

## บทที่ ๘

### เทคนิคของการอินทิเกรต

#### 8.1 นำเรื่อง

จากบทที่ ๖ เรายารู้ว่า  $\int_a^b f(x)dx = \lim_{\| \Delta \| \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(\xi_i) \Delta_i x$

เป็นอินทิเกรลจำกัด (definite integral) ของฟังก์ชัน  $f$  จาก  $a$  ถึง  $b$  ซึ่งหาล่วงไปได้ ถ้า  $f$  เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องบน  $[a, b]$  ค่าของอินทิเกรลจำกัด (definite integral) สามารถคำนวณหาค่าที่แน่นอนได้ โดยอาศัยทฤษฎีกฏหลักมูลของแคลคูลัส และ สามารถหาปฏิเสธอนุพันธ์ (antiderivative) ของตัวสูกอินทิเกรตได้ การหาปฏิเสธอนุพันธ์ ของตัวสูกอินทิเกรต เรียกว่า การอินทิเกรตโดยไม่จำกัดเขต (indefinite integration)

ดังนั้น การอินทิเกรตโดยไม่จำกัดเขต หมายถึง การหาปฏิเสธอนุพันธ์ของตัวสูกอินทิเกรตที่กำหนดให้ ในทางปฏิบัติ เราไม่สามารถหาค่าของอินทิเกรตโดยไม่จำกัดเขต (indefinite integral) ได้เสมอไป แต่คงว่าฟังก์ชันสูกอินทิเกรต ไม่มีปฏิเสธอนุพันธ์ ซึ่งสามารถแสดงในเทอมของฟังก์ชันอย่างง่ายได้ อย่างไรก็ตามมีอินทิเกรลจำกัดเขตอีกมากนanya ซึ่งสามารถหาปฏิเสธอนุพันธ์ของฟังก์ชันสูกอินทิเกรตได้โดยใช้เทคนิคของการอินทิเกรต ซึ่งอาศัยสูตรในบทก่อน ดังต่อไปนี้

$$\begin{aligned}\int du &= u + C \\ \int adu &= au + C \quad \text{เมื่อ } a \text{ เป็นค่าคงที่} \\ \int [f(u) + g(u)] du &= \int f(u) du + \int g(u) du \\ \int u^n du &= \frac{u^{n+1}}{n+1} + C, \quad n \neq -1 \\ \int \frac{du}{u} &= \ln |u| + C \\ \int a^u du &= \frac{a^u}{\ln a} + C \\ \int e^u du &= e^u + C\end{aligned}$$

**8.2 การอินทิเกรตที่ละส่วน** (Integration by parts) เป็นวิธีหนึ่งของการอินทิเกรต การหาสูตร เดี๋ยวจากการหาอนุพันธ์ของผลคูณของฟังก์ชัน

$$\begin{aligned} d(uv) &= udv + vdu \\ \text{หรือ } udv &= d(uv) - vdu \end{aligned} \quad (8.2.1)$$

โดยการอินทิเกรตทั้งสองข้าง

$$\therefore \boxed{\int u dv = uv - \int v du} \quad (8.2.2)$$

สมการ 8.2.2 เป็นสูตรที่ใช้ในการอินทิเกรตทีละส่วน

วิธีการใช้สูตร 8.2.2 นี้ โดยการเลือก  $u$  และ  $dv$  ให้เหมาะสมนั่นคือ สมมุติ  $dv$  โดยที่ อินทิเกรตหาค่า  $v$  ได้ง่าย

และ สมมุติ  $u$  ให้เป็นฟังก์ชัน ซึ่งสามารถหาอนุพันธ์เป็นรูปอย่างง่ายได้

ตัวอย่าง 8.2.1 จงหาค่าของ  $\int x^3 e^{x^2} dx$

(สังเกตการสมมุติ  $u$  และ  $dv$ )

$$\begin{array}{l} \text{วิธีที่ } 1 \text{ ให้ } dv = x e^{x^2} dx \quad \text{และ } u = x^2 \\ v = \frac{1}{2} e^{x^2} + C_1 \quad du = 2x dx \end{array}$$

จากสูตร 8.2.2 จะได้ว่า

$$\begin{aligned} \int x^3 e^{x^2} dx &= x^2 \left( \frac{1}{2} e^{x^2} + C_1 \right) - \int \left( \frac{1}{2} e^{x^2} + C_1 \right) 2x dx \\ &= \frac{1}{2} x^2 e^{x^2} + C_1 x^2 - \int x e^{x^2} dx - 2 C_1 \int x dx \\ &= \frac{1}{2} x^2 e^{x^2} + C_1 x^2 - \frac{1}{2} e^{x^2} - C_1 x^2 + C_2 \\ &= \frac{1}{2} e^{x^2} (x^2 - 1) + C_2 \end{aligned}$$

ข้อสังเกต จากตัวอย่าง 8.2.1 นี้จะเห็นได้ว่าค่าคงที่ที่ได้จากการอินทิเกรตครั้งแรกเป็น แต่ไม่ปรากฏในค่าตอบ และเป็นจริงในรูปทั่ว ๆ ไป สามารถพิสูจน์ได้ โดยแทนค่า  $v =$

$v + C_1$  ในสูตร 8.2.2 จะได้

$$\begin{aligned} \int u dv &= u(v + C_1) - \int (v + C_1) du \\ &= uv + C_1 u - \int v du - C_1 \int du \\ &= uv + C_1 u - \int v du - C_1 u \\ &= uv - \int v du \end{aligned}$$

เพราจะนั้นไม่จำเป็นต้องเขียน  $C_1$  เมื่อหาค่า  $v$  จาก  $dv$

**ตัวอย่าง 8.2.2** จงหาค่าของ  $\int x \sin 2x dx$

วิธีทำ ให้  $u = x$ ,  $dv = \sin 2x dx = \frac{1}{2} \sin 2x d(2x)$   
 $du = dx$   $v = -\frac{1}{2} \cos 2x$

จากสูตร  $\int u dv = uv - \int v du$

$$\begin{aligned}\therefore \int x \sin 2x dx &= -\frac{1}{2} x \cos 2x + \frac{1}{2} \int \cos 2x dx \\ &= -\frac{x}{2} \cos 2x + \frac{1}{4} \int \cos 2x d(2x) \\ &= -\frac{x}{2} \cos 2x + \frac{1}{4} \sin 2x + C\end{aligned}$$

ในการอินทิเกรตที่ลະส່ວນ สำหรับบางอินทิเกรต เราสมมุติ  $u$  และ  $dv$  คู่หนึ่ง ก็สามารถอินทิเกรตได้แต่บางคู่ของ  $u$  และ  $dv$  ไม่สามารถอินทิเกรตได้ ดังเช่นตัวอย่าง 8.2.2

ถ้าให้  $u = \sin 2x$ ,  $dv = x dx$

$$\therefore du = 2 \cos 2x dx, v = \frac{x^2}{2}$$

$$\begin{aligned}\therefore \int x \sin 2x dx &= \frac{x^2}{2} \sin 2x - \int \frac{x^2}{2} \cdot 2 \cos 2x dx \\ &= \frac{x^2}{2} \sin 2x - \int x^2 \cos 2x dx\end{aligned}$$

จะเห็นได้ว่าอินทิเกรตทางขวา ขึ้นช้อนกว่าอินทิเกรตที่กำหนดให้ จึงจำเป็นต้องเลือก  $u$  และ  $dv$  ให้เหมาะสม

ถ้าคำนวณการอินทิเกรตที่ลະส່ວนครึ่งหนึ่งแล้ว ยังมีบางส่วนอยู่ในรูป  $\int v du$  อีก ก็ให้คำนวณการอินทิเกรตที่ลະส່วนซึ่งอิกจนกระทั้งเป็นผลสำเร็จ ดังตัวอย่างด่อไปนี้

**ตัวอย่าง 8.2.3** จงหาค่าของ  $\int x^2 e^{3x} dx$

วิธีทำ ให้  $u = x^2$ ,  $dv = e^{3x} dx$

$$du = 2x dx, v = \frac{1}{3} e^{3x}$$

$$\begin{aligned}\text{จากสูตร } \int u dv &= uv - \int v du \\ &= \frac{1}{3} x^2 e^{3x} - \int \frac{1}{3} e^{3x} \cdot 2x dx \\ &= \frac{1}{3} x^2 e^{3x} - \frac{2}{3} \int x e^{3x} dx\end{aligned}$$

หาค่าของ  $\int x e^{3x} dx$  อีกครั้งหนึ่ง  
 ให้  $u = x, dv = e^{3x} dx$   
 $du = dx, v = \frac{1}{3} \int e^{3x} d(3x)$   
 $= \frac{1}{3} e^{3x}$

$$\begin{aligned}\therefore \int x e^{3x} dx &= \frac{1}{3} x e^{3x} - \frac{1}{3} \int e^{3x} dx \\ &= \frac{1}{3} x e^{3x} - \frac{1}{9} e^{3x} \\ \therefore \int x^2 e^{3x} dx &= \frac{1}{3} x^2 e^{3x} - \frac{2}{9} x e^{3x} + \frac{2}{27} e^{3x} + C\end{aligned}$$

การอินทิเกรตฟิลล์ล์วัน มักใช้กับฟังก์ชันถูกอินทิเกรต (integrand) ที่อยู่ในรูปผลคูณของ ฟังก์ชันสองฟังก์ชัน เช่น โพลีโนเมียลฟังก์ชันคูณกับ ลอการิทมิก ฟังก์ชัน โพลีโนเมียลฟังก์ชัน คูณกับเอกซ์โพเนนเชียล ฟังก์ชัน (exponential function) หรือ คูณกับ ฟังก์ชัน ตรีโกรณิต เป็นต้น

ตัวอย่าง 8.2.4 จงหาสูตรของ  $\int x^r \ln x dx$  เมื่อ  $r$  เป็นจำนวนจริงใด ๆ

วิธีที่ 1 เราแยกเป็น 2 กรณีด้วยกัน คือ เมื่อ  $r \neq -1$   
 และ  $r = -1$

กรณีที่ 1 : เมื่อ  $r \neq -1$  ให้  $u = \ln x, dv = x^r dx$   
 $du = \frac{1}{x} dx, v = \frac{x^{r+1}}{r+1}$

จะได้  $\int x^r \ln x dx = \frac{x^{r+1}}{r+1} \ln x - \frac{1}{r+1} \int x^r dx$   
 $= \frac{x^{r+1}}{r+1} \ln x - \frac{x^{r+1}}{(r+1)^2} + C$

กรณีที่ 2 : เมื่อ  $r = -1$  อินทิเกรลจะเป็น

$$\begin{aligned}\int \frac{\ln x}{x} dx &= \int w dw \quad \text{เมื่อ } w = \ln x \\ \therefore \int \frac{\ln x}{x} dx &= \frac{1}{2} w^2 + C \\ &= \frac{1}{2} (\ln x)^2 + C\end{aligned}$$

เมื่อรวมกรณีที่ 1 และ 2 เข้าด้วยกัน

จะได้สูตร

$$\int x^r \ln x dx = \begin{cases} \frac{x^{r+1}}{r+1} \ln x - \frac{x^{r+1}}{(r+1)^2} + C & \text{ถ้า } r \neq -1 \\ \frac{1}{2} (\ln x)^2 + C & \text{ถ้า } r = -1 \end{cases}$$

ตัวอย่าง 8.2.5 ในการลงทุนทำธุรกิจอย่างหนึ่ง จะมีรายได้ 2,000 t บาทต่อปี เมื่อ t เป็นจำนวนปีนับจากปัจจุบัน ถ้านำรายได้ไปฝากธนาคารด้วยอัตราดอกเบี้ย 8% จนครบจำนวนเงินฝากเมื่อสิ้นปีที่ 6

วิธีที่ 1 จากสูตรในหัวข้อ 7.7  $A = \int_0^T f(t) e^{i(T-t)} dt$   
 $f(t) = 2000 t, i = 0.08, T = 6$

ถ้าให้ A บาท เป็นจำนวนเงินฝากเมื่อสิ้นปีที่ 6

$$A = 2000 \int_0^6 t e^{0.08(6-t)} dt$$

หาค่าอนุพักรัลโดยการอินทิเกรตทีละส่วน

$$\text{ให้ } u = t, dv = e^{0.08(6-t)}$$

$$du = dt, v = \frac{-e^{0.08(6-t)}}{0.08}$$

$$\begin{aligned} \therefore A &= 2000 \left[ \frac{-e^{0.08(6-t)}}{0.08} t \right]_0^6 + \frac{1}{0.08} \int_0^6 e^{0.08(6-t)} dt \\ &= 2000 \left[ \frac{-e^{0.08(6-t)}}{0.08} t - \frac{e^{0.08(6-t)}}{0.0064} \right]_0^6 \\ &= 2000 \left( \frac{-6}{0.08} - \frac{1}{0.0064} + \frac{e^{0.48}}{0.0064} \right) \\ &= 2000 \frac{(-0.48 - 1 + 1.6161)}{0.0064} \\ &= 312500 (0.1361) \\ &= 42531 \end{aligned}$$

∴ จำนวนเงินในบัญชี เมื่อสิ้นปีที่ 6 หรือ 42,531 บาท

## แบบฝึกหัดที่ 8.2

ข้อ 1 - 14 จงหาค่าของอินทิกรัลไม่จำกัดเขต (indefinite integral) ต่อไปนี้

- $$\begin{array}{lll} 1. \int xe^{3x} dx & 2. \int x^{-3} dx & 3. \int \ln x dx \\ 4. \int x^2 \ln x dx & 5. \int (\ln x)^2 dx & 6. \int x a^x dx \\ 7. \int \frac{x e^x}{(x+1)^2} dx & 8. \int (\ln x)^3 dx & 9. \int \frac{\ln(x+1)}{\sqrt{x+1}} dx \\ 10. \int \frac{\ln x}{x^2} dx & 11. \int \frac{x^3 dx}{\sqrt{1-x^2}} & 12. \int x^3 \sqrt{1-x^2} dx \\ 13. \int e^{\sqrt[3]{x}} dx & 14. \int (2^x + x)^2 dx & \end{array}$$

ข้อ 15 - 18 จงหาค่าของอินทิกรัลจำกัดเขตต่อไปนี้

- $$\begin{array}{lll} 15. \int_0^2 x^2 3^x dx & 16. \int_0^1 x^2 e^{-2x} dx & 17. \int_{-1}^2 \ln(x+2) dx \\ 18. \int_1^3 x^2 (\ln x)^2 dx & & \\ 19. \text{ จงหาพื้นที่ช่องล้อมรอบด้วยโค้ง } y = \ln x, \text{ แกน } x \text{ และเส้น } x = e^2 & & \\ 20. \text{ สมการอุปทาน (supply equation) สำหรับโภคภัณฑ์อย่างหนึ่ง เป็น } p = 2 \ln(x+2) = 0, x \text{ หน่วยเป็นอุปทาน (supply) เมื่อ } p \text{ บาท } \\ \text{ เป็นราคาต่อหนึ่งหน่วย ถ้าราคาเท่า 4 บาท จงหาส่วนเกินของผู้ผลิต } \\ \text{ (producer's surplus)} & & \\ 21. \text{ จงหาจำนวนจากการลงทุนติดต่อกันเป็นระยะเวลากว่า 5 ปี ค่าวัสดุ } 10,000 \text{ บาทต่อปี เมื่อ } t \text{ เป็นจำนวนปีนับจากปัจจุบัน หัตราชอกเป็น } 6 \% & & \end{array}$$

$$(\text{Hint : ใช้สูตร } A = \int_0^T f(t) e^{it(T-t)} dt)$$

- $$22. \text{ ในการลงทุนที่สร้างกิจการอย่างหนึ่ง มีรายได้ } 500 \text{ บาทต่อปี เมื่อ } t \text{ เป็น } \\ \text{ จำนวนปีนับจากปัจจุบัน ถ้านำรายได้ในระยะ 5 ปีแรก ไปฝากธนาคารด้วยอัตรา } \\ \text{ ดอกเบี้ย } 10 \% \text{ จงหารายได้ปัจจุบัน}$$

$$(\text{Hint : ใช้สูตร } v = \int_0^T f(t) e^{-it} dt)$$

### 8.3 การอินทิเกรตฟังก์ชันตรรกยะโดยทำให้เป็นเศษส่วนบໍอຍ

(Integration of Rational Fractions by partial fractions)

เราเคยทราบแล้วว่าฟังก์ชันตรรกยะ คือ ผลหารของ多项式ในเมียล ฟังก์ชัน 2 ฟังก์ชัน ให้  $H$  เป็นฟังก์ชันตรรกยะ ถ้าเมื่อ  $P(x)$  และ  $Q(x)$  เป็น多项式ในเมียลฟังก์ชัน ถ้ากำลัง (degree) สูงสุดของ  $x$  ตัวแปรของเลขมากกว่ากำลังสูงสุดของตัวแปรของส่วน เราเรียก ฟังก์ชันตรรกยะนี้ว่าเศษส่วนไม่แท้ (improper fraction)  $H(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$

ในการมีที่ เป็นเศษส่วนไม่แท้ ต้องทำให้เป็นเศษส่วนแท้ (proper fraction) เสียก่อน โดยหารเลขด้วยส่วน นั่นคือ กำลังสูงสุดของเลขจะน้อยกว่ากำลังสูงสุดของ ส่วน เช่น

$$\begin{aligned} \frac{x^4 - 10x^2 + 3x + 1}{x^2 - 4} &= x^2 - 6 + \frac{3x - 23}{x^2 - 4} \\ \therefore \int \frac{x^4 - 10x^2 + 3x + 1}{x^2 - 4} dx &= \int (x^2 - 6) dx + \int \frac{3x - 23}{x^2 - 4} dx \end{aligned}$$

รูปที่ 8.1 ไปของการอินทิเกรตของฟังก์ชันตรรกยะเขียนได้เป็น  $\int \frac{P(x)}{Q(x)} dx$  เมื่อ กำลัง สูงสุดของ  $P(x)$  น้อยกว่ากำลังสูงสุดของ  $Q(x)$

ก่อนทำการอินทิเกรตฟังก์ชันตรรกยะ ให้เขียน  $P(x)/Q(x)$  เป็นผลรวม ของเศษส่วนย่อย (the sum of partial fractions) เสียก่อน โดยแยก  $Q(x)$  ออก เป็นผลคูณของตัวประกอบเชิงเส้นและตัวประกอบกำลังสอง บางครั้งก็เป็นการ ยกที่จะหาตัวประกอบของ  $Q(x)$  แต่ในทางทฤษฎีเราสามารถแยกตัวประกอบได้เสมอ

**ทฤษฎี 8.3.1**  $\text{多项式ในเมียลฟังก์ชันใด ๆ ซึ่งมีสมประสิทธิ์เป็นจำนวนจริง จะแยกเป็นผลคูณของตัวประกอบเชิงเส้นและตัวประกอบกำลังสองได้ ซึ่งแต่ละตัว ประกอบมีสมประสิทธิ์เป็นจำนวนจริง}$

เมื่อยแยก  $Q(x)$  ออก เป็นผลคูณของตัวประกอบเชิงเส้น และตัวประกอบกำลังสองแล้ว ขึ้นต่อไปก็ทำเป็นเศษส่วนย่อย รากที่เป็นเศษส่วนย่อยนี้อยู่กับลักษณะของ ตัวประกอบเหล่านี้ ซึ่งจะแยกกล่าวเป็นกรณีด้วย ๆ โดยไม่ต้องพิสูจน์

เป็นที่ทราบแล้วว่า ถ้า  $Q(x)$  เป็น多项式ในเมียลกำลัง  $n$  และสมประสิทธิ์ของ  $x^n$  เป็น 1 เพราะว่า

$$Q(x) = C_0 x^n + C_1 x^{n-1} + \dots + C_{n-1} x + C_n$$

ถ้า  $C_0 \neq 1$  หารเศษและส่วนของ  $\frac{P(x)}{Q(x)}$  ด้วย  $C_0$

**กรณี 1** ถ้าแต่ละตัวประกอบของ  $Q(x)$  เป็นตัวประกอบเชิงเส้นทั้งหมด และไม่ซ้ำกัน

ถ้า  $Q(x) = (x-a_1)(x-a_2)\dots(x-a_n)$  โดยที่ไม่มีส่องจำนวนของ  $a_i$  ให้ 1 เท่ากัน  
แล้ว เช่นผลรวมของเศษส่วนย่อยได้ดังนี้

$$\frac{P(x)}{Q(x)} \equiv \frac{A_1}{x-a_1} + \frac{A_2}{x-a_2} + \dots + \frac{A_n}{x-a_n} \quad (8.3.1)$$

เมื่อ  $A_1, A_2, \dots, A_n$  เป็นค่าคงที่ที่ไม่เท่ากับศูนย์ทั้งหมด และคำนวณหาได้ เช่น

$$\frac{x+1}{(x+2)(2x-3)} \equiv \frac{A}{x+2} + \frac{B}{2x-3} \quad \text{เมื่อ } A, B \text{ เป็นค่าคงที่ที่ไม่เท่ากับศูนย์พร้อมกัน}$$

หมายเหตุ เราใช้ " $\equiv$ " (อ่านว่า "identical equal") แทน " $=$ " ใน  
สมการ 8.3.1 เพราะว่า สมการ 8.3.1 เป็นเอกลักษณ์สำหรับแต่ละค่าของ  $A_i$

วิธีการหา  $A_i$  มีอยู่ 2 วิธี

1. โดยอาศัยหลักการเทียบสัมประสิทธิ์ (principle of undetermined  
coefficients) ใช้หลักนี้เทียบทาสมการที่สมพนธ์กับค่าคงที่แล้วแก้สมการหาค่าคงที่  
( $A_i$ ) เหล่านั้นออกมา หลักการเทียบสัมประสิทธิ์มีดังต่อไปนี้

"ถ้า  $p(x) \equiv Q(x)$  และ สัมประสิทธิ์ของ  $x$  ที่มีกำลังเท่ากันจะเท่ากัน"

$$\text{เช่น ถ้า } 3x^2 - 6x + 21 \equiv (A+B)x^2 + (B-C)x + A \quad \text{แล้ว}$$

$$A+B = 3, \quad B-C = -6, \quad A = 21$$

2. โดยการกำหนดค่าของตัวแปร เรากำหนดค่า (สมมุติ) ของ  $x$  ที่เหมาะสม เพื่อให้ได้  
ค่าคงที่ ( $A_i$ ) แต่ละตัว

$$\text{เช่น } x+16 \equiv A(x+2) + B(2x-3) \text{ สมมุติค่า } x \text{ ที่เหมาะสม}$$

$$\text{ให้ } x = -2 \text{ จะได้ } -2 + 16 = 0 - 7B$$

$$B = -2$$

$$\text{ให้ } x = \frac{3}{2} \text{ จะได้ } \frac{3}{2} + 16 = \frac{7}{2} A \quad \therefore A = 5$$

ตัวอย่าง 8.3.1 จงหาค่าของ  $\int \frac{(x-1)}{x^3 - x^2 - 2x} dx$

วิธีทำ นำส่วนไปแยกเศษประกอบ

$$\frac{x-1}{x^3 - x^2 - 2x} \equiv \frac{x-1}{x(x-2)(x+1)}$$

$$\text{สมมติ } \frac{x-1}{x(x-2)(x+1)} \equiv \frac{A}{x} + \frac{B}{x-2} + \frac{C}{x+1} \quad (8.3.2)$$

สมการ 8.3.2 จะเป็นเอกลักษณ์ (identity) สำหรับทุก ๆ ค่าของ  $x$   
(ยกเว้น  $x = 0, 2, -1$ )

จากสมการ 8.3.2 ทำส่วนให้หมดไป

$$\therefore x-1 \equiv A(x-2)(x+1) + Bx(x+1) + Cx(x-2) \quad (8.3.3)$$

จะเห็นว่าสมการ 8.3.3 เป็นเอกลักษณ์สำหรับทุก ๆ ค่าของ  $x$  รวมทั้ง  $x = 0, 2, -1$   
หาค่า  $A, B, C$  โดยการสมนูนค่า  $x$  และวนซ้ำไปแทนในสมการ 8.3.3

$$\text{ให้ } x = 3 \quad \therefore -1 = -2A$$

$$A = \frac{1}{2}$$

แทนค่า  $x = 2$  ในสมการ 8.3.2

$$\therefore 1 = 6B, B = \frac{1}{6}$$

แทนค่า  $x = -1$  ในสมการ 8.3.2

$$\therefore -2 = 3C, C = -\frac{2}{3}$$

แทนค่า  $A, B, C$  ในสมการ 8.3.1

$$\therefore \frac{x-1}{x(x-2)(x+1)} = \frac{\frac{1}{2}}{x} + \frac{\frac{1}{6}}{x-2} + \frac{-\frac{2}{3}}{x+1}$$

$$\begin{aligned} \therefore \int \frac{x-1}{x^3-x^2-2x} dx &= \frac{1}{2} \int \frac{dx}{x} + \frac{1}{6} \int \frac{dx}{x-2} - \frac{2}{3} \int \frac{dx}{x+1} \\ &= \frac{1}{2} \ln|x| + \frac{1}{6} \ln|x-2| - \frac{2}{3} \ln|x+1| + \frac{1}{6} \ln C \\ &= \frac{1}{6} (3 \ln|x| + \ln|x-2| - 4 \ln|x+1| + \ln C) \\ &= \frac{1}{6} \ln \left| \frac{Cx^2(x-2)}{(x+1)^4} \right| \end{aligned}$$

การหาค่า  $A, B, C$  โดยการเทียบสัมประสิทธิ์

จากหัวอย่าง 8.3.1

รวมเทอมเหมือนในสมการ 8.3.3

$$\therefore x-1 \equiv (A+B+C)x^2 + (-A+B-2C)x - 2A$$

สมประสิทธิ์ทางซ้ายและทางขวาที่สมมัยกันจะเท่ากัน

$$\text{ดังนั้น } A+B+C = 0$$

$$-A+B-2C = 1$$

$$-2A = -1$$

แก้สมการหาค่า  $A, B, C$  ได้  $A = \frac{1}{2}$ ,  $B = \frac{1}{6}$ ,  $C = -\frac{2}{3}$

แล้วนำค่า  $A, B, C$  ไปแทนในสมการ 8.3.2

**กรณี 2** ถ้าศูนย์ประกอบของ  $Q(x)$  เป็นกำลังหนึ่งทั้งหมด และมีบางตัวประกอบซ้ำกัน สมมุติว่า ตัวประกอบ  $(x-a_i)$  ซ้ำกัน  $n$  ครั้ง แล้วเขียนผลรวมของเศษส่วนบໍอยได้ดังนี้

$$\frac{A_1}{(x-a_1)^P} + \frac{A_2}{(x-a_1)^{P-1}} + \dots + \frac{A_{p-1}}{(x-a_1)^2} + \frac{A_p}{x-a_1}$$

เมื่อ  $A_1, A_2, \dots, A_p$  เป็นค่าคงที่ และ  $A_i \neq 0$  พร้อมกัน

$$\text{เช่น } \frac{2x+1}{(x+4)^2} \equiv \frac{A_1}{x+4} + \frac{A_2}{(x+4)^2}$$

$$\frac{3x^2-1}{x^3(x+1)^2} \equiv \frac{A_1}{x} + \frac{A_2}{x^2} + \frac{A_3}{x^3} + \frac{A_4}{x+1} + \frac{A_5}{(x+1)^2}$$

$$\frac{3x^2-1}{(2x+3)(2x-5)^2} \equiv \frac{A}{2x+3} + \frac{B}{2x-5} + \frac{C}{(2x-5)^2}$$

**ตัวอย่าง 8.3.2** จงหาค่าของ  $\int \frac{(x^3-1)}{x^2(x-2)^3} dx$

วิธีทำ เขียนส่วนของตัวประกอบที่ເກurat เป็นผลรวมของเศษส่วนบໍอย

$$\frac{x^3-1}{x^2(x-2)^3} \equiv \frac{A}{x^2} + \frac{B}{x} + \frac{C}{(x-2)^3} + \frac{D}{(x-2)^2} + \frac{E}{x-2} \quad (8.3.4)$$

สมการ 8.3.4 มีความเป็นเอกลักษณ์ สำหรับทุก ๆ ค่าของ  $x$  (ยกเว้นเมื่อ  $x = 0, 2$ )

คูณทั้งสองข้างของสมการ 8.3.4 ด้วย  $x^2(x-2)^3$  ได้

$$x^3-1 \equiv A(x-2)^3 + Bx(x-2)^3 + Cx^2 + Dx^2(x-2) + Ex^2(x-2)^2$$

$$\begin{aligned}x^3 - 1 &\equiv A(x^3 - 6x^2 + 12x - 8) + Bx(x^3 - 6x^2 + 12x - 8) \\&\quad + Cx^2 + Dx^3 - 2Dx^2 + Ex^2(x^2 - 4x + 4) \\x^3 - 1 &\equiv (B + E)x^4 + (A - 6B + D - 4E)x^3 \\&\quad + (-6A + 12B + C - 2D + 4E)x^2 + (12A - 8B)x - 8A\end{aligned}$$

โดยการเทียบสัมประสิทธิ์

$$\begin{aligned}B+E &= 0 \\A-6B+D-4E &= 1 \\-6A+12B+C-2D+4E &= 0 \\12A-8B &= 0 \\-8A &= -1 \\A &= \frac{1}{8} \\B &= \frac{3}{16}, \quad C = \frac{7}{4}, \quad D = \frac{5}{4}, \quad E = \frac{-3}{16}\end{aligned}$$

แทนค่า  $A, B, C, D$  ในสมการ 8.3.4

$$\frac{x^3 - 1}{x^2(x-2)^3} \equiv \frac{\frac{1}{8}}{x^2} + \frac{\frac{3}{16}}{x} + \frac{\frac{7}{4}}{(x-2)^3} + \frac{\frac{5}{4}}{(x-2)^2} + \frac{\frac{-3}{16}}{x-2}$$

$$\begin{aligned}\text{ตั้งนั้น } \int \frac{x^3 - 1}{x^2(x-2)^3} dx &= \frac{1}{8} \int \frac{dx}{x^2} + \frac{3}{16} \int \frac{dx}{x} + \frac{7}{4} \int \frac{dx}{(x-2)^3} \\&\quad + \frac{5}{4} \int \frac{dx}{(x-2)^2} - \frac{3}{16} \int \frac{dx}{x-2} \\&= -\frac{1}{8x} + \frac{3}{16} \ln|x| - \frac{7}{8(x-2)^2} - \frac{5}{4(x-2)} - \frac{3}{16} \ln|x-2| + C \\&= \frac{-11x^2 + 17x - 4}{8x(x-2)^2} + \frac{3}{16} \ln \left| \frac{x}{x-2} \right| + C\end{aligned}$$

ตัวอย่าง 8.3.3 จงหาค่าของ  $\int \frac{du}{u^2 - a^2}$

$$\text{วิธีที่ } \frac{1}{u^2 - a^2} = \frac{A}{u-a} + \frac{B}{u+a} \quad (8.3.5)$$

คูณสมการ 8.3.5 ผลลัพธ์ด้วย  $(u-a)(u+a)$

$$\therefore 1 \equiv A(u+a) + B(u-a)$$

$$1 \equiv (A+B)u + Aa - Ba$$

โดยการเทียบสัมประสิทธิ์

$$\therefore A+B = 0, \quad Aa - Ba = 1$$

$$\text{แก้สมการได้ } A = \frac{1}{2a}, \quad B = \frac{-1}{2a}$$

$$\begin{aligned} \therefore \int \frac{du}{u^2 - a^2} &= \frac{1}{2a} \int \frac{du}{u-a} - \frac{1}{2a} \int \frac{du}{u+a} \\ &= \frac{1}{2a} \ln |u-a| - \frac{1}{2a} \ln |u+a| + C \\ &= \frac{1}{2a} \ln \left| \frac{u-a}{u+a} \right| + C \end{aligned}$$

ดังนั้นสรุปเป็นสูตรได้ว่า

$$\boxed{\int \frac{du}{u^2 - a^2} = \frac{1}{2a} \ln \left| \frac{u-a}{u+a} \right| + C}$$

ในท่านองเดียวกัน ถ้าหาค่าของ  $\int \frac{du}{a^2 - u^2}$

$$\begin{aligned} \text{เขียนได้ว่า } \int \frac{du}{a^2 - u^2} &= - \int \frac{du}{u^2 - a^2} \\ &= -\frac{1}{2a} \ln \left| \frac{u-a}{u+a} \right| + C \\ &= \frac{1}{2a} \ln \left| \frac{u+a}{u-a} \right| + C \end{aligned}$$

ดังนั้นสรุปเป็นสูตรได้ว่า

$$\boxed{\int \frac{du}{a^2 - u^2} = \frac{1}{2a} \ln \left| \frac{u+a}{u-a} \right| + C}$$

กรณี 3 ถ้า  $ax^2+px+q$  เป็นตัวประกอบหนึ่งของ  $Q(x)$  โดยที่  $ax^2+px+q$  แยกเป็นตัวประกอบก่อสังหารไม่ได้แล้ว จะมีเศษส่วนย่อยอยู่ในรูป

$\frac{Ax+B}{x^2+px+q}$  ซึ่งสมนัยกับตัวประกอบ  $ax^2+px+q$  นั้น โดยที่  $A, B$  เป็น

ค่าคงที่ที่ไม่เป็นคูณพาร์อมกัน เช่น

$$\frac{x^2 - 3}{(x-2)(x^2+4)} \equiv \frac{A}{x-2} + \frac{Bx+C}{x^2+4}$$

$$\frac{2x^3 - 5}{x(2x^2+3x-8)(x^2+x+1)} \equiv \frac{A}{x} + \frac{Bx+C}{2x^2+3x+8} + \frac{Dx+E}{x^2+x+1}$$

ตัวอย่าง 8.3.4 จงหาค่าของ  $\int \frac{(2x^2+3x+9)dx}{x^3-27}$

วิธีทำ ส่วนของตัวถูกอินทิเกรต สามารถแยกตัวประกอบได้ดังนี้

$$x^3 - 27 = (x-3)(x^2+3x+9)$$

เช่นเดียวกับส่วนของตัวถูกอินทิเกรต เป็นผลรวมของเศษส่วนย่อชี้

$$\therefore \frac{2x^2+3x+9}{(x-3)(x^2+3x+9)} \equiv \frac{Ax+B}{x^2+3x+9} + \frac{C}{x-3} \quad (8.3.6)$$

ทำส่วนให้หมดไป

$$\therefore 2x^2+3x+9 \equiv (Ax+B)(x-3) + C(x^2+3x+9)$$

$$2x^2+3x+9 \equiv (A+C)x^2 + (B-3A+3C)x + (9C-3B)$$

โดยการเทียบสัมประสิทธิ์ ได้

$$A+C = 2$$

$$B-3A+3C = 3$$

$$9C-3B = 9$$

แก้สมการ หาค่า  $A, B, C$  ได้  $A = \frac{2}{3}$ ,  $B = 1$ ,  $C = \frac{4}{3}$   
แทนค่า  $A, B, C$  ในสมการ 8.3.6

$$\frac{2x^2+3x+9}{(x-3)(x^2+3x+9)} \equiv \frac{\frac{2}{3}x + 1}{x^2+3x+9} + \frac{\frac{4}{3}}{x-3}$$

$$\therefore \int \frac{(2x^2+3x+9)}{(x-3)(x^2+3x+9)} dx = \frac{1}{3} \int \frac{(2x+3)}{x^2+3x+9} dx + \frac{4}{3} \int \frac{dx}{x-3}$$

สำหรับตัวอยุกอินทิ เกรตศ์แวร์ เศษเป็นอนุพันธ์ของส่วน ดังนั้นอินทิ เกรตศ์แวร์ได้

$$\begin{aligned} \frac{1}{3} \ln |x^2+3x+9| \\ \therefore \int \frac{(2x^2+3x+9)dx}{(x-3)(x^2+3x+9)} &= \frac{1}{3} \ln |x^2+3x+9| + \frac{4}{3} \ln |x-3| + \frac{1}{3} \ln C \\ &= \frac{1}{3} \ln |C(x-3)^4(x^2+3x+9)| \end{aligned}$$

กรณี 4 ถ้า  $ax^2+px+q$  เป็นตัวประกอบหนึ่งของ  $Q(x)$  โดยที่  $ax^2+px+q$  แยกเป็นตัวประกอบกำลังหนึ่ง (ตัวประกอบเชิงเส้น) ไม่ได้แล้ว จะเขียนเศษส่วนย่ออยู่ในรูป

$$\frac{A_1x+B_1}{(ax^2+px+q)} + \frac{A_2x+B_2}{(ax^2+px+q)^2} + \dots + \frac{A_nx+B_n}{(ax^2+px+q)^n}$$

ที่สมมัยกับตัวประกอบ  $(ax^2+px+q)^n$  เมื่อ  $A_i$  และ  $B_i$  เป็นค่าคงที่ไม่เป็นศูนย์พร้อมกัน เมื่อพิจารณาเป็นคู่ ๆ เช่น

$$\frac{x^2-5x+1}{(x^2+1)^2(x^2+x+1)} \equiv \frac{Ax+B}{x^2+1} + \frac{Cx+D}{(x^2+1)^2} + \frac{Ex+F}{x^2+x+1}$$

$$\frac{3x-7}{(x^2-5x+2)^3} \equiv \frac{Ax+B}{(x^2-5x+2)^3} + \frac{Cx+D}{(x^2-5x+2)^2} + \frac{Ex+F}{x^2-5x+2}$$

ตัวอย่าง 8.3.5

จงหาค่าของ

$$\int \frac{(8x^4+8x^2+1)}{x(2x^2-x+1)^2} dx$$

วิธีทำ  $\frac{8x^4+8x^2+1}{x(2x^2-x+1)^2} \equiv \frac{A}{x} + \frac{Bx+C}{(2x^2-x+1)^2} + \frac{Dx+E}{2x^2-x+1} \quad (8.3.7)$

$$\therefore 8x^4+8x^2+1 \equiv A(2x^2-x+1)^2 + (Bx+C)x + (Dx+E)(2x^2-x+1)$$

$$\begin{aligned} 8x^4+8x^2+1 &\equiv 4Ax^4+Ax^2+A-4Ax^3+4Ax^2-2Ax+Bx^2+Cx+2Dx^3 \\ &\quad -Dx^2+Dx+2Ex^2-Ex+E \end{aligned}$$

$$8x^4 + 8x^2 + 1 \equiv 4Ax^4 + (-4A+2D)x^3 + (5A+B-D+2E)x^2 + (-2A+C+D-E)x + (A+E)$$

โดยการเทียบสัมประสิทธิ์ และแก้สมการ จะได้

$$A = 2, B = 4, C = -1, D = 4, E = -1$$

$$\therefore \int \frac{(8x^4 + 8x^2 + 1) dx}{x(2x^2 - x + 1)^2} = 2 \int \frac{dx}{x} + \int \frac{(4x-1)}{(2x^2 - x + 1)^2} dx + \int \frac{(4x-1)dx}{2x^2 - x + 1}$$

$$\text{ถ้าให้ } u = 2x^2 - x + 1 \text{ และ } du = (4x-1)dx$$

$$\therefore \int \frac{(4x-1)dx}{(2x^2 - x + 1)^2} = \int \frac{du}{u^2}$$

$$\begin{aligned} \therefore \int \frac{(8x^4 + 8x^2 + 1)dx}{x(2x^2 - x + 1)^2} &= 2 \ln |x| - \frac{1}{2x^2 - x + 1} + \ln |2x^2 - x + 1| + \ln C \\ &= \ln |Cx^2(2x^2 - x + 1)| - \frac{1}{2x^2 - x + 1} \end{aligned}$$

ตัวอย่าง 8.3.6 บริษัทแห่งหนึ่งได้ดำเนินธุรกิจมาตั้งแต่วันที่ 1 เมษายน 2520 คาดคะเนได้ว่าการลงทุนในระยะ 6 ปีแรก จะมีรายได้จากการขายเพิ่มขึ้นด้วยอัตรา

$\frac{t^3 + t^2 + 3t + 1}{t^2 + t}$  ล้านบาท เมื่อ  $t$  เป็นจำนวนปีของการดำเนินธุรกิจ ถ้ารายได้ทั้งหมดจากกิจการขายเมื่อสิ้นวันที่ 31 มีนาคม 2521 เป็น 8 ล้านบาท จงคาดคะเนรายได้ทั้งหมดเมื่อสิ้นวันที่ 31 มีนาคม 2525

ตาราง 8.3.1

$t$	1	5
$B$	8	$B_5$

วิธีทำ ให้  $B$  บาท เป็นยอดรายได้จากการขาย เมื่อสิ้น  $t$  ปี จากวันที่ 1 เมษายน 2520

$$\frac{dB}{dt} = \frac{t^3 + t^2 + 3t + 1}{t^2 + t}$$

$$B = \int \frac{t^3 + t^2 + 3t + 1}{t^2 + t} dt \quad (8.3.8)$$

จะเห็นว่า จำนวนถูกอินทิเกรต เป็นเศษส่วนไม่แท้ ทำให้เป็นเศษส่วนแท้

$$\therefore \frac{t^3 + t^2 + 3t + 1}{t^2 + t} \equiv t + \frac{3t + 1}{t^2 + t} \quad (8.3.9)$$

จากสมการ 8.3.8 และ 8.3.9 ได้

$$B = \int t dt + \int \frac{3t + 1}{t^2 + t} dt \quad (8.3.10)$$

หากำลังอินทิเกรลตัวที่สองได้โดยการแยกออก เป็นผลรวมของ เศษส่วนย่อย

$$\frac{3t + 1}{t(t+1)} \equiv \frac{A_1}{t} + \frac{A_2}{t+1}$$

$$\therefore \frac{3t + 1}{3t + 1} \equiv A_1(t+1) + A_2 t$$

$$\text{โดยการเทียบสมประสิทธิ์} \equiv \frac{(A_1 + A_2)t + A_1}{(A_1 + A_2)t + A_1}$$

$$A_1 + A_2 = 3 \quad \text{และ} \quad A_1 = 1$$

$$\therefore A_1 = 1, A_2 = 2$$

$$\therefore \frac{3t + 1}{t(t+1)} \equiv \frac{1}{t} + \frac{2}{t+1} \quad (8.3.11)$$

จากสมการ 8.3.10 และ 8.3.11 ได้

$$B = \int t dt + \int \frac{dt}{t} + 2 \int \frac{dt}{t+1}$$

$$B = \frac{1}{2} t^2 + \ln |t| + 2 \ln |t+1| + C$$

$$B = \frac{1}{2} t^2 + \ln |t(t+1)^2| + C \quad (8.3.12)$$

$$B = 8 \quad \text{เมื่อ } t = 1 \quad \text{แทนค่าในสมการ} \quad (8.3.12)$$

$$8 = \frac{1}{2} + \ln 4 + C$$

$$\therefore C = 7.5 - \ln 4$$

$$\text{แทนค่า } C \text{ ในสมการ (8.3.12)}$$

$$B = \frac{1}{2} t^2 + \ln \left| t(t+1)^2 \right| + 7.5 - \ln 4$$

$\therefore B = B_5$  เมื่อ  $t = 5$  จะได้

$$B_5 = \frac{1}{2}(25) + \ln(5)(36) + 7.5 - \ln 4$$

$$= 20 + \frac{\ln(5)(36)}{4}$$

$$= 20 + \ln 45$$

$$= 20 + 3.8067$$

$$= 23.8067$$

$\therefore$  ยอดรายได้ที่คาดคะเนไว้เมื่อสิ้นวันที่ 31 มีนาคม 2525 เป็น 23,806,700 บาท

### แบบฝึกหัด 8.3

ข้อ 1 - 22 จงหาค่าของอินทิกรัลไม่จำกัดเขต (indefinite integral)

$$1. \int \frac{dx}{x^2 - 4}$$

$$2. \int \frac{x^2 dx}{x^2 + x - 6}$$

$$3. \int \frac{5x-2}{x^2 - 4} dx$$

$$4. \int \frac{(4x-2) dx}{x^3 - x^2 - 2x}$$

$$5. \int \frac{6x^2 - 2x - 1}{4x^3 - x} dx$$

$$6. \int \frac{x^2 + x + 2}{x^2 - 1} dx$$

$$7. \int \frac{dx}{x^3 + 3x^2}$$

$$8. \int \frac{3x^2 - x + 1}{x^3 - x^2} dx$$

$$9. \int \frac{dx}{(x+2)^3}$$

$$10. \int \frac{dt}{(t+2)^2 (t+1)}$$

$$11. \int \frac{x^2 - 3x - 7}{(2x+3)(x+1)^2} dx$$

$$12. \int \frac{2x^4 - 2x + 1}{2x^5 - x^4} dx$$

$$13. \int \frac{dx}{16x^4 - 8x^2 + 1}$$

$$14. \int \frac{dx}{2x^3 + x}$$

$$15. \int \frac{2-x}{x^3 + 8} dx$$

$$16. \int \frac{(x+3) dx}{4x^4 + 4x^3 + x^2}$$

$$17. \int \frac{x dx}{x^4 + 6x^2 + 5}$$

$$18. \int \frac{z^5 dz}{z^4 + 8z^2 + 16}$$

$$19. \int \frac{dx}{(x^2+4)(x+2)^2} \quad 20. \int \frac{dx}{x(x^2+1)^2} \quad 21. \int \frac{(x^2-4x-4)dx}{x^3-2x^2+4x-8}$$

$$22. \int \frac{(4x^4-15x^3+36x^2-40x+27)dx}{x(x^2-2x+3)^2}$$

ข้อ 23 - 33 จงหาค่าของอินทิกรัลจำกัดเขต (definite integral)

$$23. \int_1^2 \frac{x-3}{x^3+x^2} dx \quad 24. \int_0^4 \frac{(x-2)}{2x^2+7x+3} dx$$

$$25. \int_1^3 \frac{x^2-4x+3}{x(x+1)^2} dx \quad 26. \int_1^4 \frac{(2x^2+13x+18)dx}{x^3+6x^2+9x}$$

$$27. \int_1^2 \frac{5x^2-3x+18}{9x-x^3} dx \quad 28. \int_1^3 \frac{(4t^2+6)}{t^3+3t} dt$$

$$29. \int_1^4 \frac{(4+5x^2)}{x^3+4x} dx \quad 30. \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{(x+1)}{x^3+1} dx$$

$$31. \int_3^4 \frac{(5x^3-4x)}{x^4-16} dx \quad 32. \int_3^4 \frac{(x-3)dx}{(x-2)(x^2+2x+1)}$$

$$33. \int_0^2 \frac{(t^3+3t)}{(t^2+1)^2} dt$$

$$34. \text{ จงหาพื้นที่ช่องล้อมรอบด้วยโถง } y = \frac{x-1}{x^2-5x+6} \text{ แกน } x \text{ และเส้น } x = 4, x = 6$$

35. ผู้ประกอบหัตถกรรมผู้หนึ่งดำเนินกิจกรรมมาได้ 4 ปีแล้ว รายได้จากการขายของของเขามีเพิ่มขึ้นด้วยอัตราเดียวทันในอีก 2 ปีข้างหน้า ถ้าผลรวมของรายได้จากการขาย เมื่อสิ้นปีเป็น 6 ล้านบาท จงคาดคะเนรายได้จากการขาย เมื่อสิ้น 1 ปี นับจากปัจจุบัน

#### 8.4 การหาค่าประมาณของอินทิกราช (Approximate Integration)

เราพบในบทก่อน ๆ มาแล้วว่ามีหลายปัญหาที่สามารถแก้ไข โดยหาค่าของอินทิกรัลจำกัดเขต ในกรณีที่เราต้องการหาค่าของอินทิกรัลจำกัดเขต ก็ต้องหาค่าของฟังก์ชัน  $f(x)$  ที่ต้องหาอินทิกรัลไม่จำกัดเขต หรือปฏิยາอนุพันธ์ (antiderivative) แค่เมื่อฟังก์ชัน ซึ่งเราไม่สามารถหาอินทิกรัลไม่จำกัดเขตได้ อย่างไรก็ตามถ้าฟังก์ชัน  $f$  ต่อเนื่องในช่วงปิด  $[a,b]$  เราสามารถหาค่า  $\int_a^b f(x) dx$  ได้ และมีเพียงค่าเดียวเท่านั้น ในหัวข้อนี้ เราจะกล่าวถึงการคำนวณค่าประมาณของอินทิกรัลจำกัดเขตสองวิธีด้วยกัน ซึ่งทั้งสองวิธี ให้ค่าประมาณที่ใกล้เคียงพอสมควร

วิธีแรกเรียกว่า **สี่เหลี่ยมคงที่** (trapezoidal rule)

เรา假定  $f$  เป็นฟังก์ชันที่ต่อเนื่องในช่วง  $[a,b]$  อินทิกรัลจำกัดเขต

$$\int_a^b f(x) dx \quad \text{คือ ลิมิตของผลรวมรีมานน์} \quad (\text{Riemann sum})$$

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{\|\Delta\| \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(\xi_i) \Delta_i x$$

ผลรวมรีมานน์  $\sum_{i=1}^n f(\xi_i) \Delta_i x$  นี้ ในแบบเรขาคณิต คือ ผลรวมของพื้นที่สี่เหลี่ยมผืนผ้า ซึ่งอยู่เหนือแกน  $x$  ばかりด้วยค่าตอบของพื้นที่สี่เหลี่ยมผืนผ้าที่อยู่ใต้แกน  $x$

ดังนี้

การประมาณค่ามี เราใช้สี่เหลี่ยมคงที่ แทนที่จะเป็นสี่เหลี่ยมผืนผ้า โดยการแบ่งช่วงปิด  $[a,b]$  ออกเป็นส่วน ๆ เท่า ๆ กัน และหาค่าของฟังก์ชัน  $f$  จุดแบ่งที่อยู่ห่างเท่า ๆ กันเหล่านั้น

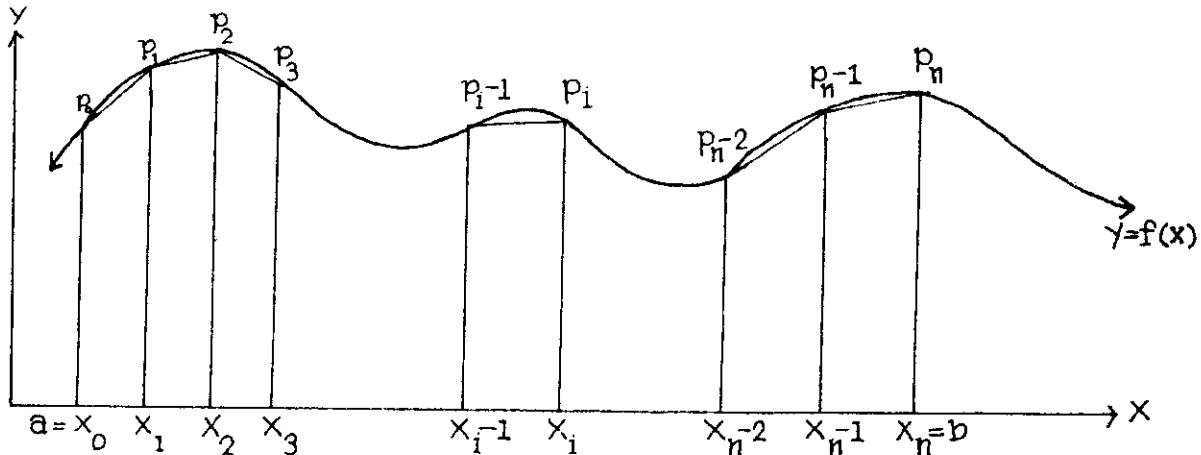
ดังนั้น ถ้าเราพิจารณาอินทิกรัลจำกัดเขต  $\int_a^b f(x) dx$  เราแบ่งช่วง  $[a,b]$  ออกเป็น  $n$  ช่องเท่า ๆ กัน และลักษณะความยาว  $\Delta x = \frac{(b-a)}{n}$  และมีทั้งหมด  $n+1$  จุด

$$\text{ให้ } x_0 = a, x_1 = a + \Delta x, x_2 = a + 2 \Delta x, \dots,$$

$$x_i = a + i \Delta x, \dots, x_{n-1} = a + (n-1) \Delta x, x_n = b$$

แล้วอินทิกรัลจำกัดเขต  $\int_a^b f(x) dx$  แสดงด้วยผลบวกของ  $n$  อินทิกรัลจำกัดเขต ดังนี้

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^{x_1} f(x) dx + \int_{x_1}^{x_2} f(x) dx + \dots + \int_{x_{i-1}}^{x_i} f(x) dx + \dots + \int_{x_{n-1}}^b f(x) dx \quad (8.4.1)$$



รูป 8.4.1

พิจารณาสมการ 8.4.1 ในแบบเรขาคณิต จากรูป 8.4.1

ให้  $f(x) \geq 0$  สำหรับทุก  $x$  ใน  $[a, b]$  สมการ (8.4.1) เป็นจริง สำหรับทุก ๆ พังก์ชันที่ต่อเนื่องในช่วง  $[a, b]$  ดังนั้น ค่าของ

$\int_a^{x_1} f(x) dx$  คือ พื้นที่ที่ล้อมรอบด้วยแกน  $x$  เส้นตรง  $x = a$  และ  $x = x_1$  และส่วนของเส้นโค้งจาก  $x_0$  ถึง  $P_1$  อินทิกรอลนี้ หาได้โดย ประมาณ โดยใช้พื้นที่ของสี่เหลี่ยมคงที่ ที่เกิดจากเส้นตรง

$x = a, x = x_1, P_0, P_1$  และแกน  $x$

จากสูตรพื้นที่ของสี่เหลี่ยมคงที่ คือ  $\frac{1}{2} [f(x_0) + f(x_1)] \Delta x$

ในท่านองเดียวกันอินทิกรอลนี่ ๆ ทางขวาของสมการ 8.4.1 สามารถประมาณค่าได้โดยการหาพื้นที่ของสี่เหลี่ยมคงที่ เราใช้เครื่องหมาย “≈” แทน “ค่าเท่ากับโดยประมาณ” และเราจะมีอินทิกรอลที่  $i$

$$\text{คือ } \int_{x_{i-1}}^{x_i} f(x) dx \approx \frac{1}{2} [f(x_{i-1}) + f(x_i)] \Delta x \quad (8.4.2)$$

ดังนั้น เราใช้ (8.4.2) สำหรับทุก ๆ อินทิกรอลทางขวาของสมการ 8.4.1

$$\text{จะได้ } \int_a^b f(x) dx \approx \frac{1}{2} [f(x_0) + f(x_1)] \Delta x + \frac{1}{2} [f(x_1) + f(x_2)] \Delta x + \dots \\ + \dots + \frac{1}{2} [f(x_{n-2}) + f(x_{n-1})] \Delta x \\ + \frac{1}{2} [f(x_{n-1}) + f(x_n)] \Delta x$$

นั่นคือ

$$\int_a^b f(x) dx \approx \frac{1}{2} \Delta x [f(x_0) + 2f(x_1) + 2f(x_2) + \dots \\ + 2f(x_{n-1}) + f(x_n)] \quad (8.4.3)$$

เป็นสูตรของกฎสี เทลี่ยมคงทุม

ตัวอย่าง 8.4.1 จงหาค่าของ  $\int_0^3 \frac{dx}{16+x^2}$  โดยใช้กฎสี เทลี่ยมคงทุม  
เมื่อ  $n = 6$  (ตอบทศนิยม 3 ตำแหน่ง)

$$\text{วิธีที่ } \because [a, b] = [0, 3] \text{ และ } n = 6 \\ \Delta x = \frac{b-a}{n} = \frac{3}{6} = 0.5$$

$$\therefore \int_0^3 \frac{dx}{16+x^2} \approx \frac{0.5}{2} [f(x_0) + 2f(x_1) + 2f(x_2) \\ + 2f(x_3) + 2f(x_4) + 2f(x_5) + f(x_6)]$$

$$\text{เมื่อ } f(x) = \frac{1}{(16+x^2)}$$

ผลบวกในวงเล็บแสดงด้วยตาราง 8.4.1

ตาราง 8.4.1

i	$x_i$	$f(x_i)$	$K_i$	$K_i f(x_i)$
0	0	0.0625	1	0.0625
1	0.5	0.0615	2	0.1230
2	1	0.0588	2	0.1176
3	1.5	0.0548	2	0.1096
4	2	0.0500	2	0.1000
5	2.5	0.0450	2	0.0900
6	3	0.0400	1	0.0400

$$\sum_{i=0}^6 K_i f(x_i) = 0.6427$$

$$\int_0^3 \frac{dx}{16+x^2} \approx 0.25(0.6427)$$

$$\approx 0.1607$$

ต้องการทศนิยม ๓ ตำแหน่ง

$$\int_0^3 \frac{dx}{16+x^2} \approx 0.161$$

การหาค่าที่แน่นอนของอินทิกรัลจำกัดเขต โดยใช้ฟังก์ชัน tangent ผกผัน (the inverse tangent function) จะได้ค่าที่แน่นอนทศนิยม 4 ตำแหน่ง เท่ากับ 0.1609

พิจารณาความใกล้เคียงของค่าประมาณของอินทิกรัลจำกัดเขตโดยใช้กฎสเปรดของทฤษฎีเบตต์ ให้เราพิจารณาความใกล้เคียงของค่าประมาณของอินทิกรัลจำกัดเขตโดยใช้กฎสเปรดของทฤษฎีเบตต์ ให้เราพิจารณาความใกล้เคียงของค่าประมาณโดยกฎสเปรดของทฤษฎีเบตต์ แล้วสเปรดของค่าประมาณโดยกฎสเปรดของทฤษฎีเบตต์ คือ ค่าที่แน่นอนของอินทิกรัลจำกัดเขต

$$\text{ให้ } T = \frac{1}{2} \Delta x \left[ f(x_0) + 2f(x_1) + \dots + 2f(x_{n-1}) \right.$$

+  $f(x_n)$  ] และ

$$T = \left[ f(x_1) + f(x_2) + \dots + f(x_n) \right] \Delta x \\ + \frac{1}{2} \left[ f(x_0) - f(x_n) \right] \Delta x$$

$$\text{หรือ } T = \sum_{i=1}^n f(x_i) \Delta x + \frac{1}{2} \left[ f(a) - f(b) \right] \Delta x$$

$\therefore$  ถ้า  $n \rightarrow +\infty$  และ  $\Delta x \rightarrow 0$  จะได้

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} T = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(x_i) \Delta x + \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{1}{2} \left[ f(a) - f(b) \right] \Delta x$$

$$= \int_a^b f(x) dx + 0$$

ดังนั้น เราสามารถทำให้ผลต่างระหว่าง  $T$  กับค่าของอนุพันธ์จำกัดเขตเล็กลง ได้เท่าที่เราต้องการ โดยกำหนดให้ ค่าของ  $n$  มากพอ (และให้  $\Delta x$  น้อยลงอย่างเพียงพอ) บทศูนย์หาดทุกสิ่งต่อไปนี้ จะหาได้ใน Advanced calculus เป็นรากฐานที่ใช้ประมวลค่าคลาดเคลื่อน (error) เมื่อใช้กฎสหสัยมคางหมุ สัญลักษณ์ที่ใช้แทนค่าคลาดเคลื่อน (ค่าผิดพลาด) คือ  $\epsilon_T$

#### ทฤษฎี 8.4.1

ให้  $f$  เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องบนช่วงปิด  $[a, b]$   
และ  $f'$  และ  $f''$  ซึ่งหาค่าได้ (exist) บนช่วงปิด  $[a, b]$

$$\text{ถ้า } \epsilon_T = \int_a^b f(x) dx - T$$

เมื่อ  $T$  เป็นค่าประมาณของ  $\int_a^b f(x) dx$  ซึ่งหาได้โดยกฎสหสัยมคางหมุ  
แล้วจะมีจำนวน  $\theta$  บางจำนวนบน  $[a, b]$  ซึ่ง

$$\epsilon_T = -\frac{1}{12} (b-a) f''(\theta) (\Delta x)^2 \quad (8.4.4)$$

ตัวอย่าง 8.4.2 จงหาขอบเขตของความคลาดเคลื่อนในส่วนย่างที่ 1

วิธีทำ หาค่าต่ำสุดสมบูรณ์ (absolute minimum)

และค่าสูงสุดสมบูรณ์ (absolute maximum)

$$\begin{aligned}
 \text{ของ } f''(x) \text{ บน } [0, 3] \\
 f(x) &= (16+x^2)^{-1} \\
 f'(x) &= -2x(16+x^2)^{-2} \\
 f''(x) &= 8x^2(16+x^2)^{-3} - 2(16+x^2)^{-2} \\
 &= (6x^2 - 32)(16+x^2)^{-3} \\
 f'''(x) &= -6x(6x^2 - 32)(16+x^2)^{-4} + 12x(16+x^2)^{-3} \\
 &= 24x(16-x^2)(16+x^2)^{-4}
 \end{aligned}$$

$\therefore f'''(x) > 0$  สำหรับทุก ๆ  $x$  บนช่วง  $(0, 3)$  และ

$f''$  เป็นฟังก์ชันเพิ่มขึ้นบนช่วง  $(0, 3)$

∴ ค่าต่ำสุดสมบูรณ์ของ  $f''$  บน  $[0, 3]$  คือ  $f''(0)$

และค่าสูงสุดสมบูรณ์ของ  $f''$  บน  $[0, 3]$  คือ  $f''(3)$

$$f''(0) = \frac{-1}{128} \quad \text{และ} \quad f''(3) = \frac{22}{15,625}$$

ให้  $\theta = 0$  แทนในสมการ 8.4.4 จะได้

$$\frac{-3}{12} \left( -\frac{1}{128} \right) \frac{1}{4} = \frac{1}{2048}$$

ให้  $\theta = 3$  แทนในสมการ 8.4.4 จะได้

$$\frac{-3}{12} \left( \frac{22}{15,625} \right) \frac{1}{4} = -\frac{11}{45,000}$$

$$\therefore \frac{-11}{45,000} \leq \varepsilon_T \leq \frac{1}{2048}$$

$$-0.0002 \leq \varepsilon_T \leq 0.0005$$

อักรือที่นึงของการประมาณค่าของอินทิกรลจำกัดเขต หรือ กฏซิมสัน (simpson's rule หรือ parabolic rule) ซึ่งให้ค่าประมาณได้ดีกว่าการหาค่าโดยใช้กฏสี่เหลี่ยมคงที่ ในกฏสี่เหลี่ยมคงที่ จุดต่าง ๆ บนกราฟ  $y = f(x)$  เชื่อมกันด้วยส่วนของเส้นตรง ในขณะที่จุดต่าง ๆ ในกฏซิมสัน เชื่อมกันด้วยส่วนโค้งของพาราโบลา ทฤษฎีลำดับที่ใช้ในกฏซิมสัน มีดังนี้

ทฤษฎี 8.4.2 ถ้า  $P_0(x_0, y_0)$ ,  $P_1(x_1, y_1)$  และ  $P_2(x_2, y_2)$  เป็นจุด 3 จุดที่ไม่อยู่บนเส้นตรงเดียวกันบนพาราโบลา ซึ่งมีสมการ

$y = Ax^2 + Bx + C$  เมื่อ  $y_0 \geq 0$ ,  $y_1 \geq 0$ ,  $y_2 \geq 0$ ,  $x_1 = x_0 + h$  และ  $x_2 = x_0 + 2h$  และพื้นที่ของขอบเขต ซึ่งล้อมรอบด้วยพาราโบลา แกน  $x$  และเส้นตรง  $x = x_0$  และ  $x = x_2$  กำหนดโดย

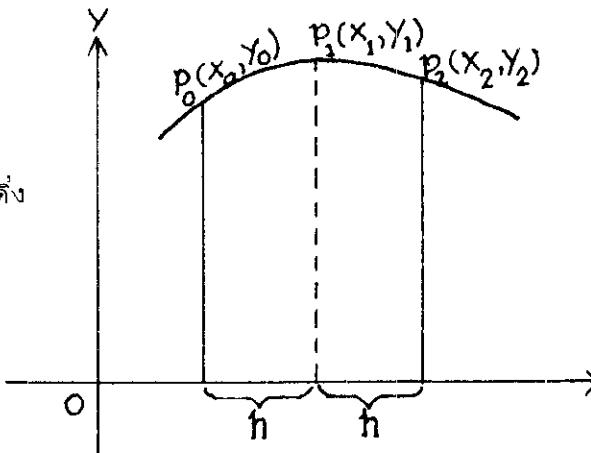
$$\frac{1}{3} h (y_0 + 4y_1 + y_2) \quad (8.4.5)$$

พิสูจน์

พาราโบลา ซึ่งมีสมการ

$y = Ax^2 + Bx + C$  มีแกนในแนวตั้ง  
จากรูป 8.4.2. แสดงบริเวณ ซึ่งล้อม  
รอบด้วยพาราโบลา

แกน  $x$  เส้นตรง  $x = x_0$   
และ  $x = x_2$



$\therefore P_0, P_1$  และ  $P_2$  เป็นจุด

รูป 8.4.2

อยู่บนพาราโบลา ตั้งแต่จุด Co-ordinate ของมันจะสอดคล้องกับสมการ  
ของพาราโบลา

เมื่อเปลี่ยน  $x_1$  เป็น  $x_0 + h$

$x_2$  เป็น  $x_0 + 2h$  จะได้

$$y_0 = Ax_0^2 + Bx_0 + C$$

$$\begin{aligned} y_1 &= A(x_0 + h)^2 + B(x_0 + h) + C \\ &= A(x_0^2 + 2hx_0 + h^2) + B(x_0 + h) + C \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 y_2 &= A(x_0+2h)^2 + B(x_0+2h) + C \\
 &= A(x_0^2 + 4hx_0 + 4h^2) + B(x_0 + 2h) + C \\
 \therefore y_0 + 4y_1 + y_2 &= A(6x_0^2 + 12hx_0 + 8h^2) \\
 &\quad + B(6x_0 + 6h) + 6C
 \end{aligned} \tag{8.4.6}$$

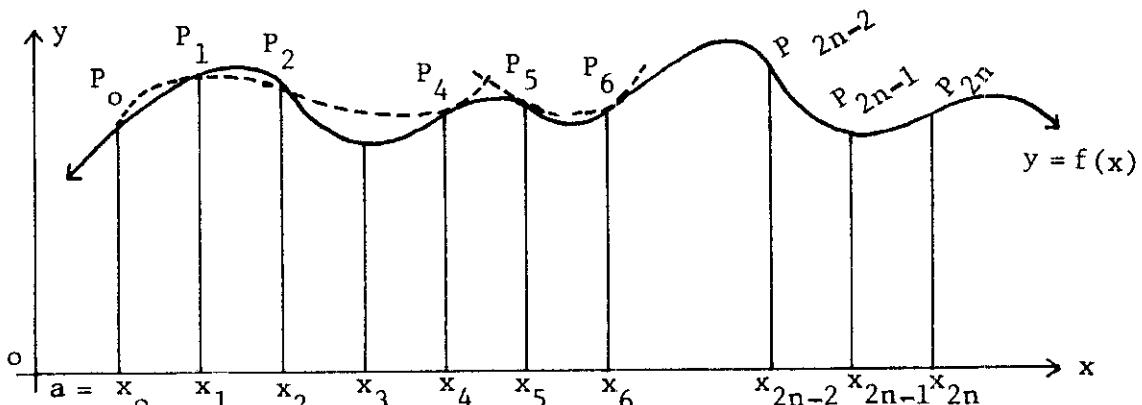
ถ้าให้  $K$  ตารางหน่วยเป็นพื้นที่ของบริเวณนี้ และสามารถคำนวณ  
ทางค่า  $K$  โดยสูตรของผลรวมรีมานน์ จะได้

$$\begin{aligned}
 K &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n (A \xi_i^2 + B \xi_i + C) \Delta x \\
 &= \int_{x_0}^{x_0+2h} (Ax^2 + Bx + C) dx \\
 &= \left[ \frac{1}{3} Ax^3 + \frac{1}{2} Bx^2 + Cx \right]_{x_0}^{x_0+2h} \\
 &= \frac{1}{3} A(x_0+2h)^3 + \frac{1}{2} B(x_0+2h)^2 + C(x_0+2h) \\
 &\quad - \left( \frac{1}{3} Ax_0^3 + \frac{1}{2} Bx_0^2 + Cx_0 \right) \\
 &= \frac{1}{3} h \left[ A(6x_0^2 + 12hx_0 + 8h^2) + B(6x_0 + 6h) + 6C \right]
 \end{aligned} \tag{8.4.7}$$

จากสมการ 8.4.6 และ 8.4.7 ได้

$$K = \frac{1}{3} h \left[ y_0 + 4y_1 + y_2 \right]$$

ให้  $f$  เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องบนช่วง  $[a, b]$  พิจารณาการแบ่งช่วง  $[a, b]$  ออกเป็น  $2n$  ส่วน (ใช้  $2n$  แทน  $n$  เพราะว่าเราต้องการให้จำนวนช่วงแบ่งเป็นเลขคู่) ความยาวของแต่ละช่วง คือ  $\Delta x = (b-a)/2n$  กำหนดให้จุดต่างๆ อยู่บนโค้ง  $y = f(x)$  และจุดเหล่านี้ เป็น abscissas แทนด้วย  $P_0(x_0, y_0), P_1(x_1, y_1), \dots, P_{2n}(x_{2n}, y_{2n})$  ดังรูป 8.4.3 เมื่อ  $f(x) \geq 0$  สำหรับทุกๆ  $x$  บน  $[a, b]$



รูป 8.4.3

เราประมาณส่วนของโค้ง  $y = f(x)$  จาก  $P_0$  ถึง  $P_2$  ด้วยส่วนโค้งของพาราโบลา กับแกนตั้งของมัน โดยผ่าน  $P_0, P_1$  และ  $P_2$  จากทฤษฎี 8.4.2 พื้นที่ที่ล้อมรอบด้วยพาราโบลานี้ แกน  $x$  และเส้นตรง  $x = x_0$  และ  $x = x_2$  กับ  $h = \Delta x$  กำหนดโดย

$$\frac{1}{3} \Delta x (y_0 + 4y_1 + y_2) \quad \text{หรือ} \quad \frac{1}{3} \Delta x [f(x_0) + 4f(x_1) + f(x_2)]$$

ในท่านองเดียวกัน เราสามารถประมาณส่วนของโค้ง  $y = f(x)$  จาก  $P_2$  ถึง  $P_4$  ด้วยส่วนของพาราโบลา กับแกนตั้งของมันที่ผ่านจุด  $P_2, P_3$  และ  $P_4$  พื้นที่ที่ล้อมรอบด้วยพาราโบลานี้ แกน  $x$  และเส้น  $x = x_2$  และ  $x = x_4$  กำหนดโดย

$$\frac{1}{3} \Delta x (y_2 + 4y_3 + y_4) \quad \text{หรือ} \quad \frac{1}{3} \Delta x [f(x_2) + 4f(x_3) + f(x_4)]$$

กระบวนการนี้ใช้ได้เรียบไป จนถึงบริเวณของรูปที่  $n$  พื้นที่ของบริเวณสุดท้าย

$$\text{กำหนดโดย } \frac{1}{3} \Delta x (y_{2n-2} + 4y_{2n-1} + y_{2n})$$

$$\text{หรือ } \frac{1}{3} \Delta x [f(x_{2n-2}) + 4f(x_{2n-1}) + f(x_{2n})]$$

ผลรวมของพื้นที่ของบริเวณนี้ประมาณค่าได้ด้วยพื้นที่ ซึ่งล้อมรอบด้วยโค้งที่มีสมการเป็น  $y = f(x)$  แกน  $x$  และเส้น  $x = a, x = b$  พื้นที่บริเวณนี้กำหนดโดยอินทิเกรลจำกัด เช่น  $\int_a^b f(x) dx$  ซึ่งเป็นค่าประมาณของพื้นที่จำกัดเช่น

$$\frac{1}{3} \Delta x [f(x_0) + 4f(x_1) + f(x_2) + \frac{1}{3} \Delta x [f(x_2) + 4f(x_3) + f(x_4)]]$$

$$+ \dots + \frac{1}{3} \Delta x [f(x_{2n-4}) + 4f(x_{2n-3}) + f(x_{2n-2})]$$

$$\begin{aligned}
 & + \frac{1}{3} \Delta x \left[ f(x_{2n-2}) + 4f(x_{2n-1}) + f(x_{2n}) \right] \\
 \text{ดังนั้น } \int_a^b f(x) dx & \approx \frac{1}{3} \Delta x \left[ f(x_0) + 4f(x_1) + 2f(x_2) \right. \\
 & + 4f(x_3) + 2f(x_4) + \dots + 2f(x_{2n-2}) \\
 & \left. + 4f(x_{2n-1}) + f(x_{2n}) \right] \quad (8.4.8)
 \end{aligned}$$

เมื่อ  $\Delta x = (b-a)/2n$

สูตร 8.4.8 นี้ เรียกว่า กฏซิมสัน (Simpson's rule)

ตัวอย่าง 8.4.3 จงใช้กฏซิมสันประมาณค่าของ  $\int_0^1 \frac{dx}{x+1}$  ด้วย  $2n = 4$   
(ตอบทศนิยม 4 ตำแหน่ง)

วิธีทำ จากกฏซิมสัน เมื่อ  $2n = 4$

$$\begin{aligned}
 \text{จะได้ } \Delta x &= \frac{1}{4} (1-0) = \frac{1}{4} \text{ และ} \\
 \int_0^1 \frac{dx}{x+1} &\approx \frac{1}{12} \left[ f(x_0) + 4f(x_1) + 2f(x_2) + 4f(x_3) + f(x_4) \right] \quad (8.4.9)
 \end{aligned}$$

คำนวณหาค่าในวงเล็บทางขวาของสมการ (8.4.9) ด้วยตาราง 8.4.2

เมื่อ  $f(x) = \frac{1}{x+1}$   
ตาราง 8.4.2

i	$x_i$	$f(x_i)$	$K_i$	$K_i \cdot f(x_i)$
0	0	1.00000	1	1.00000
1	0.25	0.80000	4	3.20000
2	0.5	0.66667	2	1.33334
3	0.75	0.57143	4	2.28572
4	1	0.50000	1	0.50000
$\sum_{i=0}^4 K_i f(x_i) = 8.31906$				

แทนค่าผลบวกในสมการ (8.4.9) จะได้

$$\int_0^1 \frac{dx}{x+1} \approx \frac{1}{12} \quad (8.31906) \approx 0.69325$$

ต้องการทศนิยม 4 ตำแหน่ง

$$\therefore \int_0^1 \frac{dx}{x+1} \approx 0.6933$$

$$\begin{aligned} \text{ค่าที่แน่นอนของ } \int_0^1 \frac{dx}{x+1} &= \left[ \ln|x+1| \right]_0^1 \\ &= \ln 2 - \ln 1 \\ &= \ln 2 \end{aligned}$$

จากตารางล็อกธรรมชาติ (natural logarithms) ค่าของ  $\ln 2$

ทศนิยม 4 ตำแหน่งเท่ากับ 0.6931 ซึ่งใกล้เคียงกับค่าโดยประมาณใน 3 ตำแหน่งแรก ซึ่งคลาดเคลื่อน(error) จากค่าประมาณเพียง - 0.0002

ในการนำกฎขั้มสันไปใช้ ถ้ายังกำหนดค่าของ  $2n$  มาก ค่าของ  $\Delta x$  จะยิ่งน้อย และในทางเรขาคณิตจะเห็นได้ชัดว่า ถ้า  $2n$  มากจะให้ค่าประมาณที่ใกล้เคียง กับค่าที่แน่นอนมาก เพราะว่าพาราโบลาผ่านจุด 3 จุด ของโค้งซึ่งอยู่ใกล้กัน จะอยู่ใกล้โถงบนช่วงแบ่ง ซึ่งกว้าง  $2 \Delta x$

บทพิสูจน์ทฤษฎีต่อไปนี้ มีใน Advanced Calculus เป็นรือทึ่งที่ใช้ ทางค่าคลาดเคลื่อน (error) ในการใช้กฎขั้มสัน สัญลักษณ์ที่ใช้แทนความคลาดเคลื่อน ของขั้มสัน คือ  $\sum_s$

ทฤษฎี 8.4.3 ให้  $f$  เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องบนช่วงปิด  $[a, b]$

และ  $f'$ ,  $f''$ ,  $f'''$  และ  $f^{(iv)}$  หาได้ (exist) บนช่วง  $[a, b]$  ถ้า

$$\mathcal{E}_s = \int_a^b f(x) dx - s$$

เมื่อ  $s$  คือ ค่าประมาณของ  $\int_a^b f(x) dx$  ซึ่งหาได้จากกฎขั้มสัน แล้วจะมีบางจำนวน  $\eta$  ใน  $[a, b]$  ซึ่ง

$$\mathcal{E}_s = -\frac{1}{180} (b-a) f^{(iv)}(\eta) (\Delta x)^4 \quad (8.4.10)$$

ตัวอย่าง 8.4.4 จงหาขอนเข็มของค่าคลาดเคลื่อนของฟังก์ชัน  $y = \frac{1}{x+1}$  บน  $[0, 1]$

$$\begin{aligned} f(x) &= (x+1)^{-1} \\ f'(x) &= -1(x+1)^{-2} \\ f''(x) &= 2(x+1)^{-3} \\ f'''(x) &= -6(x+1)^{-4} \\ f^{(iv)}(x) &= 24(x+1)^{-5} \\ f^{(v)}(x) &= -120(x+1)^{-6} \end{aligned}$$

$\because f^{(v)}(x) < 0$  สำหรับทุก ๆ ค่าของ  $x$  ใน  $[0, 1]$ ,  $f^{(iv)}$  ลดลงในช่วง  $[0, 1]$  ดังนั้นค่าต่ำสุดสมบูรณ์ (absolute minimum value)

ของ  $f^{(iv)}$  อยู่ที่จุดปลายทางขวา ศูนย์ 1 และค่าสูงสุดสมบูรณ์ (absolute maximum value) ของ  $f^{(iv)}$  ใน  $[0, 1]$  อยู่ที่จุดปลายทางซ้ายศูนย์。

$$f^{(iv)}(0) = 24 \quad \text{และ} \quad f^{(iv)}(1) = \frac{3}{4}$$

แทนค่า  $\theta = 0$  ในสมการ 8.4.10 จะได้

$$\begin{aligned} -\frac{1}{180}(b-a)f^{(iv)}(0)(\Delta x)^4 &= -\frac{1}{180}(24)\left(\frac{1}{4}\right)^4 \\ &= -\frac{1}{1920} = -0.00052 \end{aligned}$$

แทนค่า  $\theta = 1$  ในสมการ 8.4.10 จะได้

$$\begin{aligned} -\frac{1}{180}(b-a)f^{(iv)}(1)(\Delta x)^4 &= -\frac{1}{180} \cdot \frac{3}{4} \left(\frac{1}{4}\right)^4 \\ &= -\frac{1}{61,440} = -0.00002 \end{aligned}$$

รวมเข้าด้วยกัน จะได้ว่า

$$\epsilon_s -0.00052 \leq \epsilon_s \leq -0.00002 \quad (8.4.11)$$

อสมการ (8.4.11) สยดคล้องกันกับตัวอย่าง 8.4.3 เกี่ยวกับค่าคลาดเคลื่อน

ในการประมาณค่าของ  $\int_0^1 \frac{dx}{x+1}$  โดยกฎขั้นสูง

$$\text{ เพราะว่า } -0.00052 < -0.0002 < -0.00002$$

ถ้า  $f(x)$  เป็นโพลีโนเมียลทิกีร์ 3 หรือน้อยกว่า แล้ว  $f^{(iv)}(x) \equiv 0$  และ เพราะว่า  $\frac{1}{S} = 0$  จึงอาจกล่าวได้ว่ากฎขั้นสูง จะให้ค่าที่แน่นอน

สำหรับโพลีโนเมียลทิกีร์ 3 หรือต่ำกว่า คำกล่าวนี้เห็นได้ชัดทางเรขาคณิต

ถ้า  $f(x)$  เป็นติกีร์ 2 หรือติกีร์ 1 เพราะว่าในการมีแรกกราฟของ  $y = f(x)$  เป็นพาราโบลา และกรณีที่สองกราฟเป็นเส้นตรง ซึ่งทั้งทั้งสองพาราโบลา เช่นกัน

ตัวอย่าง 8.4.5 จงใช้กฎขั้นสูง หาค่าประมาณของ  $\int_0^2 e^{-x^2} dx$

ด้วย  $2n = 4$  และตอบทศนิยม 3 ตำแหน่ง

$(\int_0^2 e^{-x^2} dx)$  นี้ใช้มากทางสถิติ เรียกว่า probability integral ไม่สามารถหาค่าที่แน่นอนได้ ในรูปของฟังก์ชันพื้นฐาน)

วิธีทำ โดยใช้กฎขั้นสูง ด้วย

$$f(x) = e^{-x^2} [a, b] = [0, 2]$$

$$2n = 4 \text{ และ } \Delta x = \frac{1}{4} (2-0) = \frac{1}{2}$$

$$\therefore \int_0^2 e^{-x^2} dx \approx \frac{1}{6} \left[ f(0) + 4f\left(\frac{1}{2}\right) + 2f(1) + 4f\left(\frac{3}{2}\right) + f(2) \right]$$

$$= \frac{1}{6} \left[ (e^0 + 4e^{-\frac{1}{4}} + 2e^{-1} + 4e^{-\frac{9}{4}} + e^{-4}) \right]$$

$$\approx \frac{1}{6} \left[ 1.0000 + 4(0.7788) + 2(0.3679) + 4(0.1054) + 0.0183 \right]$$

$$= \frac{1}{6} (5.2909)$$

$$\approx 0.882$$

## แบบฝึกหัด 8.5

ข้อ 1 ถึง 10 จงคำนวณหาค่าประมาณของอินทิกรัลจำกัดเขตที่กำหนดให้โดยใช้กฎสีเหลืองคงทมุ ด้วยค่า  $n$  ที่กำหนดให้ต้องทดนิยมสามตัวแทน

ข้อ 1 ถึง 4 จงหาค่าที่ถูกต้องของอินทิกรัลจำกัดเขต และเปรียบเทียบค่าประมาณที่หาได้

$$1. \int_1^2 \frac{dx}{x}, n = 5 \quad 2. \int_2^{10} \frac{dx}{1+x}, n = 8$$

$$3. \int_0^2 x^3 dx, n = 4 \quad 4. \int_0^2 x \sqrt{4-x^2} dx, n = 8$$

$$5. \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1+x^2}}, n = 5 \quad 6. \int_2^3 \sqrt{1+x^2} dx, n = 6$$

$$7. \int_0^1 e^{x^2} dx, n = 5 \quad 8. \int_2^3 \ln(1+x^2) dx, n = 4$$

$$9. \int_0^2 \sqrt{1+x^4} dx, n = 6 \quad 10. \int_0^1 \sqrt{1+x^2} dx, n = 4$$

ข้อ 11 - 16 จงหาขอบเขตของความคลาดเคลื่อนของค่าประมาณในข้อที่กำหนดให้

$$11. \text{ ข้อ 1 } \quad 12. \text{ ข้อ 2 } \quad 13. \text{ ข้อ 3 }$$

$$14. \text{ ข้อ 6 } \quad 15. \text{ ข้อ 7 } \quad 16. \text{ ข้อ 8 }$$

ข้อ 17 - 22 จงหาค่าประมาณของอินทิกรัลจำกัดเขตโดยกฎซึ่นสัน ให้ใช้ค่าของ  $2n$  ตามที่กำหนดให้ ต้องการทดนิยม 3 ตัวแทน

ข้อ 17, 18 จงหาค่าของอินทิกรัลจำกัดเขตที่แน่นอน และจงเปรียบเทียบกับค่าประมาณที่หาได้

$$17. \int_0^2 x^2 dx, 2n = 4 \quad 18. \int_1^2 \frac{dx}{x+1}, 2n = 8$$

$$19. \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1+x^2}}, 2n = 4 \quad 20. \int_0^1 \frac{-1}{2} \cdot \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}, 2n = 4$$

$$21. \int_0^1 \frac{dx}{x^2+x+1}, 2n = 4 \quad 22. \int_0^1 \frac{dx}{1+x^2}, 2n = 8$$

ข้อ 23, 24 จงหาขอเบตของความคุ้มค่าเดือนในข้อที่ก้าวนดังนี้

23. ข้อ 17

24. ข้อ 18

อินทิกรัลจำกัดเขต ในข้อ 25 - 28 ไม่สามารถหาค่าที่แน่นอนในเทอมของ พงก์ซึ่งเป็นฐานได้ จงใช้กฎขีดสั้น ด้วยค่า  $2n$  ที่ใช้ก้าวนดังนี้ ต้องการ ทดสอบ 3 ตำแหน่ง

$$25. \int_1^{18} \sqrt{1+x^3} dx, 2n = 4 \quad 26. \int_0^2 \sqrt{1+x^4} dx, 2n = 6$$

$$27. \int_0^2 \frac{dx}{\sqrt{1+x^3}}, 2n = 8 \quad 28. \int_0^1 \sqrt[3]{1-x^2} dx, 2n = 4$$

29. จงใช้กฎขีดสั้น ด้วย  $n = 6$  เพื่อหาค่าประมาณของอินทิกรัลในข้อ 5 ทดสอบ 3 ตำแหน่ง

30. สมการอุปสงค์ (demand equation) สำหรับโภคภัณฑ์อย่างหนึ่ง เป็น  $p = 2\sqrt{100-x^2}$  และราคาตลาดเป็น 12 บาท จงเขียนขอเบต เพื่อศึกษาผลลัพธ์ เกินของผู้บริโภค (consumers' surplus) คำนวณค่าอินทิกรัลจำกัดเขต โดยใช้กฎขีดสั้น ด้วย  $2n = 4$  ทดสอบ 2 ตำแหน่ง

31. จงหาส่วนเกินของผู้ผลิต (producer's surplus) สำหรับโภคภัณฑ์ อย่างหนึ่ง ซึ่งมีสมการอุปทาน เป็น  $p = \sqrt{x^4 + 68}$  และราคาตลาดเป็น 18 บาท จงเขียนขอเบตซึ่งเป็น เม็ดศักดิ์ที่ศึกษาผลลัพธ์ เกินของผู้ผลิต (producers' surplus) หากคำอินทิกรัลจำกัดเขต โดยกฎขีดสั้น ด้วย  $2n = 4$  ทดสอบ 2 ตำแหน่ง

## 8.5 อินฟินท์อินทิกรัล (Improper Integrals)

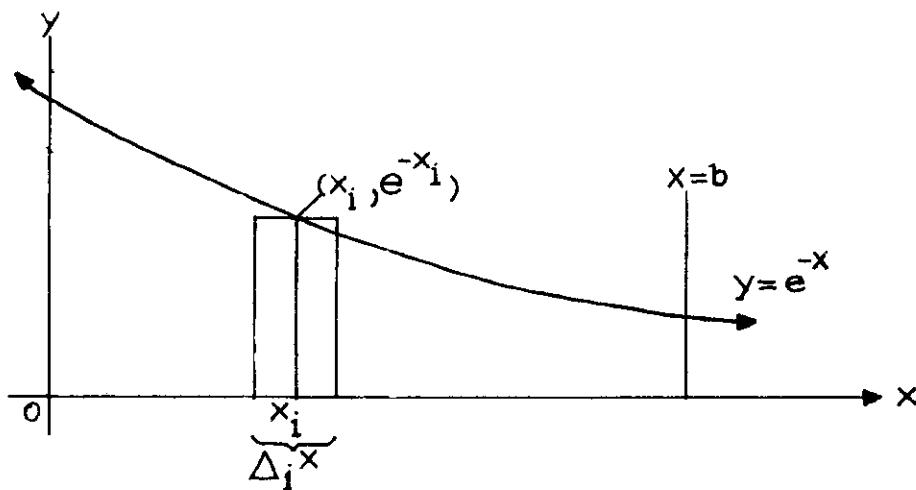
ในการให้ความหมายของอินทิกรัลจำกัดเขต (definite integral)  $\int_a^b f(x) dx$   
เรามุ่งว่า พงก์ชัน  $f$  อยู่ในช่วงปิด  $[a, b]$

สำหรับ อินทิกรัลจำกัดเขต (definite integral) อยู่ในช่วงที่ไม่สิ้นสุด (Infinite interval) หรือ ค่าอินทิเกรต (integrand) มีการไม่ต่อเนื่องที่ไม่สิ้นสุด (infinite discontinuity) ในช่วงปิดที่จำกัด

ในแต่ละกรณี เราเรียกอินทิกรัล (integral) เช่นนี้ว่าเป็น อินฟอร์อินทิกรัล (improper integral)

ตัวอย่าง 8.5.1 จงหาพื้นที่ของพื้นที่ที่ถูกห้อมล้อมโดย เส้นโค้ง

$$y = e^{-x} \quad \text{แกน } x, \text{ แกน } y \quad \text{และเส้นตรง } x = b \quad \text{ในเมื่อ } b > 0$$



ให้  $A$  ตารางหน่วย เป็นพื้นที่ที่ถูกห้อมล้อม เราจะได้

$$A = \lim_{\substack{i \rightarrow 0 \\ |\Delta| \rightarrow 0}} \sum_{i=1}^n e^{-x_i} \Delta x$$

$$= \int_0^b e^{-x} dx$$

$$= -e^{-x} \Big|_0^b$$

$$= 1 - e^{-b}$$

ถ้าเราให้  $b$  มีค่าเพิ่มขึ้นโดยปราศจากขอบเขต แล้ว

$$\lim_{b \rightarrow +\infty} \int_0^b e^{-x} dx = \lim_{b \rightarrow +\infty} (1 - e^{-b})$$

$$\lim_{b \rightarrow +\infty} \int_0^b e^{-x} dx = 1$$

$$\text{หรือ } \int_0^{+\infty} e^{-x} dx = 1$$

นิยาม 8.5.1 ถ้า  $f$  ต่อเนื่องในทุก ๆ ค่าของ  $x \geq a$  และ

$$\int_a^{+\infty} f(x) dx = \lim_{b \rightarrow +\infty} \int_a^b f(x) dx$$

ถ้าลิมิตนี้หาค่าได้ (exists)

นิยาม 8.5.2 ถ้า  $f$  ต่อเนื่องในทุก ๆ ค่าของ  $x \leq b$  และ

$$\int_{-\infty}^b f(x) dx = \lim_{a \rightarrow -\infty} \int_a^b f(x) dx$$

ถ้าลิมิตนี้หาค่าได้ (exists)

นิยาม 8.5.3 ถ้า  $f$  ต่อเนื่องในทุก ๆ ค่าของ  $x$  และ

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx = \lim_{a \rightarrow -\infty} \int_a^0 f(x) dx + \lim_{b \rightarrow +\infty} \int_0^b f(x) dx$$

ถ้าลิมิตทั้งสองนี้หาค่าได้ (exists)

ในนิยาม 8.5.1 , นิยาม 8.5.2 และ นิยาม 8.5.3 ถ้าลิมิตหาค่าได้ (exist) เรากล่าวว่า อินTEGRAL นั้นเป็นสูตรเข้า (convergent) แต่ถ้าลิมิตหาค่าไม่ได้ (not exist) เรากล่าวว่า อินTEGRAL นั้นเป็นสูตรออก (divergent)

ตัวอย่าง 8.5.2 จงหาค่า  $\int_{-\infty}^2 \frac{dx}{(4-x)^2}$  ที่มันคู่เข้า (converges)  
วิธีทํา ตามนิยาม 8.5.2

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^2 \frac{dx}{(4-x)^2} &= \lim_{a \rightarrow -\infty} \int_a^2 \frac{dx}{(4-x)^2} \\ &= \lim_{a \rightarrow -\infty} \left[ \frac{1}{4-x} \right]_a^2 \\ &= \lim_{a \rightarrow -\infty} \left( \frac{1}{2} - \frac{1}{4-a} \right) \\ &= \frac{1}{2} - 0 = \frac{1}{2}\end{aligned}$$


---

ตัวอย่าง 8.5.3 จงหาค่า (a)  $\int_{-\infty}^{+\infty} x dx$

$$(b) \quad \lim_{r \rightarrow +\infty} \int_{-r}^r x dx$$

วิธีทํา (a) ตามนิยาม 8.5.3

$$\int_{-\infty}^{+\infty} x dx = \lim_{a \rightarrow -\infty} \int_a^0 x dx + \lim_{b \rightarrow +\infty} \int_0^b x dx$$

$$\begin{aligned}&= \lim_{a \rightarrow -\infty} \left[ \frac{x^2}{2} \right]_a^0 + \lim_{b \rightarrow +\infty} \left[ \frac{x^2}{2} \right]_0^b \\ &= \lim_{a \rightarrow -\infty} \left( -\frac{a^2}{2} \right) + \lim_{b \rightarrow +\infty} \left( \frac{b^2}{2} \right)\end{aligned}$$

เพราจะว่าสิมิตตั้งสองหาค่าไม่ได้ (not exist)

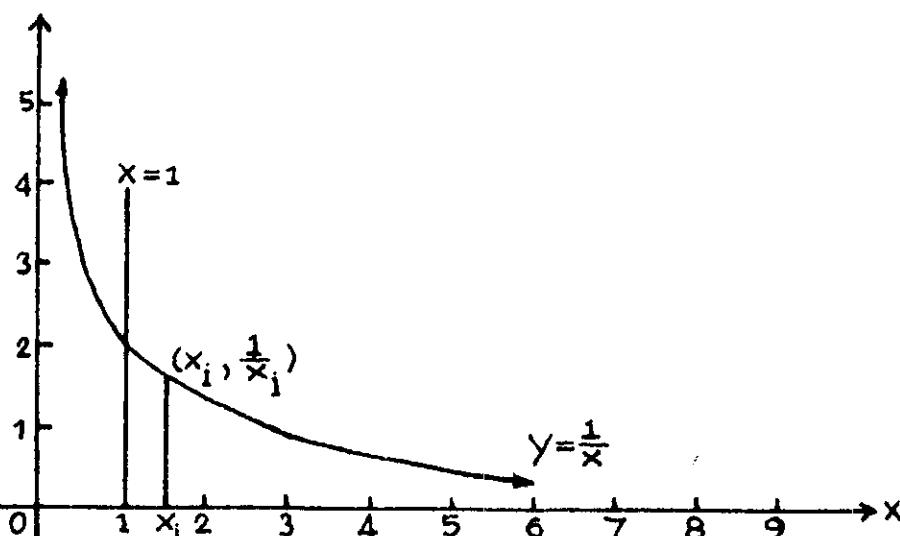
เพราจะนัน อินพารอเปอร์อินทิกรัล (improper integral) นี้เป็นคู่ออก (diverges)

$$\begin{aligned}
 (b) \quad \lim_{r \rightarrow +\infty} \int_{-r}^r x dx &= \lim_{r \rightarrow +\infty} \left[ \frac{x^2}{2} \right]_{-r}^r \\
 &= \lim_{r \rightarrow +\infty} \left( \frac{r^2}{2} - \frac{(-r)^2}{2} \right) \\
 &= \lim_{r \rightarrow +\infty} 0 \\
 &= 0
 \end{aligned}$$

ตัวอย่าง 8.5.4 จงหาค่าของพื้นที่ ที่ถูกห้อมล้อมโดยกราฟของสมการ

$y = \frac{1}{x}$ ,  $y = 0$  และ  $x = 1$  ว่าจะหาค่าได้หรือไม่

วิธีทำ



ให้  $A$  เป็นพื้นที่ ที่ถูกห้อมล้อมโดยกราฟของสมการ

$y = \frac{1}{x}$ ,  $y = 0$ ,  $x = 1$  และ  $x = b$  เมื่อ  $b > 1$

แล้ว

$$A = \lim_{\substack{|\Delta| \rightarrow 0 \\ i}} \sum_{i=1}^n \frac{1}{x_i} \Delta_i x = \int_1^b \frac{dx}{x}$$

ให้  $L = \lim_{b \rightarrow +\infty} A$  ถ้าลิมิตนี้หาค่าได้

$$b \rightarrow +\infty$$

$$\begin{aligned} \text{แต่ } \lim_{b \rightarrow +\infty} A &= \lim_{b \rightarrow +\infty} \int_1^b \frac{dx}{x} \\ &= \lim_{b \rightarrow +\infty} (\ln b - \ln 1) \\ &= +\infty \end{aligned}$$

เพราะจนน์ เราไม่สามารถหาค่าของพื้นที่นี้ได้

นิยาม 8.5.4 ถ้า  $f$  ต่อเนื่องที่ทุก ๆ ค่าของ  $x$  ในช่วงครึ่งเปิด

$$(a, b] \text{ และ } \lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = \pm \infty \text{ และ}$$

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \int_{a+\epsilon}^b f(x) dx \quad \text{ถ้าลิมิตนี้หาค่าได้ (exists)}$$

นิยาม 8.5.5 ถ้า  $f$  ต่อเนื่องที่ทุก ๆ ค่าของ  $x$  ในช่วงครึ่งเปิด

$$[a, b) \text{ และ } \lim_{x \rightarrow b^-} f(x) = \pm \infty \text{ และ}$$

$$\begin{aligned} \therefore \int_0^{+\infty} \frac{e^{-\sqrt{x}}}{\sqrt{x}} dx &= \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \left[ -2e^{-\sqrt{x}} \right]_1^\epsilon + \lim_{b \rightarrow +\infty} \left[ -2e^{-\sqrt{x}} \right]_1^b \\ &= \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} (-2e^{-1} + 2e^{-\sqrt{\epsilon}}) + \\ &\quad \lim_{b \rightarrow +\infty} (-2e^{-\sqrt{b}} + 2e^{-1}) \\ &\quad b \rightarrow +\infty \\ &= -2e^{-1} + 2 - 0 + 2e^{-1} \\ &= 2 \end{aligned}$$

## แบบฝึกหัด

จงหาค่าของอินทิกรัลไม่ถูกจำกัด (improper integral) ต่อไปนี้ ถ้ามันเป็นคูล่า (convergent)

1.  $\int_{-\infty}^1 e^x dx$

2.  $\int_{5}^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt{x-1}}$

3.  $\int_1^{+\infty} \ln x dx$

4.  $\int_0^1 \ln x dx$

5.  $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x}}$

6.  $\int_{-2}^0 \frac{dx}{2x+3}$

7.  $\int_1^{+\infty} 2^{-x} dx$

8.  $\int_{-\infty}^0 x^5 e^{-x^2} dx$

9.  $\int_0^2 \frac{dx}{(x-1)^{2/3}}$

10.  $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x \ln x}$

11.  $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-|x|} dx$

12.  $\int_0^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt{e^x}}$

13.  $\int_e^{+\infty} \frac{dx}{x(\ln x)^2}$

14.  $\int_{-\infty}^{+\infty} x e^{-x^2} dx$

15.  $\int_1^2 \frac{x dx}{\sqrt{x^2-1}}$

16.  $\int_0^1 \frac{\ln x}{x} dx$

17.  $\int_{-1}^1 \frac{dx}{x^2}$

18.  $\int_0^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt{x} e^x}$

$$19. \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{x^2 - a^2}$$

$$20. \int_0^2 \frac{x dx}{1-x}$$

$$21. \int_0^4 \frac{dx}{x^2 - 2x - 3}$$

$$22. \int_0^6 \frac{dx}{x^2 - 6x + 8}$$

$$23. \int_0^{\infty} \frac{dx}{x^2 + 1}$$

$$24. \int_0^{\infty} e^{-x} \cos x dx$$

$$25. \int_0^4 \frac{dx}{\sqrt{4-x}}$$

$$26. \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$27. \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x}}$$

$$28. \int_{-1}^1 \frac{dx}{x^{2/3}}$$

$$29. \int_1^{\infty} \frac{dx}{x^{1.001}}$$

$$30. \int_0^1 \frac{dx}{x^{0.999}}$$