

บทที่ 6

อินทิกรัลจำกัดเขต (The Definite Integral)

บทที่ 6 นี้ เกี่ยวกับการหาพื้นที่ในรูปแบบ โดยวิธีการของแคลคูลัส ซึ่ง
หลักใหญ่ คือ แบ่งพื้นที่ออกเป็นรูปสี่เหลี่ยมผืนผ้ารูปเส้นๆ และนำเอาพื้นที่ของรูปสี่เหลี่ยม
ผืนผ้าเหล่านั้นมารวมกันพร้อมด้วยวิธีการของติมิติ เราได้ยินมาก่อนอินทิกรัลจำกัดเขต หรือ
พื้นที่ของบริเวณในรูปแบบ ในบางหัวข้ออาจจะมีที่มาของนิยาม หรือบทพิสูจน์ของทฤษฎีที่
อาจจะยุ่งยากและยาว ทั้งนี้เพื่อให้ผู้อ่านที่สนใจทราบที่มาของนิยามหรือทฤษฎีซึ่งอาจจะมีส่วน
ช่วยในการน่าทุกภาระหรือสมการที่เกี่ยวข้องไปใช้ได้ด้วยความเข้าใจมากขึ้น ในหัวข้อสุดท้าย
(6.5) เป็นการนำเรื่องการหาพื้นที่ของบริเวณในรูปแบบไปใช้ในเรื่อง ส่วนเกินของผู้บริโภค^๕
และส่วนเกินของผู้ผลิต

6.1 พื้นที่ (Area)

ก่อนที่เราจะกล่าวถึงการหาพื้นที่ สิ่งที่จะช่วยในการเขียนผลรวมของเทอมหลาย
เทอมให้สั้นขึ้น คือ การนำเอาเครื่องหมายรวมยอด Σ ซึ่งอ่านว่า ซิกเนอร์ มาใช้เขียนแทน
ผลรวมของเทอมหลายเทอม เช่น

$$\text{เราเขียนแทนผลรวม } 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \text{ ด้วย } \sum_{i=1}^5 \frac{1}{i}$$

$$\text{หรือ } \text{เขียนแทนผลรวม } 1^2 + 2^2 + \dots + 5^2 + 6^2 \text{ ด้วย } \sum_{i=1}^6 i^2$$

เห็นได้ว่า เราใช้เครื่องหมาย Σ นี้แทนผลรวมได้ เมื่อแต่ละเทอมในผลรวมข้างบนอยู่กับค่าของ
เลขจำนวนเต็ม หรือ โดยทั่วไปเราได้

$$\sum_{i=m}^n F(i) = F(m) + F(m+1) + F(m+2) \dots + F(n-1) + F(n) \quad (6.1.1)$$

เมื่อ m, n เป็นจำนวนเต็ม และ $m < n$

จากสูตร 6.1.1 นี้ ทางด้านความทึ่งทมด ($n - m + 1$) เทอม ซึ่งแต่ละเทอม หาได้โดยเริ่มแทนค่า i ด้วย m ใน $F(i)$ และเพิ่มค่า i ทีละหนึ่ง และแทนใน $F(i)$ จนกระทั่งถึงเทอมสุดท้าย คือ แทน i ด้วย n ใน $F(i)$ ได้ $F(n)$ นั่นเอง

ในสูตร 6.1.1 นี้ เราเรียก m ว่า ขีดจำกัดบน (upper limit) และเรียก n ว่า ขีดจำกัดล่าง (lower limit) ส่วนสัญลักษณ์ i นั้น เราเรียกว่า ครรชันของ การรวม (index of summation) และเราใช้สัญลักษณ์ตัวใดเป็นครรชนก็ได้นั่นก็คือ

$$\sum_{i=m}^n F(i) = \sum_{k=m}^n F(k) = \sum_{j=m}^n F(j)$$

ตัวอย่าง 6.1.1 การใช้สูตร 6.1.1

$$\sum_{i=1}^5 3i = 3.1 + 3.2 + 3.3 + 3.4 + 3.5$$

$$\sum_{k=2}^7 \frac{1}{k+1} = \frac{1}{2+1} + \frac{1}{3+1} + \dots + \frac{1}{6+1} + \frac{1}{7+1}$$

$$\sum_{m=-1}^2 \frac{m}{m^2+2} = \frac{(-1)}{(-1)^2+2} + \frac{0}{(0)^2+2} + \frac{1}{(1)^2+2} + \frac{2}{(2)^2+2}$$

ในบางครั้งเทอมในผลรวมอาจจะเกี่ยวเนื่องกับครรชนิต่าง (subscript) ดังตัวอย่างต่อไปนี้

ตัวอย่าง 6.1.2

$$\sum_{i=0}^n a_i = a_0 + a_1 + a_2 + \dots + a_{n-1} + a_n;$$

$$\sum_{i=1}^5 f(x_i) \Delta_i x = f(x_1) \Delta_1 x + f(x_2) \Delta_2 x + \dots + f(x_5) \Delta_5 x$$

คุณสมบติ หรือสูตรที่เกี่ยวข้องกับเครื่องหมายรวมยอด Σ ที่สำคัญ ๆ และเรานำมาใช้บ่อย ๆ มีดังนี้คือ

$$(1) \sum_{i=1}^n c = cn \quad \text{เมื่อ } c \text{ เป็นค่าคงที่} \quad (6.1.2)$$

$$(2) \sum_{i=1}^n c F(i) = c \sum_{i=1}^n F(i) \quad \text{เมื่อ } c \text{ เป็นค่าคงที่} \quad (6.1.3)$$

$$(3) \sum_{i=1}^n (F(i) + G(i)) = \sum_{i=1}^n F(i) + \sum_{i=1}^n G(i) \quad (6.1.4)$$

$$(4) \sum_{i=1}^n [F(i) - F(i-1)] = F(n) - F(0) \quad (6.1.5)$$

สำหรับการพิสูจน์คุณสมบติ (6.1.2) — (6.1.5) นั้น เราเพียงแต่ใช้สูตร (6.1.1)

นั้นก็พอ เนื่องแต่จะเทอมในผลรวมยอด Σ ออกมา เราจะสามารถสรุปผลได้ตามคุณสมบติ (6.1.2) — (6.1.5) ได้ ส่วนสูตรที่จะกล่าวถึงต่อไปนี้ สามารถพิสูจน์ได้โดยวิธีการอุปนัย ทางคณิตศาสตร์ (Mathematical induction)

$$(5) \sum_{i=1}^n i = \frac{n(n+1)}{2} \quad (6.1.6)$$

$$(6) \sum_{i=1}^n i^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \quad (6.1.7)$$

$$(7) \sum_{i=1}^n i^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4} \quad (6.1.8)$$

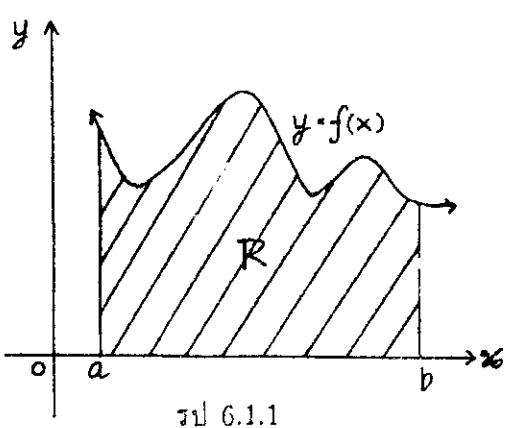
$$(8) \sum_{i=1}^n i^4 = \frac{n(n+1)(6n^3+9n^2+n-1)}{30} \quad (6.1.9)$$

ตัวอย่าง 6.1.8 จงหาค่าของ $\sum_{i=1}^n (3i-2)$ โดยใช้คุณสมบติ และสูตรข้างบน

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n i(3i-2) &= \sum_{i=1}^n (3i^2 - 2i) \\ &= \sum_{i=1}^n 3i^2 - \sum_{i=1}^n 2i \\ &= 3 \sum_{i=1}^n i^2 - 2 \sum_{i=1}^n i \\ &= 3 \cdot \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} - 2 \cdot \frac{n(n+1)}{2} \\ &= \frac{2n^3 + 3n^2 + n - 2n^2 - 2n}{2} \\ &= \frac{2n^3 + n^2 - n}{2} \end{aligned}$$

ต่อไปเราจะพิจารณาการหาพื้นที่ของบริเวณในระหว่าง เรายังศึกษาสำหรับการหาพื้นที่ของรูปสามเหลี่ยม พื้นที่ของรูปวงกลม และรูปอื่นๆ แต่ในบางครั้ง เราไม่สามารถหาพื้นที่ของรูปบางรูปได้โดยตรง หรือโดยการคิดหาสูตร เช่น รูปหลายเหลี่ยม (polygon) เราอาจจะหาพื้นที่ของรูปหลายเหลี่ยม โดยการแบ่งรูปหลายเหลี่ยมออกเป็นรูปสามเหลี่ยมเดียวกันแล้วนำเอาพื้นที่ของรูปสามเหลี่ยมซึ่งเราหาได้โดยการใช้สูตร มารวมกันก็จะได้พื้นที่ที่เราต้องการอย่างไรก็ตามไม่ว่าเราจะแบ่งพื้นที่ของรูปหลายเหลี่ยมในลักษณะใดพื้นที่ของรูปหลายเหลี่ยมคือเท่าเดิมเสมอ

สำหรับการหาพื้นที่ของบริเวณใดๆ ในระหว่าง เช่น บริเวณ R ซึ่งล้อมรอบด้วยเส้นโค้ง $y = f(x)$ แกน x เส้นตรง $x = a$ และ $x = b$ ดังแสดงในรูป 6.1.1



รูป 6.1.1

เราอาจจะหาพื้นที่ของบริเวณ R โดยหาพื้นที่ของรูปหลายเหลี่ยมที่บรรจุอยู่ในบริเวณ R หรือพื้นที่ของรูปหลายเหลี่ยมที่บรรจุบริเวณ R อยู่ ในที่นี้เราให้ f เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องบนช่วงปิด $[a,b]$ และ $f(x) > 0$ สำหรับทุกๆ x ในช่วงปิดนี้

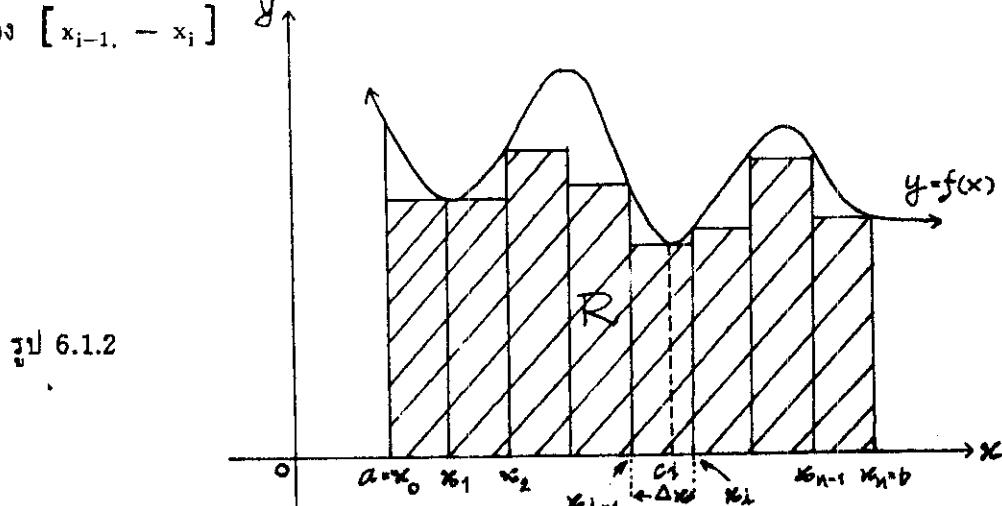
ถ้าสมมุติให้ A เป็นพื้นที่ของบริเวณ R คันนั้น A จะต้องมีค่าอย่างน้อยที่สุดเท่ากับพื้นที่ของรูปหลายเหลี่ยมที่บรรจุอยู่ใน R และไม่เกินกว่าพื้นที่ของรูปหลายเหลี่ยมที่บรรจุ R

เราจะเริ่มโดยการนิยามพื้นที่ของรูปหลายเหลี่ยมที่บรรจุอยู่ใน R ขั้นแรกแบ่งช่วงปิด $[a,b]$ ออกเป็น n ช่วง แต่ละช่วงยาว $(b-a)/n$ นั่นคือความยาวของแต่ละช่วงที่เราแบ่งยาวเท่ากัน ให้ Δx เป็นความยาวของแต่ละช่วงนี้

$$\therefore \Delta x = (b-a)/n$$

เราเรียกเขตปลายของแต่ละช่วงว่า x_0, x_1, \dots, x_n โดยที่ $x_0 = a, x_1 = a + \Delta x, \dots, x_i = a + i \Delta x, \dots, x_{n-1} = a + (n-1) \Delta x, x_n = b$ และเรียกช่วง $[x_{i-1}, x_i]$ เป็นช่วงที่ i

เพราเวย่ f เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องบน $[a,b]$ ดังนั้น f ต่อเนื่องบนแต่ละช่วงทั้ง n ช่วงนี้ด้วย โดยทฤษฎีค่าปลายสุดในบทที่ 4 (Extreme Value Theorem) เราได้ว่า ในแต่ละช่วงแบ่งนี้ จะมีจุดซึ่งให้ค่าต่ำสุดของ f เรียกว่า c_i ฉะนั้น $f(c_i)$ เป็นค่าต่ำสุดสมมูลณ์บนช่วง $[x_{i-1}, x_i]$



รูป 6.1.2

จากรูป 6.1.2 พิจารณา พื้นที่ของรูปสี่เหลี่ยมผืนผ้า ซึ่งมีด้านกว้างของแต่ละรูปเท่ากับ Δx และความสูงเท่ากับค่าต่ำสุดสมมูลณ์ของ f ในแต่ละช่วง เราミニพื้นที่ของรูปสี่เหลี่ยมผืนผ้าดังกล่าวอยู่ที่ รูป และแต่รูปมีพื้นที่เท่ากับ

$$f(c_i) \Delta x \quad \text{เมื่อ } i = 1, 2, 3, \dots, n$$

ให้ S_n เป็นผลรวมของพื้นที่ของรูปสี่เหลี่ยมผืนผ้าทั้ง n รูปนี้

$$\therefore S_n = f(c_1) \Delta x + f(c_2) \Delta x + \dots + f(c_i) \Delta x + \dots + f(c_n) \Delta x$$

$$S_n = \sum_{i=1}^n f(c_i) \Delta x \quad (6.1.1)$$

$\therefore S_n$ เป็นพื้นที่ของรูปหลายเหลี่ยมที่บربุอยู่ในบริเวณ R และ $S_n \leq A$

ในรูป 6.1.2 บริเวณที่เราミニพื้นที่เท่ากับ S_n ตารางหน่วย ดังนั้นถ้าเราต้องการให้ S_n มีค่าเข้าใกล้ A หรือเข้าใกล้พื้นที่ได้เส้นโดยมากขึ้น ก็คือเราต้องแบ่งช่วงบิด $[a,b]$ ให้มีจำนวนช่วงที่แบ่งมากขึ้น หรือเพิ่มค่า n นั้นเอง เมื่อเพิ่มค่า n ค่าของ S_n หากรากษมการ (6.1.1) ก็จะเพิ่มขึ้น อย่างไรก็ตามแต่ละค่าของ S_n ที่เพิ่มขึ้น จะเพิ่มขึ้นไปจากเดิมน้อยมาก และมี A เป็นขอบเขตจากทฤษฎีใน advanced calculus เราได้ว่า เมื่อ f เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องบน $[a,b]$

และเมื่อ n เพิ่มขึ้นอย่างไม่มีขีดจำกัด ค่าของ S_n ซึ่งหาจากสมการ 6.1.1 จะเข้าใกล้ค่าคงที่ค่าหนึ่ง ซึ่งเราเรียกว่า ลิมิต และสิมิตรของ S_n นี้เองที่เราใช้นิยามพื้นที่ของบริเวณ R

นิยาม 6.1.1 ให้ f เป็น พังก์ชันต่อเนื่องบนช่วงบีด $[a,b]$ และ $f(x) > 0$ สำหรับทุกๆ ค่าของ x ใน $[a,b]$ และให้ R เป็นบริเวณซึ่งล้อมรอบด้วยเส้นโค้ง $y = f(x)$ แกน x และเส้นตรง $x = a, x = b$ แบ่งช่วงบีด $[a,b]$ เป็น n ช่วง โดยที่แต่ละช่วงยาวเท่ากัน $(b-a)/n$ ให้ $[x_{i-1}, x_i]$ เป็นช่วงที่ i และให้ $f(c_i)$ เป็นค่าสูงสุดสัมบูรณ์ของ f บนช่วงที่ i ดังนั้นพื้นที่ของบริเวณ R คือ

$$A = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n f(c_i) \Delta x \quad (6.1.2)$$

ความหมายของสมการ (6.1.2) คือ เราสามารถทำให้ค่า $\sum_{i=1}^n f(c_i) \Delta x - A$ น้อยเท่าที่เราพอใจโดยให้ค่าของ n เพิ่มขึ้นมากพอ

ในทำนองเดียวกัน เราสามารถนิยามพื้นที่ของรูปหลายเหลี่ยมที่บรรจบบริเวณ R โดยใช้ค่าสูงสุดสัมบูรณ์ของ f ในแต่ละช่วงที่เราแบ่งเป็นความสูงแทนที่เราจะใช้ค่าสูงสุดสัมบูรณ์ดังแสดงมาแล้ว และเพิ่มค่า n โดยไม่มีขีดจำกัด เราจะได้วาผิดรวมของพื้นที่ของรูปสี่เหลี่ยมผืนผ้าจะเข้าใกล้ค่าคงที่ค่าหนึ่ง นั้นก็คือ

$$A = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n f(d_i) \Delta x \quad (6.1.3)$$

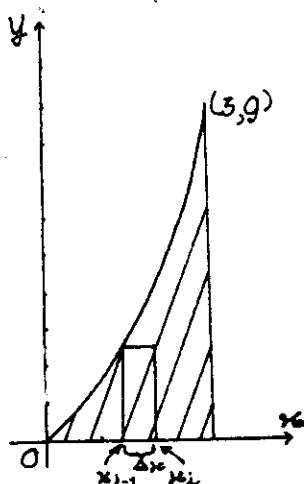
เมื่อ $f(d_i)$ คือ ค่าสูงสุดสัมบูรณ์ของ f บน $[x_{i-1}, x_i]$

แท้ที่จริงแล้ว ความสูงของรูปสี่เหลี่ยมผืนผ้าที่ใช้ไม่จำกัดว่าจะต้องเป็นค่าสูงสุด สัมบูรณ์หรือค่าสูงสุดสัมบูรณ์ของ f ในแต่ละช่วงแบ่ง แต่เราอาจเลือกใช้ค่าของ f ใด ๆ ในช่วงแบ่งนั้น ก็ได้ หันเพราะว่า เมื่อเราเพิ่มค่า n โดยไม่มีขีดจำกัดผิดรวมของพื้นที่ของรูปสี่เหลี่ยมผืนผ้าจะเข้าใกล้ค่าคงที่เดียวกัน หรือมีลิมิตเท่ากันนั้นเอง

ตัวอย่าง 6.1.4 จงหาพื้นที่ของบริเวณซึ่งล้อมรอบด้วยเส้นโค้ง $y = x^2$ แกน x และเส้นตรง $x = 3$ โดยหาพื้นที่ของรูปสี่เหลี่ยมผืนผ้าที่บรรจบภายใน

วิธีที่

พื้นที่ของบริเวณที่เราต้องการหาโดยนับ จุดบนเส้นให้ยึดผืนผ้าภายในแสดงใน
รูป 6.1.3 เราแบ่งช่วงปีด $[0, 3]$ เป็น n ช่วง โดยแต่ละ
ช่วงยาวเท่ากันและให้เท่ากับ Δx



รูป 6.1.3

$$\therefore \Delta x = \frac{3-0}{n} = \frac{3}{n}$$

ดังนั้น $x_0 = 0, x_1 = \Delta x, x_2 = 2 \Delta x, \dots, x_i = i \Delta x, \dots, x_n = 3$ เพราะว่า f เป็นฟังก์ชันที่เพิ่มขึ้นบน $[0, 3]$ ดังนั้น
ค่าต่ำสุดสัมบูรณ์ของ f บนช่วงที่ i หรือช่วง $[x_{i-1}, x_i]$ คือ
 $f(x_{i-1})$ จากสมการ (6.1.1) เราได้

$$A = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n f(x_{i-1}) \Delta x \quad (6.1.4)$$

$$\text{ เพราะว่า } x_{i-1} = (i-1) \Delta x \text{ และ } f(x) = x^2 \\ \therefore f(x_{i-1}) = [(i-1) \Delta x]^2$$

ดังนั้น

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n f(x_{i-1}) \Delta x &= \sum_{i=1}^n (i-1)^2 (\Delta x)^3 \\ &= \sum_{i=1}^n (i-1)^2 \frac{27}{n^3} \\ &= \frac{27}{n^3} \sum_{i=1}^n (i^2 - 2i + 1) \\ &= \frac{27}{n^3} \left(\sum_{i=1}^n i^2 - 2 \sum_{i=1}^n i + \sum_{i=1}^n 1 \right) \\ &= \frac{27}{n^3} \left(\frac{n(n+1)(2n+1)}{6} - 2 \cdot \frac{n(n+1)}{2} + n \right) \\ &= \frac{27}{n^3} \left[\frac{2n^3 + 3n^2 + n - 6n^2 - 6n + 6n}{6} \right] \end{aligned}$$

$$= \frac{9}{2} \cdot \frac{2n^2 - 3n + 1}{n^2}$$

จากสมการ 6.1.4 เราได้

$$\begin{aligned} A &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left[\frac{9}{2} \cdot \frac{2n^2 - 3n + 1}{n^2} \right] \\ &= \frac{9}{2} \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} \left(2 - \frac{3}{n} + \frac{1}{n^2} \right) \\ &= \frac{9}{2} (2 - 0 - 0) \\ &= 9 \end{aligned}$$

∴ พื้นที่ของบริเวณที่เราต้องการคือ 9 ตารางหน่วย

ตัวอย่างที่ 6.1.5 จงหาพื้นที่ของบริเวณในตัวอย่าง 6.1.4 แต่โดยการหาพื้นที่ของรูปสี่เหลี่ยมผืนผ้าที่บรรจุบริเวณที่เราต้องการหาพื้นที่

วิธีทำ เราเพียงแต่เปลี่ยนความสูงของรูปสี่เหลี่ยมผืนผ้าเป็นค่าสูงสุดสมบูรณ์ของ f ในตัวอย่าง 6.1.4 ดังนั้น สำหรับช่วงที่ i $[x_{i-1}, x_i]$ ค่าสูงสุดสมบูรณ์คือ $f(x_i)$ ซึ่งเท่ากับ $(i \Delta x)^2$ เพราะว่า $x_i = i \Delta x$

จากสมการ 6.1.3 เราได้

$$A = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n f(d_i) \Delta x \quad (6.1.5)$$

ในที่นี้

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n f(d_i) \Delta x &= \sum_{i=1}^n (i \Delta x)^2 \Delta x = \sum_{i=1}^n i^2 (\Delta x)^3 \\ &= \sum_{i=1}^n i^2 \frac{27}{n^3} \\ &= \frac{27}{n^3} \left[\frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \right] \\ &= \frac{9}{2} \frac{2n^2 + 3n + 1}{n^2} \end{aligned}$$

ดังนั้นจากสมการ 6.1.5 เราได้

$$A = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{9}{2} \cdot \left(2 + \frac{3}{n} + \frac{1}{n^2} \right)$$

$$= \frac{9}{2} (2 + 0 + 0) = 9$$

ซึ่งเท่ากับที่เราหาได้ในตัวอย่าง 6.1.4

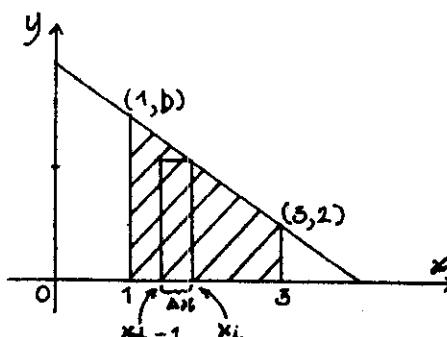
ตัวอย่างที่ 6.1.6 จงหาพื้นที่ของบริเวณ ซึ่งล้อมรอบเส้นตรง $2x + y = 8$ แกน x และเส้นตรง $x = 1$ และ $x = 3$ โดยใช้พื้นที่ของรูปสี่เหลี่ยมผืนผ้าที่บรรจุภายใน

วิธีที่ 1 บริเวณที่เราต้องการหาพื้นที่ และรูปของสี่เหลี่ยมผืนผ้าที่บรรจุภายใน แสดงใน

รูป 6.1.4 เราแบ่งช่วงบีต $[1, 3]$ เป็น n ช่วง แต่ละช่วงยาว Δx และเท่ากับ $\frac{3-1}{n} = \frac{2}{n}$

ดังนั้น $x_0 = 1, x_1 = 1 + \Delta x, x_2 = 1 + 2\Delta x, \dots, x_i = 1 + i\Delta x, \dots, x_n = 3$

รูป 6.1.4



จากสมการ $2x + y = 8$ เราได้ $y = 8 - 2x = f(x)$ และเพราะว่า $f(x)$ นี้ เป็นฟังก์ชันลดลงบนช่วงบีต $[1, 3]$ เราได้ว่า $f(x_i)$ เป็นค่าต่ำสุดสมมูลบนช่วง $[x_{i-1}, x_i]$ เพราะว่า $x_i = 1 + i\Delta x$ และ $f(x) = 8 - 2x$ ดังนั้น $f(x_i) = 8 - 2(1 + i\Delta x) = 6 - 2i\Delta x$

จากสมการ 6.1.4 เราได้

$$\begin{aligned}
 A &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n f(x_i) \Delta x \\
 &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n (6 - 2i\Delta x) \Delta x \\
 &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n [6 \Delta x - 2i (\Delta x)^2] \\
 &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n \left[6 \left(\frac{2}{n} \right) - 2i \left(\frac{2}{n} \right)^2 \right] \\
 &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left[\frac{12}{n} \cdot n - \frac{8}{n^2} \cdot \frac{n(n+1)}{2} \right] \\
 &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(8 - \frac{4}{n} \right) \\
 &= 8
 \end{aligned}$$

∴ พื้นที่ของบริเวณที่เราต้องการ = 8 ตารางหน่วย

รูปสี่เหลี่ยมคางหมูนี้ เราสามารถใช้สูตรหาพื้นที่ได้โดยตรงคือ

$A = \frac{1}{2} h (b_1 + b_2)$ เมื่อ h , b_1 และ b_2 เป็นความสูงและด้านคู่ขนานหันหงส์สองตามลำดับ

จากรูป 6.1.4 เราได้

$$\therefore A = \frac{1}{2} (2) (6 + 2) = 8$$

ซึ่งเท่ากับพื้นที่ที่เราหาได้โดยใช้ขั้นตอน 6.1.1

แบบทดสอบ 6.1

จงหาค่าของผลรวมยอดต่อไปนี้

1)
$$\sum_{i=1}^6 (3i-2)$$

2)
$$\sum_{i=2}^5 \frac{i}{i-1}$$

3)
$$\sum_{k=-2}^3 2^k$$

4)
$$\sum_{k=1}^4 \frac{(-1)^{k+1}}{k}$$

5)
$$\sum_{m=0}^4 \frac{m}{m+1}$$

จงหาค่าของผลรวมยอดต่อไปนี้โดยอาศัยคุณสมบัติ 6.1.2—6.1.5 และสูตร 6.1.6

—6.1.9

6)
$$\sum_{i=1}^{25} 2i (i-1)$$

7)
$$\sum_{i=1}^n (10^{i+1} - 10^i)$$

8)
$$\sum_{k=1}^{100} \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} \right)$$

จงหาพื้นที่ของบริเวณในข้อต่อไปนี้ โดยแบ่งบริเวณที่ต้องการหาพื้นที่เป็นรูปสี่เหลี่ยมผืนผ้าที่บรรจุภายในหรือล้อมรอบ นั่นก็คือใช้สมการ 6.1.2 หรือสมการ 6.1.3

9) บริเวณซึ่งล้อมรอบด้วย $y = x^2$ แกน x และเส้นตรง $x = 2$ ใช้สี่เหลี่ยมผืนผ้าที่บรรจุภายใน

10) บริเวณซึ่งล้อมรอบด้วย $y = 2x$ แกน x และเส้นตรง $x = 1$ และ $x = 4$ ใช้สี่เหลี่ยมผืนผ้าที่ล้อมรอบ

11) บริเวณซึ่งอยู่เหนือแกน x และอยู่ทางด้านขวาของเส้นตรง $x = 1$ ล้อมรอบด้วยแกน x เส้นตรง $x = 1$ และเส้นโค้ง $y = 4 - x^2$ ใช้สี่เหลี่ยมผืนผ้าที่บรรจุภายใน

12) บริเวณซึ่งล้อมรอบด้วย $y = x^3$ แกน x และเส้นตรง $x = -1$ และ $x = 2$ ใช้สี่เหลี่ยมผืนผ้าที่ล้อมรอบ

จงหาพื้นที่ของบริเวณในข้อต่อไปนี้โดยให้ความสูงของสี่เหลี่ยมผืนผ้ารูปที่ i คือ $f(x_i)$ เมื่อ x_i คือจุดกึ่งกลางของช่วงแบ่งที่ i นั้นก็คือ $x_i = \frac{1}{4}(x_i + x_{i-1})$

13) บริเวณในข้อ 9

14) บริเวณในข้อ 10

6.1 อินทิกรัลจำกัดเขต (The Definite Integral)

ในหัวข้อ 6.1 เราได้วัดพื้นที่ของบริเวณที่เราต้องการคือ

$$A = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n f(c_i) \Delta x \quad (6.2.1)$$

โดยมีเงื่อนไขว่า $f(x)$ เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องบนช่วงปิด $[a,b]$ และ $f(x) \geq 0$ สำหรับทุก x ใน $[a,b]$

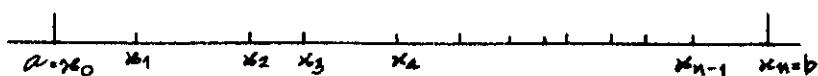
เพื่อให้มีนิยามอินทิกรัลจำกัดเขต เราจะพิจารณาวิธีการใหม่ในการหาลิมิต ซึ่งมีผลมาจากสมการ 6.2.1 เป็นเพียงกรณีพิเศษกรณีหนึ่ง ให้ f เป็นฟังก์ชัน ซึ่งมีนิยามบนช่วงปิด $[a,b]$ แบ่งช่วงปิด $[a,b]$ นี้เป็น n ช่วงโดยมีจุดแบ่งทั้ง $n-1$ จุด เป็นจุดใด ๆ ใน $[a,b]$ ให้ $x_0 = a$, $x_n = b$ และ x_1, x_2, \dots, x_{n-1} เป็นจุดระหว่างกลางและ

$$x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_{n-1} < x_n$$

เรียก $[x_{i-1}, x_i]$ ว่าเป็นช่วงที่ i และให้ $\Delta_i x$ เป็นความยาวของช่วงที่ i นั้นก็คือ

$$\Delta_i x = x_i - x_{i-1}$$

เราเรียกเซตของช่วงที่เราแบ่งในช่วงปิด $[a,b]$ นี้ว่า ผลแบ่งกัน (partition) ของ $[a,b]$ ให้ Δ เป็นเซตผลแบ่งกัน ดังนี้รูป 6.2.1 แสดงให้เห็นถึงผลแบ่งกันของ $[a,b]$



รูป 6.2.1

Δ นี้ชื่อว่า ผลแบ่งกัน ของช่วง $[a,b]$ เราเรียกความยาวของช่วงที่มีความยาวมากที่สุดใน n ช่วงนี้ว่าค่าประจាតหรือนอร์ม (Norm) เขียนแทนโดย $\|\Delta\|$ อย่างไรก็ตามช่วงที่มีความยาวมากที่สุดอาจมีมากกว่าหนึ่งช่วง

ต่อไปเราเลือกจุดในแต่ละช่วงของ Δ ให้ ε_i เป็นจุดใดๆ ที่เราเลือกในช่วง $[x_{i-1}, x_i]$

ดังนั้น $x_{i-1} < \varepsilon_i < x_i$ เมื่อ $i = 1, 2, 3, \dots, n$ และพิจารณาผลรวม $f(\varepsilon_1) \Delta_1 x$

$$+ f(\varepsilon_2) \Delta_2 x + \dots + f(\varepsilon_i) \Delta_i x + \dots + f(\varepsilon_n) \Delta_n x$$

$$= \sum_{i=1}^n f(\varepsilon_i) \Delta_i x \quad (6.2.2)$$

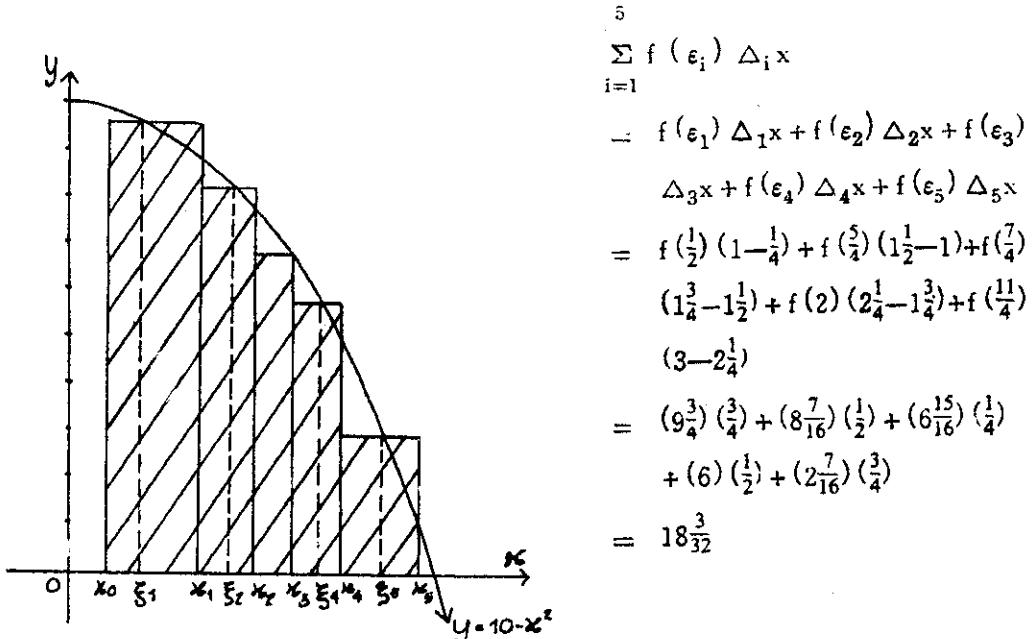
ผลรวมนี้มีค่าเรียกว่า ผลรวมรีมานน์ (Riemann sum) คือตามนักคณิตศาสตร์ George Friedrich Bernhard Riemann (1826–1866)

ตัวอย่างที่ 6.2.1 ให้ $f(x) = 10-x^2$ เมื่อ $\frac{1}{4} \leq x \leq 3$ เราจะหาผลรวมรีมานน์

สำหรับ f ใน $[\frac{1}{4}, 3]$ และมีผลແບ່ງກັນ Δ เป็น $x_0 = \frac{1}{4}$, $x_1 = 1$, $x_2 = 1\frac{1}{2}$, $x_3 = 1\frac{3}{4}$,

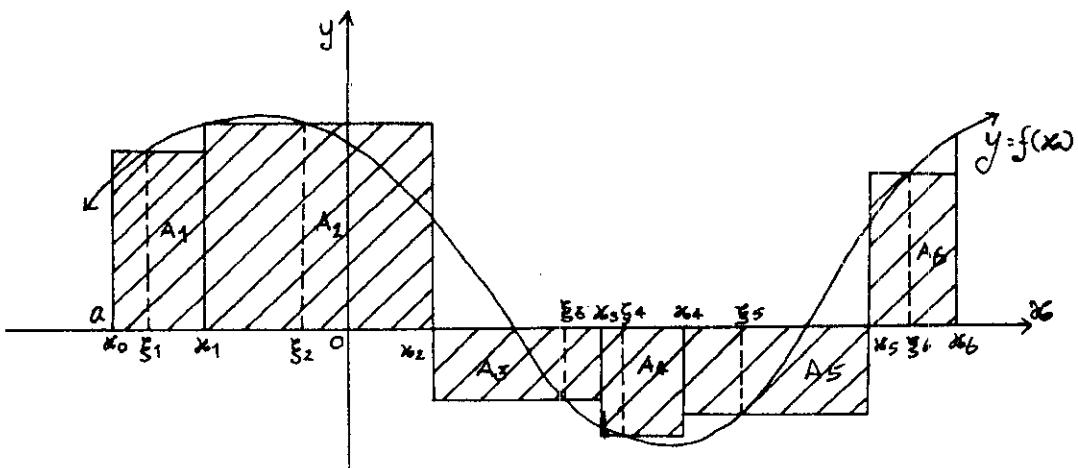
$x_4 = 2\frac{1}{4}$, $x_5 = 3$ และ $\varepsilon_1 = \frac{1}{2}$, $\varepsilon_2 = 1\frac{1}{4}$, $\varepsilon_3 = 1\frac{3}{4}$, $\varepsilon_4 = 2$, $\varepsilon_5 = 2\frac{3}{4}$ รูป 6.2.2

แสดงกราฟของ f ใน $[\frac{1}{4}, 3]$ และรูปสี่เหลี่ยมผืนผ้าห้า 5 ชิ้นพื้นที่ของแต่ละรูปคือเทอมในผลรวมรีมานน์



รูป 6.2.2

นอร์ม ของ Δ คือ ความยาวของช่วงที่ยาวที่สุด เราได้ $\|\Delta\| = \frac{3}{4}$ ในที่นี้
 สำหรับผลรวมรีมานน์นี้ เรายังไม่ได้จำกัดว่า $f(x) > 0$ จะนับบางค่าของ $f(\varepsilon_i)$
 อาจจะเป็นค่าลบก็ได้ ซึ่งในกรณีนี้ ผลรวมรีมานน์ในແງ່ເຮັດວຽກ គິດ ผลรวมของພື້ນທີຂອງ
 ຮູບສີເຫຼີຍມືນພັກທີ່ຍຸ້່ເຫັນວ່າ x ຮມມັບຄໍາລົບຂອງພື້ນທີຂອງຮູບສີເຫຼີຍມືນພັກທີ່ໄດ້ແກນ x
 ດັ່ງແສດງໃນຮູບ 6.2.3



ຮູບ 6.2.3

ໃນກົດ

6

$$\sum_{i=1}^6 f(\varepsilon_i) \Delta_i x = A_1 + A_2 - A_3 - A_4 - A_5 + A_6$$

ເພີ້ມວ່າ $f(\varepsilon_3), f(\varepsilon_4), f(\varepsilon_5)$ ເປັນຄໍາລົບເວົ້າຈຶ່ງໄດ້ພັນທີຂອງຮູບສີເຫຼີຍມືນພັກທີ່ສມນັກັນຄືອ
 A_3, A_4, A_5 ເປັນຄໍາລົບ

ຕ່ອງໄປເຮົາຈະພິຈາລະນາແລະໃຫ້ນິຍານສ້າງຮັບພັກໆຂັນ f ທີ່ອິນທິເກຣຕິເດີ (integrable)
 ບນ້າວົງນິດ $[a, b]$

ນິຍາມ 6.2.1 ໃຫ້ f ເປັນພັກໆຂັນ ຜົ່ນມີໂຄເມນທີ່ຮັມຫ່ວງນິດ $[a, b]$ ເຮັກລ່າວວ່າ f ເປັນ
 ພັກໆຂັນທີ່ອິນທິເກຣຕິເດີ (integrable function) ບນ້າວົງນິດ $[a, b]$ ເນື້ອນວ່າ ຄ່າຄົງທີ່ L

ຄ່າທີ່ນີ້ ທີ່ເຮັດວຽກໄດ້ກ່າວຂອງ

$$\left| \sum_{i=1}^n f(\varepsilon_i) \Delta_i x - L \right| \text{ ນ້ອຍ}$$

เท่าที่เราต้องการสำหรับทุก ๆ ผลแบ่งกัน Δ ซึ่งค่าประจำหัวอนของ $\|\Delta\|$
ของมันมีค่าน้อยพอและสำหรับทุก ๆ จุด ϵ_i ที่เราเลือกในช่วงบีด $[x_{i-1}, x_i]$
เมื่อ $i = 1, 2, \dots, n$

นิยาม 6.2.1 นักล่าวว่า, สำหรับฟังก์ชัน f ที่กำหนดมาให้ ซึ่งมีนิยามบนช่วงบีด $[a, b]$ เราสามารถทำให้ผลรวมรีمانน์ของ f เข้าใกล้ L มากเท่าที่เราพอใจโดยให้ $\|\Delta\|$ ของทุก ๆ ผลแบ่งกัน Δ ของ $[a, b]$ มีค่าน้อยพอ สำหรับทุก ๆ จุดเลือก ϵ_i ที่เราเลือกได้มันก็คือ $x_{i-1} \leq \epsilon_i \leq x_i$ ถ้า尼ยาม 6.2.1 เป็นจริง เราเขียน

$$\lim_{\|\Delta\| \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(\epsilon_i) \Delta_i x = L \quad (6.2.3)$$

นิยาม 6.2.2 ถ้า f เป็นฟังก์ชัน ซึ่งมีนิยามบนช่วงบีด $[a, b]$ ดังนั้น อินทิกรัล จำกัดเขต (definite integral) ของ f จาก a ถึง b เชียนแทนโดย $\int_a^b f(x) dx$ และมีค่ากำหนดโดย

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{\|\Delta\| \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(\epsilon_i) \Delta_i x \quad (6.2.4)$$

ถ้ามีคในสมการ 6.2.4 หาค้าได้ (exist)

หมายเหตุ ค่ากล่าวที่ว่า “ f เป็นฟังก์ชันที่อินทิเกรตได้บนช่วงบีด $[a, b]$ ” นี้มีความหมาย
เหมือนกันกับค่ากล่าวที่ว่า “อินทิกรัล จำกัดเขตของ f จาก a ถึง b หาค้าได้” ในสัญกรณ์ของ
อินทิกรัล จำกัดเขต $\int_a^b f(x) dx$ เราเรียก $f(x)$ ว่าตัวถูก อินทิเกรต (integrand)
และเรียก a, b ว่า ขีดจำกัดล่าง (lower limit) และขีดจำกัดบน (upper limit) ตามลำดับ
ส่วนสัญลักษณ์ \int นี้เราเรียกว่า เครื่องหมายอินทิกรัล ซึ่งเครื่องหมายนี้เราเคยใช้มาแล้ว
ในเรื่องการหาปริยานพื้นที่ในบทที่ 5 เนื่องจากที่เราใช้เครื่องหมายเดียวกัน เพราะว่า เรา
จะเห็นค่อไปในทฤษฎีหลักมูลของแคลคูลัส (fundamental theorem of the calculus) ในหัว
ข้อ 6.3 ว่า เราหาค่าของอินทิกรัล จำกัดเขตโดยการหาปริยานพื้นที่

บัญหาต่อไปที่เราต้องพิจารณาคือ เมื่อไร ค่า L ซึ่งคล้ายตามนิยาม 6.2.1 จะจะหาได้ (exist) นั่นก็คือ ภายใต้เงื่อนไขอะไรบ้าง ที่จะเป็นพังก์ชันที่อนทิกรตได้ ซึ่งก็คือทฤษฎีที่เราจะกล่าวถึงต่อไปนี้

ทฤษฎี 6.2.1 ถ้า f เป็นพังก์ชันต่อเนื่องบนช่วงปิด $[a, b]$ และ f เป็นพังก์ชันที่อนทิกรตได้บน $[a, b]$

พิสูจน์ของทฤษฎีนี้เราระยะไว้ แต่สามารถหาอ่านได้ในหนังสือ advanced calculus ทั่วๆ ไป

เราได้กล่าวตั้งแต่แรกของหัวข้อ 6.2 แล้วว่า ลิมิตในสมการ 6.2.1 ซึ่งใช้นิยาม พื้นที่ของบริเวณที่เราต้องการ เป็นกรณีพิเศษของลิมิตในนิยาม 6.2.2 ซึ่งใช้นิยามอนทิกรัล จำกัดเขต ใน การหาพื้นที่ถ้าช่วงปิด $[a, b]$ ถูกแบ่งเป็น n ช่วงเท่าๆ กัน ผลแบ่งกัน ของ $[a, b]$ แบบนี้ เราเรียกว่าเป็นแบบสม่ำเสมอ (regular partition) ถ้า Δx เป็น ความยาวของแต่ละช่วงแบ่งในผลแบ่งกันแบบสม่ำเสมอ และ แต่ละ $\Delta_i x = \Delta x$ และนอร์ม มีค่าเท่ากับ Δx ด้วย แทนค่าเหล่านี้ในสมการ 6.2.4 เราได้

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(\xi_i) \Delta x \quad (6.2.5)$$

$$\text{และ } \Delta x = \frac{b-a}{n} \quad (6.2.6)$$

$$\text{หรือ } n = \frac{b-a}{\Delta x} \quad (6.2.7)$$

จากสมการ 6.2.6 เราได้

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \Delta x = 0 \quad (6.2.8)$$

แล้วจากสมการ 6.2.7. เพราะว่า $b > a$ และ Δx เข้าใกล้ศูนย์ทางค่ามาก
(เพริ่งว่า $\Delta x > 0$) ดังนั้นเราได้

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} n = +\infty \quad (6.2.9)$$

จากลิมิตในสมการ (6.2.8) และ (6.2.9) เราสรุปได้ว่า

$$\Delta x \rightarrow 0 \text{ สมมูลกับ } n \rightarrow \infty \quad (6.2.10)$$

นั่นคือถ้าเราแบ่งช่วงบีด $[a, b]$ โดยให้ช่วงแบ่งมีความยาวช่วงน้อยมากจำนวนช่วงที่เราแบ่งก็ต้องมีจำนวนมาก หรือในทางกลับกัน ถ้าจำนวนช่วงแบ่งมีจำนวนมาก ความยาวของแต่ละช่วงแบ่งย่อมมีความยาวน้อยมาก

ดังนั้นจากสมการ 6.2.5 และ 6.2.10 เราได้

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n f(\varepsilon_i) \Delta x \quad (6.2.11)$$

และ ε_i ยังคงเป็นจุดใด ๆ ในช่วง $[x_{i-1}, x_i]$

สมการ 6.2.5 และสมการ 6.2.11 มีความสำคัญมาก เพราะว่าโดยทั่วไป เราใช้ผลแบ่งกันแบบสมำเสมอในการนำเอาอนทิกาวลจำกัดเขตไปประยุกต์ใช้

ถ้าเราเปรียบเทียบ ลิมิตจากนิยาม 6.1.1 หรือสมการ 6.2.1 ซึ่งคือพื้นที่ของบริเวณกับลิมิตทางด้านขวาจากสมการ 6.2.11 ซึ่งในกรณีแรก เรามี

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n f(c_i) \Delta x \quad (6.2.12)$$

เมื่อ $f(c_i)$ เป็นค่าต่ำสุดสมบูรณ์ของพังก์ชัน f บนช่วงบีด $[x_{i-1}, x_i]$ และในกรณีหลังเรามี

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n f(\varepsilon_i) \Delta x \quad (6.2.13)$$

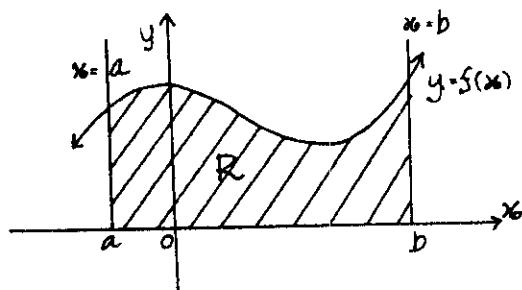
เมื่อ ε_i คือค่าใด ๆ ในช่วงบีด $[x_{i-1}, x_i]$

ด้วย เพราะว่า f เป็นพังก์ชันต่อเนื่องบน $[a, b]$ โดยทฤษฎี ๖.๒.๑ $\int_a^b f(x) dx$ หาค่าได้ จะนั่น อันทิกาวลจำกัดเขต คือ ลิมิตของผลรวมรีมานน์ของ f บน $[a, b]$ รวมทั้งลิมิตจาก (6.2.12) และ (6.2.13) ดังนั้นเราจะนิยามพื้นที่ของบริเวณใหม่ดังต่อไปนี้

นิยาม 6.2.3 ให้ f เป็นพั่งค์ชันต่อเนื่องบนช่วงปิด $[a, b]$ และ $f(x) \geq 0$ สำหรับทุกๆ x ใน $[a, b]$ ให้ R เป็นบริเวณ ซึ่งล้อมรอบด้วยเส้นตรง $y = f(x)$ แกน x และเส้นตรง $x = a$ และ $x = b$ ดังนั้น พื้นที่ของบริเวณ R คือ

$$A = \lim_{\Delta \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(\varepsilon_i) \Delta_i x = \int_a^b f(x) dx \quad (6.2.14)$$

นิยามนี้กล่าวว่า ถ้า $f(x) \geq 0$ สำหรับทุกๆ x ใน $[a, b]$ อินทิกรัลจำกัดเขต $\int_a^b f(x) dx$ มีความหมายในแง่ของเรขาคณิตว่า คือ ค่าที่วัดพื้นที่ของบริเวณ R ดังแสดงในรูป 6.2.4



รูป 6.2.4

เราจะใช้สมการ 6.2.11 หาค่าของ อินทิกรัลจำกัดเขต ดังแสดงในตัวอย่างต่อไปนี้

ตัวอย่างที่ 6.2.2 จงหาค่าของ อินทิกรัลจำกัดเขต $\int_1^3 x^2 dx$ และอธิบายความหมายของ อินทิกรัลนี้ในแง่ของเรขาคณิต

วิธีทำ เราแบ่งช่วง $[1, 3]$ เป็นแบบสมมาตร เดียวกันเป็น n ช่วงเด่นช่วงยาว $= \Delta x =$

$$\frac{3-1}{n} = \frac{2}{n}$$

ถ้าเราเลือก ε_i ให้เป็นจุดขวาสุดของแต่ละช่วงแบ่ง ดังนั้น $\varepsilon_1 = 1 + \frac{2}{n}, \varepsilon_2 = 1 + 2\left(\frac{2}{n}\right), \varepsilon_3 = 1 + 3\left(\frac{2}{n}\right), \dots, \varepsilon_i = 1 + i\left(\frac{2}{n}\right), \dots, \varepsilon_n = 1 + n\left(\frac{2}{n}\right) = 3$

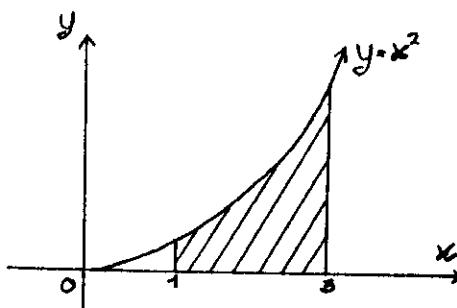
เพราะว่า $f(x) = x^2$ เราได้

$$f(\xi_i) = \left(1 + \frac{2i}{n}\right)^2 = \left(\frac{n+2i}{n}\right)^2$$

โดยใช้ สมการ 6.2.11 เราได้

$$\begin{aligned} \int_1^3 x^2 dx &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n \left(\frac{n+2i}{n}\right)^2 \frac{2}{n} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2}{n^3} \sum_{i=1}^n (n^2 + 4ni + 4i^2) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2}{n^3} \left(n^2 \sum_{i=1}^n 1 + 4n \sum_{i=1}^n i + 4 \sum_{i=1}^n i^2 \right) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2}{n^3} \left(n^2 \cdot n + 4n \cdot \frac{n(n+1)}{2} + \frac{4n(n+1)(2n+1)}{6} \right) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2}{n^3} \left(n^3 + 2n^3 + 2n^2 + \frac{2n(2n^2+3n+1)}{3} \right) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(6 + \frac{4}{n} + \frac{8n^2+12n+4}{3n^2} \right) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(6 + \frac{4}{n} + \frac{8}{3} + \frac{4}{n} + \frac{4}{3n^2} \right) \\ &= 6 + 0 + \frac{8}{3} + 0 + 0 \\ &= 8\frac{2}{3} \end{aligned}$$

เพราะว่า $f(x) = x^2 > 0$ บน $[1, 3]$ ค่า $8\frac{2}{3}$ คือพื้นที่ของบริเวณซึ่งล้อมรอบ
ด้วยเส้นโค้ง $y = x^2$ และเส้นตรง $x = 1$ และ $x = 3$ ดังแสดงในรูป 6.2.5



รูป 6.2.5

ในนิยาม 6.2.2 ช่วงบีด $[a, b]$ ถูกกำหนดมาให้ นั่นก็คือ $a < b$ ในกรณีที่ $a > b$ หรือเมื่อ $a = b$ เราสามารถนิยาม $\int_a^b f(x)dx$ ได้ดังต่อไปนี้

นิยาม 6.2.4 ถ้า $a > b$ แล้ว

$$\int_a^b f(x)dx = - \int_b^a f(x)dx$$

ถ้า $\int_b^a f(x)dx$ หากาได้

นิยาม 6.2.5 $\int_a^a f(x)dx = 0$ ถ้า $f(a)$ หากาได้

จากตัวอย่าง 6.2.2 เรายังได้ว่าการหาค่าของอนุพันธ์ที่กรัลจำกัดเขต ค่อนข้างจะยุ่งยากและยาว เพราะว่าเราต้องหาผลิตของผลรวม ในหัวข้อ 6.3 เราจะหัวเริมการที่ง่ายกว่านี้โดยอาศัยคุณสมบัติจากทฤษฎีต่อไปนี้

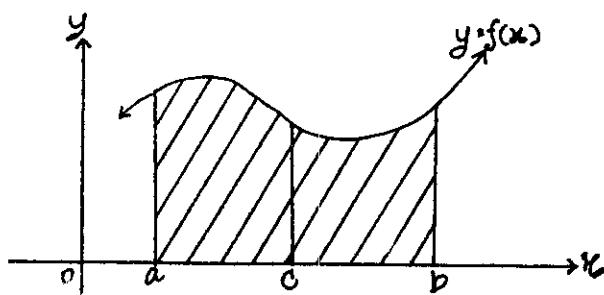
ทฤษฎี 6.2.2 ถ้า f เป็นฟังก์ชันที่อนุพันธ์ต่อเนื่องทุกจุด a, b, c อัญคตัยแล้ว

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$$

โดยไม่คำนึงถึงลำดับ ของ a, b, c

เราจะไม่กล่าวถึงพิสูจน์ของทฤษฎีนี้ แต่ตัวอย่างต่อไปจะแสดงให้เห็นความหมายของทฤษฎีในแง่ของเรขาคณิต เมื่อ $a < c < b$

ตัวอย่างที่ 6.2.3 ถ้า $f(x) > 0$ สำหรับทุกๆ x ใน $[a, b]$ และ $a < c < b$ แล้ว ทฤษฎี 6.2.2 กล่าวว่า พื้นที่ของบริเวณล้อมรอบด้วยเส้นโค้ง $y = f(x)$ แกน x จาก $x = a$ ถึง $x = b$ เท่ากับผลรวมของพื้นที่จาก a ถึง c และจาก c ถึง b ดังแสดงในรูป 6.2.6



รูป 6.2.6

แบบฝึกหัด 6.2

จงหาผลรวมรีมานน์ สำหรับพังก์ชันต่อไปนั้นช่วงปิด Δ โดยใช้ผลแบ่งกัน Δ และจุด ϵ_i ที่กำหนดให้ และเขียนกราฟของพังก์ชันบนช่วงปิดที่กำหนดมาให้นี้ รวมทั้งเขียนรูปสี่เหลี่ยมผืนผ้าที่ i ซึ่งเป็นเทอมหนึ่งในผลรวมรีมานน์

$$1) f(x) = x^2, 0 < x < 3; \quad \text{สำหรับ } \Delta : x_0 = 0, x_1 = \frac{1}{2}, x_2 = 1\frac{1}{4},$$

$$x_3 = 2\frac{1}{4}, x_4 = 3; \quad \epsilon_1 = \frac{1}{4}, \epsilon_2 = 1, \epsilon_3 = 1\frac{1}{2}, \epsilon_4 = 2\frac{1}{2}$$

$$2) f(x) = \frac{1}{x}, 1 < x < 3; \quad \text{สำหรับ } \Delta : x_0 = 1, x_1 = \frac{2}{3}, x_2 = 2\frac{1}{4},$$

$$x_3 = 2\frac{2}{3}, x_4 = 3; \quad \epsilon_1 = 1\frac{1}{4}, \epsilon_2 = 2, \epsilon_3 = 2\frac{1}{2}, \epsilon_4 = 2\frac{3}{4}$$

$$3) f(x) = x^2 - x + 1, 0 < x < 1; \quad \text{สำหรับ } \Delta : x_0 = 0, x_1 = 0.2,$$

$$x_2 = 0.5, x_3 = 0.7, x_4 = 1; \quad \epsilon_1 = 0.1, \epsilon_2 = 0.4, \epsilon_3 = 0.6, \epsilon_4 = 0.9$$

จงหาค่าของอินทิเกรลจำกัดเขตในข้อต่อไปนี้ ตามวิธีในตัวอย่าง 6.2.2

$$4) \int_0^3 x^2 dx$$

$$5) \int_0^1 (x^2 - x + 1) dx$$

$$6) \int_{-2}^2 (x^3 + 1) dx$$

จงหาพื้นที่ของบริเวณในข้อต่อไปนี้ โดย ก) เขียนพื้นที่ของบริเวณในรูปของสมบูรณ์ของผลรวมรีมานน์โดยใช้ผลแบ่งกันแบบสมมาตร ข) เขียนลิมิตนี้ในรูปของอินทิเกรลจำกัดเขต ข) หากค่าของอินทิเกรลจำกัดเขตนี้ ตามวิธีในตัวอย่าง 6.2.2 โดยเลือก ϵ_i ที่เหมาะสม และเขียนรูปแสดงบริเวณด้วย

$$7) \text{ ล้อมรอบด้วย } \text{ เส้นตรง } y = 2x - 1 \text{ แกน } x \text{ และเส้นตรง } x = 1 \text{ และ } x = 5$$

$$8) \text{ ล้อมรอบด้วย } \text{ เส้นโค้ง } y = 4 - x^2 \text{ แกน } x \text{ และเส้นตรง } x = 1 \text{ และ } x = 2$$

$$9) \text{ ล้อมรอบด้วย } \text{ เส้นโค้ง } y = 12 - x + x^2 \text{ แกน } x \text{ และเส้นตรง } x = -3 \text{ และ } x = 2$$

$$10) \text{ จงแสดงว่าถ้า } f \text{ เป็นพังก์ชันต่อเนื่องบน } [-1, 2] \text{ และ }$$

$$\int_{-1}^{-2} f(x) dx + \int_2^0 f(x) dx + \int_0^1 f(x) dx + \int_{-1}^{-1} f(x) dx = 0$$

6.3 กฏหลักมูลของแคลคูลัส (The Fundamental Theorem of The Calculus)

กฏหลักมูลนี้สืบเนื่องมาจาก การศึกษาของ Newton และ Leibnitz ซึ่งท่านทั้งสองต่างก็พบร่วมกันว่าสามารถนำหลักการของแคลคูลัสมาใช้ในการหาพื้นที่ของบริเวณล้อมรอบด้วยเส้นโค้งหรือเขตของเส้นโค้งโดยการหาค่าของอินทิกรัลจำกัดเขต หรือการหาปัจจัยานุพันธ์ของวนนี้ที่เรียกว่าเป็นที่มาของกฏหลักมูลของแคลคูลัส (The fundamental Theorem of The calculus) ก่อนที่เราจะกล่าวถึงทฤษฎีและการพิสูจน์ของกฏหลักมูลนี้เราจะพิจารณา อินทิกรัลจำกัดเขตซึ่งมีข้อจำกัดบนเป็นตัวแปร

ให้ f เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องบนช่วงบีด $[a, b]$ ดังนั้น ค่าของอินทิกรัลจำกัดเขต $\int_a^b f(x) dx$ ขึ้นอยู่กับฟังก์ชัน f และค่าของ a และ b เท่านั้น และไม่ขึ้นอยู่กับสัญลักษณ์ x ซึ่งในที่นี้ทำหน้าที่เป็นตัวแปรอิสระ นั่นก็คือ

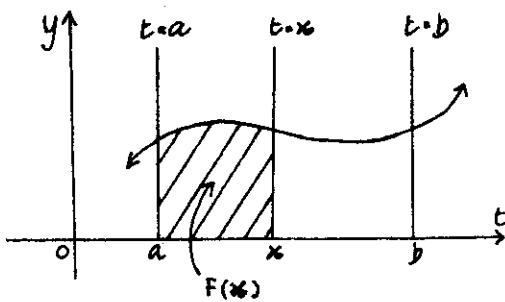
$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^b f(u) du = \int_a^b f(t) dt$$

เราเรียกตัวแปรอิสระในเครื่องหมายอินทิกรัลนี้ว่า ตัวแปรทุน (dummy variable) ถ้า f เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องบนช่วงบีด $[a, b]$ ดังนั้น โดยทฤษฎี 6.2.1 และนิยามของ อินทิกรัลจำกัดเขต $\int_a^b f(x) dx$ หากได้ (exist) และค่าของอินทิกรัลจำกัดเขตนี้มี เพียงค่าเดียวเท่านั้น ถ้า x เป็นค่ากำหนดใน $[a, b]$ และ f ต่อเนื่องบน $[a, x]$ ด้วย เพราะว่า f ต่อเนื่องบน $[a, b]$ จะนั้น $\int_a^x f(t) dt$ หากได้แล้วมีเพียงค่าเดียวเท่านั้น และค่า นั้นขึ้นอยู่กับ x ดังนั้น เราให้ $\int_a^x f(t) dt$ เป็นนิยามของฟังก์ชัน F ซึ่งมีโดเมนเป็น $[a, b]$ และค่าของฟังก์ชัน F ที่ค่าใด ๆ ของ x ใน $[a, b]$ คือ

$$F(x) = \int_a^x f(t) dt \quad (6.3.1)$$

สังเกตได้ว่า เมื่อขีดจำกัดของอินทิกรัลจำกัดเขตเป็นตัวแปร เราใช้สัญลักษณ์ หรือตัวแปรตัวอื่นในตัวถูกอินทิเกรต ในที่นี้ เราใช้ t เป็นตัวแปรอิสระ ในตัวถูกอินทิเกรต

ถ้าในสมการ 6.3.1 $f(t) > 0$ สำหรับทุก ๆ ค่าของ t ใน $[a, b]$ และ ค่าของ $F(x)$ มีความหมายคือ เป็นพื้นที่ของบริเวณซึ่งล้อมรอบโดยเส้นโค้ง $y = f(t)$ แกน t และเส้นตรง $t = a$ และ $t = x$ ดังแสดงในรูป 6.3.1 และ $F(a) = \int_a^a f(t) dt$ ซึ่งโดยนิยาม 6.2.5 มีค่าเท่ากับศูนย์



รูป 6.3.1

ต่อไปเราต้องการที่จะแสดงว่า F ซึ่งเป็นพัธ์ชันต่อเนื่องบน $[a, b]$ และมีนิยาม คังในสมการ 6.3.1 เป็นพัธ์ชันที่หาอนุพันธ์ได้บน $[a, b]$ ยังไงกันนั้น เราต้องการที่จะ แสดงว่าสำหรับค่าใด ๆ ของ x ใน $[a, b]$

$$F'(x) = f(x) \quad (6.3.2)$$

พิจารณา x_1 และ $x_1 + \Delta x$ ใน $[a, b]$ เรายัง

$$F(x_1) = \int_a^{x_1} f(t) dt$$

และ

$$F(x_1 + \Delta x) = \int_a^{x_1 + \Delta x} f(t) dt$$

ดังนั้น

$$F(x_1 + \Delta x) - F(x_1) = \int_a^{x_1 + \Delta x} f(t) dt - \int_a^{x_1} f(t) dt \quad (6.3.3)$$

โดยทฤษฎี 6.2.2

$$\int_a^{x_1} f(t) dt + \int_{x_1}^{x_1 + \Delta x} f(t) dt = \int_a^{x_1 + \Delta x} f(t) dt$$

หรือ

$$\int_a^{x_1 + \Delta x} f(t) dt - \int_a^{x_1} f(t) dt = \int_{x_1}^{x_1 + \Delta x} f(t) dt \quad (6.3.4)$$

แทนค่าจากสมการ 6.3.4 ในสมการ 6.3.3 เรายังได้

$$F(x_1 + \Delta x) - F(x_1) = \int_{x_1}^{x_1 + \Delta x} f(t) dt$$

หรือ ถ้าหากเราโดยคิดด้วย Δx เราได้

$$\frac{F(x_1 + \Delta x) - F(x_1)}{\Delta x} = \frac{\int_{x_1}^{x_1 + \Delta x} f(t) dt}{\Delta x}$$

ให้ $\Delta x \rightarrow 0$ เราได้ลิมิต

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{F(x_1 + \Delta x) - F(x_1)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\int_{x_1}^{x_1 + \Delta x} f(t) dt}{\Delta x} \quad (6.3.5)$$

ซึ่งค่าทางซ้ายของสมการ 6.3.5 คือ $F'(x_1)$ ถ้าเราสามารถแสดงว่าค่าทางขวาของสมการ 6.3.5 คือ $f(x_1)$ นั้นก็คือเราได้แสดงว่าสมการ 6.3.2 เป็นจริงสำหรับค่าใด ๆ ของ x ใน $[a, b]$ อย่างไรก็ตามเราจะไม่พิสูจน์ในที่นี้ เพราะว่าอยู่ยากจนเกินไปในระดับนี้ แต่เราสามารถแสดงในแบบเรขาคณิต

พิจารณา $f(t) \geq 0$ และ $\Delta x > 0$ ดังนั้น $\int_{x_1}^{x_1 + \Delta x} f(t) dt$ คือพื้นที่ของบริเวณซึ่งล้อมรอบด้วยเส้นโถง $y = f(t)$ แกน t และเส้นตรง $t = x_1$ และ $t = x_1 + \Delta x$ ดังรูป 6.3.2 ให้ m และ M หน่วยเป็นค่าต่ำสุดและสูงสุดของ $f(t)$ บนช่วงบีด $[x_1, x_1 + \Delta x]$ ตามลำดับ ดังนั้น

$$m \Delta x \leq \int_{x_1}^{x_1 + \Delta x} f(t) dt \leq M \Delta x$$

หรือ

$$m < \frac{\int_{x_1}^{x_1 + \Delta x} f(t) dt}{\Delta x} < M \quad (6.3.6)$$

ถ้า Δx เข้าใกล้ 0 ทางขวาแล้วเพราะว่า f เป็นพวงกษ์ชันต่อเนื่องบน $[x_1, x_1 + \Delta x]$ ทั้ง m และ M เข้าใกล้ $f(x_1)$ ดังนั้นจากสมการ (6.3.6) เราได้

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0^+} \frac{\int_{x_1}^{x_1 + \Delta x} f(t) dt}{\Delta x} = f(x_1) \quad (6.3.7)$$

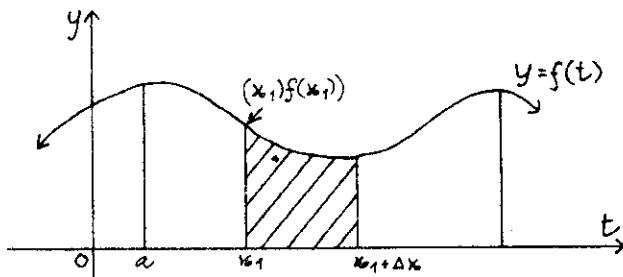
ในกรณีเดียวกัน ถ้า $\Delta x < 0$ แล้วเราพิจารณาช่วงบีด $[x_1 + \Delta x, x_1]$ และให้ Δx เข้าใกล้ 0 ทางซ้าย เราได้

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0^-} \frac{\int_{x_1}^{x_1 + \Delta x} f(t) dt}{\Delta x} = f(x_1) \quad (6.3.8)$$

เราสรุปจากสมการ 6.3.7 และสมการ 6.3.8 ได้ว่าค่าทางด้านขวาของสมการ 6.3.5 คือ $f(x_1)$ ดังนั้นจากสมการ 6.3.5 เราได้

$$F'(x_1) = f(x_1)$$

เพราะว่า x_1 เป็นค่าใดๆ $[a, b]$ นั่นก็คือ เราได้แสดงว่าสมการ 6.3.2 เป็นจริง และสรุปผลยังนี้ในทฤษฎีต่อไปนี้



รูป 6.3.2

ทฤษฎี 6.3.1 ให้ f เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องบนช่วงปิด $[a, b]$ และให้ x เป็นค่าใดๆ ใน $[a, b]$ ถ้า F เป็นฟังก์ชันซึ่งมีนิยาม คือ

$$F(x) = \int_a^x f(t) dt$$

แล้ว

$$F'(x) = f(x) \quad (6.3.9)$$

ทฤษฎีนี้กล่าวว่า อินทิกรัลจำกัดเขต $\int_a^x f(t) dt$ ซึ่งมีขีดจำกัดบนเป็นตัวแปร x คือ ปฏิยานุพันธ์ของ f (antiderivative of f)

ทฤษฎี 6.3.2 ทฤษฎีกฏหมายลักษณะของแคลคูลัส (Fundamental Theorem of the Calculus) ให้ f เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องบนช่วงปิด $[a, b]$ และ g เป็นฟังก์ชันซึ่ง

$$g'(x) = f(x) \quad (6.3.10)$$

สำหรับทุกๆ x ใน $[a, b]$ และ

$$\int_a^b f(t) dt = g(b) - g(a)$$

หมายเหตุ ถ้า $x = a$ อนุพันธ์ในสมการ 6.3.9 และสมการ 6.3.10 อาจเป็นอนุพันธ์ทางด้านซ้ายของ a และถ้า $x = b$ อนุพันธ์ในสมการ 6.3.9 และสมการ 6.3.10 อาจเป็นอนุพันธ์ทางด้านซ้ายของ b

พิสูจน์ ถ้า f เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องสำหรับทุกๆ ค่าใน $[a, b]$ จากทฤษฎี 6.3.1 เราทราบว่า อินทิกรัลจำกัดเขต $\int_a^x f(t) dt$ ซึ่งมีขีดจำกัดบนเป็นตัวแปร x คือนิยามของฟังก์ชัน F ซึ่งอนุพันธ์ของมันบน $[a, b]$ คือ f เพราะว่าโดยสมมุติฐาน $g'(x) = f(x)$ และจากทฤษฎี 5.2.1 เราได้

$$g(x) = \int_a^x f(t) dt + K \quad (6.3.11)$$

เมื่อ K เป็นค่าคงที่ใดๆ

ให้ $x = a$ และ $x = b$ ในสมการ 6.3.11 เราได้

$$g(b) = \int_a^b f(t) dt + K \quad (6.3.12)$$

และ

$$g(a) = \int_a^a f(t) dt + K \quad (6.3.13)$$

จากสมการ 6.3.12 และสมการ 6.3.13 เราได้

$$g(b) - g(a) = \int_a^b f(t) dt - \int_a^a f(t) dt$$

แต่โดยนิ�าม 6.2.5 $\int_a^a f(t) dt = 0$ ดังนั้น

$$g(b) - g(a) = \int_a^b f(t) dt$$

ซึ่งก็คือสิ่งที่เราต้องการพิสูจน์

ดังนั้นต่อไปนี้ เราใช้ทฤษฎี 6.3.2 หากค่าของอินทิกรัลจำกัดเขตและใช้สัญกรณ์ $g(x)]_a^b$ แทน $[g(b) - g(a)]$

ตัวอย่าง 6.3.1 เราใช้กฎหลักของแคลคูลัสหาค่าของ $\int_1^3 x^2 dx$ ได้ดังต่อไปนี้

วิธีทำ ในที่นี้ $f(x) = x^2$ เราทราบว่าปฐมอนุพันธ์ของ x^2 คือ $\frac{1}{3}x^3$ ดังนั้นเราให้

$$g(x) = \frac{x^3}{3}$$

โดยทฤษฎี 6.3.2 เราได้

$$\int_1^3 x^2 dx = \left[\frac{x^3}{3} \right]_1^3 = [9 - \frac{1}{3}] = 8\frac{2}{3}$$

ซึ่งค่าอนันต์เท่ากับค่าที่เราหามาแล้วในตัวอย่าง 6.2.2

เนื่องด้วย อินทิกรัลจำกัดเขตและปฐมอนุพันธ์คู่กันมีความเกี่ยวเนื่องกัน เราจึงได้ใช้เครื่องหมายอินทิกรัลในสัญกรณ์ $\int f(x) dx$ แทนปฐมอนุพันธ์ แต่ต่อไปนี้เราจะเลิกใช้คำว่าปฐมอนุพันธ์และการหาปฐมอนุพันธ์ และเรารอเรียก $\int f(x) dx$ ว่า อินทิกรัลไม่จำกัดเขต (indefinite integral) ของ $f(x) dx$ และเรียกขบวนการที่ใช้หาค่าของอินทิกรัลไม่จำกัดเขตว่า การอินทิเกรต (integration)

ข้อแตกต่างระหว่าง อินทิกรัลไม่จำกัดเขตและอินทิกรัลจำกัดเขต คือ อินทิกรัลไม่จำกัดเขต $\int f(x) dx$ มีนิยามเป็นพังก์ชัน g ซึ่งอนุพันธ์ของ g คือ $g'(x) = f(x)$ ในขณะที่ อินทิกรัลจำกัดเขต คือ ค่าคงที่ที่ซึ่งขึ้นอยู่กับพังก์ชัน f และค่า a และ b และมีนิยามเป็นลิมิตของผลรวมรีมานน์และเราไม่ได้อ้างถึงการหาอนุพันธ์ในนิยามของอินทิกรัลจำกัดเขต

สำหรับค่าทั่วไปของอินทิกรัลไม่จำกัดเขต จะเกี่ยวเนื่องกับค่าคงที่ C เช่น

$$\int x^2 dx = \frac{x^3}{3} + C$$

ทั้งนี้เพราะว่า อนุพันธ์ของ $\frac{x^3}{3} + 1, \frac{x^3}{3} - 5, \frac{x^3}{3} + 4, \dots, \dots$ ต่างก็เท่ากับ x^2

ดังนั้น เราเขียน C แทนคงที่ $1, -5, 4, \dots$ เหล่านี้ และเรียกค่าคงที่ C นี้ว่า ค่าคงที่ของการอินทิเกรต (constant of integration) ในการหาค่าของอินทิกรัลจำกัดเขตโดยใช้ทฤษฎีกฎหลักมูล เราไม่จำเป็นต้องคำนึงถึงค่าคงที่ C นี้ เพราะว่า โดยทฤษฎีกฎหลักมูล เราสามารถเลือกปฐมอนุพันธ์ใดๆ รวมทั้งในกรณีที่ $C = 0$

ตัวอย่าง 6.3.2 จงหาค่าของ $\int_1^2 (x^2 - 2x + 4) dx$

วิธีทำ

$$\begin{aligned}\int_1^2 (x^2 - 2x + 4) dx &= \int_1^2 x^2 dx - 2 \int_1^2 x dx + 4 \int_1^2 dx \\&= \left[\frac{x^3}{3} - 2 \cdot \frac{x^2}{2} + 4x \right]_1^2 \\&= \left(\frac{8}{3} - 4 + 8 \right) - \left(\frac{1}{3} - 1 + 4 \right) \\&= \frac{10}{3}\end{aligned}$$

ตัวอย่าง 6.3.3 จงหาค่าของ $\int_{-1}^1 (x^{4/3} + 4x^{1/3}) dx$

วิธีทำ

$$\begin{aligned}\int_{-1}^1 (x^{4/3} + 4x^{1/3}) dx &= \left[\frac{3}{7} x^{7/3} + 4 \cdot \frac{3}{4} x^{4/3} \right]_{-1}^1 \\&= \left(\frac{3}{7} + 3 \right) - \left(-\frac{3}{7} + 3 \right) \\&= \frac{6}{7}\end{aligned}$$

ตัวอย่าง 6.3.4 จงหาค่าของ $\int_0^2 2x^2 \sqrt{x^3 + 1} dx$

วิธีทำ

$$\begin{aligned}\int_0^2 2x^2 \sqrt{x^3 + 1} dx &= \frac{2}{3} \int_0^2 \sqrt{x^3 + 1} \cdot 3x^2 dx \\&= \frac{2}{3} \left[\frac{(x^3 + 1)^{3/2}}{\frac{3}{2}} \right]_0^2 \\&= \frac{4}{9} (8 + 1)^{3/2} - \frac{4}{9} (0 + 1)^{3/2} \\&= \frac{4}{9} (27 - 1) = \frac{104}{9}\end{aligned}$$

ตัวอย่าง 6.3.5 จงหาค่าของ $\int_0^3 x \sqrt{1+x} dx$

วิธีทำ ในการหาค่าของ $\int x \sqrt{1+x} dx$

เราให้ $u = \sqrt{1+x}$, $u^2 = 1+x$, $x = u^2 - 1$, $dx = 2udu$

แทนค่าเหล่านี้ เราก็ได้

$$\begin{aligned}
 \int x \sqrt{1+x} dx &= \int (u^2 - 1) u (2u du) \\
 &= 2 \int (u^4 - u^2) du \\
 &= \frac{2}{5} u^5 - \frac{2}{3} u^3 + C \\
 &= \frac{2}{5} (1+x)^{\frac{5}{2}} - \frac{2}{3} (1+x)^{\frac{3}{2}} + C
 \end{aligned}$$

ดังนั้น

$$\begin{aligned}
 \int_0^3 x \sqrt{1+x} dx &= \left[\frac{2}{5} (1+x)^{\frac{5}{2}} - \frac{2}{3} (1+x)^{\frac{3}{2}} \right]_0^3 \\
 &= \frac{2}{5} (4)^{\frac{5}{2}} - \frac{2}{3} (4)^{\frac{3}{2}} - \frac{2}{5} (1)^{\frac{5}{2}} + \frac{2}{3} (1)^{\frac{3}{2}} \\
 &= \frac{64}{5} - \frac{16}{3} - \frac{2}{5} + \frac{2}{3} \\
 &= \frac{116}{15}
 \end{aligned}$$

หรือเรารายจะเปลี่ยนค่าของ x จำกัดตามตัวแปร u และหาค่าของ $\int_0^3 x \sqrt{1+x} dx$
ได้ทันที นั่นก็คือ

$$\text{จาก } u = \sqrt{1+x}$$

$$\text{เมื่อ } x = 0, u = 1$$

$$\text{และ เมื่อ } x = 3, u = 2$$

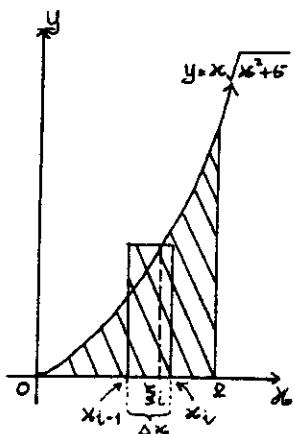
ดังนั้นเรามี

$$\begin{aligned}
 \int_0^3 x \sqrt{1+x} dx &= 2 \int_1^2 (u^4 - u^2) du \\
 &= \left[\frac{2}{5} u^5 - \frac{2}{3} u^3 \right]_1^2 \\
 &= \frac{64}{5} - \frac{16}{3} - \frac{2}{5} + \frac{2}{3} \\
 &= \frac{116}{15}
 \end{aligned}$$

ตัวอย่าง 6.3.6 จงหาพื้นที่ของบริเวณในจตุรากที่ 1

ซึ่งล้อมรอบด้วย เส้นโค้ง $y = x \sqrt{x^2 + 5}$, แกน x และเส้นตรง $x = 2$

วิธีทำ บริเวณที่เราต้องการหาพื้นที่ แสดงในรูป 6.3.3



เราแบ่งช่วงบีด $[0, 2]$ เป็นผลแบ่งกันแบบ
สม่ำเสมอ โดยที่ความกว้างของแต่ละช่วงแบ่ง
คือ Δx และความสูงของรูปสี่เหลี่ยมผืนผ้า
รูปที่ i คือ $e_i \sqrt{e_i^2 + 5}$ หน่วย เมื่อ e_i
เป็นจุดใดๆ ในช่วงที่ i ดังนั้นพื้นที่ของรูป^{สี่เหลี่ยมผืนผ้าที่ i} คือ $e_i \sqrt{e_i^2 + 5} \Delta x$
และผลรวมของพื้นที่ของรูปสี่เหลี่ยมผืนผ้าทั้ง n
รูป คือ

$$\sum_{i=1}^n e_i \sqrt{e_i^2 + 5} \Delta x$$

ซึ่งคือ ผลรวมรีمانน์ ลิมิตของผลรวมนี้เมื่อ Δx เข้าใกล้ศูนย์ (หรือ $n \rightarrow \infty$) คือ พื้นที่
ของบริเวณที่เราต้องการ แสดงลิมิตของผลรวมรีمانน์นี้คือ อินทิกรัลจำกัดเขต ซึ่งหาได้โดย^{ทฤษฎีกีฏภัณฑ์ของแคลคูลัส}

ให้ A เป็นตารางหน่วยของพื้นที่ของบริเวณในรูป 6.3.3 ดังนี้

$$\begin{aligned} A &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n e_i \sqrt{e_i^2 + 5} \Delta x \\ &= \int_0^2 x \sqrt{x^2 + 5} dx \\ &= \int_0^2 \sqrt{x^2 + 5} (2x dx) \\ &= \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} (x^2 + 5)^{\frac{3}{2}} \Big|_0^2 \\ &= \frac{1}{3} [9^{\frac{3}{2}} - 5^{\frac{3}{2}}] \\ &= \frac{1}{3} (27 - 5\sqrt{5}) \end{aligned}$$

ดังนั้น พื้นที่ของบริเวณที่เราต้องการ คือ $\frac{1}{3} (27 - 5\sqrt{5})$ ตารางหน่วย

แบบฝึกหัด 6.3

จงหาค่าของอนิพิกรัลจำกัดเขตในข้อต่อไปนี้ โดยใช้ทฤษฎีกฏหลักมูลของแคลคูลัส

- 1) $\int_{-2}^2 (x^3 + 1) dx$
- 2) $\int_0^1 (x^2 - x + 1) dx$
- 3) $\int_1^3 \frac{2x^2 + 1}{x^2} dx$
- 4) $\int_1^{10} \sqrt{3y - 1} dy$
- 5) $\int_{-1}^3 \frac{dy}{(y+2)^3} dy$
- 6) $\int_{-2}^0 3u \sqrt{4-u^2} du$
- 7) $\int_1^2 \frac{udu}{(3u^2 - 1)^2}$
- 8) $\int_0^1 \frac{z^2 + 2z}{3\sqrt{z^3 + 3z^2 + 1}} dz$
- 9) $\int_2^3 z^2 \sqrt{z-2} dz$
- 10) $\int_0^{15} \frac{x}{(1+x)^{3/4}} dx$
- 11) $\int_{-2}^5 |x-3| dx$
- 12) $\int_{-1}^1 \sqrt{|x| - x} dx$
- 13) $\int_0^1 \sqrt{x} \sqrt{1+x-\sqrt{x}} dx$

จงหาพื้นที่ของบริเวณในข้อต่อไปนี้ โดยเขียนพื้นที่ในรูปของอนิพิกรัลจำกัดเขต และหาค่าของอนิพิกรัลจำกัดเขตโดยใช้ทฤษฎีกฏหลักมูลของแคลคูลัส พิรอลงานเขียนรูปแสดงบริเวณที่หาพื้นที่ด้วย

- 14) ล้อมรอบด้วย $y = 4x - x^2$ แกน x เส้นตรง $x = 1$ และ $x = 3$
- 15) ล้อมรอบด้วย $y = x^2 - 2x + 3$ แกน x เส้นตรง $x = -2$ และ $x = 1$
- 16) ล้อมรอบด้วย $y = \sqrt{x+1}$ แกน x แกน y และเส้นตรง $x = 8$
- 17) ล้อมรอบด้วย $y = x \sqrt{x^2 + 9}$ แกน x แกน y และเส้นตรง $x = 4$

6.4 พื้นที่ของบริเวณในระนาบ (Area of a region in a plane)

จากนิยาม 6.2.3 เรายารับว่า ถ้า f เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องบนช่วงบีต $[a,b]$ และ $f(x) \geq 0$ สำหรับทุก ๆ ค่าของ x ใน $[a,b]$ และพื้นที่ของบริเวณซึ่งล้อมรอบด้วยเส้นโค้ง $y = f(x)$, แกน x และเส้นตรง $x = a$ และ $x = b$ คือ

$$\lim_{\|\Delta\| \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(\varepsilon_i) \Delta_i x \quad (6.4.1)$$

ซึ่งลิมิตนี้เท่ากับ อินทิกรัลจำกัดเขต $\int_a^b f(x) dx$ นั้นเอง

ถ้า $f(x) < 0$ สำหรับทุก ๆ x ใน $[a,b]$ และ สำหรับแต่ละ $f(\varepsilon_i)$ เป็นค่าลบ ดังนั้น เพื่อให้พื้นที่ ของบริเวณซึ่งล้อมรอบด้วยเส้นโค้ง $y = f(x)$ แกน x และเส้นตรง $x = a$ และ $x = b$ ยังคงเป็นค่าบวก เรา尼ยามพื้นที่โดย

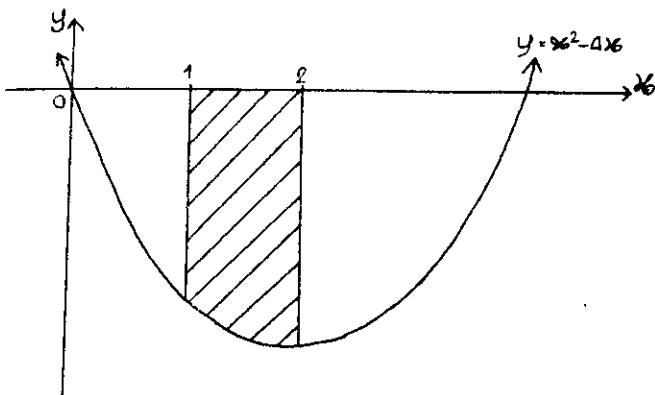
$$\begin{aligned} & \lim_{\|\Delta\| \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n [-f(\varepsilon_i)] \Delta_i x \\ &= - \int_a^b f(x) dx \end{aligned} \quad (6.4.2)$$

ตัวอย่าง 6.4.1 จงหาพื้นที่ของบริเวณซึ่งล้อมรอบด้วยเส้นโค้ง $y = x^2 - 4x$ แกน x และเส้นตรง $x = 1$ และ $x = 2$

วิธีทำ บริเวณที่เราต้องการหาพื้นที่แสดงในรูป 4.6.1 เพราะว่า $f(x) = x^2 - 4x < 0$ บน $[0,3]$ ดังนั้น ถ้าให้ A เป็นพื้นที่ของบริเวณนี้ และจากสมการ 6.4.2

$$\begin{aligned} A &= - \int_1^2 (x^2 - 4x) dx \\ &= - \left[\frac{x^3}{3} - 4 \frac{x^2}{2} \right]_1^2 \\ &= - \left(\frac{8}{3} - 8 \right) + \left(\frac{1}{3} - 2 \right) \\ &= - \frac{7}{3} + 6 = \frac{11}{3} \end{aligned}$$

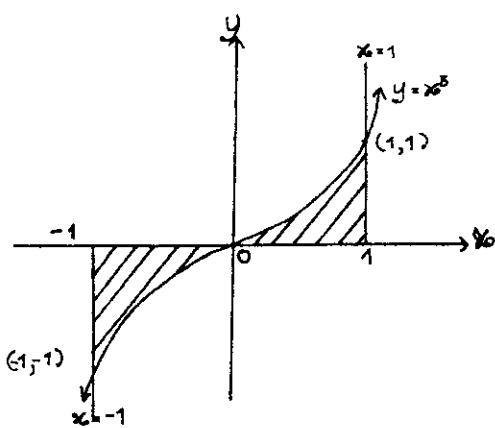
ฉะนั้น พื้นที่ของบริเวณที่เราต้องการคือ $\frac{11}{3}$ ตารางหน่วย



รูป 6.4.1

ตัวอย่าง 6.4.2 จงหาพื้นที่ของบริเวณซึ่งล้อมรอบด้วย เส้นโค้ง $y = x^3$ แกน x และเส้นตรง $x = -1$ และ $x = 1$

วิธีทำ บริเวณที่เราต้องการหาพื้นที่แสดงในรูป 6.4.2 ซึ่งเห็นได้ $f(x) > 0$ เมื่อ x อยู่ในช่วง $[0, 1]$ และ $f(x) \leq 0$ เมื่อ x อยู่ในช่วง $[-1, 0]$ เราแบ่งบริเวณที่เราต้องการหาพื้นที่เป็นสองส่วน โดยให้ A_1 เป็นพื้นที่ของบริเวณเมื่อ x อยู่ใน $[0, 1]$ และให้ A_2 เป็นพื้นที่ของบริเวณเมื่อ x อยู่ใน $[-1, 0]$

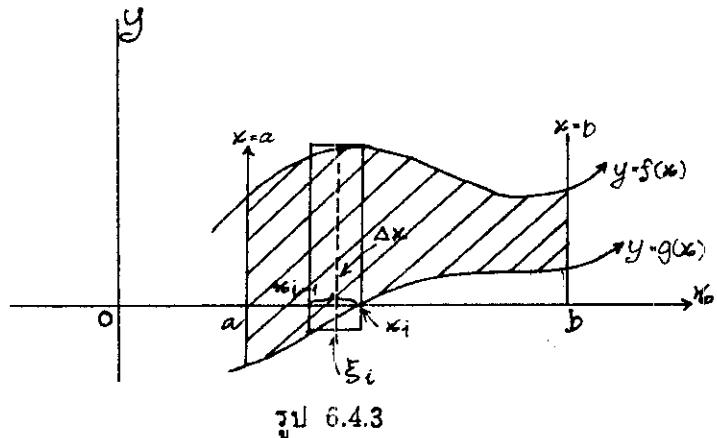


รูป 6.4.2

$$\begin{aligned} A_1 &= \int_0^1 f(x) dx \\ &= \int_0^1 x^3 dx = \frac{x^4}{4} \Big|_0^1 \\ &= \frac{1}{4} - 0 = \frac{1}{4} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} A_2 &= - \int_{-1}^0 f(x) dx \\ &= - \int_{-1}^0 x^3 dx = \frac{x^4}{4} \Big|_{-1}^0 \\ &= 0 + \frac{1}{4} = \frac{1}{4} \end{aligned}$$

ดังนั้น พื้นที่ของบริเวณที่เราต้องการ คือ $A_1 + A_2 = \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{1}{2}$ ตารางหน่วย
ต่อไปเราจะพิจารณาการหาพื้นที่ระหว่างเส้นโค้ง $y = f(x)$ และ $y = g(x)$ ซึ่งเป็นพื้นที่ชั้น
ต่อเนื่องบนช่วงบีด $[a, b]$ และ $f(x) > g(x)$ สำหรับทุก ๆ x ใน $[a, b]$ บริเวณที่เรา
ต้องการหาพื้นที่คือ บริเวณซึ่งล้อมรอบด้วย เส้นโค้ง $y = f(x)$, $y = g(x)$ และเส้นตรง
 $x = a$, $x = b$ ดังแสดงในรูป 6.4.3



ในการคำนวณเดียวกันกับการหาพื้นที่ของบริเวณที่กล่าวมานี้แล้ว เราเริ่มโดยการแบ่ง
ช่วงบีด $[a, b]$ เป็น n ช่วงเท่า ๆ กัน และความยาวของแต่ละช่วงเท่ากับ Δx นั่นก็คือ¹
ผลแบ่งกันของช่วง $[a, b]$ เป็นแบบสม่ำเสมอ ในแต่ละช่วงแบ่ง เราเลือก จุด ξ_i พิจารณา
รูปสี่เหลี่ยมผืนผ้าซึ่งมีความสูงเป็น $f(\xi_i) - g(\xi_i)$ หน่วย และความกว้าง Δx หน่วย
ดังแสดงในรูป 6.4.3 ดังนั้น เราสามารถหาพื้นที่ของรูปสี่เหลี่ยมผืนผ้าห้อง η รูป และนำพื้น
ที่ของห้อง η รูปมารวมกัน ได้ผลรวมเท่ากับ

$$\sum_{i=1}^n [f(\xi_i) - g(\xi_i)] \Delta x$$

ซึ่งก็คือ ผลรวมรีمانน์น์เอง และเป็นค่าประมาณของพื้นที่ของบริเวณที่เราต้องการ ดังนั้น
ถ้าเราเพิ่มค่า n หรือแบ่งช่วงบีด $[a, b]$ ให้มีจำนวนช่วงแบ่งมากขึ้น หรือให้ความยาว
ของช่วงแบ่ง, Δx เล็กลงมากเท่าใด ค่าของผลรวมรีمانน์จะเข้าใกล้หรือใกล้เคียงกับค่า
จริง ๆ ของพื้นที่บริเวณที่เราคำนึงพิจารณาไว้มากขึ้นเท่านั้น ถ้า A เป็นจำนวนตารางหน่วย
ของพื้นที่ของบริเวณนี้ เราจึงได้ว่า

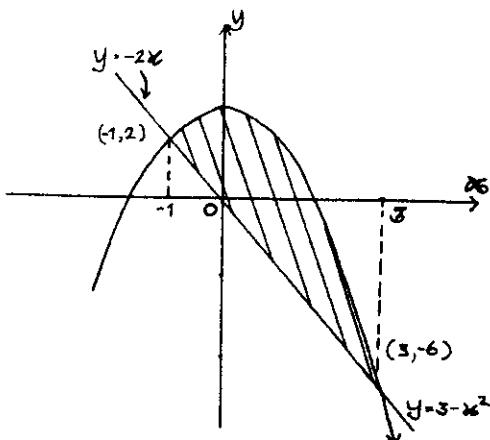
$$A = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n [f(x_i) - g(x_i)] \Delta x \quad (6.4.3)$$

เพริ่งว่าทั้ง f และ g เป็นพีกชันต่อเนื่องบน $[a, b]$ เราได้ $f - g$ เป็นพีกชันต่อเนื่องบน $[a, b]$ ด้วย ดังนั้นลิมิตในสมการ 6.4.3 หากค่าได้ (exist) และเท่ากับอนิพิกรลจ่ากัดเขต ของ $\int_a^b [f(x) - g(x)] dx$ จาก a ถึง b นั้นก็คือ

$$A = \int_a^b [f(x) - g(x)] dx \quad (6.4.4)$$

ตัวอย่าง 6.4.3 จงหาพื้นที่ของบริเวณซึ่งล้อมรอบด้วยเส้นโค้ง $y = 3-x^2$ และเส้นตรง $y = -2x$

วิธีทำ เราหาจุดตัดของเส้นโค้ง $y = 3-x^2$ และเส้นตรง $y = -2x$ เสียก่อน โดยแทนค่า $y = -2x$ ในสมการ $y = 3-x^2$ เราได้ $x = -1, 3$ ค่าของ y ที่สมนัยกับค่าของ x นี้ คือ $y = 2, -6$ ดังนั้นจุดตัด คือ $(-1, 2)$ และ $(3, -6)$ และพื้นที่ของบริเวณที่เราต้องการแสดงในรูป 6.4.4



รูป 6.4.4

เราใช้สมการ 6.4.4 หาพื้นที่ของบริเวณในรูป 6.4.4 ช่วงบนช่วง $[-1, 3]$ ที่เส้นโค้ง $y = 3-x^2$ อยู่เหนือเส้นตรง $y = -2x$ ดังนั้น เราแทน $f(x) = 3-x^2$ และ $g(x) = 2x$ ในสมการ 6.4.4 ได้

$$A = \int_{-1}^3 [(3-x^2) - (-2x)] dx$$

$$\begin{aligned}
&= \int_{-1}^3 (3-x^2 + 2x) dx \\
&= \left[3x - \frac{x^3}{3} + x^2 \right]_{-1}^3 \\
&= (9 - 9 + 9) - (-3 + \frac{1}{3} + 1) \\
&= 11 \frac{1}{3}
\end{aligned}$$

พื้นที่ของบริเวณที่เราต้องการเท่ากับ $10\frac{2}{3}$ ตารางหน่วย

ตัวอย่าง 6.4.4 จงหาพื้นที่ของบริเวณ ซึ่งล้อมรอบด้วยเส้นโค้ง $f(x) = x^3 - 4x$ และ $g(x) = 4 - x^2$

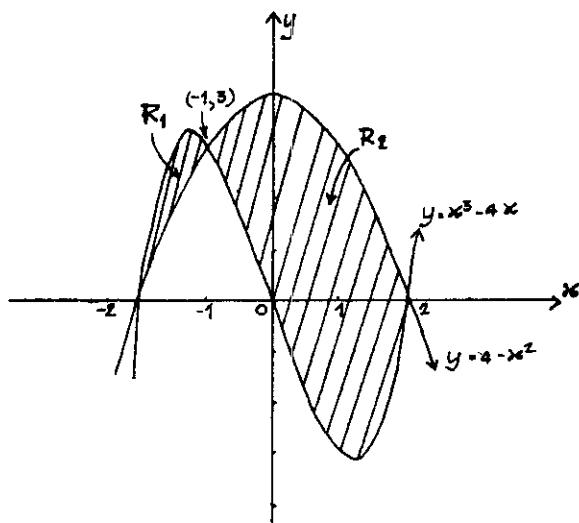
วิธีทำ เราหาจุดตัดของเส้นโค้งทั้งสองเสียก่อน นั่นคือ แก้สมการ

$$\begin{array}{l}
4 - x^2 = x^3 - 4x \\
\text{หรือ} \\
x^3 + x^2 - 4x - 4 = 0
\end{array}$$

$$\text{ได้ } x = -2, -1, 2$$

ดังนั้น จุดตัดคือ $(-2, 0), (-1, 3), (2, 0)$ และบริเวณที่เราต้องการหาพื้นที่แสดงในรูป

6.4.5 เห็นได้ว่าบริเวณที่เราต้องการหาพื้นที่มี 2 ส่วน คือ R_1 และ R_2 โดยที่ R_1 อยู่บนช่วง $[-2, -1]$ และล้อมรอบด้วยเส้นโค้ง $y = f(x)$ ซึ่งอยู่เหนือเส้นโค้ง $y = g(x)$ และ R_2 อยู่บนช่วง $[-1, 2]$ และล้อมรอบด้วยเส้นโค้ง $y = g(x)$ ซึ่งอยู่เหนือเส้นโค้ง $y = f(x)$



ให้ A_1 และ A_2 เป็นจำนวนตารางหน่วยของพื้นที่ของบริเวณ R_1 และ R_2 ตามลักษณะ โดยใช้สมการ 6.4.4 เราได้

$$\begin{aligned} A_1 &= \int_{-2}^{-1} (f(x) - g(x)) dx \\ &= \int_{-2}^{-1} [(x^3 - 4x) - (4 - x^2)] dx \\ &= \left[\frac{x^4}{4} - 4\frac{x^2}{2} - 4x + \frac{x^3}{3} \right]_{-2}^{-1} \\ &= (\frac{1}{4} - 2 + 4 - \frac{1}{3}) - (4 - 8 + 8 - \frac{8}{3}) \\ &= \frac{7}{12} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{และ } A_2 &= \int_{-1}^2 (g(x) - f(x)) dx \\ &= \int_{-1}^2 [(4 - x^2) - (x^3 - 4x)] dx \\ &= \left[4x - \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + 4\frac{x^2}{2} \right]_{-1}^2 \\ &= (8 - \frac{8}{3} - 4 + 8) - (-4 + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + 2) \\ &= 14\frac{3}{4} \\ \therefore \text{ พื้นที่ของบริเวณ } R_1 \text{ และบริเวณ } R_2 &= A_1 + A_2 = \frac{7}{12} + 14\frac{3}{4} = 15\frac{1}{3} \end{aligned}$$

ตัวอย่าง 6.4.5 จงหาพื้นที่ของบริเวณซึ่งล้อมรอบด้วยเส้นโค้ง $y^2 = x - 2$ และเส้นตรง

$$y = x - 4$$

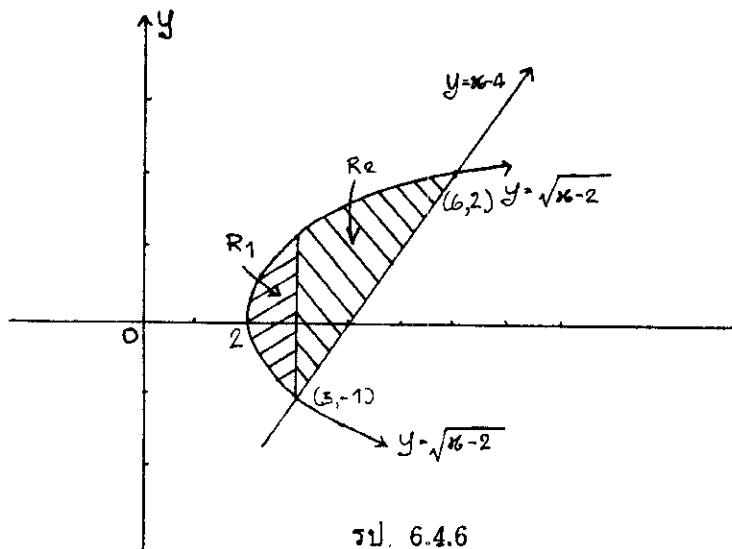
วิธีทำ เราหาจุดตัดของเส้นโค้ง $y^2 = x - 2$ และเส้นตรง $y = x - 4$ โดยแก้สมการ

$$y^2 = (y + 4)^2 - 2 \quad (\because \text{ จาก } y = x - 4 \text{ ได้ } x = y + 4)$$

$\therefore y = -1, 2$ และค่า x ที่สมนัยกันคือ $3, 6$ ดังนั้นจุดตัดคือ $(3, -1)$ และ $(6, 2)$

จากสมการ $y^2 = x - 2$ เราได้ $y = \sqrt{x-2}$ และ $y = -\sqrt{x-2}$ ซึ่งก็คือ สมการของเส้นโค้งพาราบولاซึ่งอยู่เหนือแกน x และใต้แกน x ตามลักษณะ

บริเวณที่เราต้องการหาพื้นที่แสดงในรูป 6.4.6 เห็นได้ว่า เราต้องแบ่งบริเวณนี้ออกเป็น 2 ส่วน คือ R_1 และ R_2 เพราจะวนช่วง $[2,3]$ R_1 คือบริเวณซึ่งล้อมรอบด้วยเส้นโค้ง $y = \sqrt{x-2}$, $y = -\sqrt{x-2}$ และเส้นตรง $x = 3$ โดยมีเส้นโค้ง $y = \sqrt{x-2}$ อุ้ยเห็นว่าเส้นโค้ง $y = -\sqrt{x-2}$ และบนช่วง $[3,6]$ R_2 คือบริเวณซึ่งล้อมรอบด้วยเส้นโค้ง $y = \sqrt{x-2}$, เส้นตรง $x = 3$, เส้นตรง $y = x-4$ โดยมีเส้นโค้ง $y = \sqrt{x-2}$ อุ้ยเห็นว่าเส้นตรง $y = x-4$



รูป. 6.4.6

ให้ A_1 และ A_2 เป็นจำนวนตารางหน่วยของพื้นที่บริเวณ R_1 และ R_2 ตามลำดับ และโดยใช้สมการ 6.4.4 เราได้

$$\begin{aligned}
 A_1 &= \int_2^3 [(\sqrt{x-2}) - (-\sqrt{x-2})] dx \\
 &= \int_2^3 2\sqrt{x-2} dx \\
 &= 2 \cdot \frac{2}{3} (x-2)^{\frac{3}{2}} \Big|_2^3 \\
 &= \frac{4}{3} \cdot 1 - 0 = \frac{4}{3}
 \end{aligned}$$

แล้ว

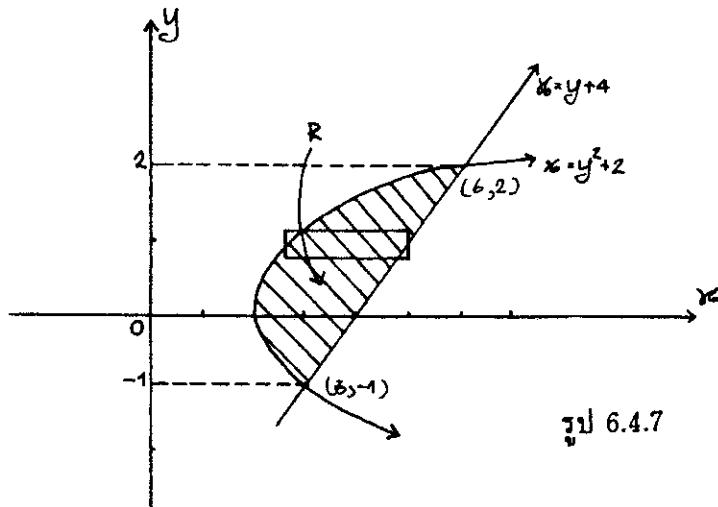
$$\begin{aligned}
 A_2 &= \int_3^6 \left[(\sqrt{x-2}) - (x-4) \right] dx \\
 &= \frac{2}{3} (x-2)^{\frac{3}{2}} - \frac{x^2}{2} + 4x \Big|_3^6 \\
 &= \left(\frac{2}{3} \cdot 8 - 18 + 24 \right) - \left(\frac{2}{3} \cdot 1 - \frac{9}{2} + 12 \right) \\
 &= 3\frac{1}{6}
 \end{aligned}$$

\therefore พื้นที่ของบริเวณ R_1 และ $R_2 = A_1 + A_2 = \frac{4}{3} + 3\frac{1}{6} = 4\frac{1}{2}$ ตารางหน่วย

อีกวิธีหนึ่งที่เราสามารถหาพื้นที่ของบริเวณในรูป 6.4.6 ได้ คือแทนที่เราจะแบ่งพื้นที่ที่ออกเป็น 2 ส่วน และอินทิเกรตตามแนว x หรืออิกนัยหนึ่งแบ่งพื้นที่ออกเป็นรูปสี่เหลี่ยมผืนผ้าในแนวตั้งนั้น เราสามารถอินทิเกรตตามแนว y หรือแบ่งพื้นที่เป็นรูปสี่เหลี่ยมผืนผ้าในแนวนอนดังรูป 6.4.7 ดังนั้น บริเวณที่เราต้องการหาพื้นที่คือบริเวณ R ซึ่งล้อมรอบด้วยเส้นตรง $x = y+4$ (จาก $y = x-4$) และเส้นโค้ง $x = y^2 + 2$ (จาก $y^2 = x-2$) โดยมีเส้นตรง $x = y+4$ อยู่เหนือเส้นโค้ง $x = y^2 + 2$ และ R นี้ อยู่บนช่วง $[-1, 2]$ บนแกน y ให้ A เป็นจำนวนตารางหน่วยของพื้นที่บริเวณ R โดยใช้สมการ 6.4.4 เราได้

$$\begin{aligned}
 A &= \int_{-1}^2 \left[(y+4) - (y^2 + 2) \right] dy \\
 &= \int_{-1}^2 (y+2-y^2) dy \\
 &= \left[\frac{y^2}{2} + 2y - \frac{y^3}{3} \right]_{-1}^2 \\
 &= (2+4-\frac{8}{3}) - (\frac{1}{2}-2+\frac{1}{3}) \\
 &= 4\frac{1}{2}
 \end{aligned}$$

\therefore พื้นที่ของบริเวณ $R = 4\frac{1}{2}$ ตารางหน่วย ซึ่งเท่ากับที่เราหาได้ในวิธีแรก



แบบฝึกหัด 6.4

จงหาพื้นที่ของบริเวณที่ล้อมรอบด้วยเส้นโค้ง และเส้นตรงในข้อต่อไปนี้ โดยหาค่าของอินทิเกรลจำกัดจากด้วยทฤษฎีกูญหลักมูลของแคลคูลัส และเขียนรูปแสดงบริเวณในแต่ละข้อด้วย

$$1) \quad x^2 = -y, \quad y = -4$$

$$2) \quad x^2 + y + 4 = 0, \quad y = -8 \quad \text{โดยอินทิเกรตตามแนว } y$$

$$3) \quad x^2 = 2y^2, \quad x = 0, \quad y = -2$$

$$4) \quad y = 2 - x^2, \quad y = -x$$

$$5) \quad y = \sqrt[3]{x}, \quad y = x^3$$

$$6) \quad x = y^2 - 2, \quad x = 6 - y^2$$

$$7) \quad y = 2x^3 - 3x^2 - 9x, \quad y = x^3 - 2x^2 - 3x$$

$$8) \quad y = |x|, \quad y = x^2 - 1, \quad x = -1, \quad x = 1$$

$$9) \quad x^3 - x^2 + 2xy - y^2 = 0, \quad x = 4 \quad (\text{แนะ แก้สมการกำลังสาม หา } y \\ \text{ในรูปของ } x \text{ และเขียน } y \text{ เป็นพ้องกัน 2 พ้องกันของ } x)$$

$$10) \quad \text{จงหาค่าของ } m \text{ ซึ่งทำให้บริเวณที่อยู่เหนือเส้นตรง } y = mx \text{ และต่ำกว่าเส้น} \\ \text{โค้งพาราบولا } y = 2x - x^2 \text{ มีพื้นที่ } 36 \text{ ตารางหน่วย}$$

6.5 ส่วนเกินของผู้บริโภคและผู้ผลิต (Consumers' Surplus and Producers' Surplus)

โดยทั่วไปแล้ว เมื่อผู้บริโภคซื้อสินค้า ราคาของสินค้าที่เข้าจ่ายจริงๆ จะต่ำกว่า ราคากลางที่ขายก็จะดีกว่า ถ้าเรานำเอาราคากลางของสินค้าที่ผู้บริโภคยินดีจะจ่ายมาสมมูล์กับความพึงพอใจที่ผู้บริโภคได้รับจากการซื้อ และนำเอาราคากลางของสินค้าที่ผู้บริโภคจ่ายจริงๆ มาสมมูล์กับความพึงพอใจที่ได้รับจากซื้อสินค้านั้น แล้วเราเรียก ส่วนที่เกินของความพึงพอใจ ส่วนแรก จากส่วนหลังว่า ความพึงพอใจส่วนเกิน (Surplus satisfaction) นั้นก็คือ ความพึงพอใจที่ผู้บริโภคได้รับเกินกว่าจำนวนเงินที่จ่ายไปจริงๆ แนะนำที่สุด ความพึงพอใจส่วนเกินจากการซื้อสินค้าแต่ละชนิดยอมแตกต่างกัน หันมือกลับชนิดของสินค้า เช่น สินค้าประเภท เก้าอี้ ผ้า ก็ ซึ่งมีความพึงพอใจส่วนเกินค่อนข้างมาก เพราะว่า ราคากลางที่ผู้บริโภคจ่ายจริงๆ สำหรับสินค้าประเภทนั้นต่ำกว่าราคากลางที่ขายก็จะดีกว่ามาก เพื่อขอขยายความพึงพอใจส่วนเกิน เราพิจารณาจากตัวอย่างต่อไปนี้

สมมุติว่า ผู้บริโภคซื้อส้ม 4 กิโลกรัม ในราคากิโลกรัมละ 10 บาท แต่เมื่อ ราคากลางของส้มเป็นกิโลกรัมละ 25, 20, 15 บาท ผู้บริโภคจะซื้อเพียง 1, 2, 3 กิโลกรัม ตามลำดับ

ในเมื่อผู้บริโภคจะซื้อส้มเพียง 1 กิโลกรัม เมื่อราคากิโลกรัมละ 25 บาท ดังนั้นเรารายกตัวว่า ความพึงพอใจทั้งหมดที่เข้าได้รับจากการซื้อส้มกิโลกรัมนี้ อย่างน้อยที่สุด เท่ากับที่เข้าจ่ายเงิน 25 บาท เพื่อซื้อสินค้าชนิดอื่น เมื่อราคากลางของส้มลดลงเป็นกิโลกรัมละ 20 บาท ผู้บริโภคที่ซื้อส้มเพียงหนึ่งกิโลกรัมย่อมได้รับความพึงพอใจเท่ากับจำนวนเงิน 20 บาทเทียบเท่าหรือมีค่าสมมูลกับจำนวนเงิน 25 บาท ดังนั้น ความพึงพอใจที่ผู้บริโภคได้รับเกิน กว่าที่เข้าจ่ายไป หรือความพึงพอใจส่วนเกินเท่ากับ $25 - 20 = 5$ บาท สำหรับส้มหนึ่ง กิโลกรัมนี้ สำหรับผู้บริโภคที่ซื้อส้ม 2 กิโลกรัม สำหรับกิโลกรัมที่สองนั้น ความพึงพอใจที่ได้รับ อย่างน้อยที่สุดก็มีค่าเท่ากับจำนวนเงิน 20 บาทนั่นเอง นั้นก็คือ สำหรับจำนวนเงิน 40 บาท ที่ผู้บริโภคจ่ายไปสำหรับส้ม 2 กิโลกรัม เขาก็ได้รับความพึงพอใจทั้งหมดเทียบเท่าหรือสมมูลกับ จำนวนเงิน $25 + 20 = 45$ บาท ดังนั้นผู้บริโภคจะได้รับความพึงพอใจเกินกว่าเงินที่เข้าจ่ายไปเท่ากับ $45 - 40 = 5$ บาท ซึ่งจะเห็นว่าความพึงพอใจส่วนเกินนี้ยังคงเท่าเดิม ไม่ส่งผลกระทบ การซื้อส้มกิโลกรัมที่สอง

ในทำนองเดียวกัน เมื่อราคากองสัมลดลงเป็นกิโลกรัมละ 15 บาท ผู้บริโภคจะซื้ออย่างมากที่สุดเพียง 3 กิโลกรัม แต่ถ้าเข้าซื้อเพียง 2 กิโลกรัม เป็นเงิน 30 บาท ความพอดีที่เข้าได้รับจากเงินจำนวน 30 บาทนี้ เทียบเท่ากับจำนวนเงิน $25 + 20 = 45$ บาท หรือเมื่อราคากองสัมเป็น $25 + 20 = 45$ บาท จะนั่นความพอใจส่วนเกิน คือ $45 - 30 = 15$ บาท และถ้าเข้าซื้อสัม 3 กิโลกรัมเป็นเงิน 45 บาท ซึ่งความพอใจที่ได้รับเทียบเท่าจำนวนเงิน $25 + 20 + 15 = 60$ บาท หรือเมื่อราคากองสัมเป็น $25 + 20 + 15 = 60$ บาท อย่างไรก็ตาม ความพอใจส่วนเกินยังคงเท่าเดิม คือ $60 - 45 = 15$ บาท ไม่ได้ลดลงเนื่องจาก การซื้อกิโลกรัมที่สาม

ดังนั้นเมื่อผู้บริโภคซื้อสัม 4 กิโลกรัม เป็นเงิน 40 บาท ความพอใจหักห้ามที่ได้รับจากการซื้อมีค่าไม่น้อยไปกว่า ผลรวมของจำนวนเงินที่ผู้บริโภคยินดีจะจ่าย สำหรับสัม กิโลกรัมที่ 1, 2, 3, คือ $25 + 20 + 15$ บาท รวมกับ กิโลกรัมที่ 4 ซึ่งมีราคา 10 บาท หักห้ามที่เท่ากับ $25 + 20 + 15 + 10 = 70$ บาท เราจึงกล่าวได้ว่าผู้บริโภคได้รับความพอใจเกินกว่าเงินที่เข้าจ่ายไปจริง ๆ หรือความพอใจส่วนเกินเท่ากับ $70 - 40 = 30$ บาท

สรุปได้ว่า ถ้าเราต้องการวัดผลกำไรหักห้ามดในการซื้อสัมผู้บริโภคได้รับนั้น เราจะดูจากผลรวมของความพอใจส่วนเกินหักห้าม ซึ่งได้จากการหักห้ามราคาก่อให้เกิดความพอใจมากกว่าราคายarding ของสัม และผลรวมนี้ เราเรียกว่าส่วนเกินของผู้ผลิต (Consumers' surplus)

ถ้าสมการของเส้นอุปสงค์ คือ $p = f(x)$ ซึ่งเป็นฟังก์ชันต่อเนื่อง ดังแสดงในรูป 6.5.1 จุด A คือ จุด (x_0, p_0) เมื่อ x_0 คือ ราคาน้ำดื่มและ x_0 เป็นจำนวนหน่วยของสินค้าที่ผู้บริโภคต้องการซื้อ จากรูป 6.5.1 เห็นได้ว่า จำนวนหน่วยของสินค้าจาก 0 ถึง x_0 หน่วย ราคากองสินค้าน้ำดื่มน้ำอุปสงค์สูงกว่าราคากองสินค้าที่ผู้บริโภคจ่ายจริง ๆ สำหรับแต่ละหน่วยจาก 0 ถึง x_0 หน่วย ซึ่งราคากองสินค้าน้ำดื่มน้ำอุปสงค์หรือราคาก่อให้เกิดความพอใจ คือ ราคาก่อให้เกิดความพอใจที่ส่วนนี้ยกัน

ฉะนั้น จาก 0 ถึง x_0 หน่วย ราคาก่อให้เกิดความพอใจที่ส่วนนี้ยกัน แต่ละหน่วยจาก 0 ถึง x_0 หน่วยนี้สูงกว่าราคาก่อให้เกิดความพอใจที่เข้าจ่ายจริง ๆ สำหรับแต่ละหน่วย คือ ราคาน้ำดื่มละ p_0 นั้นก็คือ ผู้บริโภคได้รับความพอใจเกินกว่าจำนวนเงินที่เข้าจ่ายไปจริง ๆ เท่ากับพื้นที่ของบริเวณ $p_0 A x_0$ ในรูป 6.5.1

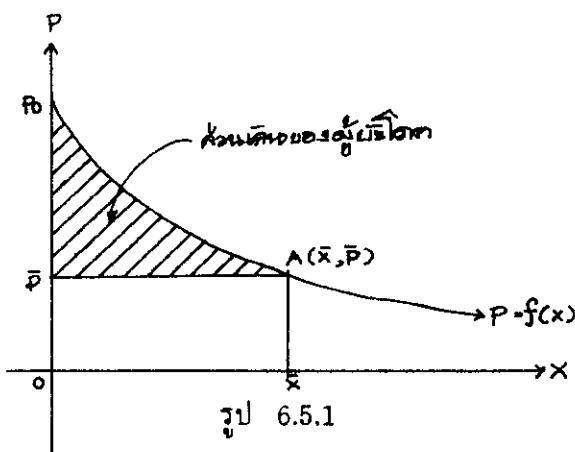
พื้นที่ของบริเวณใต้เส้นโค้ง $p = f(x)$ จาก $x = 0$ ถึง $x = \bar{x}$ คือ

$\int_0^{\bar{x}} f(x) dx$ และพื้นของรูปสี่เหลี่ยมผืนผ้า $O\bar{x}A\bar{p}$ คือ $\bar{p}\bar{x}$

ดังนั้นพื้นที่ของบริเวณ $\bar{p}Ap_0 = \int_0^{\bar{x}} f(x) dx - \bar{p}\bar{x}$

ซึ่งพื้นที่ของบริเวณ $\bar{p}Ap_0$ นี้คือ ค่าที่เราใช้วัดหรือแทนส่วนเกินของผู้ผลิตนั้นเอง

ดังที่เราจะกล่าวในนิยามต่อไป



นิยาม 6.5.1 ถ้าสมการอุปสงค์ของสินค้านิดหนึ่ง คือ $p = f(x)$ หรือ $x = g(p)$ โดยที่ p คือราคาต่อหน่วย เมื่อจำนวนหน่วยของสินค้าที่ต้องการคือ x ให้ \bar{p} บาท เป็นราคากลาง และ \bar{x} เป็นจำนวนหน่วยของสินค้าที่สมนัยกับราคากลาง แล้วส่วนเกินของผู้บริโภค (Consumers' surplus) คือพื้นที่ของบริเวณซึ่งอยู่ต่ำกว่าเส้นอุปสงค์และเหนือเส้นตรง $p = \bar{p}$ จะนั้น CS คือจำนวนบาทในส่วนเกินของผู้บริโภค แล้ว

$$CS = \int_0^{\bar{x}} f(x) dx - \bar{p}\bar{x} \quad (6.5.1)$$

หรือ

$$CS = \int_{\bar{p}}^{p_0} g(p) dp \quad (6.5.2)$$

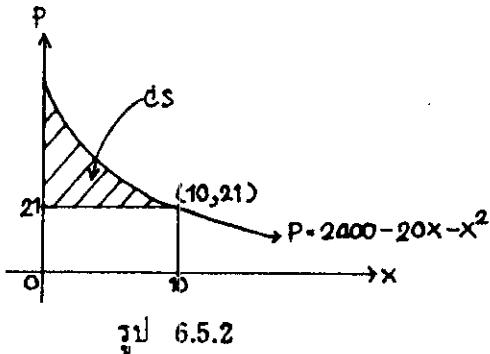
$$\text{เมื่อ } p_0 = f(0)$$

ตัวอย่าง 6.5.1 ถ้าสมการของเส้นอุปสงค์ คือ $100p = 2400 - 20x - x^2$ จงหาส่วนเกินของผู้บริโภค เมื่อเข้าซื้อสินค้า 10 หน่วย

วิธีทำ ราคาตลาดเมื่อผู้บริโภคซื้อสินค้า 10 หน่วย คือ

$$P = \frac{1}{100} [2400 - (20 \times 10) - (10)^2] = 21 \text{ บาท}$$

ส่วนเกินของผู้บริโภค คือพื้นที่ของบริเวณที่แรเงาในรูป 6.5.2



โดยใช้สมการ 6.5.1 เราได้

$$\begin{aligned} CS &= \int_0^{10} \frac{1}{100} (2400 - 20x - x^2) dx - (21 \times 10) \\ &= \frac{1}{100} \left[2400x - 20 \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} \right]_0^{10} - 210 \\ &= (240 - 10 - \frac{10}{3}) - 210 \\ &= 16\frac{2}{3} \end{aligned}$$

ดังนั้นส่วนเกินของผู้บริโภคเท่ากับ $16\frac{2}{3}$ บาท

ตัวอย่าง 6.5.2 สมการอุปสงค์และสมการอุปทานสำหรับสินค้านิดหนึ่ง คือ $3p + x = 32$
และ $3p^2 + p - x = 0$ ตามลำดับ จงหาส่วนเกินของผู้บริโภค เมื่อราคา
ตลาด คือ ราคาสมดุลย์ตลาด และว่าครุபะสุดงบบริเวณที่หมายถึงส่วนเกิน
ของผู้บริโภค

วิธีทำ ก่อนอื่นเราต้องหาราคาสมดุลย์ตลาด โดยจากสมการ $3p + x = 32$ เราได้ $x = 32 - 3p$ และแทนค่า x นี้ ในสมการ $3p^2 + p - x = 0$ นั้นคือ

$$3p^2 + p - (32 - 3p) = 0$$

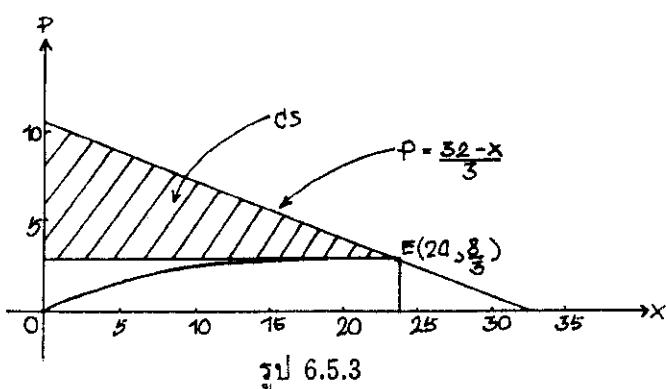
$$3p^2 + 4p - 32 = 0$$

$$(3p - 8)(p + 4) = 0$$

ชั้นราบที่เป็นค่าบวกของ p คือ $p = \frac{8}{3}$ และค่า x ที่สมัยกันคือ $x = 32 - 3 \cdot \frac{8}{3} = 24$ ดังนั้น เสนออุปสงค์ และเสนออุปทานตัดกันที่จุดสมดุลย์ $E(24, \frac{8}{3})$ และส่วนเกินของผู้บริโภค คือ พื้นที่ของบริเวณที่แรเงาในรูป 6.5.3 โดยใช้สมการ 6.5.1 เราได้

$$\begin{aligned} CS &= \int_0^{24} \frac{32-x}{3} dx - \frac{8}{3} \cdot 24 \\ &= \left[\frac{32}{3}x - \frac{1}{3}\frac{x^2}{2} \right]_0^{24} - 64 \\ &= (256 - 96) - 64 \\ &= 96 \end{aligned}$$

ดังนั้นส่วนเกินของผู้บริโภคเท่ากับ 96 บาท



จากตัวอย่าง 6.5.3 นี้ พิจารณาเสนออุปทาน เห็นได้ว่า ผู้ผลิตบางคนอาจจะเสนอขายสินค้าในราคาน้ำที่ต่ำกว่าราคากลางซึ่งในตัวอย่างนี้ราคามีจุดสมดุลย์ตลาดเท่ากับ $\frac{8}{3} = 2.6$ บาท เช่น เขาก็อาจจะยินดีเสนอขายสินค้าในราคาน้ำที่ 2 บาทสำหรับจำนวนสินค้า 14 หน่วย และในราคาน้ำที่ 1 บาท สำหรับจำนวนสินค้า 4 หน่วย แต่ราคาน้ำที่ผู้ผลิตขายไปจริง ๆ ก็คงน้ำที่ 2.6 บาท สำหรับทุก ๆ หน่วยจาก 0 ถึง 24 หน่วย ดังนั้นผู้ผลิตที่ยินดีขายสินค้าในราคาน้ำที่ต่ำกว่าราคามีจุดสมดุลย์ย่อมได้กำไร และถ้าเราต้องการวัดผลกำไรทั้งหมด ที่ผู้ผลิตจะได้รับจากการขายสินค้า เราจะดูจากผลรวมทั้งหมดของส่วนที่เกินของราคากลางจากราคาน้ำที่ผู้ผลิตยินดีเสนอขายสำหรับแต่ละจำนวนหน่วยของสินค้าจาก 0 ถึงจำนวนหน่วยที่ผู้ผลิตได้ขายไปจริง ๆ เราเรียกผลรวมนี้ว่า ส่วนเกินของผู้ผลิต (Producers' surplus)

ถ้าสมการของเส้นอุปสงค์คือ $p = h(x)$ จะเป็นพังก์ชันต่อเนื่องดังแสดงในรูป 6.5.4

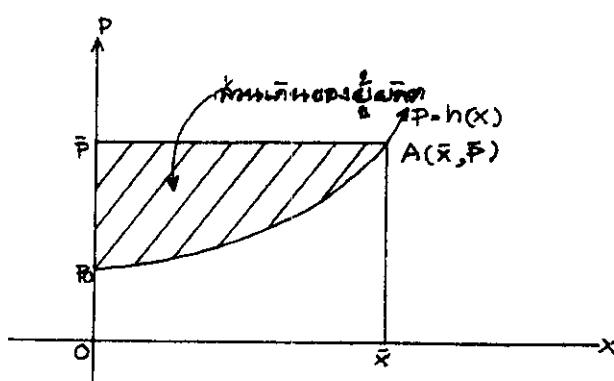
จุด A คือ จุด (\bar{x}, \bar{p}) เมื่อ \bar{x} คือราคาน้ำดื่ม และ \bar{x} จำนวนหน่วยของสินค้าที่ผู้ผลิตขายไปจากรูป 6.5.4 เห็นได้ จำนวนหน่วยของสินค้าจาก 0 ถึง \bar{x} หน่วย ราคาของสินค้าบนเส้นอุปทาน ต่ำกว่าราคาของสินค้าที่ขายไปจริง ๆ สำหรับแต่ละหน่วยจาก 0 ถึง \bar{x} หน่วย นั่นคือขายไปราคาน้ำดื่ม \bar{p} ซึ่งราคาของสินค้าบนเส้นอุปทาน หรือราคาน้ำดื่มคือ ราคาที่ผู้ผลิตยินดีเสนอขายต่ำกว่าราคาน้ำดื่ม หรือ ราคาที่ผู้ผลิตขายไปจริง ๆ สำหรับแต่ละหน่วยคือราคาน้ำดื่ม \bar{p} นั่นก็คือผู้ผลิตได้รับความพอใจส่วนเกิน ซึ่งก็คือส่วนที่เกินของความพอใจที่รับจากการขายสินค้าในราคาน้ำดื่มจากความพอใจที่ได้รับในราคาที่ผู้ผลิตยินดีขาย ดังนั้น ผลรวมของความพอใจส่วนเกินทั้งหมดที่ได้จากการขายสินค้า 0 ถึง \bar{x} หน่วย คือ พื้นที่ของบริเวณ $p_0 A \bar{p}$ ในรูป 6.5.4 นั่นเอง

พื้นที่ของบริเวณได้เส้นโค้ง $p = h(x)$ จาก $x = 0$ ถึง $x = \bar{x}$ คือ

$$\int_0^{\bar{x}} h(x) dx$$
 และพื้นที่ของรูปสี่เหลี่ยมผืนผ้า $O \bar{x} A \bar{p}$ คือ $\bar{x} \bar{p}$

$$\text{ดังนั้นพื้นที่ของบริเวณ } p_0 A \bar{p} = \bar{x} \bar{p} - \int_0^{\bar{x}} h(x) dx$$

ซึ่งก็คือค่าที่เราใช้วัดหรือแทน ส่วนเกินของผู้ผลิตนั้นเอง



รูป 6.5.4

นิยาม 6.5.2 ถ้าสมการอุปทาน ส่วนรับสินค้านิดหนึ่ง คือ $p = b(x)$ หรือ $x = \lambda(p)$ โดยที่ p คือราคាដ่อน่วย เมื่อจำนวนหน่วยของสินค้าที่ขาย คือ x ให้ \bar{x} บท เป็นราคากลาง และ \bar{x} เป็นจำนวนหน่วยของสินค้าที่ขายในราคากลางนั้นแล้ว ส่วนเกินของผู้ผลิต (Producers' surplus) คือ พื้นที่ของบริเวณช่องอยู่เหนือเส้นอุปทาน และต่ำกว่าเส้นตรง $p = \bar{p}$ จะนั้น ถ้า PS เป็นจำนวนบท ในส่วนเกินของผู้ผลิต แล้ว

$$PS = \bar{p} \bar{x} - \int_0^{\bar{x}} b(x) dx \quad (6.5.3)$$

หรือ

$$PS = \int_{p_0}^{\bar{p}} \lambda(p) dp \quad (6.5.4)$$

เมื่อ $p_0 = b(0)$

พิจารณา 6.5.3 ถ้าสมการของเส้นอุปทาน คือ $3p^2 + p - x = 0$ ดังเช่นในตัวอย่าง 6.5.2 จงหาส่วนเกินของผู้ผลิต เมื่อราคากลาง คือ ราคานมคุณภาพ และเขียนรูปแสดง พื้นที่ของบริเวณที่ใช้แทนส่วนเกินของผู้ผลิต

วิธีทำ จากตัวอย่าง 6.5.2 เราได้ว่า จุดตัดของเส้นอุปสงค์และอุปทานคือ $E(24, \frac{8}{3})$ นั่นคือ $\bar{x} = 24$, $\bar{p} = \frac{8}{3}$ และจากสมการอุปทาน

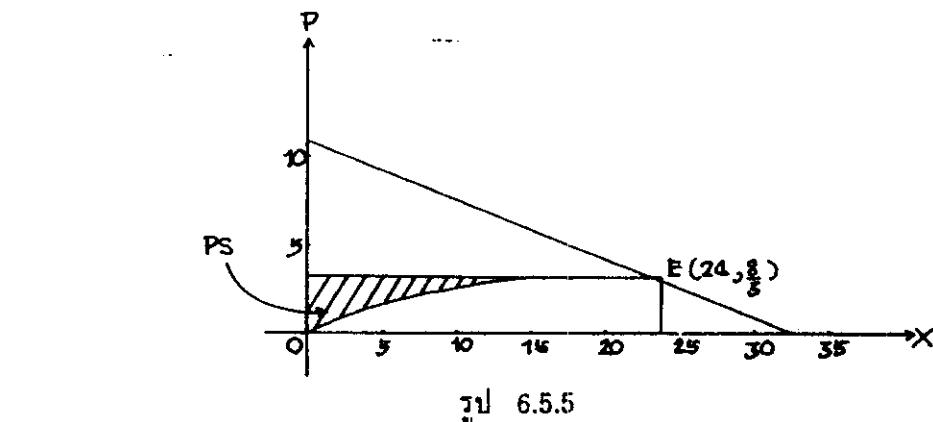
$$3p^2 + p - x = 0$$

$$\text{เราได้ } p = b(x) = \sqrt{\frac{1+12x-1}{6}}$$

โดยใช้สมการ (6.5.3) เราได้

$$\begin{aligned} PS &= \frac{8}{3} \cdot 24 - \int_0^{24} \sqrt{\frac{1+12x-1}{6}} dx \\ &= 64 - \frac{1}{6} \left[\frac{1}{12} \cdot \frac{2}{3} (1+12x)^{\frac{3}{2}} - x \right]_0^{24} \\ &= 64 - \frac{1}{6} \left[\left(\frac{1}{18} (289)^{\frac{3}{2}} - 24 \right) - \frac{1}{18} \right] \\ &= 64 - \frac{1}{6} \left[\frac{1}{18} (17)^3 - 24\frac{1}{18} \right] \\ &= \frac{358}{27} = 13\frac{7}{27} \end{aligned}$$

- คั้นน้ำ ส่วนเกินของผู้ผลิตคือ $13\frac{7}{27}$ บาท และพันทิ้งบวกเริ่มซึ่งใช้แสดงส่วนเกินของผู้ผลิตคือ $13\frac{7}{27}$ บาท



ตัวอย่าง 6.5.4 ถ้าสมการอุปสงค์และสมการอุปทานต่าหัวบินค้าชนิดหนึ่งคือ $100p = 1100 - x^2$ และ $400p = x^2 + 2400$ ตามลำดับ และราคาตลาด คือ ราคาสมดุลย์ตลาด แล้วจงหาส่วนเกินของผู้ผลิต และส่วนเกินของผู้บริโภค และเขียนรูปแสดงพื้นที่ของบริเวณที่ใช้แทนส่วนเกินของผู้ผลิต และส่วนเกินของผู้บริโภค

วิธีทำ เรายาราคาสมดุลย์ตลาดเสียก่อน โดยการแก้สมการอุปสงค์และอุปทานนั้นก็คือ

$$400p = (1100 - 100p) + 2400 \quad (\text{จาก } 100p = 1100 - x^2 \text{ เราได้ } x^2 = 1100 - 100p)$$

$$500p = 3500$$

$$p = 7$$

เมื่อ $p = 7$ เราได้ $x = 20$ รูป 6.5.6 แสดงให้เห็นเส้นอุปสงค์ และเส้นอุปทาน โดยจุดตัดของทั้งสองอยู่ที่ $(20, 7)$ ซึ่งเป็นจุดสมดุลย์ตลาดนั้นเอง และบริเวณระหว่างส่วนบนและส่วนล่าง คือส่วนเกินของผู้บริโภค และส่วนเกินของผู้ผลิตตามลำดับ

ให้ CS เป็นจำนวนบาทในส่วนเกินของผู้บริโภค เราได้

$$CS = \int_0^{20} \frac{1100-x^2}{100} dx - 7 \times 20$$

$$= 11x - \frac{1}{100} \cdot \frac{x^3}{3} \Big|_0^{20} - 140$$

$$= 220 - 26\frac{2}{3} - 140$$

$$= 53\frac{1}{3}$$

ให้ PS เป็นจำนวนบาทในส่วนเกินของผู้ผลิต เราได้

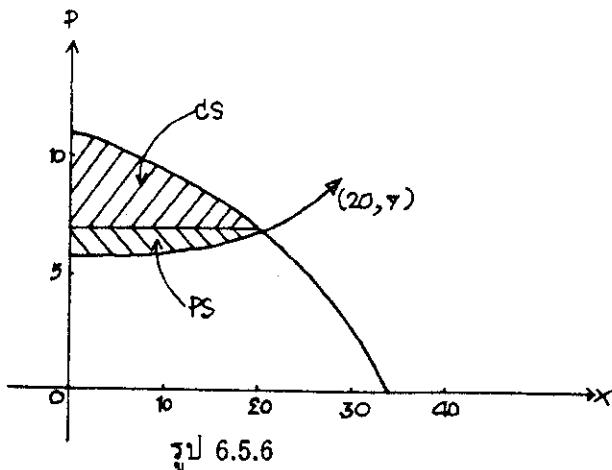
$$PS = 7x - \int_0^{20} \frac{x^2 + 2400}{400} dx$$

$$= 140 - \left(\frac{1}{400} x^3 + 6x \right)_0^{20}$$

$$= 140 - 6\frac{2}{3} - 120$$

$$= 13\frac{1}{3}$$

ดังนั้น ส่วนเกินของผู้บริโภค $= 53\frac{1}{3}$ บาท และส่วนเกินของผู้ผลิต $= 13\frac{1}{3}$ บาท



รูป 6.5.6

ตัวอย่าง 6.5.5 สำหรับสินค้าชนิดหนึ่งในตลาด ซึ่งมีผู้ผลิตสินค้าชนิดนี้คนเดียว และสามารถควบคุมผลผลิต และราคาเพื่อให้ได้กำไรสูงสุด ถ้าสมการอุปสงค์ คือ $10p = (80-x)^2$ และ พึงประสงค์ต้นทุนการผลิตหักหmund คือ $C(x) = \frac{1}{2}x^2 + 100x$ เมื่อ $C(x)$ คือจำนวนบาท ของต้นทุนการผลิตของสินค้า จำนวน x หน่วย จงหาส่วนเกินของผู้บริโภค และเขียนรูปแสดงบริเวณที่ใช้แทนส่วนเกินของผู้บริโภค

วิธีทำ ก่อนอื่น เรายังหาราคาต่อหน่วย และจำนวนผลผลิตที่ผู้ผลิตหรือผู้ขายในที่นี้จะได้กำไรสูงสุด โดยใช้ความจริงที่ว่า ผลกำไรจะสูงสุดเมื่อพึงกշันรายได้เพิ่มเท่ากับพึงกշันต้นทุนเพิ่ม ($marginal revenue = marginal cost$) ถ้า R คือ พึงกษาณรายได้ทั้งหมดเราได้

$$R(x) = px$$

$$R(x) = \frac{(80-x)^2}{10} x$$

$$R(x) = 640x - 16x^2 + \frac{1}{10}x^3$$

ดังนั้น

$$R'(x) = 640 - 32x + \frac{3}{10}x^2$$

$$C(x) = \frac{1}{2}x^2 + 100x$$

ดังนั้น

$$C'(x) = x + 100$$

ให้

$$R'(x) = C'(x) \text{ เราได้}$$

$$\frac{3}{10}x^2 - 32x + 640 = x + 100$$

$$3x^2 - 330x + 5400 = 0$$

$$3(x-20)(x-90) = 0$$

$$x = 20, 90$$

เพราะว่า $p = \frac{(80-x)^2}{10}$ เราได้ $p' = -\frac{(80-x)}{5}$ แต่ p เป็นพึงกษาณลดลง เมื่อค่า x

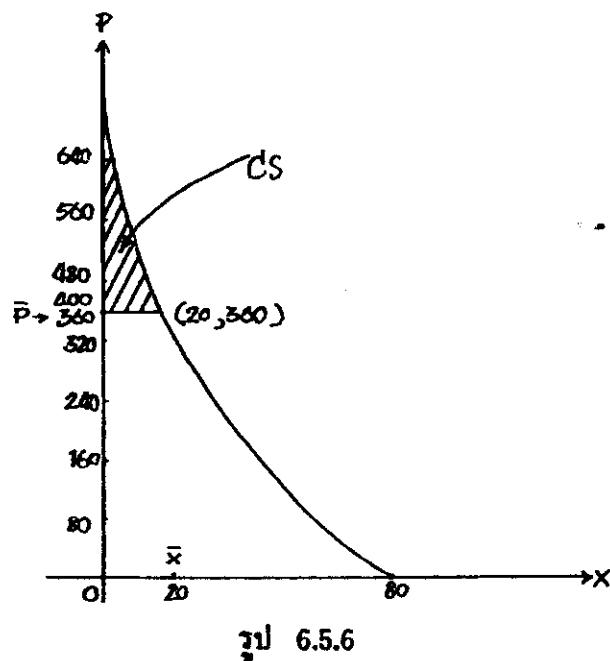
เพิ่มขึ้น ดังนั้น $p' < 0$ นั่นก็คือ เรายังเลือกค่า x เท่ากับ 20 เพื่อให้ $p' < 0$

$$\text{เมื่อ } x = 20 \text{ เราได้ } p = \frac{(80-20)^2}{10} = 360$$

นั่นก็คือ $x = 20$ และ $p = 360$ ในสมการที่เราใช้หาส่วนเกินของผู้บริโภคให้ CS คือ จำนวนบทบาทในส่วนเกินของผู้บริโภค เราได้

$$\begin{aligned}
 CS &= \int_0^{20} \frac{(80-x)^2}{10} dx - 360 \times 20 \\
 &= -\frac{1}{10} \frac{(80-x)^3}{3} \Big|_0^{20} - 7200 \\
 &= -7200 + \frac{51200}{3} - 7200 \\
 &= 2666\frac{2}{3}
 \end{aligned}$$

ดังนั้น ส่วนเกินของผู้บริโภคคือประมาณ 2,667 บาท และบริเวณที่ใช้แทนส่วนเกินของผู้บริโภค คือส่วนที่แรเงาในรูป 6.5.6



รูป 6.5.6

แบบฝึกหัด 6.5

จากข้อ 1 ถึง 6 p คือ จำนวนบาทของราคาต่อน่วย เมื่อจำนวนหน่วยของสินค้าที่ต้องการหรือขาย คือ x

- 1) สมการอุปสงค์สำหรับสินค้านิดหนึ่ง คือ $100 p = 2400 - 20x - x^2$ และราคากลางคือ 16 บาท จงหาส่วนเกินของผู้บริโภค และเขียนรูปแสดงบริเวณที่ใช้แทนส่วนเกินของผู้ผลิตนี้
- 2) สมการอุปทานสำหรับสินค้านิดหนึ่ง คือ $2x^2 - 300p + 900 = 0$ และราคากลางคือ 9 บาท จงหาส่วนเกินของผู้ผลิต และเขียนรูปแสดงบริเวณที่ใช้แทนส่วนเกินของผู้ผลิตนี้
- 3) ถ้าสมการอุปสงค์สำหรับสินค้านิดหนึ่งคือ $10p = \sqrt{900 - x}$ และจำนวนอุปสงค์หรือจำนวนสินค้าที่ผู้บริโภคซื้อ คือ 500 หน่วย จงหาส่วนเกินของผู้บริโภคโดย 2 วิธี ก) อินทิเกรตตาม x ข) อินเกรตตาม p
- 4) ถ้าสมการอุปทาน สำหรับสินค้านิดหนึ่งคือ $100p = (x + 20)^2$ และราคากลางคือ 25 บาท จงหาส่วนเกินของผู้ผลิตโดย 2 วิธี คือ ก) อินทิเกรตตาม x ข) อินทิเกรตตาม p
- 5) ถ้าเราใช้สมการอุปสงค์ในข้อ 1 และสมการอุปทานในข้อ 2 กับสินค้านิดหนึ่ง จงหาส่วนเกินของผู้บริโภคและส่วนเกินของผู้ผลิตเมื่อตลาดอยู่ในสภาพสมดุลย์ หรือมีคุลิภาพ (นั่นก็คือ ราคากลางในที่นั้นคือ ราคามูลย์ค่าตลาด)
- 6) สำหรับสินค้านิดหนึ่ง มีสมการอุปสงค์เป็น $30p = 3600 - x^2$ พังท์ชัน หันทวนการผลิตหันหอดของสินนี้คือ $C(x) = (x + 20)^2$ เมื่อ C(x) บาท คือต้นทุนของการผลิตสินค้า x หน่วย ในสภาพที่ผู้ผลิตสินค้านิดนี้สามารถ เป็นผู้ผลิตแต่เพียงผู้เดียว และสามารถควบคุมจำนวนหน่วยของสินค้าที่ผลิต และราคานี้ให้ได้กำไรสูงสุด (Monopoly) จงหาส่วนเกินของผู้บริโภค