

บทที่ 7

7.1 พังค์ชันลอการิทึมธรรมชาติ (The Natural Logarithmic Function)

ในการที่จะศึกษาเรื่องของ Logarithmic Function นั้นต้องมีความรู้พื้นฐานเกี่ยวกับเรื่องเลขครรชนิดด้วย เพราะว่าในการพิสูจน์กฎของ logarithmic function บางข้อจะต้องอาศัย คุณสมบติของเลขครรชนี้ ซึ่งได้ศึกษามาแล้วในชั้นมัธยมศึกษา ดังนั้นในที่นี้ขอนำคุณสมบติต่าง ๆ มา_review ไว้ดังนี้คือ

1) ถ้าให้ a เป็นเลขจำนวนจริง

x และ y เป็นเลขจำนวนเต็มบวก แล้ว

$$\frac{x}{a} \cdot \frac{y}{a} = \frac{x+y}{a}$$

2) $a^0 = 1$

3) ถ้า n เป็นเลขจำนวนเต็มบวก แล้ว $-n$ จะเป็นเลขจำนวนเต็มลบ

$$\text{และ } a^{-n} = \frac{1}{a^n}$$

4) ถ้าให้ $\frac{m}{n}$ เป็นเลขจำนวนเดียบะ และ $a > 0$ แล้ว

$$a^{\frac{m}{n}} = (\sqrt[n]{a})^m$$

5) ถ้า a เป็นเลขจำนวนจริง x และ y เป็นเลขจำนวนเต็มบวก แล้ว

$$\frac{ax}{ay} = \frac{x-y}{a}$$

นิยามของ logarithmic function เกี่ยวข้องกับเลขครรชนี้ กล่าวคือ

ถ้า a เป็นเลขจำนวนจริงบวกใด ๆ และ x เป็นเลขจำนวนจริงใด ๆ แล้ว

a^x จะต้องมีค่าที่เป็นไปได้ สมมติให้ค่าที่เป็นไปได้นั้น คือ N

ดังนั้นถ้า $a^x = N$ แล้ว

$$x = \log_a N \quad (7.1.1)$$

a เรียกว่าฐานของ \log ซึ่งโดยทั่วไปนิยมใช้ฐาน $a = 10$

การพิสูจน์กฎต่าง ๆ ของ logarithmic function ใช้คุณสมบติของเลขครรชนี้

ดังนี้ คือ

กฎข้อที่ 1.

$$\log_a MN = \log_a M + \log_a N$$

พิสูจน์

$$\text{ให้ } a^x = M \quad (7.1.2)$$

$$\therefore x = \log_a M \quad (\text{จากนิยาม}) \quad (7.1.3)$$

$$\text{ให้ } a^y = N \quad (7.1.4)$$

$$\therefore y = \log_a N \quad (\text{จากนิยาม}) \quad (7.1.5)$$

$$\text{จาก (7.1.3) กับ (7.1.5) ได้ } x + y = \log_a M + \log_a N \quad (7.1.6)$$

$$\text{คุณ (7.1.2) กับ (7.1.4) ได้ } a^x \cdot a^y = MN$$

$$\text{หรือ } a^{x+y} = MN \quad (\text{จากคุณสมบตของเลขครรภนี ข้อ 1})$$

$$\text{นั่นคือ } x + y = \log_a MN \quad (\text{จากนิยาม}) \quad (7.1.7)$$

$$\text{ดังนั้น } \log_a MN = \log_a M + \log_a N$$

กฎข้อที่ 2. $\log_a \frac{M}{N} = \log_a M - \log_a N$

พิสูจน์

$$\text{ให้ } a^x = M \quad (7.1.8)$$

$$\therefore x = \log_a M \quad (\text{จากนิยาม}) \quad (7.1.9)$$

$$\text{ให้ } a^y = N \quad (7.1.10)$$

$$\therefore y = \log_a N \quad (7.1.11)$$

จาก (7.1.8) ด้วย (7.1.10) ได้

$$\frac{a^x}{a^y} = \frac{M}{N} \quad (7.1.12)$$

หรือ

$$a^{x-y} = \frac{M}{N} \quad (\text{จากคุณสมบตของเลขครรภนี ข้อ 5})$$

$$x - y = \log_a \frac{M}{N} \quad (\text{จากนิยาม}) \quad (7.1.13)$$

แทนค่า x และ y จาก (7.1.9) และ (7.1.11)

$$\therefore \log_a M - \log_a N = \log_a \frac{M}{N}$$

กฎข้อที่ 3. $\log_a 1 = 0$

จาก a เป็นเลขจำนวนบวกใด ๆ จะได้ว่า

$$\frac{a^0}{a} = 1 \quad (\text{จากคุณสมบตของเลขครรชนี ข้อ 2})$$

$$0 = \log_a 1 \quad (\text{จากนิยาม})$$

กฎข้อที่ 4. $\log_a M^n = n \log_a M$

พิสูจน์ ให้ $a^x = M$

$$\therefore x = \log_a M \quad (\text{จากนิยาม})$$

$$a^x \cdot a^x = a^{2x} = M^2 \quad (\text{จากคุณสมบตของเลขครรชนี ข้อ 1)}$$

$$\underbrace{a^x \cdot a^x}_{n \text{ ครั้ง}} = M^n$$

$$\therefore a^{nx} = M^n \quad (\text{จากคุณสมบตของเลขครรชนี ข้อ 1})$$

$$nx = \log_a M^n \quad (\text{จากนิยาม})$$

แทนค่า x จะได้

$$n \log_a M = \log M^n$$

กฎข้อที่ 5. $\log_a a = 1$

พิสูจน์ จาก $a^1 = a$

$$\therefore 1 = \log_a a$$

นอกจากนิยามของ logarithmic function ในรูปแบบซึ่งสัมพันธกับเลขครรชนี แล้วก็มีนิยามของ logarithmic function ที่เกี่ยว กับเรื่องแคลคูลัส ซึ่งจะพิจารณาจากส่วนของ การอนทิกรต ต่อไปนี้คือ

$$\int t^n dt = \frac{t^{n+1}}{n+1} + C$$

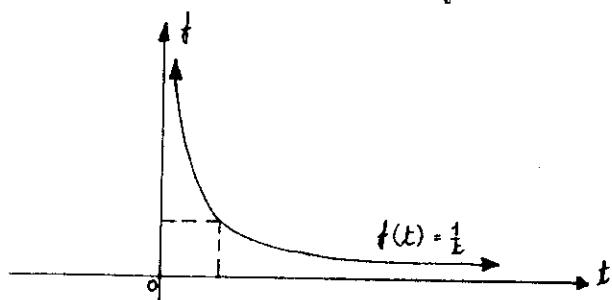
เมื่อ $n \neq -1$ และ C เป็นค่าคงที่

ถ้ากำหนดให้ $f(t)$ เป็นพัธ์ชันซึ่งนิยามโดย

$f(t) = t^{-1}$ เมื่อ t เป็นเลขจำนวนจริงบวกในที่นั้นต้องการให้ t เป็นเลขจำนวนจริงบวกดังนั้น ถ้าเราครุปกราฟของ $f(t)$ จะกำหนดค่าของ t ตั้งแต่ $t = 0$ ไปทางขวามีอ

$t =$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{2}$	1	$\frac{3}{2}$	2	
$f(t) =$	3	2	1	$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{2}$	

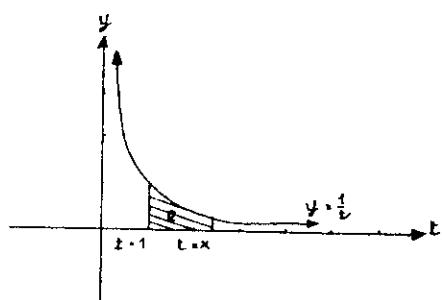
จากที่กำหนดค่าของ t จะได้ค่าของ $f(t)$ ซึ่งสมนัยกัน และนำค่าที่สมนัยกันนี้มาเขียนกราฟของ $f(t)$ จะได้ลักษณะของกราฟดังรูป 7.1.1



รูป 7.1.1

ถ้าให้ R เป็นส่วน ซึ่งขอบเขตบนกำหนดโดยเส้น $y = \frac{1}{t}$ ส่วนขอบเขตล่างกำหนด

โดยแกน t ส่วนทางซ้ายมือกำหนดโดยเส้น $t = 1$, ทางขวากำหนดโดยเส้น $t = x$ เมื่อ $x > 1$ คันนั้นส่วนของ R จะมีขอบเขตคล้ายรูป 7.1.2

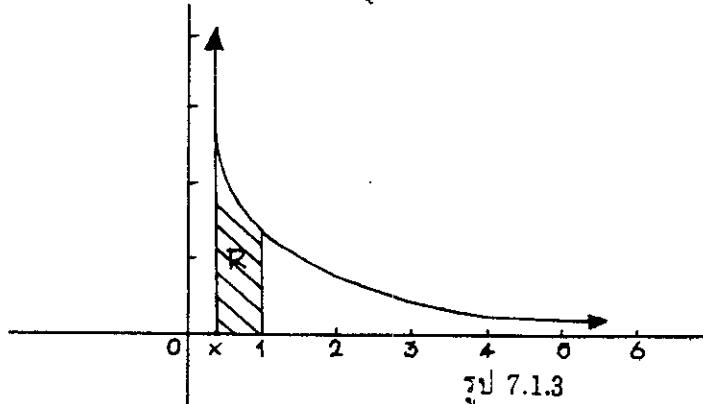


รูป 7.1.2

พื้นที่ของ R ในกรณีจะอยู่ในรูปพื้นที่ชั้นของ x ซึ่งถ้าให้เป็น $A(x)$ จะได้ว่า

$$A(x) = \int_{1}^x \frac{1}{t} dt$$

ในกรณี $0 < x < 1$ ดังรูป 7.1.3



จากคุณสมบัติของการอนกิเกรตที่ว่า

$$\int_{1}^x \frac{1}{t} dt = - \int_{x}^1 \frac{1}{t} dt$$

ซึ่งค่าของ $\int_{x}^1 \frac{1}{t} dt$ ก็คือพื้นที่ของ R ในรูป 7.1.3 นั้นเอง ดังนั้น $\int_{1}^x \frac{1}{t} dt$

ก็คือค่าลบของพื้นที่ของ R ในรูป 7.1.3

ในกรณีที่ $x = 1$ จะสังเกตเห็นได้ว่าไม่มีส่วนของ R เกิดขึ้น

ดังนั้นพื้นที่ของ R เมื่อ $x = 1$ คือ $A(x) = 0$

จึงสามารถสรุปได้ว่า ค่าของอนกิเกรต $\int_{1}^x \left(\frac{1}{t}\right) dt$ สำหรับ $x > 0$ ก็คือพื้นที่ของบริเวณใดบริเวณหนึ่ง

ต่อไปจะให้นิยามของ natural logarithmic function โดยอาศัยเรื่องของแคลคูลัส
มาเกี่ยวข้อง

นิยาม 7.1.1 natural logarithmic function คือพื้นที่ชั้น $\ln x$ ซึ่งกำหนดโดย

$$\ln x = \int_{1}^x \frac{1}{t} dt, \quad x > 0$$

สำหรับโดเมน (Domain) ของ natural logarithmic function คือเซ็ตของเลข
จำนวนจริงบวก

$\ln x$ อ่านว่า natural logarithm ของ x

สำหรับ natural logarithmic function นี้จะเป็นฟังก์ชันซึ่งสามารถจะหาค่า

อนุพันธ์ได้ และจะได้ว่า

$$\frac{d(\ln x)}{dx} = \frac{d}{dx} \left(\int_1^x \frac{1}{t} dt \right) = \frac{1}{x}$$

จะเห็นได้ว่าค่าอนุพันธ์ของ $\ln x$ มีค่าเท่ากับ $\frac{1}{x}$ ซึ่งในที่นี้เรากำหนดให้ $x > 0$

ดังนั้นค่าของ

$$\frac{d}{dx} (\ln x) = \frac{1}{x} \quad (7.1.4)$$

นี้จะเป็นไปได้ทุกๆ ค่าของ x

จากสูตรอนุพันธ์ของ $\ln x$ และจากกฎลูกโซ่ (Chain rule)

ถ้า u เป็นฟังก์ชันซึ่งสามารถจะหาค่าอนุพันธ์ เมื่อเทียบกับ x ได้ และ $u(x) > 0$ แล้ว

$$\frac{d}{dx} (\ln u) = \frac{1}{u} \frac{du}{dx} \quad (7.1.15)$$

ตัวอย่างที่ 7.1.1 กำหนดให้ $y = \ln (8x^2 - 2x + 6)$

จงหาค่าของ $\frac{dy}{dx}$

วิธีทำ

ให้ $u(x)$ เป็นฟังก์ชันของ x ซึ่ง

$$u(x) = 8x^2 - 2x + 6$$

$$\therefore \frac{du}{dx} = 16x - 2 \quad \text{ซึ่งค่านี้เป็นไปได้สำหรับทุกๆ ค่าของ } x$$

เมื่อ x เป็นเลขจำนวนจริง

$\therefore u(x)$ เป็น พังก์ชันซึ่งสามารถจะหาค่าอนุพันธ์เมื่อเทียบกับ x ได้
จากโจทย์กำหนดให้

$$y = \ln (8x^2 - 2x + 6)$$

$$y = \ln(u)$$

$$\begin{aligned}\therefore \frac{dy}{dx} &= \frac{d}{dx} \ln(u) = \frac{1}{u} \frac{du}{dx} \quad (\text{จากสูตร 7.1.14}) \\ &= \frac{1}{8x^2 - 2x + 6} (16x - 2) \quad (\text{แทนค่า } u \text{ และ } \frac{du}{dx}) \\ &= \frac{2(8x - 1)}{8x^2 - 2x + 6}\end{aligned}$$

ตัวอย่างที่ 7.1.2 กำหนดให้ $y = \ln [(7x^2 + 5)(3x - 4)]$

จงหาค่าของ $\frac{dy}{dx}$

วิธีทำ กำหนดให้ $u(x) = (7x^2 + 5)(3x - 4)$

$$\begin{aligned}\frac{du}{dx} &= (7x^2 + 5) \frac{d(3x - 4)}{dx} + (3x - 4) \frac{d(7x^2 + 5)}{dx} \\ &= (7x^2 + 5)(3) + (3x - 4)(14x) \quad \text{ซึ่งมีค่าที่เป็นไปได้} \\ &\quad \text{สำหรับทุก ๆ ค่าของ } x \text{ อยู่ใน } R \\ &= 63x^2 - 56x + 15\end{aligned}$$

ดังนั้น $u(x)$ เป็น พั้งก์ชันซึ่งสามารถจะหาอนุพันธ์เมื่อเทียบกับ x ได้

จากโจทย์ $y = \ln [(7x^2 + 5)(3x - 4)]$

$\therefore y = \ln(u)$ (แทนค่า u)

$$\begin{aligned}\frac{dy}{dx} &= \frac{d}{dx} \ln(u) = \frac{1}{u} \frac{du}{dx} \quad (\text{จากสูตร 7.1.15}) \\ &= \frac{1}{(7x^2 + 5)(3x - 4)} (63x^2 - 56x + 15) \quad (\text{แทนค่า } u \text{ และ } \frac{du}{dx}) \\ &= \frac{63x^2 - 56x + 15}{(7x^2 + 5)(3x - 4)}\end{aligned}$$

ตัวอย่างที่ 7.1.3 กำหนดให้ $y = \ln\left(\frac{x}{x^3 + 1}\right)$ เมื่อ $x \neq -1$

จงหาค่าของ $\frac{dy}{dx}$

วิธีทำ ให้ $u(x) = \frac{x}{x^3 + 1}$

$$\therefore \frac{du}{dx} = \frac{(x^3 + 1) \frac{d(x)}{dx} - x \frac{d}{dx}(x^3 + 1)}{(x^3 + 1)^2}$$

$$\begin{aligned}
 &= \frac{(x^3 + 1) - x(3x^2)}{(x^3 + 1)^2}, \quad x \neq -1 \\
 &= \frac{(x^3 + 1) - 3x^3}{(x^3 + 1)^2} = \frac{-2x^3 + 1}{(x^3 + 1)^2}, \quad x \neq -1
 \end{aligned}$$

$\therefore u(x)$ เป็นพักรชันซึ่งหาค่าอนพันธ์เมื่อเทียบกับ x ได้
จากโจทย์

$$\begin{aligned}
 y &= \ln\left(\frac{x}{x^3 + 1}\right) \quad \text{เมื่อ } x \neq -1 \\
 y &= \ln(u) \quad (\text{แทนค่า } u) \\
 \frac{dy}{dx} &= \frac{1}{u} \frac{du}{dx} \quad (\text{จากสูตร 7.1.15}) \\
 &= \frac{1}{\frac{x}{x^3 + 1}} \cdot \frac{(-2x^3 + 1)}{(x^3 + 1)^2} \\
 &= \frac{x^3 + 1}{x} \cdot \frac{(-2x^3 + 1)}{(x^3 + 1)^2} = \frac{(-2x^3 + 1)}{x(x^3 + 1)}, \quad \text{เมื่อ } x \neq -1
 \end{aligned}$$

ทฤษฎี 7.1.1 ถ้า a และ b เป็นเลขจำนวนจริงใด ๆ ซึ่ง $a > 0, b > 0$ และ

$$\int_a^{ab} \frac{1}{t} dt = \int_1^b \frac{1}{t} dt$$

พิสูจน์ ในที่นี้ a และ b เป็นตัวคงที่ ส่วน t เป็นตัวแปรค่า
ให้ $t = au$ เมื่อ u เป็นตัวแปรค่า

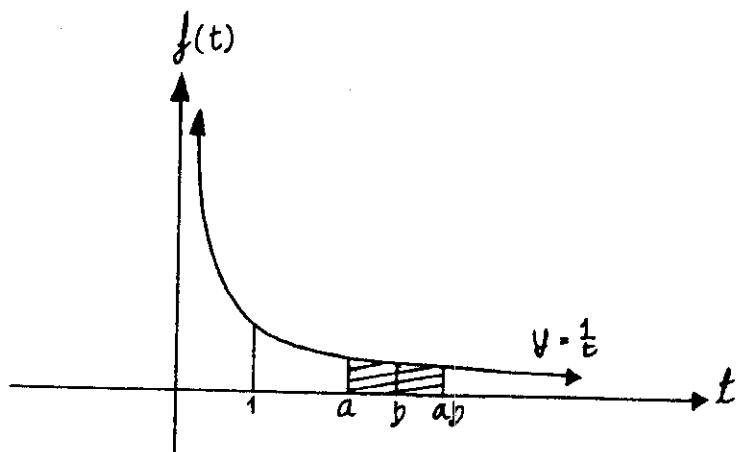
$$\therefore u = \frac{t}{a}$$

$$dt = adu$$

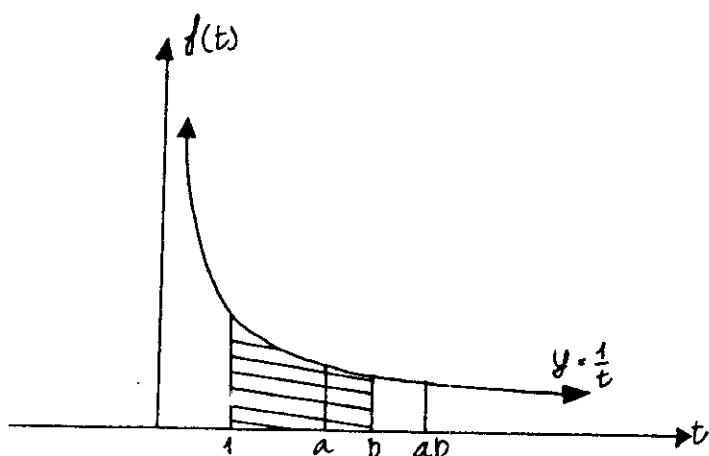
$$\text{เมื่อ } t = a, u = 1 \text{ และเมื่อ } t = ab, u = \frac{ab}{a} = b$$

$$\begin{aligned}
 \therefore \int_a^{ab} \frac{1}{t} dt &= \int_1^b \frac{1}{au} (adu) \quad (\text{แทนค่า } t \text{ ในเทอมของ } u) \\
 &= \int_1^b \frac{1}{u} du \\
 &= \int_1^b \frac{1}{t} dt
 \end{aligned}$$

จากทฤษฎี 7.1.1 ถ้าพิจารณาในเชิงเรขาคณิต ทฤษฎีนี้จะบอกว่า พื้นที่ของบริเวณซึ่งแสดงในรูป 7.1.4 เท่ากับพื้นที่ของบริเวณในรูป 7.1.5



รูป 7.1.4



รูป 7.1.5

จากนิยามของ natural logarithmic function คือ

$$\ln(x) = \int_1^x \frac{1}{t} dt, \quad x > 0$$

$$\text{ถ้าให้ } x = 1$$

$$\ln(1) = \int_1^1 \frac{1}{t} dt = 0$$

ซึ่งเป็นไปตามกฎข้อที่ 3 ของ logarithm

ทฤษฎี 7.1.2 ถ้าให้ a, b เป็นเลขจำนวนจริง ซึ่ง $a > 0, b > 0$, แล้ว

$$\ln(ab) = \ln a + \ln b$$

พิสูจน์ จาก $\ln(ab) = \int_1^{ab} \frac{1}{t} dt, \quad ab > 0$ (จากนิยาม 7.1.1)

$$= \int_1^a \frac{1}{t} dt + \int_a^{ab} \frac{1}{t} dt \quad (\text{จากคุณสมบติของ integration})$$

$$= \int_1^a \frac{1}{t} dt + \int_1^b \frac{1}{t} dt \quad (\text{จาก ทบ. 7.1.1})$$

$$= \ln(a) + \ln(b), \quad a > 0, b > 0$$

ทฤษฎี 7.1.3 ถ้า a, b เป็นเลขจำนวนจริงใดๆ ซึ่ง $a > 0, b > 0$ แล้ว

$$\ln \frac{a}{b} = \ln a - \ln b$$

พิสูจน์ จาก $a = \frac{a}{b} \cdot b$

$$\therefore \ln a = \ln \left(\frac{a}{b} \cdot b \right)$$

$$\ln a = \ln \frac{a}{b} + \ln b \quad (\text{จาก ทบ. 7.1.2})$$

$$\therefore \ln \frac{a}{b} = \ln a - \ln b$$

ทฤษฎี 7.1.4 ถ้า a เป็นเลขจำนวนจริงบวก ๆ ซึ่ง $a > 0$ และ r เป็นเลขจำนวนตัวบวก ๆ ใด ๆ แล้ว

$$\ln a^r = r \ln a$$

พิสูจน์

ถ้า r เป็นเลขจำนวนตัวบวก ๆ และ $x > 0$ เราจะได้จากสูตรว่า

$$\frac{d}{dx} (\ln x^r) = \frac{1}{x^r} \frac{d(x^r)}{dx} = \frac{1}{x^r} rx^{r-1}$$

$$= \frac{r}{x}$$

$$\text{และ } \frac{d}{dx} (r \ln x) = r \frac{d}{dx} (\ln x) = r \cdot \frac{1}{x} \frac{dx}{dx}$$

$$= \frac{r}{x}$$

$$\text{ดังนั้น } \frac{d}{dx} (\ln x^r) = \frac{d}{dx} (r \ln x)$$

จาก แคลคูลัส จะได้ว่าจะมีค่าคงที่ K ซึ่งทำให้

$$\ln x^r = r \ln x + K \quad \forall x > 0$$

ในการหาค่า K แทนค่า $x = 1$

$$\therefore \ln 1^r = r \ln 1 + K$$

$$\therefore 0 = 0 + K \quad (\dots \ln 1 = 0)$$

แทนค่า K ใน (2)

$$\therefore \ln x^r = r \ln x \quad \forall x > 0$$

ดังนั้นถ้าให้ $x = a$ เป็น a เป็นเลขจำนวนจริงบวกใด ๆ และ

$$\ln a^r = r \ln a$$

ใน ทบ. 7.1.2, 7.1.3 และ 7.1.4 ที่พิสูจน์มาแล้วก็เป็นคุณสมบัติต่าง ๆ ของ \log ซึ่งได้กล่าวมาแล้วทั้งสิ้น และใน ทบ. เหล่านี้พิสูจน์โดยใช้แคลคูลัส

ตัวอย่างที่ 7.1.4 กำหนดให้ $y = \ln(3x-2)^5$ จงหาค่าของ $\frac{dy}{dx}$

วิธีทำ จาก $y = \ln(3x-2)^5 = [5\ln(3x-2)]$ (จาก ทบ. 7.1.4)

$$\begin{aligned}\therefore \frac{dy}{dx} &= \frac{d}{dx} 5\ln(3x-2) \\ &= 5 \cdot \frac{d}{dx} [\ln(3x-2)] \quad (5 \text{ เป็นตัวคงที่}) \\ &= 5 \cdot \frac{1}{(3x-2)} \cdot \frac{d}{dx}(3x-2) \quad (\text{จากสูตรที่ } 2) \\ &= \frac{5}{3x-2} \cdot 3 = \frac{15}{3x-2}\end{aligned}$$

ในการเขียนกราฟของ natural logarithmic function จะต้องพิจารณาคุณสมบัติของพังค์ชันต่อไปนี้ก่อน

ให้ f เป็นพังค์ชัน ซึ่ง

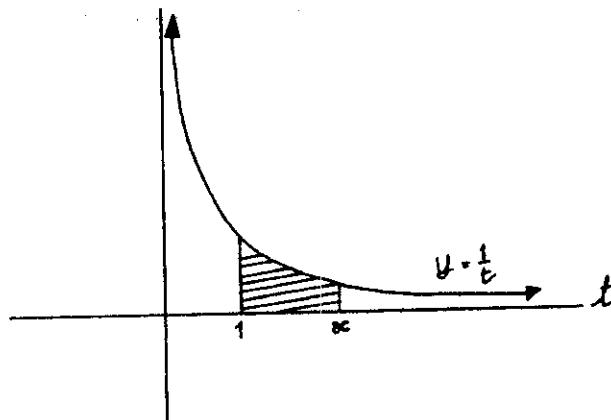
$$f(x) = \ln x = \int_1^x \frac{1}{t} dt, \quad x > 0$$

โดเมนของ f จะเป็นเซ็ตของเลขจำนวนจริงบวก และ f จะมีค่าอนุพันธ์ส่วน率ทุก ๆ ค่าของ x ซึ่งอยู่ในโดเมน และ $f'(x) = \frac{1}{x}$ จะเป็นพังค์ชันต่อเนื่องส่วน率ทุก ๆ ค่าของ $x > 0$ และค่าของ $f'(x) = \frac{1}{x} > 0 \forall x > 0$ ดังนั้นจึงสรุปได้ว่า f

เป็นพังค์ชันซึ่งมีค่าเพิ่มขึ้นเรื่อย ๆ เมื่อ x มีค่าเพิ่มขึ้น (increasing function)

จาก $f''(x) = -\frac{1}{x^2}$ จะเห็นได้ว่า $f''(x) < 0$ ($\text{เพราะ } x > 0$) ดังนั้นกราฟของ $f(x)$ จะโค้งเว้าลง

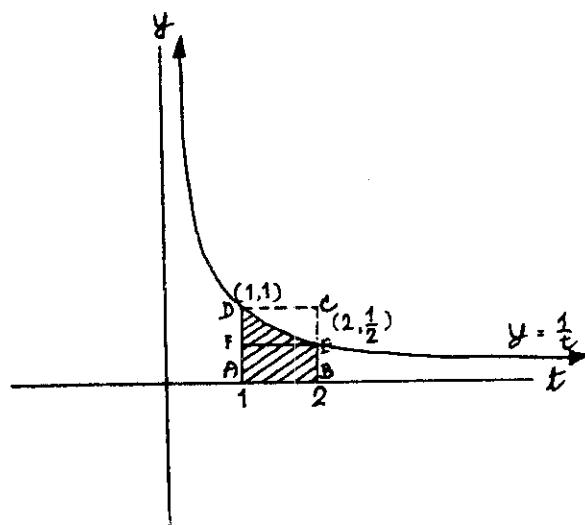
จาก $f(1) = \ln(1) = 0 \therefore x\text{-intercept} \text{ ของกราฟคือ } 1$



รูป 7.1.6 พื้นที่ในเงื่อนไข $\ln x$

$$\text{จากนิยาม } f(2) = \ln(2) = \int_1^2 \frac{1}{t} dt$$

ในการหาค่าของ $\ln(2)$ ออกแบบโดยประมาณ สามารถจะหาได้โดยการหาพื้นที่ของบริเวณซึ่งแสดงไว้ในรูปที่ 7.1.7



รูปที่ 7.1.7 พื้นที่แรเงาคือ $\ln 2$

จากรูปที่ 7.1.7 จะเห็นได้ว่า ใน (2) นี้จะมีค่าอยู่ระหว่างพื้นที่สี่เหลี่ยมผืนผ้า ABEF และพื้นที่สี่เหลี่ยมผืนผ้า ABCD

สำหรับสี่เหลี่ยมผืนผ้า ABEF มีความยาว 1 หน่วย และมีความกว้าง $\frac{1}{2}$ หน่วย
 \therefore พื้นที่สี่เหลี่ยมผืนผ้า ABEF $= 1 \times \frac{1}{2} = 0.5$ หน่วย

สำหรับสี่เหลี่ยมผืนผ้า ABCD มีความยาว 1 หน่วย และมีความกว้าง 1 หน่วย
 \therefore พื้นที่สี่เหลี่ยมผืนผ้า ABCD $= 1 \times 1 = 1$ หน่วย ดังนั้น

$$0.5 < \ln 2 < 1$$

ในการหาค่าของ $\ln x$, $x > 0$ นั้นสามารถทำได้โดยการใช้เรื่องของอนุกรมอนันต์ (infinite series) แต่ในที่นี้จะไม่กล่าวถึง ดังนั้นถ้าค่าของ $\ln 2$ ซึ่งมีค่านิยม 5 ตำแหน่งมาพิจารณาคือ

$$\ln 2 \approx 0.69315$$

จากค่าของ $\ln 2$ และ ทบ. 7.1.5 สามารถหาค่าโดยประมาณของ natural logarithm ของเลข 2 ยกกำลังได้ดังนี้คือ

$$\ln 4 = \ln 2^2 = 2 \ln 2 \approx 2 \times 0.69315 = 1.38630$$

$$\ln 8 = \ln 2^3 = 3 \ln 2 \approx 3 \times 0.69315 = 2.07045$$

$$\ln \frac{1}{2} = \ln 2^{-1} = -1 \ln 2 \approx -1 \times 0.69315 = -0.69315$$

$$\ln \frac{1}{4} = \ln 2^{-2} = -2 \ln 2 \approx -2 \times 0.69315 = -1.38630$$

ในท้ายของหนังสือเล่มนี้จะมีตารางของ natural logarithms ในทศนิยม 4 ตำแหน่ง ต่อจากนี้จะพิจารณาค่าของ $\ln x$ เมื่อ $x \rightarrow \infty$ นั้นคือพิจารณา

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln x$$

จากที่ได้พิจารณาแล้ว จะเห็นว่า natural logarithmic function เป็นพังก์ชันที่จะมีค่าเพิ่มขึ้นเมื่อ x เพิ่มขึ้น (increasing function) ถ้าให้ p เป็นเลขจำนวนจริง บอกได้ $\ln x > \ln 2^p$ เมื่อ $x > 2^p$

$$\ln 2^p = p \ln 2 \quad (\text{จากทบ. 7.1.5})$$

$$\therefore \ln x > p \ln 2 \quad \text{เมื่อ } x > 2^p$$

จากการหาค่าโดยประมาณของ $\ln 2$ ได้ว่า

$$\ln 2 > \frac{1}{2}$$

$$\therefore \ln x > \frac{1}{2} p \quad \text{เมื่อ } x > 2^p$$

ถ้ากำหนดให้ $p = 2n$ เมื่อ $n > 0$ จะได้ว่า

$$\ln x > n \quad \text{เมื่อ } x > 2^{2n}$$

ดังนั้น $\ln x$ สามารถจะทำให้ใหญ่กว่าเลขจำนวนจริงบวก n ได้ ๆ ได้โดยให้ $x > 2^{2n}$ ดังนั้น จะสรุปได้ว่า

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln x = +\infty \quad (1)$$

ต่อไปจะพิจารณาค่าของ $\ln x$ เมื่อ $x \rightarrow 0$ นั้นคือพิจารณา $\lim_{x \rightarrow 0^+} \ln(x)$

$$\therefore \ln x = \ln(x^{-1})^{-1}$$

$$\therefore \ln x = -\ln\left(\frac{1}{x}\right) \quad (\text{ } x^{-1} = \frac{1}{x} \text{ และใช้ ทบ. 7.1.5})$$

$$\therefore \text{เมื่อ } x \rightarrow 0^+ \text{ จะได้ว่า } \frac{1}{x} \rightarrow +\infty$$

$$\therefore \lim_{x \rightarrow 0^+} \ln x = -\lim_{\frac{1}{x} \rightarrow +\infty} \ln\left(\frac{1}{x}\right) \quad (2)$$

$$\lim_{\frac{1}{x} \rightarrow +\infty} \ln\left(\frac{1}{x}\right) = +\infty \quad (\text{จาก (1)}) \quad (3)$$

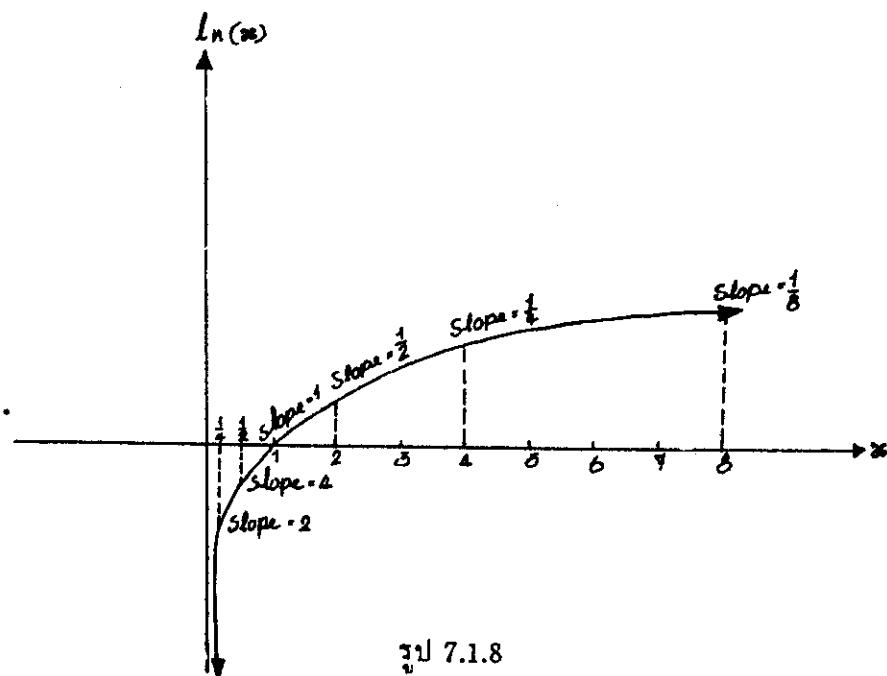
$$\text{จาก (2)} \therefore \lim_{x \rightarrow 0^+} \ln x = -\infty \quad (\text{จาก (2) และ (3)})$$

สรุป คุณสมบัติของ natural logarithm มีดังต่อไปนี้คือ

- 1) โดเมนของพั่งก์ชันนี้ คือ เซ็ตของเลขจำนวนจริงบวก
- 2) พิสัยของพั่งก์ชันนี้ คือ เซ็ตของเลขจำนวนจริงทั้งหมด
- 3) พั่งก์ชันจะมีค่าเพิ่มขึ้นเมื่อ x มีค่าเพิ่มขึ้น (increasing function)
- 4) พั่งก์ชันนี้ ต่อเนื่องที่ทุก ๆ จุด ของ x ซึ่งอยู่ในโดเมน
- 5) กราฟของพั่งก์ชันจะเว้าเข้าจากบนลงมาล่าง

โดยการใช้คุณสมบัติต่าง ๆ ของ natural logarithms ซึ่งได้กล่าวมาแล้ว และเขียน
จุดต่าง ๆ ของ x และ $\ln x$ จำนวน 2—3 จุด ก็สามารถจะเขียนกราฟของ natural
logarithm ได้ดังรูป 7.18

x	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	1	2	4	8
$\ln x$	-1.38	-.69	0	.69	1.39	2.08



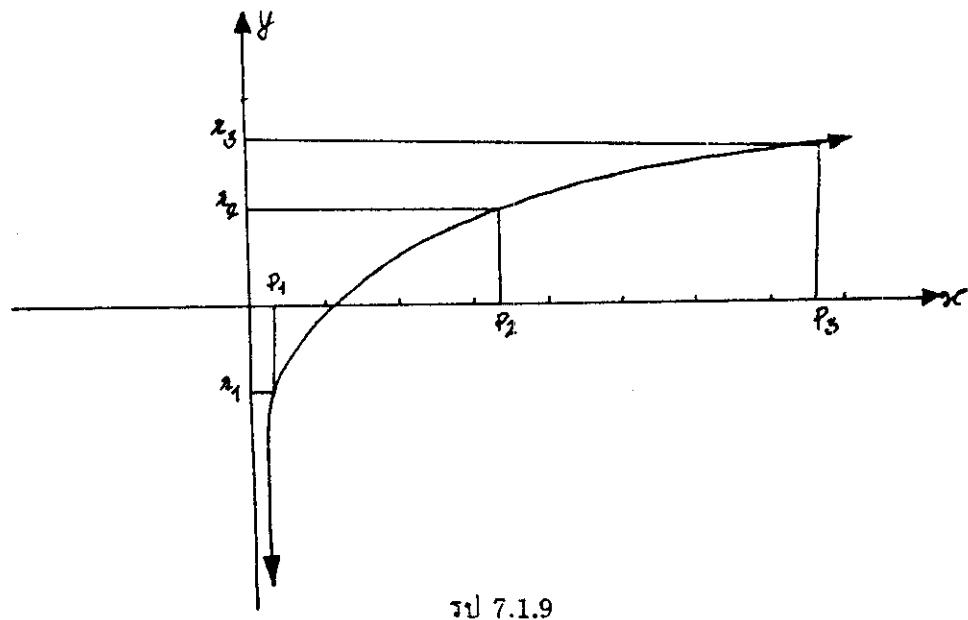
รูป 7.18

นอกจากนักสามารถจะหาความชันที่แต่ละจุดได้ ซึ่งความชันที่แต่ละจุดนี้จะหาได้จาก

$$\frac{d}{dx} \ln (x) = \frac{1}{x}$$
 จากคุณสมบัติของ natural logarithm ซึ่งได้ศึกษามาแล้วนี้ สามารถ

จะกล่าวได้ว่า สำหรับเลขจำนวนจริงใด ๆ จะมีเลขจำนวนบวก ซึ่งค่าของ natural logarithm ของเลขจำนวนจริงบวกนั้นมีค่าเท่ากับเลขจำนวนจริงใด ๆ เหล่านั้น ดังรูป 7.1.9

ให้ r_1, r_2, r_3 เป็นเลขจำนวนจริงใด ๆ ซึ่งอยู่บนแกน y จะเห็นจากรูปว่ามีเลขจำนวนจริงบวก p_1, p_2, p_3 อยู่บนแกน x ซึ่งค่าของ



รูป 7.1.9

$$r_1 = \ln(p_1)$$

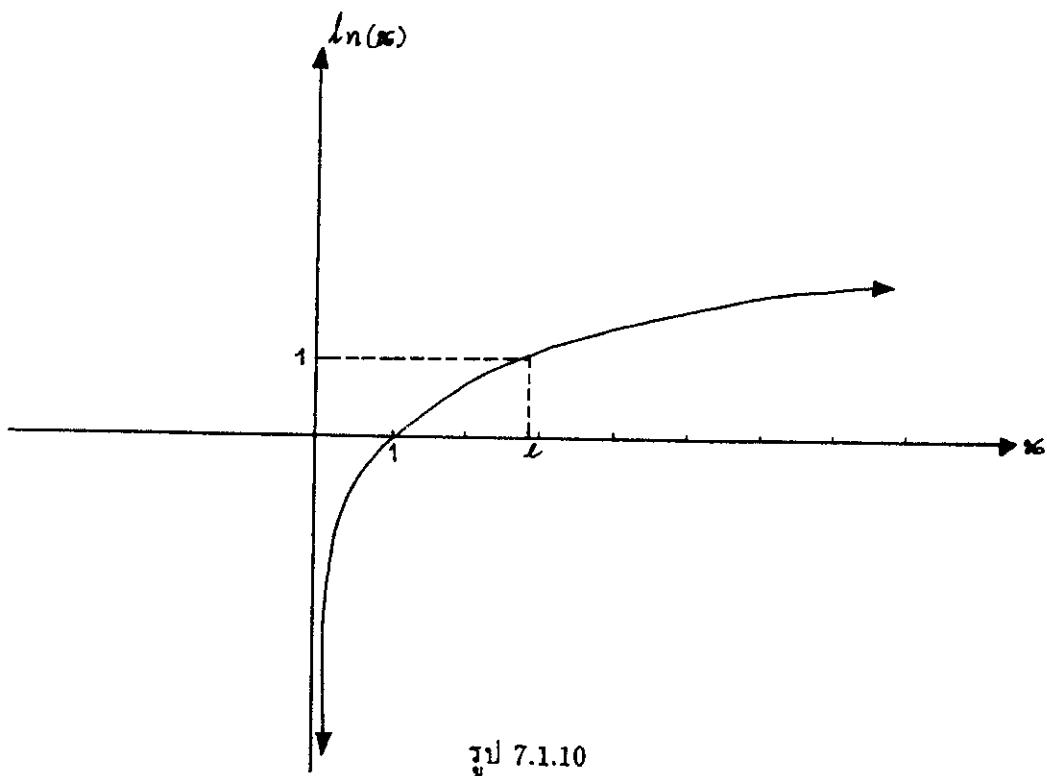
$$r_2 = \ln(p_2)$$

$$r_3 = \ln(p_3)$$

จากคุณสมบติข้อนี้ ทำให้ Leonhard Euler ซึ่งเป็นทั้งนักคณิตศาสตร์ และพิสิตรชาน สวิตเซอร์แลนด์ (1707—1783) ได้คิดเลขขึ้นมาตัวหนึ่ง ตั้งชื่อว่า “ e ” โดยให้ค่าของเลขจำนวน e นี้ว่า

นิยาม 7.1.2 เลขจำนวน e นี้เป็นเลขตัวเดียวเท่านั้นที่ทำให้

$$\ln(e) = 1$$



รูป 7.1.10

จากรูป 7.1.10 จะได้ค่า e ซึ่งเป็นเลขครรภยะบวกอยู่บนแกน x และสมนัยกับค่าของ $y = 1$ ค่าของ e ในทศนิยม 7 ตำแหน่งนั้น จะมีค่าประมาณ

$$e \approx 2.7182818$$

ในท้ายของหนังสือเล่มนี้จะมีตารางแสดงค่าของ e^x เมื่อ x เป็นเลขจำนวนจริง ให้

แบบทดสอบ 7.1

ข้อ 1 ถึงข้อ 14 จงหาอนุพันธ์ของฟังก์ชันที่กำหนดให้

$$1. \quad f(x) = \ln(7x - 4)$$

$$2. \quad g(x) = \ln(8 - 2x)$$

$$3. \quad h(x) = \ln \sqrt{7x - 4}$$

$$4. \quad f(x) = \ln(8 - 2x)^5$$

$$5. \quad f(x) = \ln(1 + 4x^2)$$

$$6. \quad f(x) = \ln \sqrt{1 + 4x^2}$$

$$7. \quad g(x) = \ln \sqrt{4 - x^2}$$

$$8. \quad g(x) = \ln(\ln x)$$

$$9. \quad h(x) = \ln(n^2 \ln x)$$

$$10. \quad F(x) = \ln \sqrt{\frac{x^2 - 1}{x^2 + 1}}$$

$$11. \quad f(x) = \ln |x + 1|$$

$$12. \quad f(x) = \sqrt[3]{\ln x^3}$$

$$13. \quad F(x) = \sqrt{x+1} - \ln(1 + \sqrt{x+1})$$

$$14. \quad G(x) = x \ln(x + \sqrt{1+x^2}) - \sqrt{1+x^2}$$

ข้อ 15 ถึงข้อ 18 จงหาค่าของ $\frac{dy}{dx}$

$$15. \quad \ln(xy + x + y) = 2$$

$$16. \quad \ln \frac{y}{x} + xy = 1$$

$$17. x = \ln(x + y + 1)$$

$$18. \ln(x + y) - \ln(x - y) = 4$$

19. จงเขียนกราฟของ $y = \ln x$ โดยเขียนจุดซึ่งมีค่า x เป็น $\frac{1}{9}, \frac{1}{3}, 1, 3, 9$

โดยการใช้ $\ln 3 \approx 1.09861$ และใน 5 จุดนั้นจงหาความชันของเส้นสัมผัส
ของแต่ละจุดพร้อมทั้งวัดรูปเส้นสัมผัสในแต่ละจุดด้วย

ข้อ 20 ถึง 27 จงวัดรูปกราฟของเส้นโค้งซึ่งมีสมการดังต่อไปนี้

$$20. x = \ln y$$

$$21. y = \ln(-x)$$

$$22. y = \ln 1x1$$

$$23. y = \ln(x + 1)$$

$$24. y = \ln(x - 1)$$

$$25. y = x - \ln x$$

$$26. y = x \ln x$$

$$27. y = \ln \frac{1}{x}$$

28. จงหาสมการของเส้นสัมผัสซึ่งสัมผัสกับเส้นโค้ง $y = \ln x$ ณ ที่จุดซึ่งมีค่า $x = 2$

29. จงสมการของเส้นสัมผัส ซึ่งสัมผัสกับเส้นโค้ง $y = \ln \frac{1}{x}$ และมีความชันเป็น $-\frac{1}{2}$

30. สมการอุปสงค์ของสินค้าชนิดหนึ่ง คือ

$$x = \ln 10 - \ln p$$

เมื่อ x หน่วยเป็นปริมาณของอุปสงค์ และ p บาท เป็นราคาต่อหน่วย

ก) จงหาเส้นอุปสงค์

ข) จงหาราคาสูงสุดที่ทุกคนจะซื้อสำหรับสินค้า

31. สมการของอุปทานของสินค้านิดหนึ่ง คือ

$$p = 20 + 10 \ln (1 + x)$$

เมื่อ x หน่วยเป็นปริมาณของอุปทาน p บาท เป็นราค่าต่อหน่วย

ก) จงหาเส้นอุปทาน

ข) จงหาราคาต่อสุดของสินค้าที่มีการเสนอขาย

32. บริษัทแห่งหนึ่งได้กำหนดค่าใช้จ่ายสำหรับการโฆษณาต่อหนึ่งสัปดาห์เท่ากับ

x บาท ถ้ารายได้จากการขายต่อหนึ่งสัปดาห์ของบริษัทเท่ากับ S บาท จาก

$$\text{สมการ } S = 4000 \ln x$$

ก) จงหาอัตราการเปลี่ยนแปลงของรายได้จากการขายที่เกิดขึ้น เมื่อจากค่าใช้จ่ายของการโฆษณา เมื่อค่าโฆษณาต่อหนึ่งสัปดาห์เท่ากับ 800 บาท

ข) ถ้าค่าใช้จ่ายสำหรับการโฆษณาต่อสัปดาห์เพิ่มขึ้นเป็น 950 บาท รายได้จากการขายต่อหนึ่งสัปดาห์จะเพิ่มขึ้นเป็นปริมาณเท่าไร

33. สมการของอุปสงค์ของน้ำปูรุ่งสลัดชนิดหนึ่ง คือ $x = 20 - 10 \ln p$ เมื่อมี

อุปสงค์เป็น x ชุด และ p บาท เป็นราค่าต่อชุด

ก) จงหาอัตราการยืดหยุ่นของอุปสงค์ที่มีต่อราคা เมื่อรากเท่ากับ 1 บาท
ต่อชุด

ข) ในใช้คำตอบจากข้อ ก) หากการเปลี่ยนแปลงของอุปสงค์ เมื่อราก 1 บาท
เพิ่มขึ้นไปอีก 10 เปอร์เซ็นต์

34. บริษัทผู้ผลิตเครื่องกำเนิดไฟฟ้า เริ่มดำเนินการ เมื่อวันที่ 1 มกราคม 1968
ในระหว่างนี้ได้มีการขยายตัวอย่างต่อเนื่องจากบริษัทอยู่ในระหว่างทำการวิจัยและ
พัฒนาสินค้า มีต่อมาอย่างรายได้เพิ่มขึ้นตามสมการ $y = x \ln x$ เมื่อ x เป็น
จำนวนบีบบริษัทดำเนินงาน และ y เป็นยอดขายคิดเป็นล้านบาท จงเขียน
กราฟของสมการข้างบน และจงหาอัตราการเปลี่ยนแปลงของยอดขายที่เพิ่มขึ้น
ในวันที่ 1 มกราคม 1972 และ ในวันที่ 1 มกราคม 1978

7.2 การหาอนุพันธ์ และอินทิกรัลในเชิงลดการเรียน

ในการหาค่าของ $\frac{d}{dx} (\ln |x|)$ นั้น สามารถทำได้โดยการแทนค่า

$$|x| = \sqrt{x^2}$$

$$\begin{aligned} \text{ดังนั้นจะได้ } \frac{d}{dx} (\ln |x|) &= \frac{d}{dx} (\ln \sqrt{x^2}) \\ &= \frac{1}{\sqrt{x^2}} \cdot \frac{d}{dx} \sqrt{x^2} \quad (\text{จากสูตร 7.1.15}) \\ &= \frac{1}{\sqrt{x^2}} \cdot \frac{x}{\sqrt{x^2}} = \frac{x}{x^2} \\ \therefore \frac{d}{dx} (\ln |x|) &= \frac{1}{x} \end{aligned} \quad (7.2.1)$$

ตัวให้ u เป็นพัฟ์ชันของ x ซึ่งมีค่าอนุพันธ์เมื่อยกนั้น x โดย (7.2.1) และกฎโซ่ (chain rule) จะได้ว่า

$$\frac{d}{dx} (\ln |u|) = \frac{1}{u} \frac{du}{dx} \quad (7.2.2)$$

ตัวอย่างที่ 7.2.1 กำหนดให้ $y = \sqrt{x^2 + 1} \ln (x^2 - 1)$ จงหาค่าของ $\frac{dy}{dx}$

วิธีที่ 1

$$\text{จาก } y = \sqrt{x^2 + 1} \ln (x^2 - 1)$$

$$\therefore |y| = |\sqrt{x^2 + 1} \ln (x^2 - 1)| = |\sqrt{x^2 + 1}| \cdot |\ln (x^2 - 1)|$$

ใช้ \ln ทั้ง 2 ข้างจะได้

$$\ln |y| = \ln |\sqrt{x^2 + 1}| + \ln |\ln (x^2 - 1)| = \ln |\sqrt{x^2 + 1}| + \ln |\ln (x^2 - 1)|$$

$$\ln |y| = \frac{1}{2} \ln |x^2 + 1| + \ln |\ln (x^2 - 1)|$$

หาค่าอนุพันธ์เมื่อยกนั้น x ทั้ง 2 ข้างจะได้

$$\frac{1}{y} \cdot \frac{dy}{dx} = \frac{1}{2(x^2 + 1)} \cdot \frac{d(x^2 + 1)}{dx} + \frac{1}{\ln (x^2 - 1)} \cdot \frac{d \ln (x^2 - 1)}{dx}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{2x}{2(x^2+1)} + \frac{1}{\ln(x^2-1)} \cdot \frac{1}{(x^2-1)} \frac{d(x^2-1)}{dx} \\
&= \frac{2x}{2(x^2+1)} + \frac{1}{\ln(x^2-1)} \cdot \frac{2x}{(x^2-1)} \\
\frac{dy}{dx} &= y \cdot \frac{\frac{2x(x^2-1)\ln(x^2-1) + 4x(x^2+1)}{2(x^2+1)(x^2-1)\ln(x^2-1)}} \\
&= \frac{\sqrt{x^2+1}\ln(x^2-1)(2x(x^2-1)\ln(x^2-1) + 4x(x^2+1))}{2(x^2+1)(x^2-1)\ln(x^2-1)} \\
&= \frac{x\ln(x^2-1)}{\sqrt{x^2+1}} + \frac{2x\sqrt{x^2+1}}{x^2-1}
\end{aligned}$$

การหา $\frac{dy}{dx}$ โดยวิธีในคัวอ่าย่างที่ 7.2.1 นี้ เรียกว่า การหาอนุพันธ์เชิงผลการีรื้น (logarithmic differentiation)

ซึ่งได้ค้นพบในปี 1697 โดย Johann Bernoulli (1667–1748)

$$\text{จากสูตรที่ 3 คือ } \frac{d}{dx} (\ln |u|) = \frac{1}{u} \frac{du}{dx}$$

จะได้สูตรของอนันติเกรชันต่อไปนี้คือ

$$\int \frac{1}{u} du = \ln |u| + C \quad (7.23)$$

จากสูตร (7.2.3) และสูตรอนันติเกรช รวมกันจะได้สูตรว่า

$$\int u^n du = \begin{cases} \frac{u^{n+1}}{n+1} + C & \text{ถ้า } n \neq -1 \\ \ln |u| + C & \text{ถ้า } n = -1 \end{cases} \quad (7.24)$$

คัวอ่าย่างที่ 7.2.2 ของหาค่าของ $\int \frac{x}{2-x^2} dx$

วิธีทำ ให้ $u = 2-x^2 \therefore du = -2x dx$

$$x dx = -\frac{1}{2} du$$

$$\begin{aligned}
 \int \frac{x dx}{2-x^2} &= -\frac{1}{2} \int \frac{du}{u} \\
 &= -\frac{1}{2} \ln |u| + C \\
 &= -\frac{1}{2} \ln |2-x^2| + C
 \end{aligned}$$

ตัวอย่างที่ 7.2.3 จงหาค่าของ $\int_1^3 \frac{2x+3}{x+1} dx$

วิธีทำ

$$\begin{aligned}
 \frac{2x+3}{x+1} &= \frac{2(x+1)+1}{x+1} = 2 + \frac{1}{x+1} \\
 \therefore \int_1^3 \frac{2x+3}{x+1} dx &= \int_1^3 2 dx + \int_1^3 \frac{dx}{x+1} \\
 &= [2x]_1^3 + \ln|x+1|_1^3 \\
 &= (6-2) + (\ln|4| - \ln|2|) \\
 \int_1^3 \frac{2x+3}{x+1} dx &= 4 + 2 \ln 2 - \ln 2 \\
 &= 4 + \ln 2
 \end{aligned}$$

ตัวอย่างที่ 7.2.4 จงหาค่าของ $\int \frac{\ln x}{x} dx$

วิธีทำ ให้ $u = \ln x$

$$\begin{aligned}
 du &= \frac{1}{x} dx \\
 \therefore \int \frac{\ln x}{x} dx &= \int u du \quad (\text{แทนค่า } u \text{ และ } du) \\
 &= \frac{u^2}{2} + C \\
 &= \frac{(\ln x)^2}{2} + C
 \end{aligned}$$

แบบฝึกหัด 7.2

ข้อ 1 ถึงข้อ 10 จงหาค่าของ $\frac{dy}{dx}$ โดยวิธี logarithmic differentiation

$$1. \quad y = x^2 (x^2 - 1)^3 (x + 1)^4$$

$$2. \quad y = \frac{x^5 (x + 2)}{x - 3}$$

$$3. \quad y = \frac{x (x - 1) (x + 2)}{(x - 4)^3}$$

$$4. \quad y = (5x - 4) (x^2 + 3) (3x^2 - 5)$$

$$5. \quad y = \frac{x^3 + 2x}{\sqrt[5]{x^7 + 1}}$$

$$6. \quad y = \frac{x \sqrt{x+1}}{\sqrt[3]{x-1}}$$

$$7. \quad y = \frac{3x}{\sqrt{(x+1)(x+2)}}$$

$$8. \quad y = \frac{\sqrt{1-x^2}}{(x+1)^{2/3}}$$

$$9. \quad y = \frac{3\sqrt{x+1}}{(x+2)\sqrt{x+3}}$$

$$10. \quad y = \frac{x^3 \sqrt{4+3x}}{\sqrt{3+2x}}$$

ข้อที่ 11 ถึงข้อ 20 จงหาค่าของอนุพันธ์ที่กรัณฑ์ไปนี้

$$11. \quad \int \frac{dx}{3-2x}$$

$$12. \quad \int \frac{x^2 dx}{x^3 + 1}$$

$$13. \quad \int \frac{3x}{5x^2 - 1} dx$$

14. $\int \frac{2x-1}{x(x-1)} dx$

15. $\int \frac{2x^3}{x^2-4} dx$

16. $\int \frac{5-4x^2}{3-2x} dx$

17. $\int \frac{dx}{x \ln x}$

18. $\int \frac{dx}{\sqrt{x}(1+\sqrt{x})}$

19. $\int \frac{\ln^2 3x}{x} dx$

20. $\int \frac{(2+\ln^2 x)}{x(1-\ln x)} dx$

ข้อ 21 ถึง ข้อ 28 จงหาค่าของ definite integral ต่อไปนี้

21. $\int_1^e \frac{dx}{x}$

22. $\int_e^e \frac{dx}{x}$

23. $\int_3^5 \frac{2x}{x^2-5} dx$

24. $\int_4^5 \frac{x}{4-x^2} dx$

25. $\int_0^2 \frac{x^2+2}{x+1} dx$

26. $\int_1^5 \frac{4x^3-1}{2x-1} dx$

27. $\int_1^e \frac{\ln x}{x} dx$

28. $\int_e^e \frac{1}{x(\ln x)^2} dx$

29. จงหา พ.ท. ของบริเวณหนึ่ง ซึ่งลักษณะโดย เส้น $y = \frac{2}{(x-3)}$, แกน x

และเส้น $x=4$ และ $x=5$

30. จงหา พ.ท. ของบริเวณหนึ่ง ซึ่งลักษณะโดย เส้น $y = \frac{(x^2+1)}{(x+1)}$ และเส้น

$$x+3y=7$$

31. กำหนดให้ห้างร้าน รายได้ส่วนเพิ่มของสินค้าชนิดหนึ่ง คือ $R^1(x) = \frac{12}{(x+2)}$

เมื่อ $R(x)$ บาท เป็นรายได้รวม เมื่อยอดขายเท่ากับ x หน่วย จงหาสมการ
ของอุปสงค์

32. สมการของอุปสงค์ของสินค้าชนิดหนึ่ง คือ $p = \frac{10}{(x+1)}$ มีอุปสงค์ของสินค้า
เท่ากับ x หน่วย และมีราคาเท่ากับ p บาท ต่อหน่วย จงหาส่วนเกินของ
ผู้บริโภคเมื่อราคาตลาดเท่ากับ 4 บาท

33. สมการของอุปสงค์และอุปทาน ของสินค้าชนิดหนึ่ง คือ $p = \frac{600 - 2x}{x + 100}$ และ
 $200p = 300 + x$ ตามลำดับ ปริมาณของอุปสงค์และอุปทานเท่ากับ x หน่วย
เมื่อราคาเท่ากับ p บาทต่อหน่วย ถ้าราคาตลาดอยู่ที่ระดับคุ้มกัน จงหา
ส่วนเกินของผู้บริโภคคิดเป็นบาท

7.3 พังก์ชันเอกซ์โพเนนเชียล (The Exponential Function)

จากคุณสมบัติของ natural logarithm ได้ทราบแล้วว่า สำหรับเลขจำนวนจริงใด ๆ จะมีเลขจำนวนจริงบางหนึ่งตัวเท่านั้น ซึ่งมีเลขจำนวนจริงนั้นเป็น natural logarithm ของเลขจำนวนจริงบาง ดังนั้น จึงให้นิยามต่อไปนี้ คือ

นิยาม 7.3.1 ถ้า x เป็นเลขจำนวนจริงใด ๆ และจะมีเลขจำนวนจริงบาง y หนึ่งตัวเท่านั้น ซึ่ง $\ln y = x$, สำหรับเลข y นี้คือค่าของ exponential function ที่ x และใช้สัญญาณักเขียนว่า $\exp(x)$

$$\text{ดังนั้น } y = \exp(x) \quad \text{ก็คือเมื่อ } x = \ln y$$

$\exp(x)$ อ่านว่า exponential function ที่ x

จากที่ได้ศึกษาไว้เรื่อง natural logarithm ได้ทราบแล้วว่า พิสัย (Range) ของ natural logarithmic function เป็นเซ็ตของเลขจำนวนจริงทั้งหมด ดังนั้นโดเมน (Domain) ของ exponential function จึงเป็นเซ็ตของเลขจำนวนจริงทั้งหมด และพิสัยของ exponential function ก็จะเป็นเซ็ตของเลขจำนวนจริงบาง เพราะว่าเซ็ตของเลขจำนวนจริงบางนี้ เป็นโดเมนของ natural logarithmic function

จากนิยามของ exponential function

$$y = \exp(x) \quad \text{ก็คือเมื่อ } x = \ln y \quad (7.3.1)$$

$$\ln y = \ln(\exp(x)) \quad (7.3.2)$$

$$\therefore x = \ln(\exp(x)) \quad (7.3.3)$$

$$\text{จาก (1)} \quad y = \exp(\ln y) \quad (\text{แทนค่า } x = \ln y) \quad (7.3.4)$$

จาก (7.3.3) และ (7.3.4) พนวณมี 2 พังก์ชัน f และ g ซึ่ง \log เป็น Identity function

ในที่นี้ถ้าให้ $f(x) = \ln(x)$, $g(x) = \exp(x)$

$$\log(x) = f(g(x)) = \ln(\exp(x)) = x$$

$$gof(x) = g(f(x)) = \exp(\ln(x)) = x$$

$$\therefore fog(x) = gof(x) = x$$

และจะเรียก f ว่าเป็นพังค์ชันผกผัน (inverse function) ของ g ส่วน g ก็จะเรียกว่าเป็นพังค์ชันผกผันของ f

จึงสรุปได้ว่า natural logarithmic function เป็นพังค์ชันผกผันของ exponential function และ exponential function เป็นพังค์ชันผกผันของ natural logarithmic function

นิยาม 7.3.2 ถ้า a เป็นเลขจำนวนจริงบวกใด ๆ และ x เป็นเลขจำนวนจริงใด ๆ แล้วจะกำหนดให้

$$a^x = \exp(x \ln a)$$

ทฤษฎี 7.3.1 ถ้า a เป็นเลขจำนวนจริงบวกใด ๆ และ x เป็นเลขจำนวนจริงใด ๆ แล้ว

$$\ln a^x = x \ln a$$

พิสูจน์ จากนิยาม 7.3.2

$$a^x = \exp(x \ln a)$$

$$\therefore \ln a^x = \ln [\exp(x \ln a)]$$

$$\ln a^x = x \ln a \quad (\text{จากนิยาม 7.3.1})$$

จากนิยาม 7.3.2 จะได้ว่า

$$a^x = \exp(x \ln a)$$

ถ้าให้ $a = e$

$$\therefore e^x = \exp(x \ln e)$$

$$e^x = \exp(x) \quad (\because \ln e = 1)$$

และจากนิยาม 7.3.1 จะได้ว่า

$$e^x = y \quad \text{ก็ต่อเมื่อ } x = \ln y$$

$$\therefore \ln(e^x) = x \quad \text{และ} \quad e^{\ln x} = x$$

$$\therefore a^x = e^{x \ln a} \quad \text{สำหรับทุก ๆ ค่าของ } a > 0$$

จากสมการ $a^x = e^{x \ln a}$ และตารางยกกำลังของ e สามารถจะคำนวณหาค่าของ a^x เมื่อ x เป็นเลขจำนวนอตัวยะใด ๆ ได้

ตัวอย่างที่ 7.3.1 จงหาค่าของ $2^{\sqrt{3}}$ ในทศนิยม 2 ตำแหน่ง

$$\begin{aligned} \text{วิธีที่ 1} & \quad 2^{\sqrt{3}} = e^{\sqrt{3} \ln 2} \\ & = e^{1.732 (0.6931)} \\ & = e^{1.2} \\ & \approx 3.32 \end{aligned}$$

ทฤษฎี 7.3.2 ถ้า a และ b เป็นเลขจำนวนจริงใด ๆ แล้ว

$$e^a \cdot e^b = e^{a+b}$$

พิสูจน์ ให้ $A = e^a$ และ $B = e^b$

$$\begin{aligned} \therefore \ln A &= \ln(e^a) \\ &= a \quad (\because \ln \text{ เป็น inverse function ของ } \exp) \end{aligned}$$

ในทำนองเดียวกัน

$$\ln B = b$$

$$\ln AB = \ln A + \ln B \quad (\text{จากคุณสมบติของพั่งก์ชัน } \ln)$$

$$\ln AB = a + b$$

$$\therefore e^{\ln AB} = e^{a+b}$$

$$AB = e^{a+b}$$

$$e^a \cdot e^b = e^{a+b} \quad (\text{แทนค่า } A \text{ และ } B)$$

ทฤษฎี 7.3.3 ถ้า a และ b เป็นเลขจำนวนจริงใด ๆ, แล้ว

$$e^a + e^b = e^{a-b}$$

พิสูจน์ จาก $\frac{e^a}{e^b} = e^a \cdot \frac{1}{e^b} = e^a \cdot e^{-b}$

$$= e^{a+(-b)} \quad (\text{จาก ทบ. 7.3.2})$$

$$= e^{a-b}$$

ทฤษฎี 7.3.4 ถ้า a และ b เป็นเลขจำนวนจริงใด ๆ แล้ว

$$(e^a)^b = e^{ab}$$

พิสูจน์ $(e^a)^b = (e^{\ln e^a})^b$ (จาก $a = \ln e^a$)

$$= e^{b\ln(e^a)}$$

$$= e^{ba} = e^{ab}$$

$$\therefore (e^a)^b = e^{ab}$$

หลังจากที่ได้ทราบคุณสมบติของ exponential function แล้วต่อไปนี้จะหาสูตรสำหรับค่าอนุพันธ์

ให้ $y = e^x$

$$\therefore x = \ln y \quad (\text{จากนิยาม})$$

diff เทียบกับ x , $\therefore \frac{dx}{dx} = \frac{1}{y} \frac{dy}{dx}$

$$1 = \frac{1}{y} \frac{dy}{dx}$$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = y$$

\therefore จะได้สูตรว่า

$$\frac{d}{dx}(e^x) = e^x \quad (\text{แทนค่า } y = e^x) \quad (7.3.5)$$

ถ้าให้ $u(x)$ เป็นฟังก์ชันซึ่งมีค่าอนุพันธ์ เมื่อเทียบกับ x แล้วจะได้สูตรว่า

$$\frac{d}{dx}(e^u) = e^u \frac{du}{dx} \quad (7.3.6)$$

ตัวอย่างที่ 2 กำหนดให้ $y = e^{1/x^2}$ จงหาค่าของ $\frac{dy}{dx}$

วิธีทำ ให้ $u(x) = \frac{1}{x^2}$

$$\therefore \frac{du}{dx} = -\frac{2}{x^3}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}(e^{1/x^2}) = \frac{d}{dx}(e^u) \quad (\text{แทนค่า } u)$$

$$= e^u \frac{du}{dx} = e^{1/x^2} \left(-\frac{2}{x^3} \right) \text{ (แทนค่า u และ } \frac{du}{dx} \text{ ในเทอมของ x)}$$

$$= -\frac{2e^{1/x^2}}{x^3}$$

จากสูตรที่ 7.3.5 จะได้สูตรสำหรับการอนทิกราช ดังต่อไปนี้คือ

$$\int e^u du = e^u + C \quad (7.3.7)$$

ตัวอย่างที่ 3 จงหาค่าของ $\int \frac{e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}} dx$

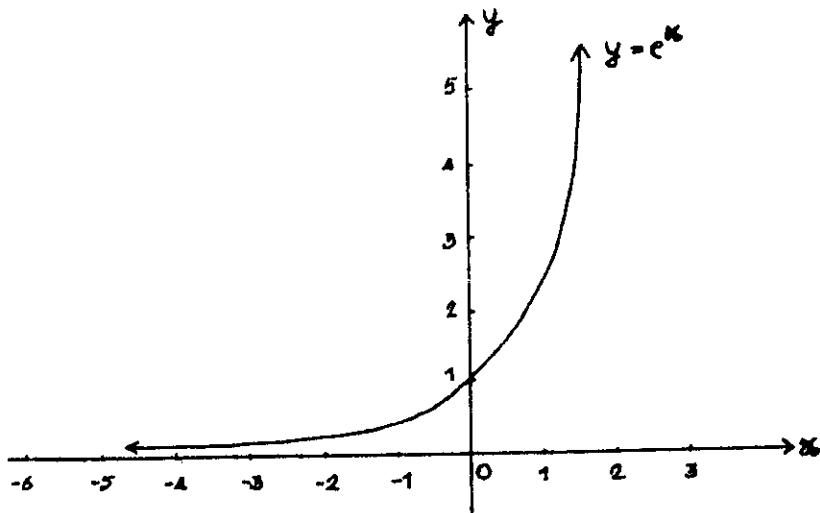
วิธีทำ ให้ $u = \sqrt{x} \therefore du = \frac{1}{2} x^{-\frac{1}{2}} dx \therefore du = 2x^{\frac{1}{2}} dx$

$$\begin{aligned} \int \frac{e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}} dx &= 2 \int \frac{e^u}{\sqrt{x}} \sqrt{x} du = 2 \int e^u du \\ &= 2e^u + C \quad (\text{จากสูตรที่ 7.3.7}) \\ &= 2e^{\sqrt{x}} + C \end{aligned}$$

จากนิยามของ logarithmic function ได้ว่า

$$e^x = y \text{ ก็ต่อเมื่อ } x = \ln y$$

ดังนั้นกราฟของ e^x ก็เหมือนกับกราฟของ $x = \ln y$ เพียงแต่เปลี่ยนแกน x เป็นแกน y เท่านั้น ดังนั้นจะได้กราฟของ $y = e^x$ ดังในรูป 7.3.1



รูป 7.3.1

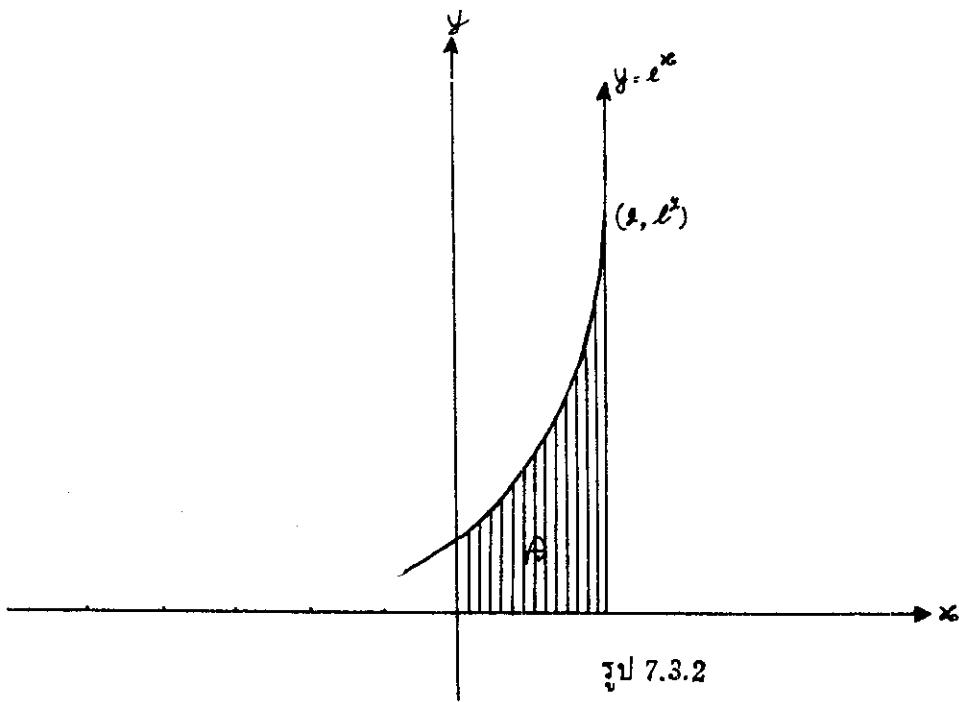
จาก $y = e^x$ พิสัยของ exponential function จะเป็นค่าบวกเท่านั้น

$\therefore e^x > 0$ สำหรับทุกๆ ค่าของ x ดังนั้นกราฟจะอยู่เหนือแกน x ขึ้นไป และค่าของฟังก์ชัน จะมีค่าเพิ่มขึ้น เมื่อ x เพิ่มขึ้น กราฟจะเป็นรูปเว้าขึ้น และง่ายขึ้น และจะได้ว่า

$$\lim_{x \rightarrow \infty} e^x = +\infty \text{ และ } \lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0$$

ตัวอย่างที่ 7.3.4 จงหาพื้นที่ของบริเวณหนึ่งซึ่งล้อมรอบโดยเส้น $y = e^x$, เส้น $x = 2$ และเส้น $x = 0$

วิธีทำ จากโจทย์ ถ้าว่ารูปบริเวณนี้จะได้ดังรูป 7.3.2



รูป 7.3.2

ให้ A เป็นพื้นที่ของบริเวณที่ต้องการจะหา

$$\begin{aligned} A &= \int_0^2 e^x dx = [e^x]_0^2 = e^2 - e^0 \\ &= e^2 - 1 \end{aligned}$$

จากตารางท้ายหนังสือ $e^2 = 7.39$

$$\therefore A = 7.39 - 1 = 6.39 \text{ ตารางหน่วย}$$

ตัวอย่างที่ 5 ให้ $y = e^{2x+\ln x}$ จงหาค่าของ $\frac{dy}{dx}$

$$\text{วิธีที่ } 1 \text{ จาก } y = e^{2x+\ln x}$$

$$= e^{2x} \cdot x$$

$$\frac{dy}{dx} = x \cdot \frac{de^{2x}}{dx} + e^{2x} \cdot \frac{dx}{dx}$$

$$= 2xe^{2x} + e^{2x}$$

จาก natural logarithmic function และ exponential function ซึ่งได้ให้ในนิยามของเลขจำนวน e นี้ว่าเป็นเลขซึ่ง $\ln e = 1$ จะสามารถให้นิยามของเลขจำนวน e นี้อีก วิธีหนึ่งได้โดยพิจารณาพัฟ์ชัน

$$f(x) = \ln(x)$$

$$f'(x) = \frac{1}{x}$$

$$\text{ดังนั้น } f'(1) = 1$$

ถ้าหากค่าของ $f'(1)$ โดยใช้นิยามของอนุพันธ์จะได้ว่า

$$\begin{aligned} f'(1) &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(1 + \Delta x) - f(1)}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(1 + \Delta x) - \ln 1}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta x} \ln(1 + \Delta x) = 1 \end{aligned}$$

ให้ $\Delta x = h$ และจากทฤษฎี 4.3.3 สมการข้างบนนี้จะได้ว่า

$$\lim_{h \rightarrow 0} \ln(1 + h)^{1/h} = 1 \quad (7.3.8)$$

แต่จาก exponential function เป็นพัฟ์ชันผกผันของ natural logarithmic function จึงได้ว่า

$$\lim_{h \rightarrow 0} (1 + h)^{1/h} = \lim_{h \rightarrow 0} \exp [\ln (1 + h)^{1/h}] \quad (7.3.9)$$

และจาก exponential function เป็นพัฟ์ชันต่อเนื่อง และ $\lim_{h \rightarrow 0} \ln (1+h)^{1/h}$

มีค่าที่เป็นไปได้

$$\begin{aligned}\therefore \lim_{h \rightarrow 0} \exp [\ln (1+h)^{1/h}] &= \exp [\lim_{h \rightarrow 0} \ln (1+h)^{1/h}] \\ &= \exp 1 = e \text{ (เพรัวว่า } \lim_{h \rightarrow 0} \ln (1+h)^{1/h} = 1)\end{aligned}$$

แทนค่าลงใน (7.3.9) จะได้

$$\lim_{h \rightarrow 0} (1+h)^{1/h} = e \quad (7.3.10)$$

ซึ่งอาจใช้สมการ (7.3.10) ในการให้นิยามของเลขจำนวน e นี้ได้ จากร่างคือไปนิราการณ์จะพิจารณาได้ว่าค่าของ e จะอยู่ระหว่าง 2.7169 และ 2.7196

$$\text{ให้ } F(h) = (1+h)^{1/h}$$

h	1	0.5	0.05	0.01	0.001	-0.001	-0.01	-0.05	-0.5
$F(h) = (1+h)^{1/h}$	2	2.25	2.65	2.70	2.7169	2.7196	2.73	2.79	4

แบบฝึกหัด 7.3

1. จงเขียนกราฟของ $y = e^{-x}$

2. จงเขียนกราฟของ $y = e^{|x|}$

จากข้อ 3 ถึงข้อ 14 จงหาค่าของ $\frac{dy}{dx}$

3. $y = 2e^{-4x}$

4. $y = e^{5x}$

5. $y = e^{-3x^2}$

6. $y = \frac{e^x}{x}$

7. $y = \frac{e^{2x}}{x^2}$

8. $y = e^{\frac{x}{c}}$

9. $y = \frac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}}$

10. $y = \ln \frac{e^{4x}-1}{e^{4x}+1}$

11. $y = x^5 e^{-3\ln x}$

12. $y = \ln (e^x + e^{-x})$

13. $y = e^{\frac{x \ln x}{x}}$

14. $y = e^{x/\sqrt{4+x^2}}$

จากข้อ 15 ถึงข้อ 18 จงหาค่าของ $\frac{dy}{dx}$ โดยวิธี Implicit differentiation

15. $e^x + e^y = e^{x+y}$

16. $y e^{2x} + x e^{2y} = 1$

17. $y^2 e^{2x} + x y^3 = 1$

18. $e^y = \ln (x^3 + 3y)$

จากข้อ 19 ถึงข้อ 26 จงหาค่าของ indefinite integral

$$19. \int e^{2-5x} dx$$

$$20. \int e^{2x+1} dx$$

$$21. \int \frac{1 + e^{2x}}{e^x} dx$$

$$22. \int e^{3x} - e^{-2x} dx$$

$$23. \int \frac{e^{3x}}{(1 - 2e^{3x})^2} dx$$

$$24. \int x^2 e^{2x} dx$$

$$25. \int \frac{e^{2x}}{e^x + 3} dx$$

$$26. \int \frac{dx}{1 + e^x}$$

จากข้อ 27 ถึงข้อ 30 จงหาค่าของ definite integral

$$27. \int_0^1 e^{2x} dx$$

$$28. \int_1^2 \frac{e^{2x}}{e^x + e} dx$$

$$29. \int_0^2 x e^{4-x^2} dx$$

$$30. \int_0^3 \frac{e^x + e^{-x}}{2} dx$$

7.4 พังค์ชันลอการิม และเอกซ์โพเนนเชียลล์

จากเรื่องของ natural logarithmic function และ exponential function เราจะได้ว่า

$$a^x = e^{x \ln a}$$

จะให้นิยามต่อไปนี้คือ

นิยาม 7.4.1 ถ้า a เป็นเลขจำนวนจริงบวกใดๆ และ x เป็นเลขจำนวนจริงใดๆ

แล้ว จะนิยามพังค์ชัน f เมื่อ $f(x) = a^x$ ว่าเป็น exponential function ซึ่งมีฐาน a

exponential function ซึ่งมีฐาน a นี้จะมีคุณสมบัติเหมือนกับ exponential function ซึ่งมีฐาน c นั้นคือ

$$a^x a^y = a^{x+y}$$

$$a^x / a^y = a^{x-y}$$

$$(a^x)^y = a^{xy}$$

$$(ab)^x = a^x b^x$$

$$a^0 = 1$$

ในการหาค่าอนุพันธ์ของ exponential function ฐาน a นี้จะเขียน

$$a^x = e^{x \ln a}$$

$$\frac{d}{dx} (a^x) = \frac{d}{dx} (e^{x \ln a})$$

$$= e^{x \ln a} \frac{d}{dx} (x \ln a) \quad \text{ใช้ chain rule}$$

$$= e^{x \ln a} (\ln a) \left(\frac{dx}{dx} = 1 \right)$$

$$\frac{d}{dx} (a^x) = a^x \ln a \quad \text{————— (7.4.1)}$$

ถ้าให้ u เป็นพังค์ชันของ x ซึ่งหาอนุพันธ์ได้แล้ว

$$\frac{d}{dx} (a^u) = a^u \ln a \frac{du}{dx} \quad \text{————— (7.4.2)}$$

เช่น ถ้าให้ $y = 3^{x^2}$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = 3^{x^2} \ln 3 \frac{d(x^2)}{dx} \quad (\text{ใช้สูตร 7.4.2 เมื่อ } n = x^2, a = 3)$$

$$\frac{dy}{dx} = 3^{x^2} \ln 3 (2x)$$

และจากสูตร 7.4.2 จะได้สูตร 7.4.3 ว่า

$$\int a^u du = \frac{a^u}{\ln a} + C \quad (7.4.3)$$

ตัวอย่างที่ 7.4.1 จงหาค่าของ $\int \sqrt{10^{3x}} dx$

วิธีทำ $\int \sqrt{10^{3x}} dx = \int 10^{\frac{3x}{2}} dx$

จะใช้สูตร 3 ในที่นี้ $a = 10, u = \frac{3x}{2} \therefore du = \frac{3}{2} dx \therefore dx = \frac{2}{3} du$

$$\therefore \int 10^{\frac{3x}{2}} dx = \frac{2}{3} \int 10^u du \quad (\text{แทนค่า } u)$$

$$= \frac{2}{3} \cdot \frac{10^u}{\ln 10} + C \quad (\text{จากสูตร 7.4.3})$$

$$= \frac{2}{3} \cdot \frac{10^{\frac{3x}{2}}}{\ln 10} + C \quad (\text{แทนค่า } x)$$

ตัวอย่างที่ 7.4.2 จงเขียนกราฟของ $y = 2^x$ และ $y = 2^{-x}$ บนแกน x, y เดียว
กัน และจงหาพื้นที่ของบริเวณซึ่งล้อมรอบโดยกราฟทั้ง 2 เล่มนี้ และ²
ให้ $x = 2$

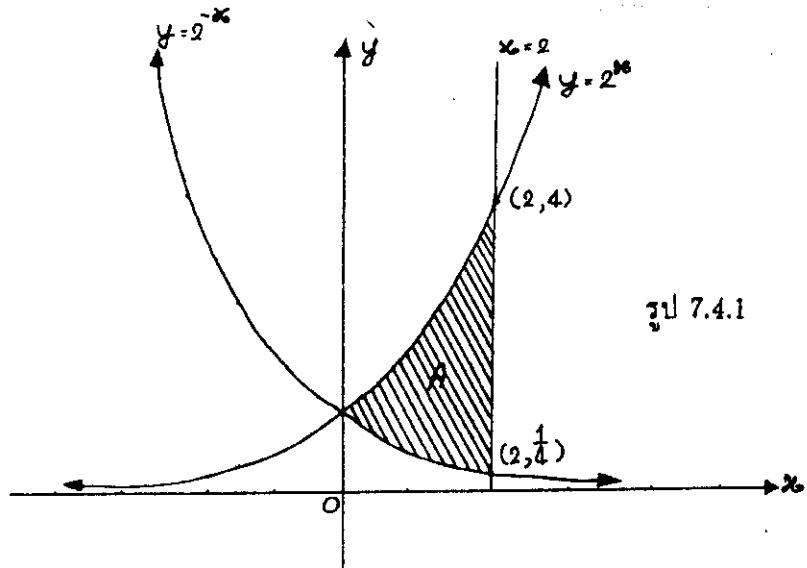
วิธีทำ ให้ A เป็น พ.ท. ของบริเวณ ที่เราต้องการจะหา

$$\therefore A = \int_0^2 (2^x - 2^{-x}) dx$$

$$= \left[\frac{2^x}{\ln 2} + \frac{2^{-x}}{\ln 2} \right]_0^2$$

$$= \frac{4}{\ln 2} + \frac{4}{\ln 2} - \frac{1}{\ln 2} - \frac{1}{\ln 2}$$

$$= \frac{9}{4 \ln 2} \sim 3.25$$



รูป 7.4.1

จากกราฟจะเห็นได้ว่า exponential function ซึ่งมีฐาน a เป็นพั้งก์ชัน ต่อเนื่อง และเป็นพั้งก์ชัน ซึ่งมีค่าเพิ่มขึ้น เมื่อ x มีค่าเพิ่มขึ้นตลอดในช่วงโดเมนทั้งหมด, ดังนั้น สำหรับ x ซึ่งเป็นเลขจำนวนบวกใด ๆ จะมีเลขจำนวนจริง y หนึ่งตัวเท่านั้น ซึ่งทำให้

$$x = a^y$$

จากคุณสมบัติที่จึงจะให้มีการของ logarithmic function ซึ่งมีฐาน a เมื่อ a เป็นเลขจำนวนบวกใด ๆ ซึ่งไม่เท่ากับ 1

นิยาม 7.4.2 ให้ a เป็นเลขจำนวนจริงบวกใด ๆ ซึ่ง $a \neq 1$ ถ้า x เป็นเลขจำนวนจริง บวกใด ๆ จะมีเลขจำนวนจริง y เพียง 1 ตัวเท่านั้น ซึ่ง $a^y = x$, y นี้จะเป็นค่าของ logarithmic function ซึ่งมีฐาน a ที่ x และใช้สัญลักษณ์ว่า $\log_a x$ ดังนั้น

$$y = \log_a x \text{ ก็ต่อเมื่อ } a^y = x$$

$\log_a x$ อ่านว่า logarithm ของ x ซึ่งมีฐาน a

คุณสมบัติของ $\log_a x$ ก็คล้ายกับ $\ln x$ นั่นคือ

$$\log_a(xy) = \log_a x + \log_a y$$

$$\log_a(x/y) = \log_a x - \log_a y$$

$$\log_a 1 = 0$$

$$\log_a x^y = y \log_a x$$

ต่อไปนี้จะหาความสัมพันธ์ระหว่าง $\log_a x$ และ $\ln a$

$$\text{ให้ } y = \log_a x$$

$$\text{ดังนั้น } a^y = x \quad (\text{จากนิยาม})$$

$$\ln a^y = \ln x \quad (\text{ใช้ ln ทั้ง 2 ข้างของสมการ})$$

$$y \ln a = \ln x$$

$$y = \frac{\ln x}{\ln a}$$

$$\log_a x = \frac{\ln x}{\ln a} \quad (\text{แทนค่า } y = \log_a x) \quad (7.4.4)$$

จากสูตรที่ 7.4.4 ถ้าให้ $x=e$

$$\therefore \log_a e = \frac{\ln e}{\ln a} = \frac{1}{\ln a} \quad (7.4.5)$$

จาก (7.4.4) หาอนุพันธ์ทั้ง 2 ข้างเทียบกับ x

$$\therefore \frac{d}{dx} (\log_a x) = \frac{1}{\ln a} \cdot \frac{d}{dx} (\ln x)$$

$$\frac{d}{dx} (\log_a x) = \frac{1}{\ln a} \cdot \frac{1}{x}$$

$$= \log_a e \cdot \frac{1}{x} \quad (\text{แทนค่า } \log_a e \text{ จาก 7.4.5})$$

ถ้าให้ u เป็นฟังก์ชันของ x ซึ่งหาอนุพันธ์ได้แล้ว

$$\frac{d}{dx} (\log_a u) = \frac{\log_e u}{u} \cdot \frac{d(u)}{dx} \quad (7.4.6)$$

ตัวอย่างที่ 7.4.8 กำหนดให้ $y = \log_{10} \frac{x+1}{x^2+1}$ จงหาค่าของ $\frac{dy}{dx}$

วิธีทำ จาก $y = \log_{10} \frac{x+1}{x^2+1}$

$$\text{หรือ } y = \log_{10} (x+1) - \log_{10} (x^2 + 1)$$

$$\text{ดังนั้น } \frac{dy}{dx} = \frac{\log_{10} e}{x+1} \cdot \frac{d(x+1)}{dx} - \frac{\log_{10} e}{x^2+1} \cdot \frac{d(x^2+1)}{dx} \quad (\text{จากสูตร 7.4.6})$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{\log_{10} e}{x+1} - \frac{2 \times \log_{10} e}{x^2+1} \\
&= \log_{10} e \left[\frac{1}{(x+1)} - \frac{2x}{x^2+1} \right] \\
&= \frac{\log_{10} e (1-2x-x^2)}{(x+1)(x^2+1)}
\end{aligned}$$

ทฤษฎี 7.4.1 ถ้า n เป็นเลขจำนวนจริงใดๆ และฟังก์ชัน f นิยามโดย

$$f(x) = x^n \quad \text{เมื่อ } x > 0$$

$$\text{แล้ว } f'(x) = nx^{n-1} \quad (7.4.7)$$

พิสูจน์ ให้ $y = x^n$
 $y = e^{\ln x}$
 $\therefore \frac{dy}{dx} = e^{\ln x} \cdot \left(\frac{n}{x}\right) = x^n \cdot \frac{n}{x} = nx^{n-1}$

ตัวอย่างที่ 7.4.4 กำหนดให้ $y = x^x$ จงหาค่าของ $\frac{dy}{dx}$

วิธีทำ จาก $y = x^x$
 ดังนั้น $|y| = |x^x|$
 $\ln |y| = \ln |x^x|$
 $\ln |y| = x \ln |x|$
 $\frac{1}{y} \frac{dy}{dx} = \ln |x| + x \cdot \frac{1}{x} \quad (\text{ใช้อนุพันธ์ทั้ง 2 ข้าง})$
 $\frac{dy}{dx} = y (\ln |x| + 1)$
 $= x^x (\ln |x| + 1)$

แบบทดสอบ 7.4

จากข้อ 1 ถึงข้อ 22 จงหาค่าของ $f'(x)$

$$1. f(x) = 10^x$$

$$2. f(x) = 2^{3x}$$

$$3. f(x) = 3^{5x}$$

$$4. f(x) = 6^{-3x}$$

$$5. f(x) = 8^{x^2}$$

$$6. f(x) = 10^{x^3}$$

$$7. f(x) = 2^{5x} 3^{4x^2}$$

$$8. f(x) = (x^3 + 3) 2^{-7x}$$

$$9. f(x) = \frac{\log_{10} x}{x}$$

$$10. f(x) = \log_{10} \frac{x}{x+1}$$

$$11. f(x) = \sqrt{\log_a x}$$

$$12. f(x) = \log_{10} \frac{1+x}{1-x}$$

$$13. f(x) = \log_{10} [\log_{10} (x+1)]$$

$$14. f(x) = \log_a [\log_a (\log_a x)]$$

$$15. f(x) = x^{\sqrt{x}}$$

$$16. f(x) = x^{\ln x}$$

$$17. f(x) = x^{\frac{x}{e}}$$

$$18. f(x) = x^{\frac{x^2}{2}}$$

$$19. f(x) = (e^x)^x$$

$$20. f(x) = (\ln x)^{\ln x}$$

$$21. f(x) = (\ln x)^x$$

$$22. f(x) = (4 e^x)^{3x}$$

จากข้อ 23 ถึงข้อ 32 จงหาค่าของ indefinite integral

$$23. \int 3^{2x} dx$$

$$24. \int a^{nx} dx$$

$$25. \int a^x e^x dx$$

$$26. \int (e^{3x} + a^{3x}) dx$$

$$27. \int x^2 10^{x^3} dx$$

$$28. \int 5^{x^4+2x} (2x^3 + 1) dx$$

$$29. \int \frac{10 \ln x^2}{x} dx$$

$$30. \int a^{x \ln x} (\ln x + 1) dx$$

$$31. \int e^x 2^{e^x} 3^{e^x} dx$$

$$32. \int \frac{4^{\ln(1/x)}}{x} dx$$

33. จงเขียนกราฟของ $y = \log_{10} x$ และ $y = \ln x$ บนแกนໂຄออร์ดิเนต เดียวกัน

34. จงหาสมการของเส้นสัมผัสเส้นโค้ง $y = x^{x-1}$ ที่จุด $(2, 2)$

35. สมการของอุปสงค์ของสินค้าชนิดหนึ่ง คือ $p = 10.4^{-x/2}$ เมื่อ x หน่วย เป็นปริมาณของอุปสงค์ และ p บาท เป็นราคาต่อหน่วย ถ้าราคาตลาด เท่ากับ 5 บาท จงหาส่วนเกินของผู้บริโภค พร้อมทั้งว่าครูปั้นคงดึงเส้น อุปสงค์ และแสดงส่วนของพื้นที่ ซึ่งเป็นส่วนเกินของผู้บริโภค

36. สมการของอุปทานของสินค้าชนิดหนึ่งคือ $p = 5.3^{-x/4}$ เมื่อ x หน่วยเป็นปริมาณของการเสนอขาย และ p บาท เป็นราค่าต่อหน่วย จงหาส่วนเกินของผู้ผลิต เมื่อราคាលาดเท่ากับ 3 บาท ให้แสดงรูปของเส้นอุปทาน และแสดงส่วนของพันที่ซึ่งเป็นส่วนเกินของผู้ผลิต
37. รูปภาพทางประวัติศาสตร์ที่สำคัญรูปหนึ่ง ชึ้งชื่อมาเมื่อปี 1918 ในราคา 200 บาท มูลค่าของรูปจะเพิ่มขึ้นเป็น 2 เท่าของราคาก่อนมาในทุก ๆ 10 ปี ถ้าให้ y บาท เป็นมูลค่าของรูปภาพในเวลา t ปี ที่ซื้อมา
- แสดง y ในรูปของ t
 - มูลค่าของรูปจะเป็นเท่าไรในปี 1978
 - จงหาอัตราการเพิ่มขึ้นของมูลค่าของรูปภาพในปี 1978
38. บริษัทหนึ่งคาดคะเนว่าในเวลา t ปี ปริมาณของคนงานจะเท่ากับ N , เมื่อ $N = 1000 (0.8)^{t/2}$
- จงหาว่าปริมาณของคนงานจะเป็นเท่าไรใน 4 ปี
 - และอัตราการเปลี่ยนแปลงของคนงานจะเป็นเท่าไรใน 4 ปี
39. บริษัทแห่งหนึ่งทราบว่า เมื่อมีการเริ่มแข่งขันทางด้านการขายใหม่ขึ้น ปริมาณของการขายจะเพิ่มขึ้น ต่อวัน แต่อย่างไรก็ตาม ปริมาณของการขายที่เพิ่มขึ้นแต่ละวันจะลดลง เนื่องจากอิทธิพลของการแข่งขันค่อย ๆ หมดไป ในการแข่งขันครั้งหนึ่งบริษัทกำหนดให้ว่า ถ้า S เป็นปริมาณของการขายที่เพิ่มขึ้นในแต่ละวัน เนื่องจากการแข่งขัน และ x เป็นจำนวนวัน นับจากการแข่งขันสั้นสุดลง เมื่อ $S = 100.3^{-x/2}$ จงหาอัตราของการลดลงของยอดขายที่เพิ่มขึ้น เมื่อ
- $x = 4$
 - $x = 10$
40. บริษัทผู้ผลิตสินค้าชนิดหนึ่งได้กำหนดให้ว่า ถ้า x เป็นร้อยหน่วยของผลผลิตที่ผลิตได้ต่อหนึ่งสัปดาห์ มีต้นทุนส่วนเพิ่มเท่ากับ $2^{-x/2}$ และรายได้ส่วนเพิ่มเท่ากับ $8.2^{-x/2}$ โดยให้ค่าใช้จ่าย และรายได้จากการผลิตคิดเป็นพันบาท ถ้าต้นทุนคงที่ต่อสัปดาห์เท่ากับ 2,000 บาท จงหาผลกำไรสูงสุดต่อหนึ่งสัปดาห์ที่จะได้รับ

7.5 กฏการเจริญเติบโตและการสลายตัว(Laws of Growth And Decay)

จากที่ได้ศึกษาถึงเรื่อง exponential function มาแล้วสามารถจะใช้นำมาช่วยในด้านธุรกิจ เศรษฐศาสตร์ และวิทยาศาสตร์ ทั้งในสาขาวิชา ชีววิทยา, เคมี, พิสิกซ์ เป็นต้น เช่นตัวอย่างของปัญหาต่อไปนี้

1. อัตราการเจริญเติบโตของจำนวนประชากรในนิคมหนึ่งเป็นสัดส่วนกับจำนวนประชากรในขณะนั้น
2. ภายในสิ่งแวดล้อมอันหนึ่ง อัตราการเจริญเติบโตของแบคทีเรียเป็นสัดส่วนกับจำนวนของแบคทีเรียในเวลาที่กำหนดให้
3. ในการทดลองอันหนึ่งพบว่าอัตราการสลายตัวของเรเดียมเป็นสัดส่วนกับจำนวนของเรเดียมในขณะนั้นในระยะเวลาที่กำหนดให้

ถ้าให้ A หน่วย แทนเวลา

A หน่วย แทนปริมาณ

$$\frac{dA}{dt} = kA \quad (7.5.1)$$

เมื่อ k เป็นค่าคงที่ ถ้า A เพิ่มขึ้น ขณะที่ t เพิ่มขึ้น แล้ว $k > 0$

เราจะได้ (7.5.1) เป็นกฏการเติบโตโดยธรรมชาติ (Law of natural growth)

ถ้า A ลดลง ขณะที่ t เพิ่มขึ้น แล้ว $k < 0$

เราจะได้ (7.5.1) เป็นกฏการสลายตัวโดยธรรมชาติ (Law of natural decay)

ตัวอย่างที่ 7.5.1 อัตราการเพิ่มของประชากรของเมือง ๆ หนึ่งเป็นสัดส่วนกับจำนวนประชากร ถ้าจำนวนประชากรในปี 1930 มี 50,000 คน และในปี 1960 มี 75,000 อยากรู้ว่า ในปี 1990 จะมีประชากรจำนวนเท่าไร

วิธีทำ ให้ปี 1930 เป็นปีเริ่มต้น

1. เป็นจำนวนนี้

A เป็นจำนวนของประชากรในเวลา t ปี

t	0	30	60
A	50,000	75,000	A_{60}

$$\text{จาก } \frac{dA}{dt} = kA$$

$$\frac{dA}{A} = kdt$$

$$\int \frac{dA}{A} = k \int dt$$

$$\ln |A| = kt + C_1$$

$$|A| = e^{kt+C_1} = e^{C_1} e^{kt}$$

$$\text{ให้ } e^{C_1} = C$$

$$\therefore |A| = Ce^{kt}$$

$$A = Ce^{kt} \quad \text{--- (7.5.2)}$$

$$\text{จาก } t = 0, A = 50,000$$

แทนค่าใน (7.5.2) จะได้

$$50,000 = C$$

แทนค่า C ใน (7.5.2.) จะได้

$$A = 50,000 e^{kt} \quad \text{--- (7.5.3)}$$

$$\text{จาก } A = 75,000, t = 30$$

$$\therefore 75,000 = 50,000 e^{30k}$$

$$e^{30k} = \frac{3}{2}$$

เมื่อ $t = 60$, $A = A_{60}$ (จำนวนประชากรในเวลา 60 ปี) แทนใน (7.5.3)

$$A_{60} = 50,000 e^{60k} = 50,000 (e^{30k})^2$$

$$= 50,000 \left(\frac{3}{2}\right)^2 = 50,000 \times \frac{9}{4}$$

$$A_{60} = 112,500$$

\therefore จำนวนประชากรที่คาดว่าจะมีในปี 1990 = 112,500 คน

ตัวอย่างที่ 7.5.2 ใน การเพาะพันธุ์แบคทีเรียชนิดหนึ่ง อัตราการเจริญเติบโตของแบคทีเรีย เป็นสัดส่วนกับจำนวนของแบคทีเรียในขณะนั้น ถ้ามีจำนวนแบคทีเรีย 1,000 ในเวลาเริ่มต้นของการทดลอง และมีเพิ่มขึ้นเป็น 2 เท่าในเวลา 12 นาที จะต้องใช้เวลานานเท่าไร เพื่อที่ จะให้มีแบคทีเรียจำนวน 1,000,000

t	0	12	T
A	1,000	2,000	1,000,000

ให้ A เป็นจำนวนของแบคทีเรียในเวลา t นาที
 t เป็นเวลาคิดเป็นนาที

$$\text{จากโจทย์ } \frac{dA}{dt} = kA$$

โดยการแยกตัวแปรค่า A จะได้รากของสมการทั่วๆ ไปคือ

$$A = Ce^{kt} \quad (1)$$

จากตาราง เมื่อ $t = 0$, $A = 1,000$ แทนค่าใน (1)

$$\therefore 1,000 = C$$

$$\therefore \text{ จาก } (1) A = 1,000e^{kt} \quad (2)$$

จากตาราง $t = 12$, $A = 2,000$

$$\therefore 2,000 = 1,000e^{12k}$$

$$\therefore e^{12k} = 2 \quad \therefore k = \frac{1}{12} \ln 2 = 0.05776$$

$$A = 1,000 e^{0.05776t} \quad (3)$$

จากตาราง $t = T$, $A = 1,000,000$

แทนใน (3)

$$1,000,000 = 1,000 e^{0.05776T}$$

$$\begin{aligned} \therefore e^{0.05776T} &= 1,000 \\ 0.05776T &= \ln 1,000 \\ T &= \frac{\ln 1,000}{0.05776} = 119.6 \end{aligned}$$

\therefore ถ้าให้มีจำนวนแบงค์เรีย 1,000,000 จะต้องใช้เวลา 1 ชม. 59 นาที 36 วินาที ตอบ

ตัวอย่างที่ 7.5.3 อัตราการสลายตัวของเรเดียมเป็นสัดส่วนกับจำนวนของเรเดียมในเวลาใด ๆ ถ้าบัญชีนี้เรเดียมจำนวน 60 มิลลิกรัม และสารนี้จะสลายตัวไปครึ่งหนึ่งจากจำนวนบัญชีเมื่อเวลาผ่านไป 1,690 ปี จงหาว่าเมื่อเวลาผ่านไป 100 ปี จะเหลือเรเดียมเท่าใด

t	0	1690	100
A	60	30	A_{100}

ให้ t ปี เป็นจำนวนของบัญชี
A มิลลิกรัม เป็นจำนวนของเรเดียม

$$\frac{dA}{dt} = kA$$

จากตัวอย่างที่ 1

$$A = Ce^{kt} \quad (1)$$

จากตาราง $t = 0, A = 60$ แทนใน (1)

$$60 = C$$

$$\text{จาก (1)} \quad A = 60 e^{kt} \quad (2)$$

จากตาราง $A = 30, t = 1690$ แทนใน (2)

$$30 = 60 e^{1690k}$$

$$0.5 = e^{1690k}$$

$$\therefore \ln 0.5 = 1690 k$$

$$k = \frac{\ln 0.5}{1690} = -\frac{0.6931}{1690} = -0.000410$$

แทนค่า k ใน (2)

$$A = 60 e^{-0.000410 t}$$

$$\text{เมื่อ } t = 100, A = A_{100}$$

$$A_{100} = 60e^{-0.0410} = 57.6$$

\therefore จะมีเรเดิม 57.6 มิลลิกรัม ในเวลา 100 ปี

ตัวอย่างที่ 7.5.4 ในอ่างเก็บน้ำแห่งหนึ่งมีน้ำผสมกับฟลูอิร์ไรค์อยู่ 100 ล้านแกลลอน ซึ่งมีฟลูอิร์ไรค์อยู่ 700 ปอนด์. เพื่อที่จะให้ปริมาณของฟลูอิร์ไรค์ลดลงอย่างได้ทำการปล่อยน้ำบริสุทธิ์เข้าไปในอ่างเก็บน้ำด้วยอัตรา 3 ล้านแกลลอนต่อวัน และปริมาณของส่วนผสมระหว่างน้ำกับฟลูอิร์ไรค์จะหลอกจากอ่างเก็บน้ำด้วยอัตรา 3 ล้านแกลลอนต่อวัน อย่างทราบว่าจะมีจำนวนฟลูอิร์ไรค์ที่ปอนด์อยู่ในอ่างเก็บน้ำ หลังจากปล่อยน้ำบริสุทธิ์เข้าไปในอ่างเก็บน้ำได้ 60 วัน

วิธีทำ

ให้ t เป็นจำนวนวันที่เริ่มปล่อยน้ำบริสุทธิ์เข้าไปในอ่างเก็บน้ำ

x ปอนด์ เป็นปริมาณของฟลูอิร์ไรค์ซึ่งอยู่ในอ่างเก็บน้ำหลังจากปล่อยน้ำบริสุทธิ์เข้าไปเป็นเวลา t วัน

จากโจทย์ จะได้ตารางว่า

t	0	60
x	700	$x - 60$

ในเวลา t วัน ในอ่างจะมีฟลูอิร์ไรค์อยู่ x ปอนด์ ในน้ำผสมกับฟลูอิร์ไรค์ 100 ล้านแกลลอนจะมีฟลูอิร์ไรค์อยู่ x ปอนด์

$$\therefore \frac{x}{100}, \text{ ล้าน }, \frac{x}{100}, \text{ ปอนด์ }$$

แต่ใน 1 วัน ส่วนผสมจะหลอกจากอ่างด้วยอัตรา 3 ล้านแกลลอนต่อวัน

$$\therefore \text{ส่วนผสม } 1 \text{ ล้านแกลลอนมีฟลูอิร์ไรค์ } \frac{x}{100} \text{ ปอนด์}$$

$$\therefore 3, \frac{x}{100}, \text{ ปอนด์ }$$

∴ ใน 1 วัน พลูออร์ไรค์จะลดลงจากในอ่างเป็นปริมาณ $\frac{3x}{100}$ ปอนด์

$\frac{dx}{dt}$ เป็นอัตราการเปลี่ยนแปลงของ x เมื่อเทียบกับ t

ในที่นี้ เมื่อ t เพิ่มขึ้น x จะลดลง ดังนั้นจะได้ว่า

$$\frac{dx}{dt} = - \frac{3x}{100}$$

$$\therefore \int \frac{dx}{x} = - \frac{3}{100} \int dt$$

$$\ln |x| = - 0.03 t + C_1$$

$$x = Ce^{-0.03t} \quad (1)$$

จากตาราง เมื่อ $t = 0, x = 700$ แทนค่าใน (1)

$$\therefore 700 = C$$

จาก (1) แทนค่า C , $x = 700 e^{-0.03t}$ (2)

จากตาราง $t = 60, x = x_{60}$ แทนค่าใน (2)

$$x_{60} = 700 e^{-0.03(60)} = 700 e^{-1.8}$$

= 700 (0.1653) (จากตารางของ exponential function)

$$= 115.71$$

∴ จะมีปริมาณของฟลูออร์ไรค์อยู่ 115.71 ปอนด์ หลังจากปล่อยน้ำบริสุทธิ์เข้าไปในอ่างเก็บน้ำได้ 60 วัน

ตัวอย่างที่ 7.5.5 กฎของนิวตันเกี่ยวกับการถ่ายเทอุณหภูมิของร่างกายกล่าวไว้ว่าอัตราการเปลี่ยนแปลงอุณหภูมิของร่างกาย เป็นสัดส่วนกับผลต่างระหว่างอุณหภูมิของร่างกายกับอุณหภูมิโดยรอบ ถ้าร่างกายอยู่ในบรรยายกาศซึ่งมีอุณหภูมิ 35° และร่างกายเย็นลงจาก 120° เป็น 60° ในเวลา 40 นาที จงหาอุณหภูมิของร่างกาย หลังจากผ่านไป 100 นาที ในบรรยายกาศนั้น

วิธีกำ

ให้ t นาที เป็นเวลาที่ใช้ตั้งแต่ว่างกายเริ่มลดอุณหภูมิลง

x องศา เป็นอุณหภูมิของร่างกาย เมื่อเวลาผ่านไป t นาที จากกฎของนิวตันจะได้ว่า

$$\frac{dx}{dt} = k(x - 35)$$

$$\int \frac{dx}{x-35} = \int k dt$$

$$\ln |x-35| = kt + C_1$$

$$x = Ce^{kt} + 35 \quad \text{--- (1)}$$

จากโจทย์เราจะได้ตารางว่า

t	0	40	100
x	120	60	$x = 100$

จากตาราง เมื่อ $t = 0$, $x = 120$ แทนใน (1)

$$\therefore 120 = C + 35$$

$$\therefore C = 85$$

แทนค่า C ใน (1)

$$x = 85e^{kt} + 35 \quad \text{--- (2)}$$

จากตาราง เมื่อ $t = 40$, $x = 60$

$$\therefore 60 = 85 e^{40k} + 35$$

$$40k = \ln \frac{5}{17}$$

$$k = \frac{1}{40} (\ln 5 - \ln 17)$$

$$= \frac{1}{40} (1.6094 - 2.8332) (\ln 5, \ln 17 \text{ ดูจากตารางท้ายบท})$$

แทนค่า k ใน (2) $= -0.0306$

$$\therefore x = 85e^{-0.0306t} + 35$$

$$\therefore x \times 100 = 85 e^{-0.0306(100)} \div 35 = 39$$

∴ ร่างกายจะมีอุณหภูมิเป็น 39° เมื่อเวลาผ่านไป 100 นาที

ตัวอย่างที่ 7.5.6 สมมติให้ GNP (ปริมาณการผลิตต่อปี) ของเมือง A หนึ่ง มีอัตราการเปลี่ยนแปลงเพิ่มขึ้นเป็นสัดส่วนกับ GNP ของเมือง A นั้น ถ้า GNP ของเมืองนั้น ในวันที่ 1 มกราคม 1973 เป็น 80 พันล้านบาท และในวันที่ 1 มกราคม 1977 GNP ของเมืองนั้นเป็น 96 พันล้านบาท จงหาเวลาที่จะมี GNP เป็น 128 พันล้านบาท

วิธีทำ ให้ t ปี เป็นเวลาที่เริ่มต้นตั้งแต่วันที่ 1 มกราคม 1973

x พันล้านบาท เป็นจำนวนของ GNP เมื่อเวลาผ่านไป t ปี

จากโจทย์เราจะได้ตาราง

t	0	4	T
x	80	96	128

$$\frac{dx}{dt} = kx$$

$$\int \frac{dx}{x} = \int kdt$$

$$\ln |x| = kt + c_1$$

$$x = e^{kt} \cdot e^{c_1}$$

$$\text{ให้ } e^{c_1} = c$$

$$\therefore x = ce^{kt} \quad (1)$$

จากตาราง เมื่อ $t = 0, x = 80$ แทนค่าใน (1)

$$80 = c$$

แทนค่า c ใน (1) จะได้

$$x = 80 e^{kt} \quad (2)$$

จากตาราง เมื่อ $t = 4$, $x = 96$

$$96 = 80 e^{4k}$$

$$e^{4k} = \frac{96}{80} = 1.2$$

$$\ln 1.2 = 4k$$

$$k = \frac{1}{4} \ln 1.2 = \frac{1}{4} (0.1823) \quad (\text{จากตารางของ } \ln \text{ ท้ายบท}) \\ = 0.0456$$

แทนค่า k ใน (2) จะได้

$$x = 80 e^{0.0456t} \quad \text{----- (3)}$$

จากตารางเมื่อ แทนใน $x = 128$, $t = T$ แทนใน (3)

$$128 = 80 e^{0.0456T}$$

$$e^{0.0456T} = \frac{128}{80} = 1.6$$

$$0.0456 T = \ln 1.6$$

$$T = \frac{\ln 1.6}{0.0456} = \frac{0.4700}{0.0456} = 10.3$$

\therefore GNP คาดว่าจะเป็น 128 พันล้านบาท ต้องใช้เวลา 10.3 ปีนับแต่วันที่ 1
มกราคม 1973 10.3 ปีนี้จะเป็นเวลาประมาณ 10 ปี 4 เดือน \therefore GNP จะเป็น 128
พันล้านบาทในวันที่ 1 พฤษภาคม 1983

แบบฝึกหัด 7.5

1. อัตราการเพิ่มขึ้นของประชากรในเมือง ๆ หนึ่ง เป็นสัดส่วนกับจำนวนประชากรในเมือง ๆ นั้น ถ้าจำนวนประชากรเพิ่มขึ้นจาก 40,000 เป็น 60,000 ในเวลา 40 ปี อยากรู้ว่า เมื่อไรจะมีประชากรเป็น 80,000
2. จำนวนประชากรของเมือง ๆ หนึ่ง เพิ่มขึ้นเป็น 2 เท่า ในระยะเวลา 60 ปี จากปี 1890 ถึงปี 1950 ถ้าอัตราการเพิ่มขึ้นของประชากรในประเทศไทยก็ตาม เป็นสัดส่วนกับจำนวนประชากรในเวลานั้น และถ้าประชากรในปี 1950 มี 60,000 จงคำนวณจำนวนประชากรในปี 2000
3. อัตราการเจริญเติบโตของแบคทีเรียชนิดหนึ่งในอุณหภูมิคงที่เป็นสัดส่วน กับจำนวนแบคทีเรีย ในขณะนั้นและอุณหภูมนั้น ถ้าในระยะเริ่มแรกมีจำนวน แบคทีเรียในขณะนั้น เป็นจำนวน 1.000 และจำนวนแบคทีเรียนี้จะเพิ่ม จำนวนเป็น 2 เท่าของระยะเริ่มแรก โดยใช้เวลาใน 1 ชม. อยากรู้ว่า จะมีจำนวนแบคทีเรียเท่าไหร่ ในเวลา 3 ช.ม. ?
4. ในอุณหภูมิที่แน่นอนแห่งหนึ่งอัตราการเจริญเติบโตของแบคทีเรียเป็นสัดส่วน กับจำนวนของแบคทีเรียในขณะนั้น ถ้าใน 3 ชม. มีจำนวนแบคทีเรียเป็น 3 เท่า ของจำนวนแบคทีเรีย เมื่อเริ่มต้น และเมื่อใช้เวลา 12 ชม. จะมี จำนวนแบคทีเรียเป็น 10 ล้าน อยากรู้ว่า เมื่อเริ่มแรกมีจำนวนแบคทีเรีย เป็นเท่าไหร่
5. หลังจากที่ใช้รถจักรยานยนต์ 1 ปี, อัตราของการเสื่อมราคาในระยะเวลาใด ๆ เป็นสัดส่วนกับราคานิเวลานั้น รถจักรยานยนต์คันหนึ่งมีราคานิวัติ 1 มิถุนายน 1975 เป็นเงิน 3,500 บาท และในวันที่ 1 มิถุนายน 1977 เป็น 2,900 บาท อยากรู้ว่าวัน 1 มิถุนายน 1981 รถคันนี้จะมีราคานิวัติ เป็นเท่าไหร่
6. อัตราการสลายตัวของน้ำตาลในน้ำ เป็นสัดส่วนกับปริมาณของน้ำตาล ซึ่งยัง ไม่สลายตัว เมื่อเริ่มใส่น้ำตาล 50 ปอนด์ลงในน้ำ ไปได้ 5 ชม. จะเหลือ น้ำตาลออยู่ 20 ปอนด์ ถ้าต้องการจะให้น้ำตาลละลายไปถึง 90 % จะต้องใช้ เวลานานเท่าไร ?

7.6 គណន៍បើយចេញគិត គណន៍បើយកាលពីនឹង និងគណន៍បើយកាលពីនឹងបានបញ្ចប់

(Interest : Simple, Compound, And Compound Continuously)

នៃការិយាយធម៌ដែលមានតម្លៃរាល់ទី 8% ព័ត៌មូននេះ ឯការិយាយធម៌ 1 ឆ្នាំ ត្រូវបានគិតជាបាន 1.08 បាន នៅពេលមានបាន 1 បាន នៅពេលមានបាន 1.08 បាន

ដូច្នោះ តាមតម្លៃរាល់ទី 100 i% ព័ត៌មូននេះ ឯការិយាយធម៌ 1 បាន នៅពេលមានបាន 1.00 + i បាន នៅពេលមានបាន P បាន នៅពេលមានបាន 1.00 + i បាន

នៃការគិតតម្លៃរាល់ទី សំរាប់ការគិតឱ្យមិនមែនលាយខ្លួន ឬទៀត គេហើយថាគារបើយចេញគិត (Simple interest) គឺជាការគិតឱ្យមិនមែនលាយខ្លួន ឡើង ឯការិយាយធម៌ 100 បាន តម្លៃរាល់ទី 6% ព័ត៌មូន នៅពេលមានបាន 6 បាន និង ឯការិយាយធម៌ P បាន តម្លៃរាល់ទី 100 i% ព័ត៌មូន នៅពេលមានបាន 1.00 + i បាន នៅពេលមានបាន P_i បាន ឯការិយាយធម៌នៅពេលមានបាន n ឆ្នាំ ត្រូវបានគិតឱ្យមិនមែនលាយខ្លួន នៅពេលមានបាន P_{ni} បាន

តាមឱ្យ A បាន បានជាដំឡើង ឯការិយាយធម៌ នៅពេលមានបាន P បាន តម្លៃរាល់ទី 100 i% ព័ត៌មូន នៅពេលមានបាន A បាន

$$\therefore A = P + P_{ni} \text{ បាន}$$

វិធីស្តុង នៃការវិភាគ ឬការអូបុន្មានការគណន៍ (Mathematical Induction)

$$\text{ឱ្យ } n = 1$$

$$\text{ជាផ្លូវ } A_1 = P \left(1 + \frac{i}{m}\right)$$

$$A_2 = A_1 \left(1 + \frac{i}{m}\right) = \left[P \left(1 + \frac{i}{m}\right) \left(1 + \frac{i}{m}\right)\right] = P \left(1 + \frac{i}{m}\right)^2$$

$$\text{តាម } n = k \text{ បានជូន}$$

$$\therefore A_k = P \left(1 + \frac{i}{m}\right)^k$$

$$\therefore A_{k+1} = A_k \left(1 + \frac{i}{m}\right) = \left[P \left(1 + \frac{i}{m}\right)^k\right] \left(1 + \frac{i}{m}\right)$$

$$A_{k+1} = P \left(1 + \frac{i}{m}\right)^{k+1}$$

\therefore ឱ្យស្មូបច្បាស់ ការអូបុន្មានការគណន៍ ថា បានជូនសំរាប់រួចរាល់ តាមឱ្យ n ជាដំឡើង នៅពេលមានបាន A

តាមឱ្យ t បានជាដំឡើង នៅពេលមានបាន A នៅពេលមានបាន P តម្លៃរាល់ទី 100 i% គិតឱ្យមិនមែនលាយខ្លួន m គ្រឿងព័ត៌មូន ជាដំឡើង គិតឱ្យ (n) = mt តាមឱ្យ A

$$\therefore \text{ จากสูตร } A = P \left(1 + \frac{i}{m}\right)^{mt}$$

$$\text{แทนค่าได้ } A = 400 \left(1 + \frac{0.06}{2}\right)^6 = 400 (1.03)^6$$

$$\text{ จากตารางจะได้ } (1.03)^6 = 1.1941$$

$$\therefore A = 400 (1.1941) = 477.64 \text{ บาท}$$

$$\therefore \text{ เมื่อครบ } 3 \text{ ปี นายปริชาจะมีเงินในธนาคาร} = 477.64 \text{ บาท}$$

แคลคูลัสสามารถใช้ในการแก้ปัญหาในทางเศรษฐศาสตร์ได้ เช่นในการคิดลงทุนที่จะลงทุนทำการค้า จะสามารถคำนวณหาผลกำไรในการค้าว่าจะคุ้มกับเงินทุนที่จะลงทุนหรือไม่ ถ้าใช้หลักวิชาในการคำนวณจะทำให้สามารถตัดสินใจได้ถูกต้องยิ่งขึ้น แต่ในการใช้เรื่องแคลคูลัสนั้น จะต้องพิจารณาให้พึงกշันเป็นพึงกշันต่อเนื่องด้วย เช่นในสูตร (7.6.3)

$$A = P \left(1 + \frac{i}{m}\right)^{mt}$$

เมื่อ A บาท เป็นจำนวนเงินที่จะได้รับคืน เมื่อลงทุนไป P บาท ด้วยอัตราดอกเบี้ย $100i\%$ คิดอัตราดอกเบี้ยหนึ่งเดือน m ครั้งต่อปี ลงทุนไปเป็นเวลา t ปี ในที่นี้ถ้ากำหนดให้คิดดอกเบี้ยหนึ่งเดือนต่อเนื่องไปเรื่อยๆ จนถึง t ปี

\therefore เมื่อให้ $m \rightarrow \infty$ จะได้ว่า

$$A = P \lim_{m \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{i}{m}\right)^{mt}$$

$$\text{ หรือ } A = P \lim_{m \rightarrow \infty} \left[\left(1 + \frac{i}{m}\right)^{m/i} \right]^{it} \quad (7.6.4)$$

$$\text{ พิจารณาเทอม } \lim_{m \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{i}{m}\right)^{m/i}$$

$$\text{ ให้ } z = \frac{i}{m} \quad \therefore \frac{m}{i} = \frac{1}{z} \text{ เมื่อ } m \rightarrow +\infty, \quad z \rightarrow 0^+$$

$$\therefore \lim_{m \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{i}{m}\right)^{m/i} = \lim_{z \rightarrow 0^+} (1+z)^{\frac{1}{z}} = e$$

$$\therefore \lim_{m \rightarrow \infty} \left[\left(1 + \frac{i}{m}\right)^{m/i} \right]^{it} = \left[\lim_{m \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{i}{m}\right)^{m/i} \right]^{it} = e^{it}$$

. ∴ จะได้สมการ (7.6.4) เป็น

$$A = P e^{it} \quad (7.6.5)$$

ถ้าพิจารณาอิกแบบหนึ่งคือกำหนดให้ P บาท เป็นจำนวนเงินทั้งหมด ให้อัตรา
รายได้เพิ่มขึ้นเป็นสัดส่วนกับขนาดของรายได้ ดังนี้จะได้ว่า

$$\frac{dA}{dt} = kA$$

$$\int \frac{dA}{A} = k \int dt$$

$$\ln |A| = kt + C_1$$

$$A = Ce^{kt}$$

เมื่อ $t = 0, A = P$ แทนค่าข้างบนจะได้ว่า

$$P = C$$

$$\therefore A = Pe^{kt} \quad (7.6.6)$$

จาก (7.6.5) และ (7.6.6) เมื่อเปรียบเทียบกันแล้วก็เป็นสมการเดียวกันเมื่อ
 $j = k$ ดังนั้นจึงกล่าวได้ว่า ถ้ามีการลงทุน อัตรารายได้ที่เพิ่มขึ้นเป็นสัดส่วนกับขนาดของ
รายได้แล้วจะกล่าวได้ว่า ดอกเบี้ยคิดแบบทบทันต่อเนื่องกันไป, และอัตราดอกเบี้ยที่เกิดก็คือตัว
คงที่ของสัดส่วนนั้นเอง

หัวข้อที่ 7.6.3 ถ้านายแดงให้นายค้ายืมเงินไป 900 บาท โดยอัตราดอกเบี้ยทบทัน 8%
ไปได้ระยะเวลาหนึ่ง นายต้นนำเงินมาคืนนายแดง 1,400 บาท อยากรู้ว่านายค้ายืมนายแดง
ไปเป็นระยะเวลาเท่าไร

วิธีทำ จากสูตร (7.6.5) $A = Pe^{it}$

ในที่นี้ $P = 900, A = 1,400, i = 0.08$ แทนค่าในสูตร

$$1,400 = 900e^{0.08t}$$

$$\therefore e^{0.08t} = \frac{1,400}{900} = \frac{14}{9}$$

$$\ln (e^{0.08t}) = \ln \frac{14}{9} = \ln 14 - \ln 9$$

$$\begin{aligned}
 .08t &= \ln 14 - \ln 9 \\
 t &= \frac{1}{.08} (2.6391 - 2.1972) \quad (\text{จากตารางของ natural log}) \\
 &= 5.53
 \end{aligned}$$

∴ นายด้วยมีนายแดงไปเป็นระยะเวลา 5.53 ปี บางครั้งบัญชีของการลงทุนต้องการทราบจำนวนเงินที่จะลงทุนในบัญชี เพื่อที่จะได้รับเงินในอีก t ปีข้างหน้า ด้วยอัตราดอกเบี้ยทบทัน 100j % คิดอัตราดอกเบี้ย m ครั้งต่อปี บัญชีนี้ได้จากการหาค่า P ในสูตรที่ (7.6.3) ซึ่งจะใช้สูตรได้ว่า

$$P = A \left(1 + \frac{i}{m}\right)^{-mt} \quad (7.6.7)$$

ในการนี้ที่ดอกเบี้ยคิดทบทันโดยต่อเนื่องจะได้สูตรเป็น

$$P = Ae^{-it} \quad (7.6.8)$$

ตัวอย่างที่ 7.6.4 เมื่อลงทุนเงินจำนวนหนึ่งเป็นเวลา 3 ปี จะได้เงินคืนมา 1,000 บาทในการลงทุนครั้นได้อัตราดอกเบี้ยทบทัน 6% คิดอัตราดอกเบี้ย 2 ปีต่อครั้ง อยากรู้ว่าลงทุนไปเป็นจำนวนเงินเท่าไร

วิธีทำ จากสูตร (7.6.7) $P = A \left(1 + \frac{i}{m}\right)^{-mt}$

ในที่นี้ $A = 1,000$, $i = 0.06$, $m = 2$, $t = 3$ แทนค่าจะได้

$$P = 1,000 \left(1 + \frac{0.06}{2}\right)^{-6}$$

$$P = 837.50 \text{ บาท}$$

แบบฝึกหัด 7.6

1. ถ้าให้กู้ยืมเงินไป 1,000 บาท ตัวอัตราดอกเบี้ย 6 % เป็นระยะเวลา 4 ปี จงคำนวณหาเงินทั้งหมดที่จะได้เมื่อครบ 4 ปีแล้ว
 - a) เมื่อคิดดอกเบี้ยเชิงเดียว
 - b) เมื่อคิดดอกเบี้ยทบทัน ปีละครึ่ง
 - c) เมื่อคิดดอกเบี้ยทบทันครึ่งปีครึ่ง
 - d) เมื่อคิดดอกเบี้ยทบทันต่อเนื่องกัน
2. ถ้าให้กู้ยืมเงินไป 500 บาท เป็นระยะเวลา 2 ปี ตัวอัตราดอกเบี้ย 4% จงคำนวณหาดอกเบี้ยที่จะได้รับหลังจาก 2 ปีแล้ว
 - a) เมื่อคิดดอกเบี้ยเชิงเดียว
 - b) เมื่อคิดดอกเบี้ยทบทันปีละครึ่ง
 - c) เมื่อคิดดอกเบี้ยทบทัน 4 ครึ่งต่อปี
 - d) เมื่อคิดดอกเบี้ยทบทันต่อเนื่องกัน
3. ในการฝากเงินธนาคารแห่งหนึ่ง ธนาคารคิดดอกเบี้ยให้ 5 % ถ้าเราต้องการจะมีเงิน 500 บาท ในรัญชีใน 5 ปีข้างหน้า เราจะต้องฝากเงินบัญชีบันเป็นจำนวนเงินเท่าไร
 - a) คิดอัตราดอกเบี้ยทบทันปีละครึ่ง
 - b) คิดอัตราดอกเบี้ยทบทัน 4 ครึ่งต่อปี
4. เงินจำนวนหนึ่ง ได้ลงทุนไปเป็นเวลา 10 ปี จะได้เงินเป็น 2 เท่า โดยได้อัตราดอกเบี้ยทบทันต่อเนื่องกัน อยากรู้ว่า ถ้าต้องการจะได้เงินเป็น 3 เท่า จะใช้เวลากำหนดเท่าไร
5. ฝากเงินธนาคารแห่งหนึ่ง 500 บาท ธนาคารคิดอัตราดอกเบี้ยทบทันต่อเนื่อง 6 % อยากรู้ว่าจะใช้เวลากำหนดเท่าไร ถึงจะได้เงิน 900 บาท ในบัญชี
6. นาย ก. ฝากเงินทรัพศ์แห่งหนึ่ง โดยทรัพศ์ได้จ่ายอัตราดอกเบี้ย 8 % ถ้านาย ก. ต้องการจะได้เงินเป็น 2 เท่าของเงินฝาก อยากรู้ว่า นาย ก. จะต้องใช้เวลากำหนดเท่าไร

- a) ทรัพย์คิดดอกเบี้ยทบทันปีละครึ่ง
 - b) ทรัพย์คิดดอกเบี้ยทบทัน 4 ครั้งต่อปี
 - c) ทรัพย์คิดดอกเบี้ยทบทันต่อเนื่องกัน
7. จงหาค่าของเงินบี้จุบัน เมื่อ 10 ปี เงินจำนวนนี้จะเป็น 10,000 บาท ถ้า
เงินนี้คิดอัตราดอกเบี้ย 8 % และคิดดอกเบี้ยทบทัน
- a) ปีละครึ่ง
 - b) ต่อเนื่องกัน
8. ถ้าค่าของเงินบาทลดค่าลงด้วยอัตรา 8 % ต่อปี คิดแบบดอกเบี้ยทบทันต่อ
เนื่องกัน อย่างทราบว่าอีกนานเท่าไร ค่าของเงินบาท จะจะเหลือเป็น
50 สตางค์