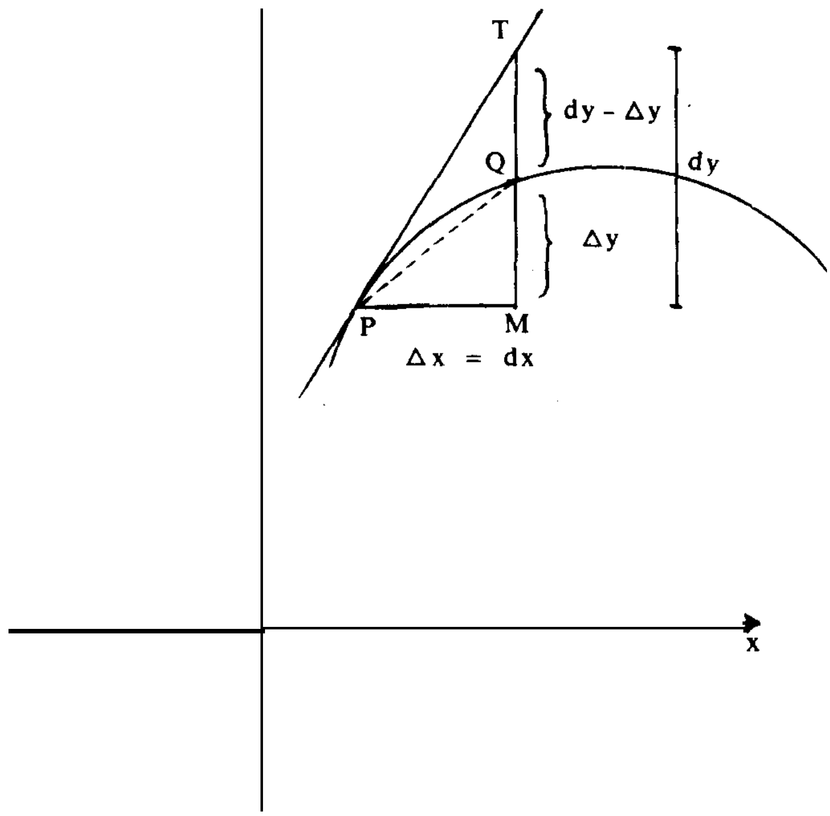
TR แทน Total revenue function

MR แทน Marginal revenue function

และทุกฟังก์ชันเป็นฟังก์ชันของตัวแปร x

แบบฝึกหัด 5.1

1. จงวาดรูปเส้นโค้งแบบเดียวกับรูป 5.1.1 แต่เป็นเส้นโค้งแบบโค้งคว่ำ พร้อมทั้งบอกรายละเอียดของ Δx, Δy, dx และ dy ด้วย



PM = Ax = dx

T แทนเส้นสัมผัสเส้นโค้งที่จุด P

TM = dy

Q M = Δy

∴ T Q = d y - A y

■

2. จงหาค่าของ a) Δy

b) dy

c) $\Delta y - dy$ ของข้อต่อไปนี้

2.1 $y = 4x^2 - 3x + 1$

วิธีทำ $\because$

$$y = 4x^2 - 3x + 1$$
$$y + \Delta y = 4(x + \Delta x)^2 - 3(x + \Delta x) + 1$$
$$= 4x^2 + 8x(\Delta x) + 4(\Delta x)^2 - 3x - 3(\Delta x) + 1$$
$$\Delta y = 8x(\Delta x) + 4(\Delta x)^2 - 3(\Delta x)$$
$$\Delta y = (8x - 3)\,\Delta x + 4(\Delta x)^2$$

จากนิยาม $dy = f'(x)\,dx$

$$dy = (8x - 3)\,dx$$
$$= (8x - 3)\,\Delta x$$
$$\Delta y - dy = 4(\Delta x)^2$$

■

2.2 $y = \frac{1}{x}$

วิธีทำ $\because$

$$y = \frac{1}{x}$$
$$y + \Delta y = \frac{1}{x + \Delta x}$$
$$\Delta y = \frac{1}{x + \Delta x} - \frac{1}{x}$$
$$= \frac{x - (x + \Delta x)}{x(x + \Delta x)}$$
$$= \frac{-\Delta x}{x(x + \Delta x)}$$

จากนิยาม $dy = f'(x)\,dx$

$$= -\frac{1}{x^2}\,dx$$
$$= -\frac{1}{x^2}\,\Delta x$$

$$\therefore \quad \Delta y - dy = \frac{-\Delta x}{x(x+\Delta x)} + \frac{1}{x^2}\Delta x$$

$$= \left(\frac{-1}{x(x+\Delta x)} + \frac{1}{x^2}\right)\Delta x$$

$$= \left(\frac{-x+x+\Delta x}{x^2(x+\Delta x)}\right)\Delta x$$

$$= \frac{(\Delta x)^2}{x^2(x+\Delta x)}$$ ■

3. จงหาค่าของ a) Δy

b) dy

c) $\Delta y - dy$ เมื่อกำหนดค่า

3.1 $y = x^2 - 3x, x = -1, \Delta x = 0.02$

วิธีทำ $\because \quad y = x^2 - 3x$

$$y + \Delta y = (x+\Delta x)^2 - 3(x+\Delta x)$$

$$= x^2 + 2x(\Delta x) + (\Delta x)^2 - 3x - 3(\Delta x)$$

$$\Delta y = 2x(\Delta x) + (\Delta x)^2 - 3(\Delta x)$$

$$= (2x - 3)\Delta x + (\Delta x)^2$$

$$\therefore \quad \Delta y = [2(-1) - 3](0.02) + (0.02)^2$$

$$= -0.1 + 0.0004$$

$$= -0.0996$$

จากนิยาม $dy = f'(x)\,dx$

$$= (2x-3)dx$$

$$= (2x-3)\Delta x$$

$$= (2(-1)-3)(0.02)$$

$$= -0.1$$

$$\Delta y - dy = (2x-3)\Delta x + (\Delta x)^2 - (2x-3)\Delta x$$

$$= (\Delta x)^2$$

$$= (0.02)^2$$

$$= 0.0004$$ ■

3.2 $Y = \frac{1}{x^2}, x = -3, \Delta x = -0.1$

วิธีทำ $\because \quad y = \frac{1}{x^2}$

$$y + \Delta y = \frac{1}{(x+\Delta x)^2}$$

$$\Delta y = \frac{1}{(x+\Delta x)^2} - \frac{1}{x^2}$$

$$= \frac{x^2 - (x+\Delta x)^2}{x^2(x + Ax)'}$$

$$= \frac{x^2 - x^2 - 2x(\Delta x) - (\Delta x)^2}{x^2(x + \Delta x)^2}$$

$$= \frac{-2x(\Delta x) - (\Delta x)^2}{x^2(x+\Delta x)^2}$$

$$= \frac{-2(-3)(-0.1) - (-0.1)^2}{(-3)^2(-3.1)^2}$$

$$= \frac{-0.6 - 0.01}{86.49}$$

$$= \frac{-0.61}{86.49}$$

$$= -0.0070528$$

จากนิยาม $dy = f'(x) \ dx$

$$= \frac{-2}{x^3} dx$$

$$= \frac{-2}{x^3} \Delta x$$

$$= \frac{-2}{(-3)^3} (-0.1)$$

$$= \frac{0.2}{-27}$$

$$= -0.0074074$$

$$Ay - dy = \frac{-2x(\Delta x) - (\Delta x)^2}{x^2(x + \Delta x)^2} + \frac{2}{x^3} \Delta x$$

$$= -0.0070528 + 0.0074074$$

$$= 0.003546$$

■

4. จงหา dy ของข้อต่อไปนี้

4.1 $y = (3x^2 - 2x + 1)^3$

วิธีทำ
$$\begin{aligned} dy &= d(3x^2 - 2x+1)^3 \\ &= 3(3x^2 - 2x + 1)^2\, d(3x^2 - 2x + 1) \\ &= 3(3x^2 - 2x+1)^2\,(d(3x^2) - d(2x) + d(1)) \\ &= 3(3x^2 - 2x+1)^2\,(6x\,dx - 2\,dx + 0) \\ &= 3(3x^2 - 2x+1)\,(6x-2)\,dx \\ &= 3(6x-2)\,(3x^2 - 2x + 1)\,dx \end{aligned}$$ ■

4.2 $y = \sqrt{4 - x^2}$

วิธีทำ
$$\begin{aligned} dy &= d\sqrt{4 - x^2} \\ &= d(4 - x^2)^{\frac{1}{2}} \\ &= \frac{1}{2}(4 - x^2)^{-\frac{1}{2}}\, d(4 - x^2) \\ &= \frac{1}{2}(4 - x^2)^{-\frac{1}{2}}\,(-2x\,dx) \\ &= -x\,(4 - x^2)^{-\frac{1}{2}}\,dx \end{aligned}$$ ■

4.3 $y = \dfrac{3x}{x^2+2}$

วิธีทำ
$$\begin{aligned} dy &= d\left(\frac{3x}{x^2+2}\right) \\ &= \frac{(x^2+2)\,d(3x) - (3x)\,d(x^2+2)}{(x^2+2)^2} \\ &= \frac{(x^2+2)\,(3\,dx) - (3x)\,(2x\,dx)}{(x^2+2)^2} \\ &= \frac{(3x^2+6-6x^2)\,dx}{(x^2+2)^2} \\ &= \frac{6-3x^2}{(x^2+2)^2}\,dx \end{aligned}$$ ■

4.4 $y = \sqrt{\frac{x-1}{x+1}}$

วิธีทำ
$$\begin{aligned}
dy &= d\left(\sqrt{\frac{x-1}{x+1}}\right) \\
&= d\left(\frac{x-1}{x+1}\right)^{\frac{1}{2}} \\
&= \frac{1}{2}\left(\frac{x-1}{x+1}\right)^{-\frac{1}{2}} d\left(\frac{x-1}{x+1}\right) \\
&= \frac{1}{2}\left(\frac{x-1}{x+1}\right)^{-\frac{1}{2}} \frac{(x+1)\,d(x-1)-(x-1)\,d(x+1)}{(x+1)^2} \\
&= \frac{1}{2}\left(\frac{x-1}{x+1}\right)^{-\frac{1}{2}} \frac{(x+1)\,dx-(x-1)\,dx}{(x+1)^2} \\
&= \frac{1}{2}\left(\frac{x+1}{x-1}\right)^{\frac{1}{2}} \frac{2\,dx}{(x+1)^2} \\
&= \frac{dx}{(x-1)^{\frac{1}{2}}(x+1)^{\frac{3}{2}}}
\end{aligned}$$
■

4.5 $y = (x+2)^{\frac{1}{3}}(x-2)^{\frac{2}{3}}$

วิธีทำ
$$\begin{aligned}
dy &= d(x+2)^{\frac{1}{3}}(x-2)^{\frac{2}{3}} \\
&= (x+2)^{\frac{1}{3}}\,d(x-2)^{\frac{2}{3}} + (x-2)^{\frac{2}{3}}\,d(x+2)^{\frac{1}{3}} \\
&= (x+2)^{\frac{1}{3}} \cdot \frac{2}{3}(x-2)^{-\frac{1}{3}}\,d(x-2) + (x-2)^{\frac{2}{3}} \cdot \frac{1}{3}(x+2)^{-\frac{2}{3}}\,d(x+2) \\
&= \frac{2}{3}(x+2)^{\frac{1}{3}}(x-2)^{-\frac{1}{3}}\,dx + \frac{1}{3}(x-2)^{\frac{2}{3}}(x+2)^{-\frac{2}{3}}\,dx \\
&= \frac{1}{3}\left[2\left(\frac{x+2}{x-2}\right)^{\frac{1}{3}} + \left(\frac{x-2}{x+2}\right)^{\frac{2}{3}}\right] dx
\end{aligned}$$
■

4.6 $y = \sqrt{3x+4}\,\sqrt[3]{x^2-1}$

วิธีทำ
$$\begin{aligned}
y &= (3x+4)^{\frac{1}{2}}(x^2-1)^{\frac{1}{3}} \\
dy &= d(3x+4)^{\frac{1}{2}}(x^2-1)^{\frac{1}{3}} \\
&= (3x+4)^{\frac{1}{2}}\,d(x^2-1)^{\frac{1}{3}} + (x^2-1)^{\frac{1}{3}}\,d(3x+4)^{\frac{1}{2}}
\end{aligned}$$

$$= (3x+4)^{\frac{1}{2}} \cdot \frac{1}{3}(x^2-1)^{-\frac{2}{3}} d(x^2-1) + (x^2-1)^{\frac{1}{3}} \cdot \frac{1}{2}(3x+4)^{-\frac{1}{2}} d(3x+4)$$

$$= \frac{1}{3}(3x+4)^{\frac{1}{2}}(x^2-1)^{-\frac{2}{3}}(2x\,dx) + \frac{1}{2}(x^2-1)^{\frac{1}{3}}(3x+4)^{-\frac{1}{2}}(3\,dx)$$

$$= \left[\frac{2x}{3}\frac{(3x+4)^{\frac{1}{2}}}{(x^2-1)^{\frac{2}{3}}} + \frac{3}{2}\frac{(x^2-1)^{\frac{1}{3}}}{(3x+4)^{\frac{1}{2}}}\right] dx$$

$$= \frac{[4x(3x+4)+9(x^2-1)]\,dx}{6(x^2-1)^{\frac{2}{3}}(3x+4)^{\frac{1}{2}}}$$

$$= \frac{(12x^2+16x+9x^2-9)}{6(x^2-1)^{\frac{2}{3}}(3x+4)^{\frac{1}{2}}}$$

$$= \left(\frac{21x^2+16x-9}{6(3x+4)^{\frac{1}{2}}(x^2-1)^{\frac{2}{3}}}\right) dx \qquad ■$$

5. ข้อต่อไปนี้ x, y เป็นฟังก์ชันของตัวแปร t, จงหา $\frac{dy}{dx}$ ใช้แบบตัวอย่าง 5.1.6

5.1 $8x^2 - y^2 = 32$

วิธีทำ ดิฟเฟอเรนทิเอทแต่ละพจน์จะได้

$$8(2x\,dx) - 2y\,dy = 0$$

$$16x\,dx - 2y\,dy = 0$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{16x}{2y}$$

$$= \frac{8x}{y} \qquad ■$$

5.2 $2x^2y - 3xy^3 + 6y^2 = 1$

วิธีทำ $4xy\,dx + 2x^2\,dy - 3y^3\,dx - 9xy^2\,dy + 12y\,dy = 0$

$$(12y+2x^2-9xy^2)\,dy = (3y^2-4xy)\,dx$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{3y^2-4xy}{12y+2x^2-9xy^2} \qquad ■$$

5.3 $x^{\frac{2}{3}}+y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}}$

วิธีทำ $\frac{2}{3}x^{-\frac{1}{3}}dx+\frac{2}{3}y^{-\frac{1}{3}}dy = 0$

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{x^{-\frac{1}{3}}}{y^{-\frac{1}{3}}}$$

$$= -\frac{y^{\frac{1}{3}}}{x^{\frac{1}{3}}} \quad \blacksquare$$

5.4 $3x^2+4y^2 = 48$

วิธีทำ $6x\,dx+8y\,dy = 0$

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{6x}{8y}$$

$$= -\frac{3x}{4y} \quad \blacksquare$$

6. ข้อต่อไปนี้จงหา $\frac{dy}{dt}$ โดยกำหนด

6.1 $y = x^2-3x+1, \ x = \sqrt{t^2-t+4}$

วิธีทำ $\frac{dy}{dt} = \frac{dy}{dx}\cdot\frac{dx}{dt}$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}(x^2-3x+1)$$

$$= 2x-3$$

$$\frac{dx}{dt} = \frac{d}{dt}(\sqrt{t^2-t+4})$$

$$= \frac{1}{2}(t^2-t+4)^{-\frac{1}{2}}(2t-1)$$

$$\therefore \frac{dy}{dt} = (2x-3)\cdot\frac{1}{2}(t^2-t+4)^{-\frac{1}{2}}(2t-1)$$

$$= \frac{(2\sqrt{t^2-t+4}-3)(2t-1)}{2\sqrt{t^2-t+4}}$$

6.2 $y = x^2-5x+1, \ x = s^3-2s+1, \ s = \sqrt{t^2+1}$

$$\frac{dy}{dt} = \frac{dy}{dx}\cdot\frac{dx}{ds}\cdot\frac{ds}{dt}$$

$$\frac{dy}{dx} = 2x-5$$

$$\frac{dx}{ds} = 3s^2 - 2$$

$$\frac{ds}{dt} = \frac{1}{2}(t^2+1)^{-\frac{1}{2}}(2t)$$

$$= \frac{t}{\sqrt{t^2+1}}$$

$$\therefore \quad \frac{dy}{dt} = (2x-5)(3s^2-2)\frac{t}{\sqrt{t^2+1}}$$

$$= (2s^3-4s+2-5)(3s^2-2)\frac{t}{\sqrt{t^2+1}}$$

$$= (6s^5-16s^3-9s^2+8s+6)\frac{t}{\sqrt{t^2+1}}$$

$$= \frac{6t(\sqrt{t^2+1})^5}{\sqrt{t^2+1}} - \frac{16t(\sqrt{t^2+1})^3}{\sqrt{t^2+1}} - \frac{9t(\sqrt{t^2+1})^2}{\sqrt{t^2+1}} + \frac{8t\sqrt{t^2+1}}{\sqrt{t^2+1}} + \frac{6t}{\sqrt{t^2+1}}$$

$$= 6t(t^2+1)^2 - 16t(t^2+1) - 9t(\sqrt{t^2+1}) + 8t + \frac{6t}{\sqrt{t^2+1}}$$

$$= 6t^5+12t^3+6t-16t^3-16t+9t(\sqrt{t^2+1})+8t+\frac{6t}{\sqrt{t^2+1}}$$

$$= 6t^5-4t^3-2t+9t(\sqrt{t^2+1})+\frac{6t}{\sqrt{t^2+1}}$$ ■

6.3 $y = \sqrt{x^2+1}, \quad x = \sqrt{t^2-1}$

วิธีทำ $$\frac{dy}{dt} = \frac{dy}{dx}\cdot\frac{dx}{dt}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}\sqrt{x^2+1}$$

$$= \frac{1}{2}(x^2+1)^{-\frac{1}{2}}(2x)$$

$$= \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}$$

$$\frac{dx}{dt} = \frac{d}{dt}\sqrt{t^2-1}$$

$$= \frac{1}{2}(t^2-1)^{-\frac{1}{2}}(2t)$$

$$= \frac{t}{\sqrt{t^2-1}}$$

$$\therefore \quad \frac{dy}{dt} = \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}\cdot\frac{t}{\sqrt{t^2-1}}$$

$$= \frac{\sqrt{t^2-1}}{\sqrt{t^2-1+1}}\cdot\frac{t}{\sqrt{t^2-1}}$$

$$= 1$$ ■

6.4 $x^3 - 3x^2y + y^3 = 5, \ x = 4t^2+1$

วิธีทำ หา $\frac{dy}{dx}$ จากสมการ $x^3 - 3x^2y + y^3 = 5$ โดยการดิฟเฟอเรนทิเอตตลอดจะได้

$$3x^2\,dx - (3x^2\,dy + 6xy\,dx) + 3y^2\,dy = 0$$

$$(3y^2 - 3x^2)\,dy = (6xy - 3x^2)\,dx$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{6xy - 3x^2}{3y^2 - 3x^2}$$

และ $\frac{dx}{dt} = 8t$

$$\therefore \quad \frac{dy}{dt} = \left(\frac{6xy - 3x^2}{3y^2 - 3x^2}\right)(8t)$$

$$= \left(\frac{2xy - x^2}{y^2 - x^2}\right)(8t)$$

$$= \left(\frac{8t^2y + 2y - (4t^2+1)^2}{y^2 - (4t^2+1)^2}\right)(8t)$$

$$= \left(\frac{(4t^2+1)^2 - 8t^2y - 2y}{(4t^2+1)^2 - y^2}\right)(8t)$$

$$= \left(\frac{16t^4 - 8t^2y + 8t^2 - 2y + 1}{16t^4 + 8t^2 - y^2 + 1}\right)(8t) \qquad ■$$

7. จงใช้วิธีการของดีฟเฟอเรนเชียลหาค่าประมาณของข้อต่อไปนี้

7.1 $\sqrt{37.5}$

วิธีทำ ให้ $y = \sqrt{x} = f(x)$

$$dy = f'(x)\,dx$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{x}}\,dx$$

ทราบว่าตัวเลขที่ถอดรากที่สองแล้วใกล้เคียง $\sqrt{37.5}$ มากที่สุดคือ 36

โดยใช้ $x = 36$ และ $dx = \Delta x = 1.5$

$$dy = \frac{1}{2\sqrt{36}}(1.5)$$

$$= \frac{1.5}{12}$$

$$= \frac{1}{8}$$

โดยใช้ $x_0 = 36, \Delta x = 1.5$ และ $dy = \frac{1}{8}$ แทนในความสัมพันธ์

$$f(x_0+\Delta x) \approx f(x_0)+dy$$

$$f(36+1.5) \approx f(36)+\frac{1}{8}$$

$$f(37.5) \approx \sqrt{36}+\frac{1}{8}$$

$$\sqrt{37.5} \approx 6+\frac{1}{8} = 6+0.125$$

$$\sqrt{37.5} = 6.125$$

■

7.2 $\sqrt{82}$

วิธีทำ ให้ $y = f(x) = \sqrt{x}$

$$dy = f'(x)\,dx$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

เราทราบว่าตัวเลขที่ถอดรากที่สองแล้วใกล้เคียง $\sqrt{82}$ มากที่สุด คือ 81

โดยใช้ $x = 81$ และ $\Delta x = dx = 1$

$$dy = \frac{1}{2\sqrt{81}}(1)$$

$$= \frac{1}{18}$$

โดยใช้ $x_0 = 81, \Delta x = 1$ และ $dy = \frac{1}{18}$ จะได้ความสัมพันธ์

$$f(81+1) \approx f(81)+\frac{1}{18}$$

$$f(82) \approx f(81)+\frac{1}{18}$$

$$\sqrt{82} \approx \sqrt{81}+\frac{1}{18}$$

$$\approx 9+\frac{1}{18} = 9+0.0555$$

$$\sqrt{82} \approx 9.056$$

■

7.3 $\sqrt{0.042}$

วิธีทำ ให้ $y = f(x) = \sqrt{x}$

$$dy = f'(x)\,dx$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{x}}\,dx$$

เราทราบว่าตัวเลขที่ถอดรากที่สองแล้วใกล้เคียง $\sqrt{0.042}$ มากที่สุดคือ 0.04

โดยใช้ $x = 0.04$ และ $\Delta x = dx = 0.002$

$$\therefore\ dy = \frac{1}{2\sqrt{0.04}}(0.002)$$

$$= \frac{0.002}{2(0.2)}$$

$$= 0.005$$

โดยใช้ $x_0 = 0.04$ และ $\Delta x = 0.002$ และ $dy = 0.005$ **จะได้ความสัมพันธ์ของค่าประมาณของฟังก์ชัน ดังนี้**

$$f(0.04+0.002) \approx f(0.04)+0.005$$

$$\sqrt{0.042} \approx \sqrt{0.04}+0.005$$

$$\approx 0.2+0.005$$

$$\sqrt{0.042} \approx 0.205$$

■

7.4 $\sqrt[3]{82}$

วิธีทำ ให้ $y = f(x) = \sqrt[3]{x}$

$$dy = f'(x)\,dx$$

$$= \frac{1}{3x^{\frac{2}{3}}}\,dx$$

เราทราบว่าตัวเลขที่ถอดรากที่ 3 แล้วใกล้เคียง $\sqrt[3]{82}$ คือ 64

โดยใช้ $x = 64$ และ $\Delta x = dx = 18$

$$\therefore\ dy = \frac{1}{3\sqrt[3]{14^2}}(18)$$

64

$$= \frac{18}{48}$$

โดยใช้ $x_0 = 64, \Delta x = 18$ และ $dy = \frac{18}{48}$ จะได้ความสัมพันธ์ของค่าประมาณ

ของฟังก์ชันดังนี้

$$f(64+18) \approx f(64)+\frac{18}{48}$$

$$f(82) \approx f(64)+\frac{18}{48}$$

$$\sqrt[3]{82} \approx \sqrt[3]{64}+\frac{18}{48}$$

$$\approx 4+0.375$$

$$\sqrt{82} \approx 4.375$$

■

7.5 $\sqrt[3]{71}$

วิธีทำ ให้ $y = f(x) = \sqrt[3]{x}$

$$dy = f'(x)\,dx$$

$$= \frac{1}{3x^{\frac{2}{3}}}\,dx$$

เราทราบว่าตัวเลขที่ถอดรากที่ 3 แล้วใกล้เคียง $\sqrt[3]{82}$ มากที่สุดคือ 64

โดยใช้ $x = 64$ และ $\Delta x = dx = 7$

$$\therefore dy = \frac{1}{3\sqrt[3]{64^2}}(7)$$

$$= \frac{7}{48}$$

โดยใช้ $x_0 = 64, \Delta x = 7$ และ $dy = \frac{7}{48}$ จะได้ความสัมพันธ์ของค่าประมาณ

ของฟังก์ชันดังนี้

$$f(64+7) \approx f(64)+\frac{7}{48}$$

$$f(71) \approx f(64)+\frac{7}{48}$$

$$\sqrt[3]{71} \approx \sqrt[3]{64}+\frac{7}{48}$$

$$\approx 4+0.146$$

$$\sqrt[3]{71} \approx 4.146$$

■

8. จากตัวอย่าง 5.1.4 จงหาค่าประมาณถ้าผลิตภัณฑ์เพิ่มจาก 1400 ชิ้น เป็น 1410 ชิ้น

วิธีทำ จากตัวอย่างเมื่อกำหนดให้

$C(x)$ เป็นต้นทุนการผลิตต่อเดือน

x เป็นจำนวนของที่ผลิต

จะได้ $C(x) = \frac{360,000}{x} + \frac{x}{4} + 30,000$

(สมการนี้ ได้จากตัวอย่าง 5.1.4)

$$\therefore dC = C'(x)\,dx$$

$$= \left(-\frac{360,000}{x^2} + \frac{1}{4}\right) dx$$

โดยใช้ $x = 1400$ ชั้น และ $dx = \Delta x = 10$

เราจะได้ว่า $dC = \left(-\frac{360,000}{(1400)^2} + \frac{1}{4}\right)(10)$

$$= \left(\frac{-36+49}{196}\right)(10)$$

$$= \left(\frac{13}{196}\right)(10)$$

$$= \frac{130}{196}$$

$$= 0.66$$

นั่นคือ $\Delta C \approx dC = 0.66$ แสดงว่า เมื่อผลผลิตในโกดังเพิ่มจาก 1400 ชิ้น เป็น 1410 ชิ้น ต้นทุนการผลิตจะเพิ่มขึ้นประมาณ 0.66 บาท ■

9. ถังรูปสี่เหลี่ยมลูกบาศก์มีปริมาตร 1000 ลูกบาศก์นิ้ว ด้านทั้ง 6 ทำด้วยวัสดุที่มีราคา 4 บาทต่อตารางนิ้ว จงใช้ดิฟเฟอเรนเชียลเพื่อหาค่าประมาณของการเปลี่ยนแปลงของด้านแต่ละด้านซึ่งทำให้ต้นทุนทั้งหมดที่เปลี่ยนไปไม่เกิน 100 บาท

วิธีทำ ให้ x เป็นด้านแต่ละด้านของถังสี่เหลี่ยมลูกบาศก์

ให้ $C(x)$ เป็นต้นทุนการผลิต

$\therefore$ พื้นที่ทั้งหมด $= 6x^2$ ตารางนิ้ว

ใช้เงินทั้งหมด $= 6x^2(4)$ บาท

$= 24x^2$ บาท

จะได้สมการ

$$C(x) = 24x^2$$

$$dC(x) = 48x\,dx$$

เนื่องจากปริมาตรกล่อง = 1000 ลบ.นิ้ว ดังนั้นแต่ละด้านของกล่องยาว 10 นิ้ว

และ $dC \approx \Delta C = 100$ บาท

$$\therefore dx \approx \frac{100}{48(10)}$$

$$= \frac{10}{48}$$

$$= \frac{5}{24} \text{ นิ้ว}$$

$\therefore$ ค่าประมาณของการเปลี่ยนแปลงของด้านประมาณ $\frac{5}{24}$ นิ้ว ■

แบบฝึกหัด 5.2

จากข้อ 1-20 จงหาค่าของปฏิยานุพันธ์ (antiderivative)

1. $\int 3x^4dx$

วิธีทำ $\int 3x^4dx = 3\int x^4dx$

$$= 3\left(\frac{x^5}{5}\right) + C$$

$$= \frac{3}{5}x^5 + C$$ ■

2. $\int (3-2t+t^2)\,dt$

วิธีทำ $\int (3-2t+t^2)\,dt = \int 3\,dt - \int 2t\,dt + \int t^2dt$

$$= 3\int dt - 2\int t\,dt + \int t^2dt$$

$$= 3t - \frac{2t^2}{2} + \frac{t^3}{3} + C$$

$$= 3t - t^2 + \frac{t^3}{3} + C$$ ■

3. $\int (1+x^2)^2\,dx$

วิธีทำ $\int (1+x^2)^2\,dx = \int (1+2x^2+x^4)\,dx$

$$= \int dx + \int 2x^2dx + \int x^4dx$$

$$= x+\frac{2x^3}{3}+\frac{x^5}{5}+C$$

$$= x+\frac{1}{3}x^3+\frac{1}{5}x^5+C \qquad \blacksquare$$

4. $\int (x^{\frac{3}{2}}+\sqrt{x})\,dx$

วิธีทำ $\int (x^{\frac{3}{2}}+\sqrt{x})\,dx = \int x^{\frac{3}{2}}dx+\int x^{\frac{1}{2}}dx$

$$= \frac{x^{\frac{3}{2}+1}}{\frac{3}{2}+1}+\frac{x^{\frac{1}{2}+1}}{\frac{1}{2}+1}+C$$

$$= \frac{2}{5}x^{\frac{5}{2}}+\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}+C \qquad \blacksquare$$

5. $\int \left(\sqrt{y}+y^2+\frac{1}{y^2}\right)dy$

วิธีทำ $\int \left(\sqrt{y}+y^2+\frac{1}{y^2}\right)dy = \int (y^{\frac{1}{2}}+y^2+y^{-2})\,dy$

$$= \int y^{\frac{1}{2}}dy+\int y^2dy+\int y^{-2}dy$$

$$= \frac{y^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}+\frac{y^3}{3}+\frac{y^{-1}}{-1}+C$$

$$= \frac{2}{3}y^{\frac{3}{2}}+\frac{1}{3}y^3-\frac{1}{y}+C \qquad \blacksquare$$

6. $\int \sqrt[3]{x+1}\,dx$

วิธีทำ ให้ $u = x+1$

$du = dx$

$$\therefore \int \sqrt[3]{x+1}\,dx = \int u^{\frac{1}{3}}du$$

$$= \frac{u^{\frac{4}{3}}}{\frac{4}{3}}+C$$

$$= \frac{3}{4}u^{\frac{4}{3}}+C$$

แทนค่า $u = x+1$

$$\therefore \int \sqrt[3]{x+1} = \frac{3}{4}(x+1)^{\frac{4}{3}} + C \qquad \blacksquare$$

7. $\int \sqrt{x}\,(1+x)\,dx$

วิธีทำ $\int \sqrt{x}\,(1+x)\,dx = \int x^{\frac{1}{2}}(1+x)\,dx$

$$= \int (x^{\frac{1}{2}} + x^{\frac{3}{2}})\,dx$$

$$= \frac{x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} + \frac{x^{\frac{5}{2}}}{\frac{5}{2}} + C$$

$$= \frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}} + \frac{2}{5}x^{\frac{5}{2}} + C \qquad \blacksquare$$

8. $\int \left(\frac{2}{x^3} + \frac{3}{x^2} + 5\right) dx$

วิธีทำ $\int \left(\frac{2}{x^3} + \frac{3}{x^2} + 5\right) dx$

$$= \int (2x^{-3} + 3x^{-2} + 5)\,dx$$

$$= 2\frac{x^{-2}}{-2} + 3\frac{x^{-1}}{-1} + 5x + C$$

$$= -\frac{1}{x^2} - \frac{3}{x} + 5x + C$$

$$= 5x - \frac{1}{x^2} - \frac{3}{x} + C \qquad \blacksquare$$

9. $\int \left(\frac{x^2+4x-4}{\sqrt{x}}\right) dx$

วิธีทำ $\int \frac{x^2+4x-4}{\sqrt{x}}\,dx = \int (x^{\frac{3}{2}} + 4x^{\frac{1}{2}} - 4x^{-\frac{1}{2}})\,dx$

$$= \frac{x^{\frac{5}{2}}}{\frac{5}{2}} + \frac{4x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} - \frac{4x^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}} + C$$

$$= \frac{2}{5}x^{\frac{5}{2}} + \frac{8}{3}x^{\frac{3}{2}} - 8x^{\frac{1}{2}} + C \qquad \blacksquare$$

10. $\int \left(\sqrt{2x} - \frac{1}{\sqrt{2x}} \right) dx$

วิธีทำ $\int \left(\sqrt{2x} - \frac{1}{\sqrt{2x}} \right) dx = \int \left(\sqrt{2}\, x^{\frac{1}{2}} - \frac{1}{\sqrt{2}}\, x^{-\frac{1}{2}} \right) dx$

$$= \sqrt{2}\left(\frac{x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}\right) - \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\frac{x^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}}\right) + C$$

$$= \frac{2\sqrt{2}}{3}\, x^{\frac{3}{2}} - \sqrt{2}\, x^{\frac{1}{2}} + C$$

$$= \frac{2}{3}\sqrt{2x^3} - \sqrt{2x} + C$$

■

11. $\int x^2 \sqrt{x^3 - 1}\, dx$

วิธีทำ ให้ $u = x^3 - 1$

$$du = 3x^2 dx$$

$$x^2 dx = \frac{du}{3}$$

$$\therefore \int x^2 \sqrt{x^3 - 1}\, dx = \int \sqrt{x^3 - 1}\; x^2 dx$$

$$= \int u^{\frac{1}{2}} \frac{du}{3}$$

$$= \frac{1}{3} \int u^{\frac{1}{2}} du$$

$$= \frac{1}{3} \frac{u^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} + C$$

$$= \frac{2}{9} u^{\frac{3}{2}} + C$$

แทนค่า $u = x^3 - 1$

$$\therefore \int x^2 \sqrt{x^3 - 1}\, dx = \frac{2}{9} (x^3 - 1)^{\frac{3}{2}} + C$$

■

12. $\int \frac{s\,ds}{\sqrt{3s^2 + 1}}$

วิธีทำ ให้ $u = 3s^2+1$

$$du = 6\,sds$$

$$sds = \frac{du}{6}$$

$$\therefore \int \frac{sds}{\sqrt{3s^2+1}} = \int \frac{1}{\sqrt{u}}\frac{du}{6}$$

$$= \frac{1}{6}\int u^{-\frac{1}{2}}du$$

$$= \frac{1}{6}\frac{u^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}}+C$$

$$= \frac{1}{3}u^{\frac{1}{2}}+C$$

แทนค่า $u = 3s^2+1$ จะได้

$$\int \frac{sds}{\sqrt{3s^2+1}} = \frac{1}{3}(3s^2+1)^{\frac{1}{2}}+C$$

13. $\int \sqrt{1-2y}\,dy$

วิธีทำ ให้ $u = 1-2y$

$$du = -2\,dy$$

$$dy = -\frac{1}{2}\,dy$$

แทนค่าจะได้

$$\int \sqrt{1-2y\,dy} = \int \sqrt{u}\frac{du}{-2}$$

$$= -\frac{1}{2}\int u^{\frac{1}{2}}du$$

$$= -\frac{1}{2}\left(\frac{u^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}\right)+C$$

$$= -\frac{1}{3}u^{\frac{3}{2}}+C$$

แทนค่า $u = 1-2y$ จะได้

$$\int\sqrt{1-2y}\,dy = -\frac{1}{3}(1-2y)^{\frac{3}{2}}+C$$

14. $\int\sqrt{1+\frac{1}{3x}}\,\frac{dx}{x^2}$

วิธีทำ ให้ $u = 1+\frac{1}{3x}$

$$du = \frac{1}{3}\left(-\frac{1}{x^2}\right)dx$$

$$= -\frac{1}{3x^2}\,dx$$

$$\frac{dx}{x^2} = -3\,du$$

แทนค่าจะได้

$$\int\sqrt{1+\frac{1}{3x}}\,\frac{dx}{x^2} = \int\sqrt{u}\,(-3\,du)$$

$$= -3\int u^{\frac{1}{2}}\,du$$

$$= -3\,\frac{u^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}+C$$

$$= -2u^{\frac{3}{2}}+C$$

แทนค่า $u = 1+\frac{1}{3x}$ จะได้

$$\int\sqrt{1+\frac{1}{3x}}\,\frac{dx}{x^2} = -2\left(1+\frac{1}{3x}\right)^{\frac{3}{2}}+C \qquad \blacksquare$$

15. $\int x^2(4-x^2)^3\,dx$

วิธีทำ $\int x^2(4-x^2)^3dx = \int x^2(64-48x^2+12x^4-x^6)\,dx$

$$= \int(64x^2-48x^4+12x^6-x^8)\,dx$$

$$= 64\,\frac{x^3}{3}-48\,\frac{x^5}{5}+12\,\frac{x^7}{7}-\frac{x^9}{9}+C$$

$$= \frac{64}{3}x^3-\frac{48}{5}x^5+\frac{12}{7}x^7-\frac{1}{9}x^9+C \qquad \blacksquare$$

16. $\int \frac{t}{\sqrt{t+3}}dt$

วิธีทำ ให้ $u = t+3$

$du = dt$

$$\therefore \int \frac{t}{\sqrt{t+3}}\,dt = \int \frac{u-3}{\sqrt{u}}\,du$$

$$= \int \left(\frac{u}{\sqrt{u}} - \frac{3}{\sqrt{u}} \right) du$$

$$= \int (u^{\frac{1}{2}} - 3u^{-\frac{1}{2}})\,du$$

$$= \frac{u^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} - 3\frac{u^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}} + C$$

$$= \frac{2}{3}u^{\frac{3}{2}} - 6u^{\frac{1}{2}} + C$$

แทนค่า $u = t+3$ จะได้

$$\int \frac{t}{\sqrt{t+3}}\,dt = \frac{2}{3}(t+3)^{\frac{3}{2}} - 6(t+3)^{\frac{1}{2}} + C$$

17. $\int \sqrt{3-x}\; x^2\,dx$

วิธีทำ ให้ $u = 3-x$

$\therefore x = 3-u$

และ $dx = -du$

$\therefore$ แทนค่าจะได้

$$\int \sqrt{3-x}\,x^2\,dx = \int u^{\frac{1}{2}}(3-u)^2(-du)$$

$$= -\int u^{\frac{1}{2}}(9-6u+u^2)\,du$$

$$= -\int (9u^{\frac{1}{2}} - 6u^{\frac{3}{2}} + u^{\frac{5}{2}})\,du$$

$$= -9\frac{u^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} + 6\frac{u^{\frac{5}{2}}}{\frac{5}{2}} - \frac{u^{\frac{7}{2}}}{\frac{7}{2}} + C$$

$$= -6u^{\frac{3}{2}} + \frac{12}{5}u^{\frac{5}{2}} - \frac{2}{7}u^{\frac{7}{2}} + C$$

แทนค่า u = 3 - x จะได้ค่าอินทิกรัล

$$\int \sqrt{3-x}\, x^2\, dx = -\frac{2}{7}(3-x)^{\frac{7}{2}} + \frac{12}{5}(3-x)^{\frac{5}{2}} - 6(3-x)^{\frac{3}{2}} + C$$ ■

18. $\int \frac{(x^2+2x)}{\sqrt{x^3+3x^2+1}}\, dx$

วิธีทำ ให้

$$u = x^3+3x^2+1$$

$$du = (3x^2+6x)\, dx$$

$$= 3(x^2+2x)\, dx$$

แทนค่าจะได้

$$\int \frac{x^2+2x}{\sqrt{x^3+3x^2+1}}\, dx = \int \frac{1}{u^{\frac{1}{2}}} \frac{du}{3}$$

$$= \frac{1}{3}\int u^{-\frac{1}{2}}\, du$$

$$= \frac{1}{3}\frac{u^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}} + C$$

$$= \frac{2}{3}u^{\frac{1}{2}} + C$$

แทนค่า $u = x^3+3x^2+1$ จะได้

$$\int \frac{x^2+2x}{\sqrt{x^3+3x^2+1}}\, dx = \frac{2}{3}(x^3+3x^2+1)^{\frac{1}{2}} + C$$ ■

19. $\int \frac{y+3}{(3-y)^{\frac{2}{3}}}\, dy$

วิธีทำ ให้

$$u = 3 - y$$

$$du = -dy$$

และ $y = 3 - u$

แทนค่า

$$\int \frac{y+3}{(3-y)^{\frac{2}{3}}}\, dy = \int \frac{6-u}{u^{\frac{2}{3}}}(-du)$$

$$= \int \frac{u-6}{u^{\frac{2}{3}}}\,du$$

$$= \int (u^{\frac{1}{3}} - 6u^{-\frac{2}{3}})\,du$$

$$= \frac{u^{\frac{4}{3}}}{\frac{4}{3}} - 6\frac{u^{\frac{1}{3}}}{\frac{1}{3}} + C$$

$$= \frac{3}{4}u^{\frac{4}{3}} - 18u^{\frac{1}{3}} + C$$

แทนค่า $u = 3 - y$ จะได้

$$\int \frac{y+3\ dy}{(3-y)^{2/3}} = \frac{3}{4}(3-y)^{\frac{4}{3}} - 18(3-y)^{\frac{1}{3}} + C$$ ■

20. $\int \frac{(r^{\frac{1}{3}}+2)^4}{\sqrt[3]{r^2}}\,dr$

วิธีทำ ให้ $u = r^{\frac{1}{3}} + 2$

$$du = \frac{1}{3}r^{-\frac{2}{3}}\,dr$$

$$= \frac{1}{3}\frac{dr}{\sqrt[3]{r^2}}$$

แทนค่า จะได้

$$\int \frac{(r^{\frac{1}{3}}+2)^4}{\sqrt[3]{r^2}}\,dr = \int u^4(3\,du)$$

$$= 3\int u^4\,du$$

$$= 3\frac{u^5}{5} + C$$

แทนค่า $u = r^{\frac{1}{3}} + 2$ จะได้

$$\int \frac{(r^{\frac{1}{3}}+2)^4}{\sqrt[3]{r^2}}\,dr = \frac{3}{5}(r^{\frac{1}{3}}+2)^5 + C$$ ■

21. จงหาค่าของ $\int (2x+1)^3\,dx$ โดยวิธี

ก) กระจาย $(2x+1)^3$

ข) สมมุติ $u = 2x+1$

วิธีทำ ก) $\int (2x+1)^3\,dx = \int (8x^3+12x^2+6x+1)\,dx$

$$= 8\frac{x^4}{4}+12\frac{x^3}{3}+6\frac{x^2}{2}+x+C$$

$$= 2x^4+4x^3+3x^2+x+C$$

ข) $\int (2x+1)^3\,dx$

ให้ $u = 2x+1$

$du = 2\,dx$ โดยการแทนค่าจะได้

$$\int (2x+1)^3\,dx = \int u^3\frac{du}{2}$$

$$= \frac{1}{2}\int u^3\,du$$

$$= \frac{1}{2}\frac{u^4}{4}+C$$

$$= \frac{1}{8}u^4+C$$

แทนค่า $u = 2x+1$ จะได้

$$\int (2x+1)^3\,dx = \frac{1}{8}(2x+1)^4+C$$

หมายเหตุ นักศึกษาสามารถตรวจสอบได้ว่า คำตอบของกรณีที่ 1 (การกระจาย) และกรณีที่ 2 (การสมมุติ u) คือคำตอบเดียวกัน

แบบฝึกหัด 5.3

จากข้อ 1. ถึงข้อ 5. จงหาคำตอบทั่วไปของสมการดิฟเฟอเรนเชียลที่กำหนด

1. $\frac{dy}{dx} = 3x^2+2x+7$

วิธีทำ จาก $\frac{dy}{dx} = 3x^2+2x+7$

$$dy = (3x^2+2x+7)\,dy$$

หาปฏิยานุพันธ์ จะได้

$$\int dy = \int (3x^2+2x+7)\,dx$$

$$y = 3\frac{x^3}{3}+2\frac{x^2}{2}+7x+C$$

คำตอบคือ $\quad y = x^3+x^2+7x+C$ ■

2. $\dfrac{dy}{dx} = 3xy^2$

วิธีทำ จาก $\quad \dfrac{dy}{dx} = 3xy^2$

โดยวิธีการแยกตัวแปรจะได้

$$\frac{1}{y^2}\,dy = 3x\,dx$$

$$\int \frac{1}{y^2}\,dy = \int 3x\,dx$$

$$\int y^2\,dy = 3\int x\,dx$$

$$\frac{y^{-1}}{-1} = 3\frac{x^2}{2}+C$$

$$-\frac{1}{y} = \frac{3}{2}x^2+C$$

คำตอบคือ $\frac{3}{2}x^2+\frac{1}{y}+C = 0$ หรือ $3x^2y+Cy+2 = 0$ ■

3. $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{3x\sqrt{1+y^2}}{y}$

วิธีทำ จาก $\quad \dfrac{dy}{dx} = \dfrac{3x\sqrt{1+y^2}}{y}$

โดยการแยกตัวแปรจะได้

$$\frac{y}{\sqrt{1+y^2}}\,dy = 3x\,dx$$

$$\int \frac{y}{\sqrt{1+y^2}}\,dy = \int 3x\,dx$$

พิจารณา $\int \frac{y}{\sqrt{1+y^2}}\,dy$ โดยการสมมุติ $\quad u = 1+y^2$

$$\therefore \quad du = 2y\,dy$$

แทนค่า $\int \frac{1}{u^{\frac{1}{2}}}\left(\frac{du}{2}\right) = \frac{1}{2}\int u^{-\frac{1}{2}}du$

$$= \frac{1}{2}\frac{u^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}} + C_1$$

$$= u^{\frac{1}{2}} + C_1$$

แทนค่า $u = 1+y^2$ ดังนั้น $\int \frac{y}{\sqrt{1+y^2}}dy = \sqrt{1+y^2} + C_1$

$$\therefore \quad \sqrt{1+y^2} + C_1 = 3\frac{x^2}{2} + C_2$$

$$2\sqrt{1+y^2} = 3x^2 + 2(C_2 - C_1)$$

$$2\sqrt{1+y^2} = 3x^2 + C$$

■

4. $\frac{d^2y}{dx^2} = 5x^2+1$

วิธีทำ จาก $\frac{d^2y}{dx^2} = 5x^2+1$

นั่นคือ $\frac{dy'}{dx} = 5x^2+1$

โดยการแยกตัวแปร

$$dy' = (5x^2+1)\,dx$$

$$\int dy' = \int (5x^2+1)\,dx$$

$$y' = 5\frac{x^3}{3} + x + C_1$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{5}{3}x^3 + x + C_1$$

ใช้การแยกตัวแปรอีกครั้งจะได้

$$dy = \left(\frac{5}{3}x^3 + x + C_1\right)dx$$

$$\int dy = \int \left(\frac{5}{3}x^3 + x + C_1\right)dx$$

$$y = \frac{5}{3}\left(\frac{x^4}{4}\right) + \frac{x^2}{2} + C_1 x + C_2$$

$$12y = 5x^4 + 6x^2 + 12C_1 x + 12C_2$$

$$12y = 5x^4 + 6x^2 + C_3 x + C_4$$

■

5. $\frac{dy}{dx} = \frac{x}{\sqrt{a^2 - x^2}}$

วิธีทำ จาก $\frac{dy}{dx} = \frac{x}{\sqrt{a^2 - x^2}}$

โดยการแยกตัวแปรจะได้

$$dy = \frac{x}{\sqrt{a^2 - x^2}}dx$$

$$\int dy = \int \frac{x}{\sqrt{a^2 - x^2}}$$

พิจารณา $\int \frac{x}{\sqrt{a^2 - x^2}}dx$ โดยการสมมุติ $u = a^2 - x^2$

$$\because \quad u = a^2 - x^2$$

$$\therefore \quad du = -2x\,dx$$

$$x\,dx = -\frac{du}{2}$$

แทนค่าจะได้ว่า

$$\int \frac{x}{\sqrt{a^2 - x^2}}dx = \int \frac{1}{u^{\frac{1}{2}}}\left(-\frac{du}{2}\right)$$

$$= -\frac{1}{2}\int u^{-\frac{1}{2}}du$$

$$= -\frac{1}{2}\frac{u^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}} + C$$

$$= -u^{\frac{1}{2}} + C$$

$$= -(a^2 - x^2)^{\frac{1}{2}} + C$$

$\therefore$ คำตอบคือ $y = -\sqrt{a^2 - x^2} + C$

หรือ $y + \sqrt{a^2 - x^2} = C$ ■

จากข้อ (6) ถึงข้อ (9) จงหาคำตอบเฉพาะของสมการดิฟเฟอเรนเชียล เมื่อกำหนดเงื่อนไขให้ดังต่อไปนี้

6. $\frac{dy}{dx} = x^2 - 2x - 4$; $y = -6$ เมื่อ $x = 3$

วิธีทำ จาก $\frac{dy}{dx} = x^2 - 2x - 4$ โดยการแยกตัวแปรจะได้

$$dy = (x^2 - 2x - 4)\,dx$$

$$\int dy = \int (x^2 - 2x - 4)\,dx$$

$$y = \frac{x^3}{3} - 2\frac{x^2}{2} - 4x + C$$

เงื่อนไข $y = -6$ เมื่อ $x = 3$

$$\therefore \quad -6 = \frac{3^3}{3} - 3^2 - 4(3) + C$$

$$-6 = 9 - 9 - 12 + C$$

$$C = 6$$

$$\therefore \quad y = \frac{x^3}{3} - x^2 - 4x + 6$$

คำตอบคือ $3y = x^3 - 3x^2 - 12x + 18$ ■

7. $\frac{dy}{dx} = \frac{x}{4y}$; $y = -2$ เมื่อ $x = 4$

วิธีทำ จาก $\frac{dy}{dx} = \frac{x}{4y}$ โดยการแยกตัวแปรจะได้

$$4y\,dy = x\,dx$$

$$\int 4y\,dy = \int x\,dx$$

$$4\frac{y^2}{2} = \frac{x^2}{2} + C$$

$$2y^2 = \frac{x^2}{2}+C$$

จากเงื่อนไข $y = -2$ เมื่อ $x = 4$ ดังนั้น

$$2(-2)^2 = \frac{4^2}{2}+C$$

$$8 = 8+C$$

$$C = 0$$

$\therefore$ คำตอบคือ $2y^2 = \frac{x^2}{2}$

หรือ $x^2 = 4y^2$ ■

8. $\sqrt{a^2-x^2\,dy} = xdx$; $y = 4$ เมื่อ $x = a$

วิธีทำ จาก $\sqrt{a^2-x^2}\,dy = xdx$

จะได้ $$dy = \frac{x}{\sqrt{a^2-x^2}}dx$$

$$\int dy = \int \frac{x}{\sqrt{a^2-x^2}}$$

พิจารณา $\int \frac{x}{\sqrt{a^2-x^2}}dx$ โดยการสมมุติ $u = a^2-x^2$

$du = -2xdx$ แทนค่าจะได้

$$\int \frac{x}{\sqrt{a^2-x^2}}dx = \int \frac{1}{u^{\frac{1}{2}}}\left(-\frac{du}{2}\right)$$

$$= -\frac{1}{2}\int u^{-\frac{1}{2}}\,du$$

$$= -\frac{1}{2}\frac{u^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}}+C$$

$$= \sqrt{a^2-x^2}+C$$

$\therefore$ คำตอบทั่วไปคือ $y = \sqrt{a^2-x^2}+C$

เงื่อนไข $x = a, y = 4$ แทนค่า $x = a, y = 4$ จะได้

$$4 = 0+C$$

$$C = 4$$

$\therefore$ คำตอบเฉพาะคือ $y = \sqrt{a^2-x^2}+4$ ■

0. $\frac{d^2y}{dx^2} = 4(1+3x)^2$: $y = 1$ และ $y' = -2138x = -1$

วิธีทำ จาก $\frac{d^2y}{dx^2} = 4(1+3x)^2$

$$\frac{dy'}{dx} = 4(1+3x)^2$$

$$dy' = 4(1+3x)^2\,dx$$

$$\int dy' = \int 4(1+6x+9x^2)\,dx$$

$$y' = 4x+24\frac{x^2}{2}+36\frac{x^3}{3}+C_1$$

จากเงื่อนไข $y' = -2$ เมื่อ $x = -1$

$$-2 = -4+12(-1)^2+12(-1)^3+C_1$$

$$C_1 = 2$$

$$\therefore y' = 4x+12x^2+12x^3+2$$

$$\frac{dy}{dx} = 12x^3+12x^2+4x+2$$

$$dy = (12x^3+12x^2+4x+2)\,dx$$

$$\int dy = \int (12x^3+12x^2+4x+2)\,dx$$

$$y = 12\frac{x^4}{4}+12\frac{x^3}{3}+4\frac{x^2}{2}+2x+C_2$$

$$y = 3x^4+4x^3+2x^2+2x+C_2$$

จากเงื่อนไขที่กำหนด $y = -1$ เมื่อ $x = -1$

$$\therefore -1 = 3+(-4)+2+(-2)+C_2$$

$$C_2 = 0$$

คำตอบคือ $y = 3x^4+4x^3+2x^2+2x$ ■

10. จุด (3, 2) อยู่บนเส้นโค้ง $y = f(x)$ ซึ่งความชันของเส้นสัมผัสที่จุด (x, y) ใด ๆ มีค่าเท่ากับ $2x-3$ จงหาสมการเส้นโค้ง

วิธีทำ เพราะว่า ความชันที่จุด (x, y) ใด ๆ บนเส้นโค้ง คือค่าอนุพันธ์ที่จุดนั้น ดังนั้น

$$\frac{dy}{dx} = 2x-3$$

$$dy = (2x-3)\,dx$$

$$\int dy = \int (2x-3)\,dx$$

$$y = \frac{2x^2}{2} - 3x + C$$

$$y = x^2 - 3x + C$$

เนื่องจากจุด (3, 2) อยู่บนเส้นโค้งดังนี้

$$2 = 3^2 - 3(3) + C$$

$$C = 2$$

$\therefore$ สมการเส้นโค้งคือ $y = x^2 - 3x + 2$ ■

11. จุด $(-1, 3)$ และ $(0, 2)$ อยู่บนเส้นโค้ง และที่จุด (x, y) ใด ๆ ค่า $\frac{d^2y}{dx^2} = 2-4x$ **จงหาสมการของเส้นโค้ง**

วิธีทำ จากที่กำหนด $\frac{d^2y}{dx^2} = 2-4x$

$$\frac{dy'}{dx} = 2-4x$$

$$dy' = (2-4x)\,dx$$

$$\int dy' = \int (2-4x)\,dx$$

$$y' = 2x - \frac{4x^2}{2} + C_1$$

$$\frac{dy}{dx} = 2x - 2x^2 + C_1$$

$$dy = (2x - 2x^2 + C_1)\,dx$$

$$\int dy = \int (2x - 2x^2 + C_1)\,dx$$

$$y = \frac{2x^2}{2} - \frac{2x^3}{3} + C_1x + C_2$$

$$y = x^2 - \frac{2}{3}x^3 + C_1x + C_2$$

เนื่องจากจุด $(-1, 3)$ และ $(0, 2)$ อยู่บนเส้นโค้ง ดังนั้น

$$3 = 1+\frac{2}{3}-C_1+C_2 \qquad \text{..........(1)}$$

$$\text{และ } 2 = 0+C_2 \qquad \text{..........(2)}$$

จาก (1) & (2) ได้ $C_1 = \frac{2}{3}$, $C_2 = 2$

$$\therefore \text{ สมการคือ } y = -\frac{2}{3}x^3+x^2+\frac{2}{3}x+2$$

$$\text{หรือ } 3y = -2x^3+3x^2+2x+6$$

■

12. ที่จุด (x, y) ใด ๆ บนเส้นโค้ง $\frac{d^2y}{dx^2} = 1-x^2$ และสมการเส้นสัมผัสเส้นโค้งนี้ที่จุด (1, 1) คือ $y = 2-x$ จงหาสมการของเส้นโค้งที่กำหนดให้

วิธีทำ จาก $\frac{d^2y}{dx^2} = 1-x^2$

$$\frac{dy'}{dx} = 1-x^2$$

$$dy' = (1-x^2)\,dx$$

$$\int dy' = \int (1-x^2)\,dx$$

$$y' = x-\frac{x^3}{3}+C_1$$

$\frac{dy}{dx} = x-\frac{x^3}{3}+C_1$ คือความชันของเส้นสัมผัสที่จุด (x, y) ใด ๆ

ที่จุด (1, 1) $\frac{dy}{dx} = 1-\frac{1}{3}+C_1$

$$= \frac{2}{3}+C_1$$

แต่สมการเส้นสัมผัสคือ $y = 2-x$

$$y = -x+2$$

$$\text{ความชัน} = -1$$

$\therefore$ จะได้ความสัมพันธ์

$$\frac{2}{3}+C_1 = -1$$

$$C_1 = -\frac{5}{3}$$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = x - \frac{x^3}{3} - \frac{5}{3}$$

$$dy = \left(-\frac{x^3}{3} + x - \frac{5}{3} \right) dx$$

$$\int dy = \int \left(-\frac{x^3}{3} + x - \frac{5}{3} \right) dx$$

$$y = -\frac{x^4}{12} + \frac{x^2}{2} - \frac{5x}{3} + C_2$$

แต่จุด (1, 1) อยู่บนเส้นโค้งดังนั้น

$$1 = -\frac{1}{12} + \frac{1}{2} - \frac{5}{3} + C_2$$

$$1 = \frac{-1+6-20}{12} + C_2$$

$$1 = \frac{-15}{12} + C_2$$

$$C_2 = \frac{27}{12}$$

$\therefore$ สมการคือ $y = -\dfrac{x^4}{12} + \dfrac{x^2}{2} - \dfrac{5x}{3} + \dfrac{27}{12}$

หรือ $12y = -x^4 + 6x^2 - 20x + 27$ ■

แบบฝึกหัดที่ 5.4

1. จงหาฟังก์ชันรายได้ทั้งหมด ถ้าความชันของเส้นโค้งรายได้ที่จุดใด ๆ เท่ากับ $12-3x$ และถ้า $p = 6$ เมื่อ $x = 4$ ให้เขียนกราฟของฟังก์ชันรายได้ทั้งหมดและเส้นอุปสงค์บนแกนเดียวกัน

วิธีทำ ให้ $R(x)$ เป็นฟังก์ชันรายได้ทั้งหมด และ

$$R'(x) = 12-3x$$

$$\therefore R(x) = \int (12-3x)\,dx$$

$$= 12x-\frac{3x^2}{2}+C$$

$$\because R(0) = 0 \text{ ดังนั้น } C = 0$$

$$R(x) = 12x-\frac{3x^2}{2}$$

ถ้าให้ f เป็นฟังก์ชันราคา

$$R(x) = xf(x)$$

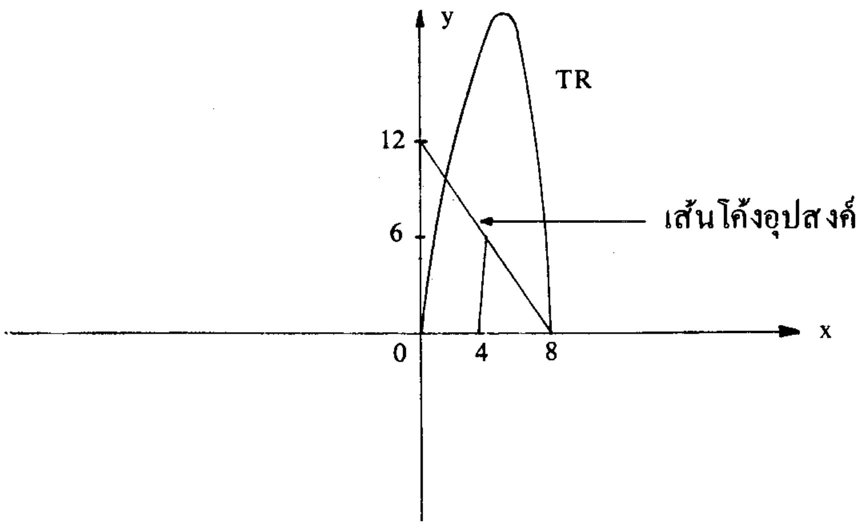
$$\text{ดังนั้น } f(x) = 12-\frac{3}{2}x$$

ถ้าให้ p บาท เป็นราคาผลผลิตหนึ่งหน่วย เมื่อ x หน่วย เป็นอุปสงค์ ดังนั้น เพราะว่า $p = f(x)$ จะได้สมการอุปสงค์คือ

$$p = 12-\frac{3x}{2}$$

$$\text{หรือ } 2p = 24-3x$$

จะเห็นว่าเมื่อ $x = 4$, $p = 6$



พิจารณา $p = 12 - \frac{3x}{2}$ หรือ $y = 12 - \frac{3x}{2}$ คือเส้นตรงดังรูป เนื่องจาก $x \geq 0$, $p \geq 0$

จาก $R(x) = 12x - \frac{3x^2}{2}$ หรือ $y = -\frac{3}{2}x^2 + 12x$ เป็นพาราโบลาคว่ำจุดยอดที่ $x = \frac{-12}{2\left(\frac{-3}{2}\right)} = 4$ แทนค่า $x = 4$, $y = 12(4) - \frac{3(4)^2}{2} = 24$ ดังรูป ■

2. ฟังก์ชันรายได้เพิ่มนิยามโดย $R'(x) = 16 - 3x^2$ จงหาฟังก์ชันภายได้ทั้งหมดและสมการอุปสงค์ พร้อมทั้งเขียนกราฟของเส้นโค้งอุปสงค์ เส้นโค้งรายได้ทั้งหมดและเส้นโค้งรายได้เพิ่มบนแกนคู่เดียวกัน

วิธีทำ ให้ $R(x)$ เป็นฟังก์ชันภายได้ทั้งหมด จากที่กำหนด

$$R'(x) = 16 - 3x^2$$

$$\therefore R(x) = \int (16 - 3x^2)\,dx$$

$$= 16x - \frac{3x^3}{3} + C$$

$$= 16x - x^3 + C$$

เพราะว่า $R(0) = 0$ ดังนั้นจะได้ $C = 0$

$$\therefore R(x) = 16x - x^3$$

ถ้าให้ f แทนฟังก์ชันราคา แล้ว

$$R(x) = x\,f(x)$$

ดังนั้น $f(x) = 16 - x^2$

ถ้าให้ p บาท เป็นราคาผลผลิตต่อหนึ่งหน่วย เมื่อ x หน่วย เป็นอุปสงค์ ดังนั้น เพราะว่า $p = f(x)$ จะได้

$$p = 16 - x^2 \text{ เป็นสมการอุปสงค์}$$

เนื่องจาก $p \geqslant 0, x \geqslant 0$ ดังนั้นจะเขียนกราฟของ

$R'(x) = 16 - 3x^2$ แทนด้วย MR

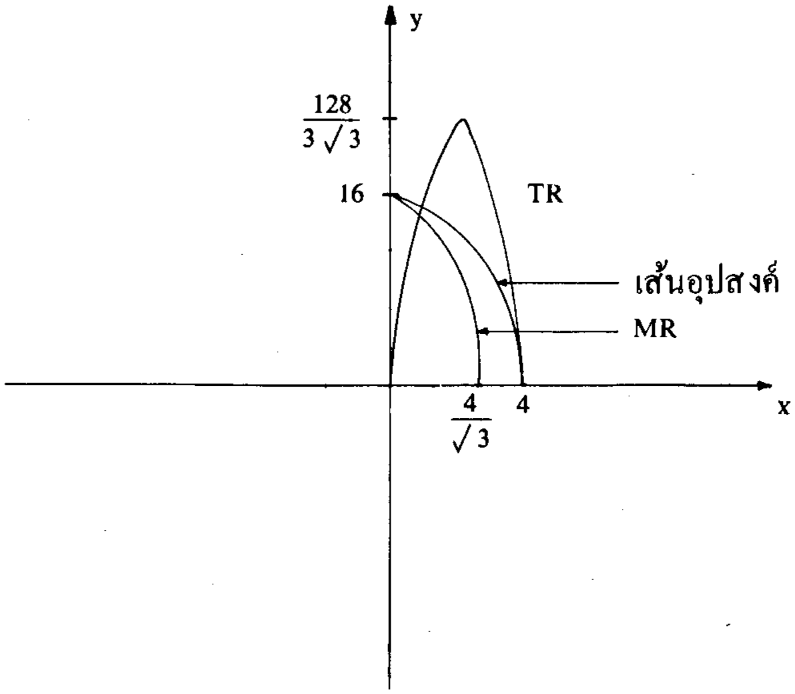
$R(x) = 16x - x^3$ แทนด้วย TR

และ $p = 16 - x^2$ แทนด้วย เส้นโค้งอุปสงค์ได้ดังนี้

เพราะว่า $R'(x) = 16 - 3x^2$ เป็นพาราโบลาคว่ำ จุดยอดอยู่ที่ $x = 0$

$p(x) = 16 - x^2$ เป็นพาราโบลาคว่ำ จุดยอดที่ $x = 0$ เช่นเดียวกัน

ในช่วง $[0, 4]$ สมการ $R(x) = 16x - x^3$ มีค่าสูงสุดเมื่อ $x = \frac{4}{\sqrt{3}}$ ดังรูป



3. ให้ฟังก์ชันต้นทุนเพิ่มคือ $C'(x) = 3x^2+8x+4$ และค่าโสหุ้ยเท่ากับ 6 บาท ถ้า $C(x)$ บาท เป็นฟังก์ชันต้นทุนทั้งหมดของผลผลิต x หน่วย จงหาฟังก์ชันต้นทุนทั้งหมด พร้อมทั้งเขียนกราฟของเส้นโค้งต้นทุนทั้งหมด และเส้นโค้งต้นทุนเพิ่มบนแกนเดียวกัน

วิธีทำ ให้ $C(x)$ เป็นฟังก์ชันต้นทุนทั้งหมด และ

$$C'(x) = 3x^2+8x+4$$

$$C(x) = \int (3x^2+8x+4)\,dx$$

$$= \frac{3x^3}{3}+\frac{8x^2}{2}+4x+C$$

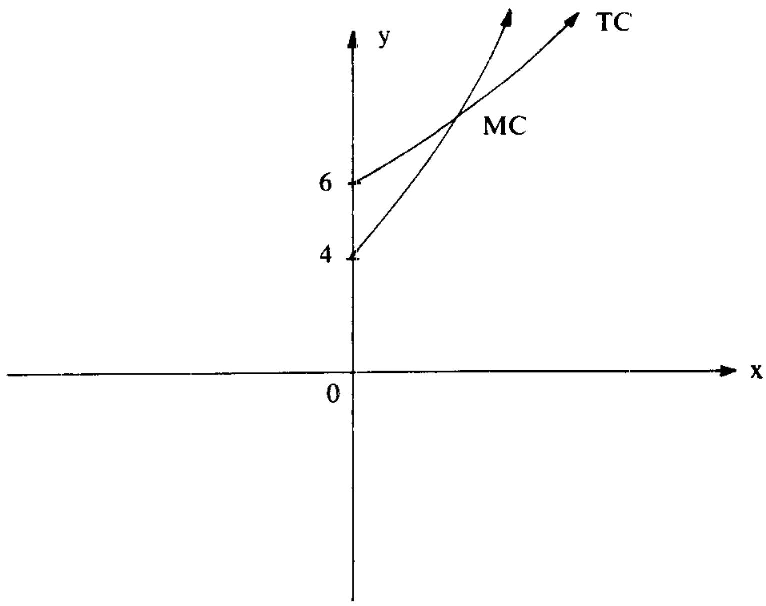
$\therefore$ ค่าโสหุ้ย = 6 บาท

ดังนั้น $x = 0, C(x) = C(0) = 6$

ค่า $C = 6$

$$\therefore C(x) = x^3+4x^2+4x+6$$

กราฟของต้นทุนทั้งหมดและต้นทุนเพิ่ม ดังรูป



รูปกราฟแสดงเส้นโค้งต้นทุนเพิ่ม และต้นทุนทั้งหมด (MC & TC)

4. บริษัทแห่งหนึ่งทราบว่าฟังก์ชันต้นทุนเพิ่มสำหรับการผลิตของอย่างหนึ่งมีค่าเท่ากับ $C'(x) = 125 + 10x + \frac{1}{9}x^2$ เมื่อ $C(x)$ บาท เป็นต้นทุนทั้งหมดของการผลิตสินค้า ถ้าค่าโสหุ้ยเท่ากับ 250 บาท จงหาต้นทุนการผลิตของสินค้า 15 หน่วย

วิธีทำ จากที่กำหนด

$$C'(x) = 125 + 10x + \frac{1}{9}x^2$$

$$C(x) = \int \left(125 + 10x + \frac{1}{9}x^2\right) dx$$

$$= 125x + \frac{10x^2}{2} + \frac{1}{9}\frac{x^3}{3} + C$$

$$= 125x + 5x^2 + \frac{1}{27}x^3 + C$$

กำหนดค่าโสหุ้ย = 250 นั่นคือ $C(0) = 250$

จะได้ค่า $C = 250$

$$\therefore C(x) = 125x + 5x^2 + \frac{1}{27}x^3 + 250$$

ต้นทุนของการผลิตสินค้า 15 หน่วย

$$C(15) = 125(15) + 5(15)^2 + \frac{1}{27}(15)^3 + 250$$

$$= 1875 + 1125 + 125 + 250$$

$= 3375$ บาท

ต้นทุนของการผลิตสินค้า 15 หน่วย เท่ากับ 3375 บาท ■

5. **ฟังก์ชันต้นทุนเพิ่มของการผลิตอย่างหนึ่งคือ** $C'(x) = 4 - \frac{9\sqrt{3x}}{2x}$ เมื่อ $C(x)$ บาท เป็น **ต้นทุนทั้งหมดของการผลิต** x **หน่วย** ค่าโสหุ้ย เท่ากับ 54 บาท ถ้าผลิตของ 27 ชิ้น **จงหา**

(1) **ต้นทุนเพิ่ม**

(2) **ต้นทุนเฉลี่ย**

(3) The elasticity of cost

วิธีทำ จากที่กำหนด $C'(x) = 4 - \frac{9\sqrt{3x}}{2x}$ เป็นฟังก์ชันต้นทุนเพิ่ม ดังนั้นเมื่อผลิตของ 27 ชิ้น ต้นทุนเพิ่มคือ

$$
\begin{aligned}
C'(27) &= 4 - \frac{9\sqrt{3 \times 27}}{2 \times 27} \\
&= 4 - \frac{9 \times 9}{2 \times 27} \\
&= 4 - \frac{3}{2} \\
&= \frac{5}{2} \\
&= 2.50 \text{ บาท} \qquad (1)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\text{จาก } C'(x) &= 4 - \frac{9\sqrt{3x}}{2x} \\
&= 4 - \frac{9\sqrt{3}}{2}\left(\frac{\sqrt{x}}{x}\right) \\
&= 4 - \frac{9\sqrt{3}}{2} x^{-\frac{1}{2}}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
C(x) &= \int \left(4 - \frac{9\sqrt{3}}{2} x^{-\frac{1}{2}}\right) dx \\
&= 4x - \frac{9\sqrt{3}}{2} \frac{x^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}} + C \\
&= 4x - 9\sqrt{3x} + C
\end{aligned}
$$

แต่ค่าโสหุ้ย = 54 บาท ดังนั้น

$$C(x) = 4x - 9\sqrt{3x} + 54$$

ดังนั้นค่าต้นทุนเฉลี่ยเมื่อผลิตของ 27 ชิ้นคือ $\frac{C(27)}{27}$ ซึ่งเท่ากับ

$$\frac{4(27) - 9(\sqrt{3 \times 27}) + 54}{27}$$

$$= 4 - 3 + 2$$

$$= 3 \text{ บาท} \qquad (2)$$

ค่า Elasticity of cost มีค่าเท่ากับ $\dfrac{\text{ต้นทุนเพิ่ม}}{\text{ต้นทุนเฉลี่ย}}$

$$= \frac{2.50}{3} = \frac{25}{30} = \frac{5}{6}$$

■