บทที่ 4
การประยุกต์ของอนุพันธ์

4.1 ค่าสูงสุดและต่ำสุดของฟังก์ชัน **Maximum and Minimum Values of A Function**

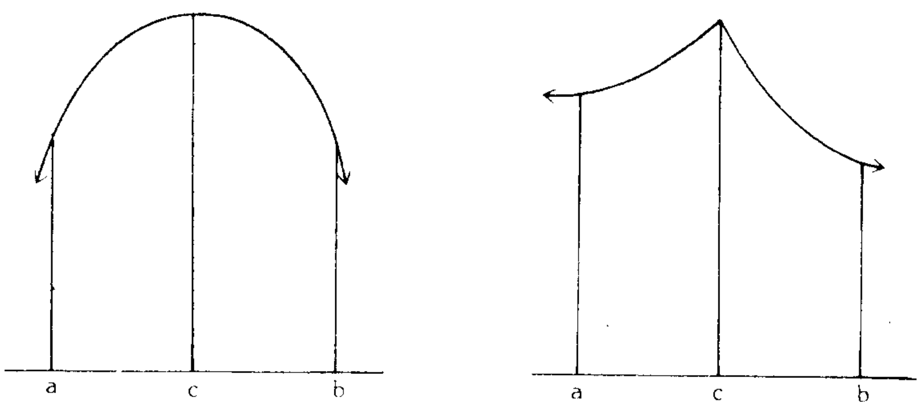
ทางเรขาคณิต ถ้าเราจะพิจารณาอนุพันธ์ของฟังก์ชัน ซึ่งหมายถึง ความชันของเส้นสัมผัส ที่สัมผัสกับกราฟของฟังก์ชัน ณ จุดหนึ่งจุดใดบนกราฟ

ในลักษณะเช่นนี้ เราสามารถจะนำหลักการนี้ไปใช้ในการเขียนกราฟ

ตัวอย่าง 4.1.1 อนุพันธ์อาจนำไปใช้ในการหาจุดบนกราฟของฟังก์ชันที่สัมผัสกับเส้นสัมผัสตามแนวระดับ ซึ่ง ณ จุดเหล่านี้ อนุพันธ์จะมีค่าเป็นศูนย์

หรือ อนุพันธ์อาจนำไปหาช่วง (Interval) ที่กราฟของฟังก์ชันอยู่เหนือเส้นสัมผัส และหาช่วง (Interval) ที่กราฟของฟังก์ชันอยู่ต่ำกว่าเส้นสัมผัส ก่อนที่จะนำอนุพันธ์ไปใช้ในการเขียนกราฟ จำเป็นต้องกำหนดนิยามและทฤษฎีต่อไปนี้

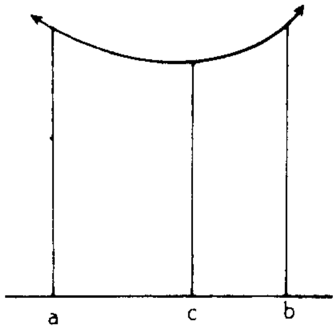
นิยาม 4.1.1 ฟังก์ชัน f มีค่าสูงสุดสัมพัทธ์ (Relative Maximum Value) ณ ที่ $x = c$ ถ้าในช่วงเปิด (open interval) มีค่า c ที่ทำให้ $f(c) \geq f(x)$ สำหรับทุก ๆ ค่า x ในช่วงเปิดนี้



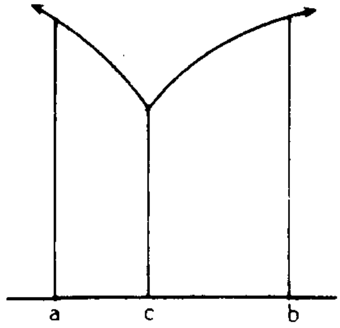
รูป 4.1.1 รูป 4.1.2

รูป 4.1.1 และ รูป 4.1.2 แสดงให้เห็นส่วนหนึ่งของกราฟที่มีค่าสูงสุดสัมพัทธ์ที่ c

นิยาม 4.1.2 ถ้าฟังก์ชัน f มีค่าต่ำสุดสัมพัทธ์ (relative Minimum Values) ณ ที่ $x = c$ ถ้าในช่วงเปิด (open interval) มีค่า c ซึ่งทำให้ $f(c) \leq f(x)$ สำหรับทุก ๆ ค่า x ในช่วงเปิดนี้



รูป 4.1.3



รูป 4.1.4

รูป 4.1.3 และ รูป 4.1.4 แสดงให้เห็นส่วนหนึ่งของกราฟที่มีค่าต่ำสุดสัมพัทธ์ที่ c

ถ้าฟังก์ชัน f มีค่าสูงสุด หรือค่าต่ำสุดสัมพัทธ์ที่ c แล้ว จะเรียกว่า f มีค่าปลายสุดสัมพัทธ์ (Relative Extremum) ที่ c

ทฤษฎีต่อไปนี้จะทำให้สามารถกำหนดตำแหน่งค่า c ที่มีค่าปลายสุดสัมพัทธ์ได้

ทฤษฎี 4.1.1 ถ้ากำหนดค่า $f(x)$ ได้ สำหรับทุก ๆ ค่า x ในช่วงเปิด (a, b) และถ้า f มีค่าปลายสุดสัมพัทธ์ที่ $x = c$ ซึ่ง $a < c < b$ แล้ว $f'(c) = 0$

พิสูจน์ (โดยสังเขป) จะพิสูจน์ในกรณีที่ f มีค่าต่ำสุดสัมพัทธ์ที่ $x = c$

เพราะว่า $f(c) \le f(c + \triangle x)$ สำหรับ $\triangle x \to 0$

หรือ $0 \le f(c + \triangle x) - f(c)$

เพราะว่า $f'(c) = \lim\limits_{\triangle x \to 0} \dfrac{f(c + \triangle x) - f(c)}{\triangle x}$ หาค่าได้

แสดงว่า ลิมิตทางซ้ายจะเท่ากับลิมิตทางขวา และเท่ากับ $f'(c)$ ซึ่ง

ลิมิตทางซ้าย $= \lim\limits_{\triangle x \to 0^-} \dfrac{f(c + \triangle x) - f(c)}{\triangle x} \le 0, \quad \because \triangle x < 0 \qquad (4.1.1)$

ลิมิตทางขวา $= \lim\limits_{\triangle x \to 0^+} \dfrac{f(c + \triangle x) - f(c)}{\triangle x} \ge 0, \quad \because \triangle x > 0 \qquad (4.1.2)$

แต่สมการ (4.1.1) = สมการ (4.1.2) และเท่ากับ $f'(c)$

เพราะฉะนั้น $f'(c) \le 0$ จากสมการ (4.1.1)

และ $f'(c) \ge 0$ จากสมการ (4.1.2)

นั่นคือ $0 \le f'(c) \le 0$

เพราะฉะนั้น $f'(c) = 0$

สำหรับการพิสูจน์ในกรณีที่ f มีค่าสูงสุดสัมพัทธ์ที่จุด c ทำได้ในลักษณะคล้ายคลึงกันนี้ การแปลความหมายเชิงเรขาคณิตของทฤษฎี 4.1.1 คือ ถ้า f มีค่าปลายสุดสัมพัทธ์ที่จุด

c. และ $f'(c)$ มีค่าจริง กราฟของ $y = f(x)$ จะต้องมีเส้นสัมผัสตามแนวนอน ณ จุดที่ $x = c$

ถ้า f เป็นฟังก์ชันที่หาอนุพันธ์ได้ แล้วค่าที่จะเป็นไปได้ของ x ซึ่งทำให้ f มีค่าปลายสุดสัมพัทธ์ คือ ค่า x ซึ่งคล้องตาม $f'(x) = 0$

อย่างไรก็ตาม อาจจะมีค่า x บางค่าที่ทำให้ $f'(x) = 0$ แต่ f ไม่มีค่าปลายสุดสัมพัทธ์ที่ค่า x บางค่านั้นได้ เช่น ถ้ากำหนดให้

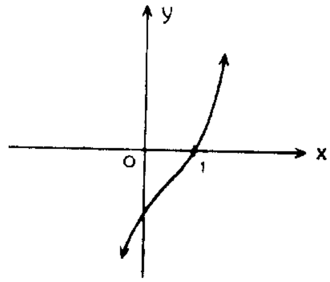
$$f(x) = (x - 1)^3$$

จะเห็นว่า $f'(x) = 3(x - 1)^2$ และ $f'(1) = 0$

อย่างไรก็ตาม ถ้า $x < 1$, $f(x) < 0$

และ ถ้า $x > 1$, $f(x) > 0$ (รูป 4.1.5)

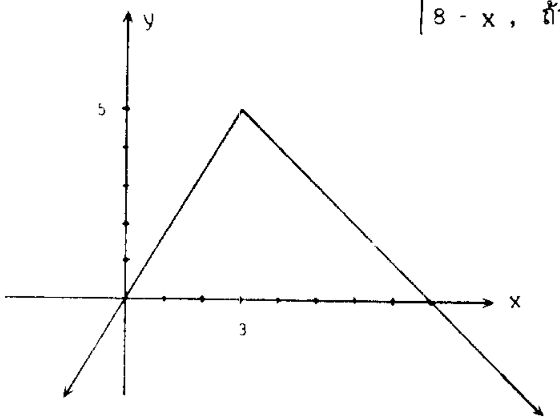
ดังนั้น f ไม่มีค่าปลายสุดสัมพัทธ์ ณ จุด $x = 1$



รูป 4.1.5

นอกจากนี้ฟังก์ชัน f อาจมีค่าสูงสุดสัมพัทธ์ที่จุดใดจุดหนึ่ง แต่หาค่า f' ไม่ได้ที่จุดนั้น เช่น

ให้ $f(x) = \begin{cases} 2x - 1, & \text{ถ้า } x \le 3 \\ 8 - x, & \text{ถ้า } x > 3 \end{cases}$



รูป 4.1.6

จากรูป 4.1.6 จะเห็นฟังก์ชัน f มีค่าสูงสุดสัมพัทธ์ที่จุด $x = 3$ แต่อนุพันธ์ของ $f(x)$ เมื่อ $x \to 4$ ทางซ้าย เป็น

$$f'(x) = 2$$

และอนุพันธ์ของ $f(x)$ เมื่อ x 3 ทางขวา เป็น

$$f'_{+}(x) = -1$$

เพราะฉะนั้น $f'_{-}(3) \neq f'_{+}(3)$

จึงสรุปได้ว่าที่จุด $x = 3$ ไม่มีอนุพันธ์ของ f แต่ที่จุด $x = 3$ ฟังก์ชัน f มีค่าสูงสุดสัมพัทธ์ ที่นั่น

จากตัวอย่างนี้จึงทำให้เข้าใจได้ว่าเหตุใดในทฤษฎี 4.1.1 จึงต้องกำหนดเงื่อนไขไว้ว่าต้องมีอนุพันธ์ $f'(c)$

นิยาม 4.1.3 ถ้า c เป็นจำนวน (number) ในโดเมนของฟังก์ชัน f และถ้า $f'(c) = 0$ หรือ

$f'(c)$ หาค่าไม่ได้ จะเรียก c ว่าเป็นค่าวิกฤต (critical number) ของ f

ตัวอย่าง 4.1.2 จงหาค่าวิกฤตของฟังก์ชัน f ซึ่ง

$$f(x) = x^{4/3} + 4x^{1/3}$$

วิธีทำ เพราะว่า
$$f'(x) = \frac{4}{3}x^{1/3} + \frac{4}{3}x^{-2/3}$$
$$= \frac{4}{3}x^{-2/3}(x+1)$$
$$= \frac{4(x+1)}{3x^{2/3}}$$

เพราะว่า $f'(-1) = 0$ และ $f'(0)$ หาค่าไม่ได้ ในขณะนี้ 0 และ -1 อยู่ในโดเมนของ f

เพราะฉะนั้นค่าวิกฤตของ f คือ 0 และ -1

ในการพิจารณาฟังก์ชันซึ่งกำหนดบนช่วง (interval) ที่กำหนดให้ และต้องการที่จะหาค่าที่มากที่สุด และน้อยที่สุดของฟังก์ชันบนช่วงนั้น ช่วงเหล่านั้นอาจเป็นแบบปิด แบบเปิด หรือแบบกึ่งเปิดกึ่งปิด

ค่าที่มากที่สุดของฟังก์ชันบนช่วงนั้นเราเรียกว่า "ค่าสูงสุดสัมบูรณ์" (absolute maximum volue) และค่าที่น้อยที่สุดของฟังก์ชันบนช่วงนั้นเรียกว่า "ค่าต่ำสุดสัมบูรณ์" (absolute minimum value)

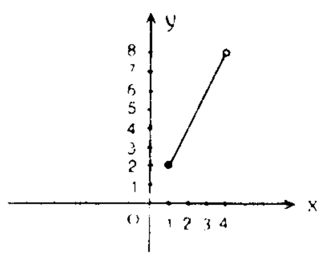
นิยาม 4.1.4 ฟังก์ชัน f มีค่าสูงสุดสัมบูรณ์ บนช่วง (interval) หนึ่งช่วงใดถ้ามีจำนวน c ที่อยู่ในช่วงนั้นซึ่ง $f(c) \geq f(x)$ สำหรับทุก ๆ ค่า x ในช่วงนั้น ในกรณีเช่นนี้ f(c) เป็นค่าสูงสุดสัมบูรณ์ของ f บนช่วงนั้น

นิยาม 4.1.5 ฟังก์ชัน f มีค่าต่ำสุดสัมบูรณ์ บนช่วง (interval) หนึ่งช่วงใด ถ้ามีจำนวน c ที่อยู่ในช่วงนั้นซึ่ง $f(c) \leq f(x)$ สำหรับทุก ๆ ค่า x ในช่วงนั้น ในกรณีเช่นนี้ f(c) เป็นค่าต่ำสุดสัมบูรณ์ของ f บนช่วงนั้น

ค่าปลายสุดสัมบูรณ์ (Absolute extremum) ของฟังก์ชันบนช่วงหนึ่งช่วงใด อาจจะเป็น ค่าต่ำสุดสัมบูรณ์ หรือค่าสูงสุดสัมบูรณ์ของฟังก์ชันบนช่วงนั้น

ฟังก์ชันอาจมีหรืออาจไม่มี ค่าปลายสุดสัมบูรณ์บนช่วงที่กำหนดให้ เช่น

ถ้า f เป็นฟังก์ชันซึ่ง $f(x) = 2x$

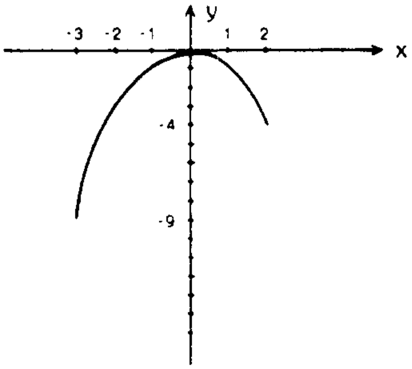


รูป 4.1.7

จากรูป 4.1.7 บนช่วง [1, 4)
f มีค่าต่ำสุดสัมบูรณ์เป็น 2 บนช่วง [1, 4)
แต่ f ไม่มีค่าสูงสุดสัมบูรณ์ บนช่วง [1, 4)
เพราะว่า $\lim_{x \to 4^-} f(x) = 8$
ในขณะที่ f(x) มีค่าน้อยกว่า 8 เสมอ
สำหรับ x บนช่วง [1, 4)

หรือถ้ากำหนดให้ $f(x) = -x^2$

เขียนกราฟของ f บนช่วง $(-3, 2)$



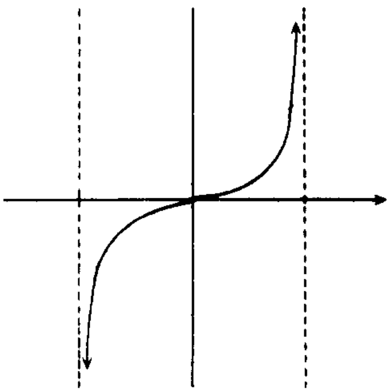
รูป 4.1.8

จากรูป 4.1.8 จะพบว่าฟังก์ชัน f มีค่าสูงสุดสัมบูรณ์ที่ $x = 0$ บนช่วง $(-3, 2)$ แต่ไม่มีค่าต่ำสุดสัมบูรณ์ ของ f บนช่วง $(-3, 2)$

เพราะว่า $\lim_{x \to -3^+} f(x) = -9$

ในขณะที่ $f(x)$ มีค่ามากกว่า -9 เสมอ สำหรับ x บนช่วง $(-3, 2)$

หรือถ้าฟังก์ชัน f กำหนดโดย $f(x) = \dfrac{x}{1 - x^2}$



รูป 4.1.9

จะเห็นว่าฟังก์ชันนี้ไม่มีค่าสูงสุดสัมบูรณ์และต่ำสุดสัมบูรณ์ บนช่วง $(-1, 1)$ ดังรูป 4.1.9

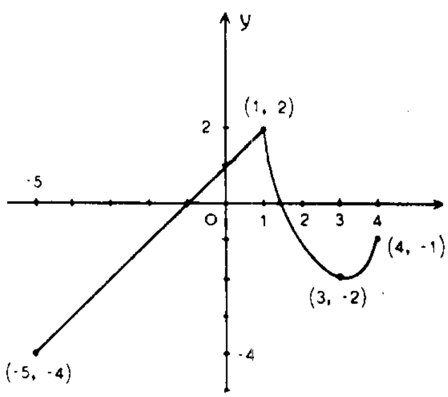
ข้อสังเกต

$$\lim_{x \to 1^+} f(x) = -\infty$$

และ $$\lim_{x \to 1^-} f(x) = \infty$$

หรือถ้าให้ f เป็นฟังก์ชันกำหนดโดย

$$f(x) = \begin{cases} x + 1 & , x < 1 \\ x^2 - 6x + 7 & , x \geq 1 \end{cases}$$



รูป 4.1.10

จากรูป 4.1.10 f บนช่วง $[-5, 4]$

ค่าสูงสุดสัมบูรณ์ของ f บน $[-5, 4]$ ปรากฏที่ $x = 1$ และ $f(1) = 2$

ค่าต่ำสุดสัมบูรณ์ ของ f บน $[-5,4]$ ปรากฏที่ $x = -5$ และ $f(-5) = -4$

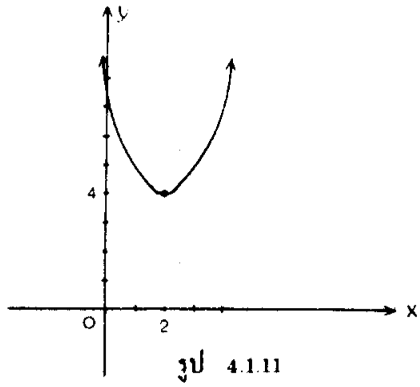
ข้อสังเกต ฟังก์ชัน f มีค่าสูงสุดสัมบูรณ์ที่ $x = 1$ และมีค่าต่ำสุดสัมบูรณ์ที่ $x = -5$

ข้อสังเกต $x = 1$ เป็นจำนวนวิกฤต ของ f เพราะว่า $f'(1)$ หาค่าไม่ได้ และ $x = 3$ เป็นจำนวนวิกฤตของ f เพราะว่า $f'(3) = 0$

นิยาม 4.1.6 f(c) เป็นค่าสูงสุดสัมบูรณ์ (absolute maximum value) ของฟังก์ชัน f ถ้า c อยู่ในโดเมนของ f และถ้า $f(c) \geq f(x)$ สำหรับทุก ๆ ค่า x ในโดเมนของ f

นิยาม 4.1.7 f(c) เป็นค่าต่ำสุดสัมบูรณ์ (absolute minimum value) ของฟังก์ชัน f ถ้า c อยู่ในโดเมนของ f และ $f(c) \leq f(x)$ สำหรับทุก ๆ ค่า x ในโดเมนของ f

เช่น กราฟของฟังก์ชัน f กำหนดโดย



รูป 4.1.11

$f(x) = x^2 - 4x + 8$ เป็นพาราโบลาดังรูป 4.1.11 จุดที่ต่ำสุดของพาราโบลาอยู่ที่ (2, 4) และมีรูปเป็นโค้งกระทะหงาย ฟังก์ชันมีค่าต่ำสุดสัมบูรณ์เท่ากับ 4 ณ จุดที่ $x = 2$ และไม่มีค่าสูงสุดสัมบูรณ์ของ f

พิจารณาจากตัวอย่างต่าง ๆ ข้างต้นจะพบว่าในกรณีที่ฟังก์ชันมีทั้งค่าฟังก์ชันสูงสุด และค่าฟังก์ชันต่ำสุดสัมบูรณ์นั้น ฟังก์ชันที่กำหนดให้คือ $f(x)\begin{cases} x+1 & x<1 \\ x^2-6x+7, & x \geq 1 \end{cases}$ ซึ่งเป็นฟังก์ชันต่อเนื่องบนช่วงปิด (closed interval) [-5, 4] ส่วนฟังก์ชันอื่น ๆ ในตัวอย่างอื่น ๆ ไม่มีความต่อเนื่องหรือช่วงไม่ปิด

ถ้าฟังก์ชันเป็นฟังก์ชันต่อเนื่องบนช่วงปิด จะมีทฤษฎีซึ่งเรียกว่า ทฤษฎีค่าปลายสุด ซึ่งทำให้แน่ใจได้ว่าฟังก์ชันจะต้องมีทั้งค่าต่ำสุดและสูงสุดสัมบูรณ์บนช่วงนั้น

ทฤษฎี 4.1.2 (ทฤษฎีค่าปลายสุด) ถ้าฟังก์ชัน f เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องบนช่วงปิด [a, b] f จะมีค่าสูงสุดสัมบูรณ์ และค่าต่ำสุดสัมบูรณ์ บนช่วง [a, b]

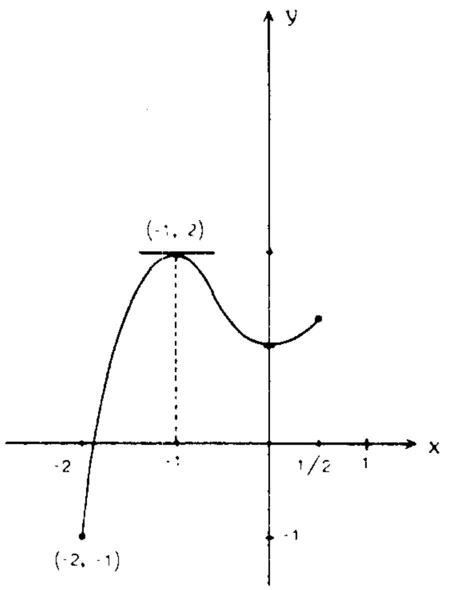
ค่าปลายสุดสัมบูรณ์ของฟังก์ชันที่ต่อเนื่องบนช่วงปิดจะต้องเป็นค่าปลายสุดสัมพัทธ์ หรือเป็นค่าของฟังก์ชันที่จุดปลายของช่วงนั้น ๆ เพราะว่าเงื่อนไขที่จำเป็นสำหรับฟังก์ชันที่จะมีค่าปลายสุดสัมพัทธ์ที่จุด c คือ c จะต้องเป็นจำนวนวิกฤต การกำหนดค่าสูงสุดสัมบูรณ์ และค่าต่ำสุดสัมบูรณ์ของฟังก์ชันต่อเนื่อง f บนช่วงปิด [a, b] มีขั้นตอนดังต่อไปนี้

1. หาค่าของฟังก์ชันที่จุดวิกฤต ของ f บน [a, b]
2. หาค่าของ f(a) และ f(b)
3. ค่ามากที่สุดจากข้อที่ 1 และข้อที่ 2 เป็นค่าสูงสุดสัมบูรณ์
   ค่าน้อยที่สุดจากข้อที่ 1 และข้อที่ 2 เป็นค่าต่ำสุดสัมบูรณ์

ตัวอย่าง 4.1.3 กำหนดให้ $f(x) = x^3 + x^2 - x + 1$

จงหาค่าปลายสุดสัมบูรณ์ ของ f บนช่วง $[-2, \frac{1}{2}]$

วิธีทำ เพราะว่า f เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องบน $[-2, \frac{1}{2}]$



รูป 4.1.12

ดังนั้นใช้ทฤษฎีค่าปลายสุดเพื่อหาจำนวนวิกฤตของ f

ขั้นแรกหา f'

$f'(x) = 3x^2 + 2x - 1$

ซึ่ง $f'(x)$ เป็นจริงสำหรับทุก ๆ ค่าของจำนวนจริง ดังนั้นค่าของจำนวนวิกฤตของ f จะเป็นค่า x ซึ่ง $f'(x) = 0$

ให้ $f'(x) = 0$

$$3x^2 + 2x - 1 = 0$$

$$(3x - 1)(x + 1) = 0$$

เพราะฉะนั้น $x = \frac{1}{3}$ และ $x = -1$

ดังนั้น $\frac{1}{3}$ และ -1 เป็นจำนวนวิกฤตของ f ซึ่งอยู่ในช่วง $[-2, \frac{1}{2}]$ ที่กำหนดให้ หาค่าของฟังก์ชันที่จำนวนวิกฤตและที่จุดปลายของช่วง ซึ่งกำหนดให้ไว้ในตาราง

x	-2	-1	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{2}$
f(x)	-1	2	$\frac{22}{27}$	$\frac{7}{8}$

เพราะฉะนั้น ค่าสูงสุดสัมบูรณ์ ของ f บนช่วง $[-2, \frac{1}{2}]$ คือ 2 ซึ่ง $x = -1$

และ ค่าต่ำสุดสัมบูรณ์ ของ f บนช่วง $[-2, \frac{1}{2}]$ คือ -1 ซึ่ง $x = -2$

ตัวอย่าง 4.1.4 กำหนดให้ $f(x) = (x - 2)^{2/3}$

จงหาค่าปลายสุดสัมบูรณ์ ของ f บนช่วง $[1, 5]$

วิธีทำ เพราะว่า f ต่อเนื่องบนช่วง $[1, 5]$ จึงใช้ทฤษฎีค่าปลายสุดได้

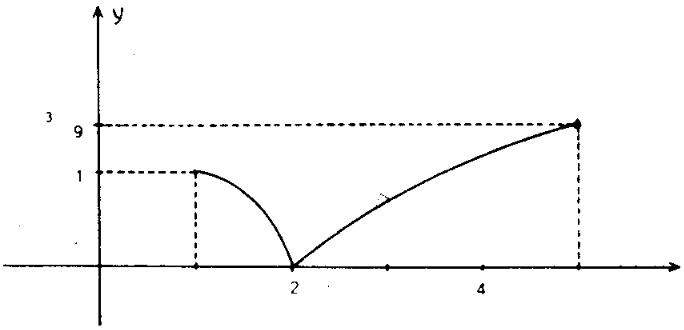
เนื่องจาก $f'(x) = \frac{2}{3}(x - 2)^{-1/3}$

$$= \frac{2}{3(x - 2)^{1/3}}$$

จึงไม่มีค่าของ x ซึ่ง $f'(x) = 0$ อย่างไรก็ตาม เพราะว่า $f'(x)$ หาค่าไม่ได้ ที่ $x = 2$ สรุปได้ว่า 2 เป็นจำนวนวิกฤตของ f ดังนั้นค่าปลายสุดสัมพัทธ์ปรากฏที่ $x = 2$ หรือที่จุดปลายข้างหนึ่งของช่วง $[1, 5]$ ค่าฟังก์ชันของจำนวนเหล่านี้คือ

x	1	2	5
f(x)	1	0	$\sqrt[3]{9}$

จากตารางแสดงว่าค่าต่ำสุดสัมบูรณ์ ของ f บน [1, 5] คือ 0 เมื่อ $x = 2$
และ ค่าสูงสุดสัมบูรณ์ ของ f บน [1, 5] คือ $\sqrt[3]{9}$ เมื่อ $x = 5$ ดังรูป 4.1.13



รูป 4.1.13

แบบฝึกหัด 4.1

ข้อ 1-5 จงหาจำนวนวิกฤตของฟังก์ชันที่กำหนดให้

1) $f(x) = x^3 + 7x^2 - 5x$

2) $f(x) = x^4 + 4x^3 - 2x^2 - 12x$

3) $f(x) = x^{6/5} - 12x^{1/5}$

4) $f(x) = (x^2 - 4)^{2/3}$

5) $f(x) = \dfrac{x}{x^2 - 9}$

ข้อ 6-11 จงหาค่าปลายสุดสัมบูรณ์ (ถ้ามี) ของฟังก์ชันบนช่วงที่กำหนดให้ และหาค่าของ x ที่ทำให้ได้ค่าปลายสุดสัมบูรณ์พร้อมทั้งเขียนกราฟของฟังก์ชันบนช่วงนั้นด้วย

6) $f(x) = 4 - 3x \quad ; \ (-1, 2]$

7) $f(x) = \dfrac{1}{x} \quad ; \ [-2, 3]$

8) $f(x) = 3 + x \quad ; \ [-3, +\infty]$

9) $f(x) = \dfrac{4}{(x - 3)^2} \quad ; \ [2, 5]$

10) $f(x) = \dfrac{3x}{9 - x^2} \quad ; \ (-3, 2)$

$$
11) \quad f(x) = \begin{matrix} 2 & \text{ถ้า } x \neq 5 \\ x - 5 & \\ 2 & \text{ถ้า } x = 5 \end{matrix} \quad ; \quad [3, 5]
$$

ข้อ 12-17 จงหาค่าสูงสุดสัมบูรณ์ และค่าต่ำสุดสัมบูรณ์ของฟังก์ชันบนช่วงที่กำหนดให้ โดยวิธีการเดียวกับตัวอย่างของหัวข้อนี้ พร้อมทั้งเขียนกราฟของฟังก์ชันบนช่วงนี้ด้วย

12) $f(x) = x^3 + 5x - 4$;$[-3, -1]$

13) $f(x) = x^4 - 8x^2 + 16$;$[-4, 0]$

14) $f(x) = x^4 - 8x^2 + 16$;$[0, 3]$

15) $f(x) = \dfrac{x}{x + 2}$; $[-1, 2]$

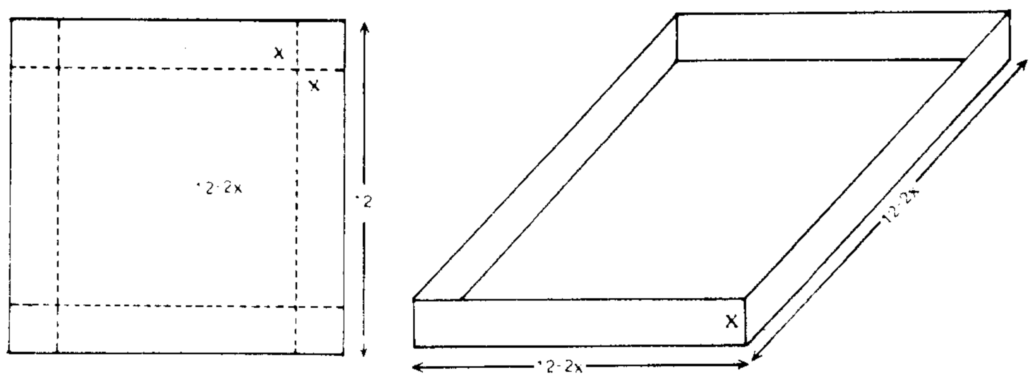
16) $f(x) = (x + 1)^{2/3}$; $[-2, 1]$

17) $f(x) = \begin{cases} 3x - 4 & \text{ถ้า } -3 \leq x < 1 \\ x^2 - 2 & \text{ถ้า } 1 \leq x \leq 3 \end{cases}$; $[-3, 3]$

4.2 การประยุกต์ที่เกี่ยวกับค่าปลายสุดสัมบูรณ์บนช่วงปิด **Application involving an absolute extremum on a closed interval**

ต่อไปนี้จะพิจารณาปัญหาที่มีคำตอบเป็นค่าปลายสุดสัมบูรณ์ของฟังก์ชันบนช่วงปิด โดยใช้ทฤษฎีค่าปลายสุดซึ่งกำหนดว่ามีทั้งค่าสูงสุดสัมบูรณ์และค่าต่ำสุดสัมบูรณ์ บนช่วงปิดของฟังก์ชันนั้น ถ้าฟังก์ชันมีความต่อเนื่องบนช่วงปิด

ตัวอย่าง 4.2.1 โรงงานทำกล่องกระดาษต้องการทำกล่องที่ไม่มีฝาปิดจากกระดาษแข็งสี่เหลี่ยมจัตุรัสยาวด้านละ 12 นิ้ว โดยตัดทั้งสี่มุมของกระดาษเป็นสี่เหลี่ยมจัตุรัสขนาดเท่ากัน แล้วพับเป็นส่วนสูงของกล่องกระดาษ จงหาความยาวของด้านจัตุรัสที่ตัดออก ที่จะทำให้กล่องมีปริมาตรมากที่สุด



กระดาษแข็ง กล่องกระดาษ

รูป 4.2.1

วิธีทำ ให้ x เป็นความยาวของด้านจัตุรัสที่ตัดออกมีหน่วยเป็นนิ้ว (ดังรูป 4.2.1)

$V(x)$ เป็นปริมาตรของกล่องมีหน่วยเป็นลูกบาศก์นิ้ว

ปริมาตร $V(x) = (12 - 2x)(12 - 2x)\,x \quad ; \quad x \in [0, 6]$

$$= 144x - 48x^2 + 4x^3 \qquad (4.2.1)$$

เพราะว่า V ต่อเนื่องบนช่วงปิด $[0, 6]$ จากทฤษฎีค่าปลายสุดจะได้ว่า V มีค่าสูงสุดสัมบูรณ์ บนช่วงนี้ และค่าสูงสุดสัมบูรณ์ ของ V จะต้องปรากฏที่จำนวนวิกฤตหรือที่จุดปลายของช่วง เพื่อที่จะหาจำนวนวิกฤตของ V เราหา $V'(x)$ และหาค่า x ที่ทำให้ $V'(x) = 0$ หรือ $V'(x)$ ไม่เป็นจริงจากสมการ (4.2.1)

$V'(x) = 144 - 96x + 12x^2$ เป็นจริงสำหรับทุก ๆ ค่า x

ให้ $V'(x) = 0$

$$144 - 96x + 12x^2 = 0$$

$$12(12 - 8x + x^2) = 0$$

$$12 - 8x + x^2 = 0$$

$$(6 - x)(2 - x) = 0$$

เพราะฉะนั้น $x = 2,\ x = 6$ เป็นจำนวนวิกฤตของ $V(x)$

ทั้ง 2 และ 6 อยู่ในช่วงปิด $[0, 6]$

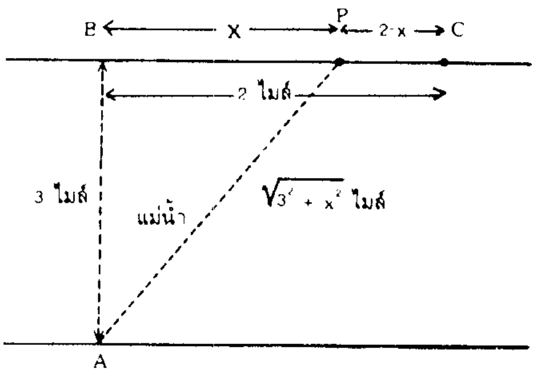
ค่าสูงสุดสัมบูรณ์ของ $V(x)$ บนช่วง $[0, 6]$ จะต้องปรากฏที่จำนวนวิกฤต หรือที่จุดปลายของช่วง เพราะว่า $V(0) = 0, V(6) = 0$ แต่ $V(2) = 128$

สรุปว่าค่าสูงสุดสัมบูรณ์ ของ $V(x)$ บนช่วง $[0, 6]$ คือ 128 เมื่อ $x = 2$ เพราะฉะนั้น ปริมาตรที่มากที่สุดของกล่องคือ 128 ลูกบาศก์นิ้ว โดยตัดที่มุมทั้งสี่ของกระดาษออกด้านละ 2 นิ้ว

ตัวอย่าง 4.2.2 A และ B เป็นจุดสองจุดที่อยู่บนคนละฝั่งของแม่น้ำ ซึ่งกว้าง 3 ไมล์ จุด C อยู่บนฝั่งเดียวกับจุด B และห่างจาก B 2 ไมล์ องค์การโทรศัพท์ต้องการจะวางสายเคเบิลจาก A ถึง C

ถ้าราคาต่อไมล์ของสายเคเบิลที่ต่อใต้น้ำแพงกว่าต่อบนบก 25 เปอร์เซ็นต์ องค์การโทรศัพท์จะเดินสายอย่างไรที่จะทำให้เสียค่าใช้จ่ายน้อยที่สุด

วิธีทำ ให้ p เป็นจุดที่อยู่บนฝั่งเดียวกับ B และ C และอยู่ระหว่าง B กับ C



รูป 4.2.2

x เป็นระยะจาก B ไป P

$2 - x$ เป็นระยะจาก P ไป C และ

$x \in [0, 2]$

k บาท เป็นราคาต่อไมล์ในการวางสายเคเบิลบนบก

$\frac{5k}{4}$ บาท เป็นราคาต่อไมล์ในการวางสายเคเบิลใต้น้ำ

ถ้า $C(x)$ บาท เป็นค่าใช้จ่ายทั้งหมดของการวางสายเคเบิล จาก A ถึง P และจาก P ถึง C

ดังนั้น $$C(x) = \frac{5}{4}k\sqrt{3^2 + x^2} + k(2 - x)$$

$$C'(x) = \frac{5}{4}k \cdot \frac{1}{2}(3^2 + x^2)^{-1/2}(2x) + k(-1)$$

$$= \frac{5kx}{4(3^2 + x^2)^{1/2}} - k$$ เป็นจริงสำหรับทุก ๆ ค่าของ x

ให้ $$C'(x) = 0$$

$$\frac{5kx}{4(3^2 + x^2)^{1/2}} - k = 0$$

$$\frac{5x}{4(3^2 + x^2)^{1/2}} = 1$$

$$5x = 4(3^2 + x^2)^{1/2}$$
$$25x^2 = 16(9 + x^2) \quad \text{ยกกำลังสองทั้งสองข้าง}$$
$$25x^2 = 144 + 16x^2$$
$$9x^2 = 144$$
$$x^2 = 16$$
$$x = \pm 4$$

ถ้า $x = +4$ และ -4 ซึ่งไม่อยู่บนช่วง $[0, 2]$

เพราะฉะนั้นไม่มีจำนวนวิกฤตของ $C(x)$ ในช่วง $[0, 2]$

ดังนั้นค่าต่ำสุดสัมบูรณ์ของ $C(x)$ บนช่วง $[0, 2]$ ต้องปรากฏที่จุดปลายของช่วง $[0, 2]$

เพราะว่า $C(0) = \frac{23}{4}k$

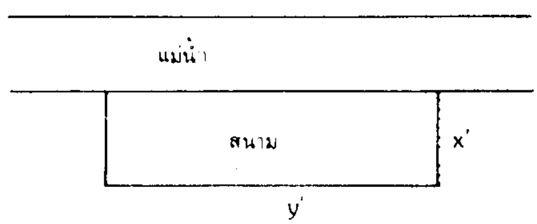
$C(2) = \frac{5\sqrt{13}}{4}k$

เพราะว่า $\frac{5\sqrt{13}}{4}k < \frac{23}{4}k$

ค่าต่ำสุดสัมบูรณ์ ของ $C(x)$ บนช่วง $[0, 2]$ คือ $\frac{5\sqrt{13}}{4}k$ เมื่อ $x = 2$

เพราะฉะนั้น ค่าวางสายเคเบิลจะถูกที่สุดถ้าวางสายเคเบิลใต้น้ำจาก A ถึง C

ตัวอย่าง 4.2.3 ในการสร้างสนามสี่เหลี่ยมผืนผ้าที่มีด้านยาวอยู่ติดกับแม่น้ำโดยการสร้างรั้วล้อมรอบด้านทั้งสาม ยกเว้นด้านที่อยู่ติดกับแม่น้ำ ค่าก่อสร้าง 8 ดอลล่าต่อฟุต สำหรับด้านกว้างทั้งสอง และ 12 ดอลล่าต่อฟุตสำหรับด้านที่ขนานกับแม่น้ำ ในการล้อมรั้วนี้เสียค่าก่อสร้างทั้งหมด 3600 ดอลล่า จงหาขนาดของสนามที่จะล้อมรั้วซึ่งมีพื้นที่ใหญ่ที่สุด และอยู่ในราคาค่าก่อสร้าง 3600 ดอลล่า



รูป 4.2.3

วิธีทำ ให้ x เป็นความยาวของด้านกว้างทั้งสองของสนามมีหน่วยเป็นฟุต

y เป็นความยาวของด้านยาวที่ขนานกับแม่น้ำมีหน่วยเป็นฟุต

A เป็นพื้นที่ของสนาม

$A = xy$

ค่าก่อสร้างทั้งหมด, $8x + 8x + 12y = 3600$

$$16x + 12y = 3600$$

$$12y = 3600 - 16x$$

$$y = 300 - \frac{4}{3}x$$

แทนค่า y ในสมการ (4.2.1)

$$A(x) = x(300 - \frac{4}{3}x)$$

$$= 300x - \frac{4}{3}x^2 \qquad (4.2.2)$$

สำหรับค่า $x \in [0, 225]$

และต่อเนื่องบนช่วง [0, 225] ด้วย จากทฤษฎีค่าปลายสุดสัมบูรณ์ จะได้ว่า A(x) จะมีค่าสูงสุดสัมบูรณ์

จากสมการ (4.2.2), $A'(x) = 300 - \frac{8}{3}x$ มีค่าสำหรับทุก ๆ ค่า x

ให้ $A'(x) = 0$

ได้ว่า $300 - \frac{8}{3}x = 0$

$$\frac{8}{3}x = 300$$

$$8x = 900$$

$$x = 112\frac{1}{2}$$

เพราะฉะนั้น $112\frac{1}{2}$ เป็นจำนวนวิกฤต, และอยู่ในช่วงปิด [0, 225] ดังนั้นค่าสูงสุดสัมบูรณ์ ของ A(x) ต้องอยู่ที่ 0, $112\frac{1}{2}$ หรือ 225 ค่าใดค่าหนึ่ง

เพราะว่า $A(0) = 0$

$$A(225) = 0$$

$$A(112\tfrac{1}{2}) = 16,875$$

จึงสรุปว่าค่าสูงสุดสัมบูรณ์ ของ A(x) บนช่วง [0, 225] คือ 16,875 เมื่อ $x = 112\frac{1}{2}$ และ $y = 150$

เพราะฉะนั้น พื้นที่ที่ใหญ่ที่สุดที่จะสร้างในวงเงิน 36000 ดอลล่า คือ 16,875 ตารางฟุต เมื่อด้านที่ขนานกับแม่น้ำยาว 150 ฟุต และด้านกว้าง $112\frac{1}{2}$ ฟุต

ตัวอย่าง 4.2.4 ในการสร้างร้านขายอาหารและเครื่องดื่มแห่งหนึ่ง ได้มีการประมาณว่าถ้าร้านมีที่นั่งสำหรับลูกค้า 40 ถึง 80 คน เจ้าของร้านจะมีกำไร 8 บาทต่อหนึ่งที่นั่งทุก ๆ วัน อย่างไรก็ตาม ถ้ามีที่นั่งมากกว่า 80 ที่นั่ง ผลกำไรแต่ละวันสำหรับแต่ละที่นั่งจะลดลง 4 สตางค์ คูณด้วยจำนวนที่นั่งซึ่งเกินกว่า 80 นั้น. จงหาว่าทางร้านควรมีที่นั่งจำนวนเท่าใด จึงจะได้กำไรของแต่ละวันสูงสุด

วิธีทำ ให้ x เป็นจำนวนที่นั่ง

P(x) เป็นผลกำไรแต่ละวัน

$$P(x) = \begin{cases} 8x & ; \ 40 \le x \le 80 \\ x\,[8 - 0.04\,(x - 80)\,] & ; \ 80 < x \le 280 \end{cases}$$

(ค่าขอบเขตด้านบนของ $x = 280$ หาจากการสังเกตว่าถ้า $x[8-0.04(x-80)] = 0$ จะได้ $x = 280$)

จากโจทย์ x เป็นจำนวนเต็ม และเป็นฟังก์ชันต่อเนื่อง

เนื่องจาก x เป็นจำนวนจริงในช่วง [40, 280] และ P(x) เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องบนช่วงปิด [40, 280]

เพราะฉะนั้น โดยใช้ทฤษฎีค่าปลายสุดจะมีค่าสูงสุดสัมบูรณ์ สำหรับฟังก์ชัน P(x) บนช่วงนี้

เพราะว่า $P'(x) = 8$ เมื่อ $40 < x < 80$

และ $P'(x) = 11.20 - 0.08x$ เมื่อ $80 < x < 280$

จะเห็นว่า เมื่อ $x \to 80$ ทางซ้าย

$$P'_{-}(80) = 8$$

และเมื่อ $x \to 80$ ทางขวา

$$P'_{+}(80) = 4.50$$

ได้ $P'_{-}(80) \neq P'_{+}(80)$

แสดงว่า $P'(80)$ หาค่าไม่ได้ ดังนั้น 80 เป็นจำนวนวิกฤตของ P เพื่อหาจำนวนวิกฤตตัวอื่นของ P

กำหนดให้ $P'(x) = 0$

จะได้ $11.20 - 0.08x = 0$

$$x = 140$$

เพราะฉะนั้น จำนวนวิกฤตของ P เป็น 80 และ 140

เพราะว่า $P(40) = 320,\ P(80) = 640,\ P(140) = 784,\ P(280) = 0$

ค่าสูงสุดของ P(x) คือ 784 เมื่อ $x = 140$

ดังนั้นที่นั่งภายในร้านควรมี 140 ที่นั่งซึ่งจะทำให้ได้กำไรสูงสุดวันละ 784 บาท

แบบฝึกหัด 4.2

1) โรงงานทำกล่องดีบุกต้องการจะใช้แผ่นดีบุกขนาด 8 x 15 นิ้ว (กว้าง 8, ยาว 15) โดยตัดทั้งสี่มุมเป็นรูปสี่เหลี่ยมจัตุรัส แล้วยกเป็นความสูงของกล่องดีบุก

   จงหาความยาวที่ยาวที่สุดของด้านของสี่เหลี่ยมจัตุรัสที่ตัด ซึ่งจะทำให้กล่องดีบุกมีปริมาตรมากที่สุด

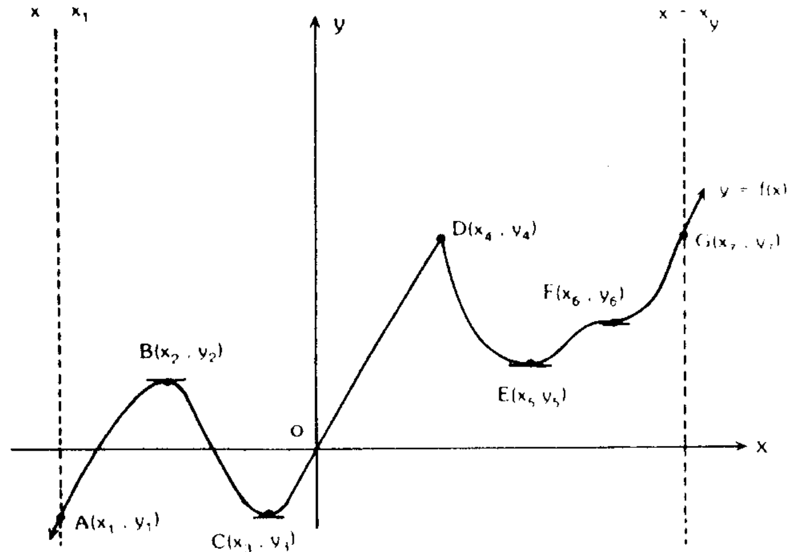
2) ให้ A เป็นจุดอยู่บนเกาะแห่งหนึ่งอยู่ห่างจากหาดทราย ที่จุด B 6 ไมล์ ชายคนหนึ่งอยู่บนเกาะต้องการจะไปที่จุด C ซึ่งอยู่ที่หาดทราย ห่างจากจุด B 9 ไมล์ เขาเช่าเรือ 2.50 ดอลล่าต่อไมล์ เดินทางมายังจุด P ซึ่งอยู่ระหว่าง B และ C หลังจากนั้นเช่าแท็กซี่ 2 ดอลล่าต่อไมล์ จาก P ถึง C จงหาค่าโดยสารที่ถูกที่สุดจากจุด A ถึงจุด C

3) ในการส่งห่อของเพื่อจะส่งทางไปรษณีย์ ผลบวกของความยาวกับความยาวของรอบกล่องต้องไม่เกิน 100 นิ้ว ถ้าวัสดุนั้นมีรูปร่างเป็นกล่องรูปสี่เหลี่ยมผืนผ้า ซึ่งรูปตัด (cross section) เป็นสี่เหลี่ยมจัตุรัส จงหาขนาดของกล่องที่มีปริมาตรมากที่สุดที่ไปรษณีย์จะส่งให้ได้

4) ถ้าโรงงานสามารถทำกำไรได้ 20 บาท ต่อ 1 ชิ้น ถ้าผลิตสินค้าไม่เกิน 800 ชิ้นต่อสัปดาห์ แต่จะกำไรลดลง 0.02 บาท ต่อ 1 ชิ้น สำหรับสินค้าที่ผลิตเกินกว่า 800 ชิ้น จงหาจำนวนสินค้าที่โรงงานจะผลิตออกมาเพื่อที่จะให้ได้กำไรสูงที่สุดในหนึ่งสัปดาห์

5) ชมรมแห่งหนึ่งเก็บเงินค่าสมาชิกต่อคนปีละ 99.50 บาท สำหรับสมาชิกที่เกิน 600 คน และเพิ่มอีก 50 สตางค์ ถ้าสมาชิกน้อยกว่า 600 คน จงหาจำนวนสมาชิกที่จะทำให้ชมรมมีกำไรมากที่สุดทุก ๆ ปี

4.3 ฟังก์ชันเพิ่ม และฟังก์ชันลด กับอนุพันธ์อันดับหนึ่ง
Increasing and Decreasing Functions and the First Derivative test



รูป 4.3.1

สมมุติให้รูป 4.3.1 ฟังก์ชัน $f(x)$ บนช่วงปิด $[x_1 , x_7]$ และฟังก์ชัน f ต่อเนื่องตลอดช่วงปิด $[x_1 , x_7]$

ดูจากรูปจะพบว่า จากจุด A ถึง B ถ้าค่า x เพิ่มขึ้นค่าของฟังก์ชันก็จะเพิ่มขึ้นด้วย ส่วนในช่วง B กับ C ค่าของฟังก์ชันจะลดลงถ้าค่า x เพิ่มขึ้น เราจะเรียกฟังก์ชันในช่วงปิด $[x_1 , x_2]$ ว่าฟังก์ชันเพิ่ม (increasing) และจะเรียกฟังก์ชันในช่วงปิด $[x_2 , x_3]$ ว่าฟังก์ชันลด (decreasing)

นิยาม 4.3.1 ถ้าให้ f เป็นฟังก์ชันซึ่งกำหนดให้ $y = f(x)$ ในช่วงใดช่วงหนึ่ง แล้วฟังก์ชัน f จะเรียกว่าเพิ่มขึ้น (increasing) ในช่วงนั้นก็ต่อเมื่อ $f(x_1) < f(x_2)$ สำหรับ $x_1 < x_2$ ซึ่ง x_1 และ x_2 เป็นจำนวนจริงใด ๆ ในช่วงนั้น

ฟังก์ชัน f ตามรูป 4.3.1 เพิ่มขึ้นในช่วงปิดต่อไปนี้ $[x_1 , x_2]$, $[x_3 , x_4]$, $[x_5 , x_6]$, $[x_6 , x_7]$, $[x_5 , x_7]$

นิยาม 4.3.2 ถ้าให้ $y = f(x)$ เป็นฟังก์ชันที่กำหนดให้ในช่วงใดช่วงหนึ่ง แล้วฟังก์ชัน f จะเรียกว่าลดลง (decreasing) ในช่วงนั้น ก็ต่อเมื่อ $f(x_1) > f(x_2)$ สำหรับ $x_1 > x_2$ ซึ่ง x_1 และ x_2 เป็นจำนวนจริงในช่วงนั้น

ฟังก์ชัน f ตามรูป 4.3.1 ลดลงในช่วงปิดต่อไปนี้ $[x_2 , x_3]$, $[x_4 , x_5]$ ในแต่ละช่วงที่ฟังก์ชัน f เพิ่มหรือลด เรียกว่า f เป็นโมโนโทนิค (monotonic) ฟังก์ชันในช่วงนั้น

การกำหนดทฤษฎีสำหรับทดสอบว่าฟังก์ชันโมโนโทนิคในช่วงใดช่วงหนึ่งนั้น ถ้าพิจารณาความชันของเส้นสัมผัสโค้ง $y = f(x)$ ตามภาพจะพบว่าเมื่อความชันของเส้นสัมผัสโค้งเป็นบวกฟังก์ชันจะเพิ่มขึ้นและเมื่อความชันของเส้นสัมผัสโค้งเป็นลบ

ฟังก์ชันจะลดลงเพราะว่า $f'(x)$ คือความชันของเส้นสัมผัสโค้ง $y = f(x)$ f จะเพิ่มขึ้นเมื่อ $f'(x) > 0$ และ f จะลดลงเมื่อ $f'(x) < 0$ และเพราะว่า $f'(x)$ คืออัตราการเปลี่ยนแปลงของค่าของฟังก์ชัน $f(x)$ เมื่อเทียบกับ x, เมื่อ $f'(x) > 0$ ค่าของฟังก์ชันจะเพิ่มขณะที่ x เพิ่มขึ้น และเมื่อ $f'(x) < 0$ ค่าของฟังก์ชันลดลงขณะที่ x เพิ่มขึ้น จะทำให้ได้ทฤษฎีต่อไปนี้

ทฤษฎี 4.3.1 ให้ f เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องบนช่วงปิด $[a, b]$ และหาอนุพันธ์ได้ (differentiable) ในช่วงเปิด (a, b)

(1) ถ้า $f'(x) > 0$ สำหรับทุกค่าของ x ซึ่งอยู่ในช่วง (a, b) แล้ว f จะเพิ่มขึ้นบนช่วง $[a, b]$

(2) ถ้า $f'(x) < 0$ สำหรับทุกค่าของ x ซึ่งอยู่ในช่วง (a, b) แล้ว f จะลดลงบนช่วง $[a, b]$

ทฤษฎี 4.3.2 ให้ f เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องที่ทุก ๆ จุดในช่วงเปิด (a, b) และให้ c เป็นจำนวนจริงที่อยู่ในระหว่าง a กับ b ถ้าฟังก์ชัน f มีอนุพันธ์ที่ทุก ๆ จุดของช่วง (a, b) ยกเว้นที่จุด c และ

(1) ถ้า $f'(x) > 0$ สำหรับทุกค่า x ในช่วงเปิด ซึ่งมี c เป็นจุดขวาสุดของช่วงและถ้า $f'(x) < 0$ สำหรับทุกค่า x ในช่วงเปิด ซึ่งมี c เป็นจุดซ้ายสุดของช่วงแล้ว f จะมีค่าสูงสุดสัมพัทธ์ (relative maximum) ที่จุด c

(2) ถ้า $f'(x) < 0$ สำหรับทุกค่า x ในช่วงเปิดซึ่งมีจุด c เป็นจุดขวาสุดของช่วง และถ้า $f'(x) > 0$ สำหรับทุกค่า x ในช่วงเปิดซึ่งมีจุด c เป็นจุดซ้ายสุดของช่วงแล้ว f จะมีค่าต่ำสุดสัมพัทธ์ (relative minimum) ที่จุด c

พิสูจน์

(1) ให้ (d, c) เป็นช่วงซึ่งมี c เป็นจุดขวาสุดของช่วงซึ่ง $f'(x) > 0$ สำหรับทุกค่า x ในช่วงนี้

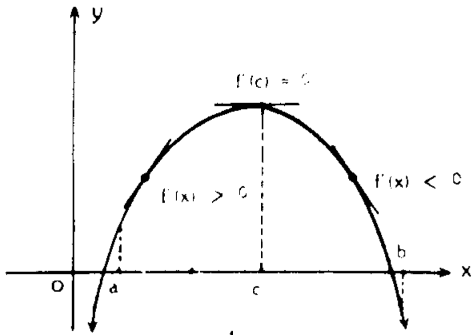
จากทฤษฎี 4.3.1 ข้อ (1) ฟังก์ชัน f เพิ่มขึ้นในช่วง $[d, c]$ ให้ (c, e) เป็นช่วงซึ่งมี c เป็นจุดซ้ายสุดของช่วงซึ่ง $f'(x) < 0$ สำหรับทุกค่า x ในช่วงนี้

จากทฤษฎี 4.3.1 ข้อ (2) ฟังก์ชัน f จะลดลงในช่วง $[c, e]$ เพราะว่า f เพิ่มขึ้นในช่วง $[d, c]$ ดังนั้นจากนิยาม ถ้า x_1 อยู่ในช่วง $[d, c]$ และ $x_1 \neq c$ แล้ว $f(x_1) < f(c)$ และเพราะว่า f ลดลงในช่วง $[c, e]$ ดังนั้นจากนิยาม ถ้า x_2 อยู่ในช่วง $[c, e]$ และ $x_2 \neq c$ แล้ว $f(c) > f(x_2)$ เพราะฉะนั้นตามนิยาม ฟังก์ชัน f มีค่าสูงสุดสัมพัทธ์ (relative maximum) ที่ c

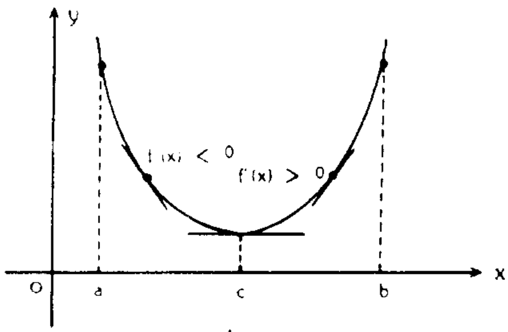
(2) พิสูจน์ในทำนองเดียวกันกับการพิสูจน์ (1)

การใช้อนุพันธ์อันดับหนึ่งพิจารณาค่าสูงสุด (ต่ำสุด) สัมพัทธ์
(The first derivative test for relative extrema)

ถ้า f ต่อเนื่องที่ c และค่า $f'(x)$ เปลี่ยนเครื่องหมายจากบวกเป็นลบเมื่อ x เพิ่มขึ้นผ่าน c แล้ว f มีค่าสูงสุดสัมพัทธ์ที่ c และถ้าค่า $f'(x)$ เปลี่ยนเครื่องหมายจากลบเป็นบวกเมื่อ x เพิ่มขึ้นผ่าน c แล้ว f มีค่าต่ำสุดสัมพัทธ์ที่ c

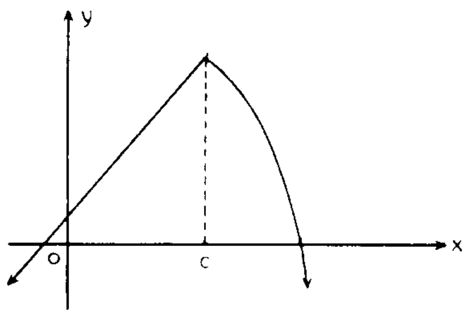


รูป 4.3.2

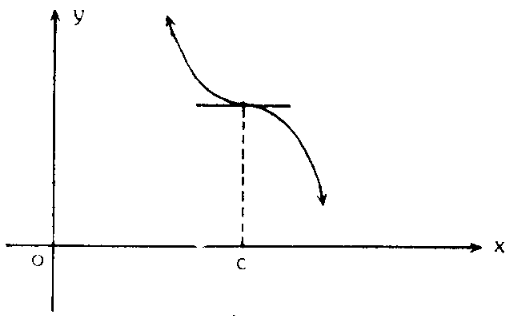


รูป 4.3.3

ในรูป 4.3.2 และรูป 4.3.3 แสดงถึง f เป็นไปตามทฤษฎี 4.3.2 ข้อ (1) และ (2) ตามลำดับ เมื่อ f มีอนุพันธ์ที่ c ส่วนในรูป 4.3.4 แสดงถึงกราฟของฟังก์ชัน f ซึ่งมีค่าสูงสุดสัมพัทธ์ที่ c แต่ไม่มีอนุพันธ์อันดับหนึ่งที่ c อย่างไรก็ตาม $f'(x) > 0$ เมื่อ $x < c$ และ $f'(x) < 0$ เมื่อ $x > c$ ในรูป 4.3.5 แสดงถึงกราฟของฟังก์ชันซึ่งมี c เป็นค่าวิกฤต (critical number) ในลักษณะที่ $f'(x) < 0$ เมื่อ $x < c$ และ $f'(x) < 0$ เมื่อ $x > c$ ดังนั้น f ไม่มีค่าสูงสุด (ต่ำสุด) สัมพัทธ์ที่ c (relative extremum)



รูป 4.3.4



รูป 4.3.5

ในรูป 4.3.1 ฟังก์ชัน f มีค่าสูงสุดสัมพัทธ์ที่ x_2 และ x_4 ส่วนที่ x_3 และ x_5 ฟังก์ชัน f มีค่าต่ำสุดสัมพัทธ์ ส่วนที่ x_6 เป็นค่าวิกฤตของฟังก์ชันที่ไม่มีค่าปลายสุดสัมพัทธ์

สรุปการหาค่าปลายสุดสัมพัทธ์ของฟังก์ชัน f ดังนี้

1. หา $f'(x)$

2. หาค่าวิกฤตของ f นั่นคือค่า x ซึ่ง $f'(x) = 0$

3. ใช้ทฤษฎี 4.3.2

ตัวอย่าง 4.3.1 ให้ $f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x + 1$

จงหาค่าปลายสุดสัมพัทธ์โดยใช้อนุพันธ์ครั้งที่หนึ่งทดสอบ

หาค่าของ x ณ จุดซึ่ง f มีค่าปลายสุดสัมพัทธ์ และบอกช่วงซึ่ง f เพิ่มขึ้นและช่วงที่ f ลดลง แล้วเขียนกราฟของฟังก์ชันนี้

วิธีทำ $f'(x) = 3x^2 - 12x + 9$

$f(x)$ มีอนุพันธ์ที่ทุกค่าของ x ให้ $f'(x) = 0$ เราจะได้

$$3x^2 - 12x + 9 = 0$$

$$3(x-3)(x-1) = 0$$

$$\therefore x = 3 \text{ และ } x = 1$$

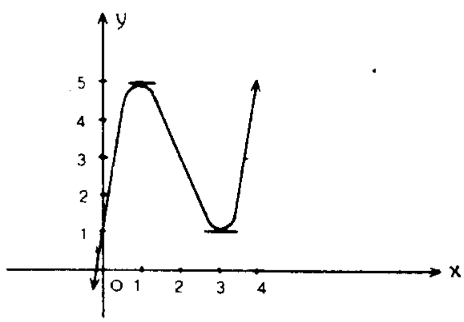
ดังนั้น ค่าวิกฤติของ f คือ 1 และ 3

ในการหาค่าสูงสุด (ต่ำสุด) เราใช้อนุพันธ์ครั้งที่หนึ่งทดสอบ ซึ่งผลสรุปแสดงได้ดังตาราง 4.3.1

ตาราง 4.3.1

	$f(x)$	$f'(x)$	ผลสรุป
$x < 0$		+	f เพิ่ม
$x = 1$	5	0	f มีค่าสูงสุดสัมพัทธ์
$1 < x < 3$		—	f ลดลง
$x = 3$	1	0	f มีค่าต่ำสุดสัมพัทธ์
$3 < x$		+	f เพิ่ม

จากตารางที่ $x = 1$ จะได้ค่าสูงสุดสัมพัทธ์ของ f เท่ากับ 5 และที่ $x = 3$ จะได้ค่าต่ำสุดสัมพัทธ์ของ f เท่ากับ 1 ดังรูป 4.3.6



รูป 4.3.6

ตัวอย่าง 4.3.2 ให้

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - 4 & \text{ถ้า } x < 3 \\ 8 - x & \text{ถ้า } 3 \le x \end{cases}$$

จงหาค่าสูงสุด (ต่ำสุด) สัมพัทธ์ของ f โดยใช้อนุพันธ์อันดับหนึ่ง

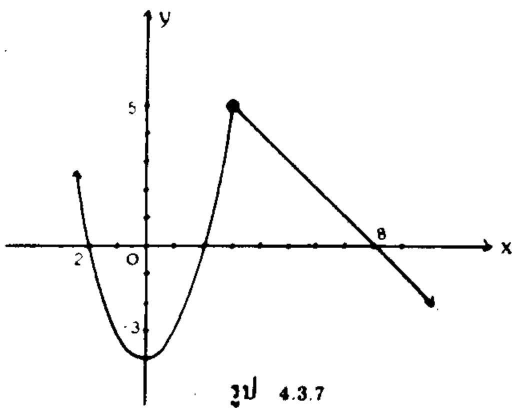
วิธีทำ ถ้า $x < 3$, $f'(x) = 2x$ ถ้า $x > 3$, $f'(x) = -1$

เพราะ $f'_-(3) = 6$ และ $f'_+(3) = -1$ เราสรุปว่าหาค่า $f'(3)$ ไม่ได้

เพราะฉะนั้น 3 เป็นค่าวิกฤตของ f

เพราะว่า $f'(x) = 0$ เมื่อ $x = 0$ ดังนั้น 0 เป็นค่าวิกฤตของ f

ผลสรุปแสดงได้ดังตาราง 4.3.2 และรูป 4.3.7



รูป 4.3.7

ตาราง 4.3.2

	$f(x)$	$f'(x)$	ผลสรุป
$x < 0$		$-$	f ลดลง
$x = 0$	-4	0	f มีค่าต่ำสุดสัมพัทธ์
$0 < x < 3$		+	f เพิ่ม
$x = 3$	5	ไม่มีอนุพันธ์	f มีค่าสูงสุดสัมพัทธ์
$3 < x$		$-$	f เพิ่ม

ตัวอย่าง 4.3.3 ให้ $f(x) = x^{4/3} + 4x^{1/3}$

จงหาค่าปลายสุดสัมพัทธ์ ของ f และพิจารณาค่าของ x ดังตัวอย่างที่ 1 พร้อมทั้งวาดรูปให้ดูด้วย

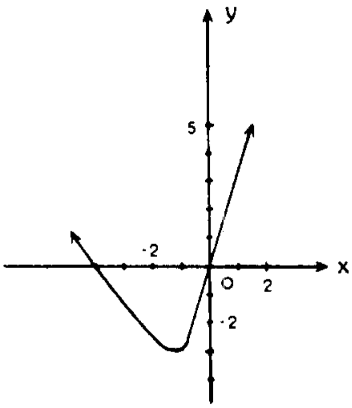
วิธีทำ

$$f'(x) = \frac{4}{3}x^{1/3} + \frac{4}{3}x^{-2/3}$$
$$= \frac{4}{3}x^{-2/3}(x + 1)$$

เพราะว่าหาค่า $f'(x)$ ไม่ได้ เมื่อ $x = 0$ และ $f'(x) = 0$ เมื่อ $x = -1$

ดังนั้น ค่าวิกฤตคือ -1 และ 0

ใช้อนุพันธ์อันดับหนึ่งทดสอบและสรุปผลดังตาราง 4.3.3 และรูป 4.3.8



รูป 4.3.8

ตาราง 4.3.3

	$f(x)$	$f'(x)$	ผลสรุป
$x < -1$		$-$	f ลดลง
$x = -1$	-3	0	f มีค่าต่ำสุดสัมพัทธ์
$-1 < x < 0$		+	f เพิ่ม
$x = 0$	0	ไม่มีอนุพันธ์	f ไม่มีค่าสูงสุด(ต่ำสุด) สัมพัทธ์ที่ $x = 0$
$0 < x$		+	f เพิ่ม

แบบฝึกหัด 4.3

ในแบบฝึกหัดข้อ 1 ถึง ข้อ 15 แต่ละข้อให้หาดังต่อไปนี้

ก) หาค่าปลายสุดสัมพัทธ์ของ f โดยใช้อนุพันธ์อันดับหนึ่งทดสอบ

ข) หาค่าของ x ณ จุดซึ่ง f มีค่าสูงสุดหรือต่ำสุด

ค) หาช่วงซึ่งฟังก์ชัน f เพิ่ม

ง) หาช่วงซึ่งฟังก์ชัน f ลด

จ) เขียนรูปของฟังก์ชันที่กำหนดให้

1) $f(x) = x^2 - 4x - 1$

2) $f(x) = 2x^3 - x^2 + 3x - 1$

3) $f(x) = x^5 - 5x^3 - 20x - 2$

4) $f(x) = \sqrt{x} - \frac{1}{\sqrt{x}}$

5) $f(x) = 2x\sqrt{3 - x}$

6) $f(x) = (1 - x)^2(1 + 3)^3$

7) $f(x) = 2 - 3(x - 4)^{2/3}$

8) $f(x) = \begin{cases} 2x + 1 & \text{ถ้า } x \leq 4 \\ 13 - x & \text{ถ้า } 4 < x \end{cases}$

9) $f(x) = \begin{cases} 2x + 9 & \text{ถ้า } x \leq -2 \\ x^2 + 1 & \text{ถ้า } -2 < x \end{cases}$

10) $f(x) = \begin{cases} (x - 2)^2 - 3 & \text{ถ้า } x \leq 5 \\ \frac{1}{2}(x + 7) & \text{ถ้า } 5 < x \end{cases}$

11. $f(x) = \begin{cases} 3x + 5 & \text{ถ้า } x < -1 \\ x^2 + 1 & \text{ถ้า } -1 \leq x < 2 \\ 7 - x & \text{ถ้า } 2 \leq x \end{cases}$

12) $f(x) = \begin{cases} (x + 9)^2 - 8 & \text{ถ้า } x < -7 \\ -\sqrt{25-(x+4)^2} & \text{ถ้า } -7 \leq x \leq 0 \\ (x - 2)^2 - 7 & \text{ถ้า } 0 < x \end{cases}$

13) จงหาค่าของ a และ b ซึ่งทำให้ฟังก์ชัน $f(x) = x^3 + ax^2 + b$ จะมีค่าปลายสุดสัมพัทธ์ที่ (2, 3)

14) จงหาค่าของ a, b และ c ซึ่งทำให้ฟังก์ชัน $f(x) = ax^2 + bx + c$ มีค่าสูงสุดสัมพัทธ์ของ 7 ที่ 1 และกราฟของ $y = f(x)$ จะผ่านจุด (2, -2)

15) จงหาค่าของ a, b, c และ d ซึ่งทำให้ฟังก์ชัน $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ มีค่าปลายสุดสัมพัทธ์ที่ (1, 2) และ (2, 3)

4.4 อนุพันธ์อันดับสูง และการใช้อนุพันธ์อันดับสอง ทดสอบหาค่าสูงสุด (ต่ำสุด) สัมพัทธ์

ถ้า f' เป็นอนุพันธ์ของฟังก์ชัน f แล้ว f' ก็เป็นฟังก์ชันด้วย และเป็นอนุพันธ์อันดับหนึ่งของฟังก์ชัน f ถ้าเราหาอนุพันธ์ของฟังก์ชันใหม่ f' ได้ เราเรียกว่าอนุพันธ์อันดับสองของ f หรือฟังก์ชันใหม่ที่สองและเขียนแทนด้วย f'' (อ่านว่า "f double prime") ในทำนองเดียวกันเรานิยามอนุพันธ์อันดับสามของ f และเขียนแทนด้วย f''' (อ่านว่า "f triple prime")

อนุพันธ์อันดับ n ของฟังก์ชัน f ซึ่ง n เป็นเลขจำนวนเต็มบวก ซึ่งมากกว่า 1 ก็คืออนุพันธ์อันดับหนึ่งของอนุพันธ์อันดับ $(n - 1)$ ของ f ซึ่งเราเขียนแทนอนุพันธ์อันดับ n ว่า $f^{(n)}$ สัญลักษณ์ที่ใช้แทนอนุพันธ์อันดับ n อีกอย่างหนึ่งคือ $\frac{d^nf}{dx^n}$ ถ้า $y = f(x)$ เราเขียนแทนอนุพันธ์อันดับ n ของ f ได้ดังนี้คือ $\frac{d^ny}{dx^n}$

ตัวอย่าง 4.4.1 จงหาอนุพันธ์ทั้งหมดของฟังก์ชัน f ซึ่ง $f(x) = 8x^4 + 5x^3 - x^2 + 7$

วิธีทำ

$$f'(x) = 32x^3 + 15x^2 - 2x$$
$$f''(x) = 96x^2 + 30x - 2$$
$$f'''(x) = 192x + 30$$
$$f^{(4)}(x) = 192$$
$$f^{(5)}(x) = 0$$
$$f^{(n)}(x) = 0 \qquad n \geq 5$$

เนื่องจาก $f'(x)$ เป็นอัตราการเปลี่ยนแปลงของ $f(x)$ เมื่อเทียบกับ x และ $f''(x)$ เป็นอนุพันธ์ของ $f'(x)$ ดังนั้น $f''(x)$ เป็นอัตราการเปลี่ยนแปลงของ $f'(x)$ เมื่อเทียบกับ x และถ้า (x, y) เป็นจุดใด ๆ บนกราฟ $y = f(x)$ แล้ว ก็คือความชันของเส้นสัมผัสกราฟที่จุด (x, y) และดังนั้น $\frac{d^2y}{dx^2}$ ก็คืออัตราการเปลี่ยนแปลงของความชันของเส้นสัมผัสกราฟที่จุด (x, y) เมื่อเทียบกับ x

ตัวอย่าง 4.4.2 ให้ $m(x)$ เป็นความชันของเส้นสัมผัสโค้ง $y = x^3 - 2x^2 + x$ ที่จุด (x, y) จงหาอัตราการเปลี่ยนแปลงของ $m(x)$ ที่จุด $(2, 2)$ เมื่อเทียบกับ x

วิธีทำ

$$m(x) = \frac{dy}{dx} = 3x^2 - 4x + 1$$

อัตราการเปลี่ยนแปลงของ $m(x)$ ก็คือ $m'(x)$ หรือ $\frac{d^2y}{dx^2}$

$$m'(x) = \frac{d^2y}{dx^2} = 6x - 4$$

ที่จุด $(2, 2)$ $\quad \frac{d^2y}{dx^2} = 12 - 4 = 8$

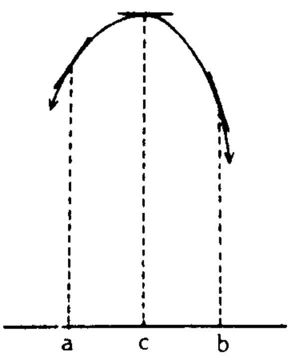
เพราะฉะนั้น ที่จุด (2, 2) การเปลี่ยนแปลงของ $m(x)$ เป็น 8 เท่าของการเปลี่ยนแปลงของ x

ในหัวข้อ 4.3 เราหาค่าสูงสุดสัมพัทธ์ หรือต่ำสุดสัมพัทธ์ของฟังก์ชัน f ที่ค่าวิกฤต โดยดูจากเครื่องหมายของ f′ ในช่วงข้างซ้ายและขวาของค่าวิกฤต แต่ตอนนี้เรามีวิธีหาค่าปลายสุดสัมพัทธ์ได้ง่ายกว่าเดิมโดยใช้อนุพันธ์อันดับสองของฟังก์ชันดังทฤษฎีต่อไปนี้

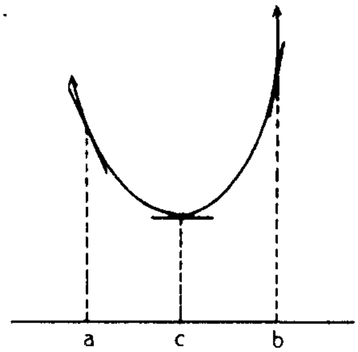
ทฤษฎี 4.4.1 ให้ c เป็นค่าวิกฤตของฟังก์ชัน f ซึ่งมีอนุพันธ์อันดับหนึ่ง ในช่วง (a, b) และ $f'(c) = 0$ โดย $c \in (a, b)$ ถ้าหา $f''(c)$ ได้

ก) ถ้า $f''(c) < 0$ แล้ว f มีค่าสูงสุดสัมพัทธ์ที่ c

ข) ถ้า $f''(c) > 0$ แล้ว f มีค่าต่ำสุดสัมพัทธ์ที่ c



รูป 4.4.1



รูป 4.4.2

สมมุติให้ f เป็นฟังก์ชันซึ่งหาอนุพันธ์อันดับ 1 f′ และอนุพันธ์อันดับ 2 f″ ได้บนช่วงเปิด (a, b) ซึ่งมี c อยู่ในช่วงนี้ด้วย และ $f'(c) = 0$ และสมมุติว่า $f'' < 0$ บนช่วง (a, b) จากทฤษฎี 4.3.1 $f''(x) < 0$ บนช่วง (a, b) แล้ว f′ จะลดลงบนช่วง [a, b] แต่ค่าของ f′ ณ จุดใด ๆ บนกราฟของ f ก็คือความชันของเส้นสัมผัสกราฟ ณ จุดนั้น ดังนั้นความชันของเส้นสัมผัสนี้จะลดลงบนช่วง [a, b] ในรูป 4.4.1 จะพบว่าความชันของเส้นสัมผัสจะลดลงบนช่วง [a, b] และ f มีค่าสูงสุดสัมพัทธ์ที่จุด c ซึ่ง $f'(c) = 0$ และ $f''(c) < 0$

ต่อไปสมมุติให้ f เป็นฟังก์ชันเหมือนกับที่กล่าวมาแล้วแต่ให้ $f'' > 0$ บนช่วง (a, b) ดังนั้นจากทฤษฎ 4.3.1 $f''(x) > 0$ บนช่วง (a, b) แล้ว f′ จะเพิ่มขึ้นบนช่วง [a, b] นั่นคือความชันของเส้นสัมผัสจะเพิ่มขึ้นบนช่วง [a, b] ดังรูป 4.4.2 และฟังก์ชัน f มีค่าต่ำสุดสัมพัทธ์ที่จุด c ซึ่ง $f'(c) = 0$ และ $f''(c) > 0$

ตัวอย่าง 4.4.3 ให้ $f(x) = x^4 + \frac{4}{3}x^3 - 4x^2$

จงหาค่าสูงสุดสัมพัทธ์และค่าต่ำสุดสัมพัทธ์ของ f โดยใช้อนุพันธ์อันดับ 2 ทดสอบ

วิธีทำ $f(x) = x^4 + \frac{4}{3}x^3 - 4x^2$

$$f'(x) = 4x^3 + 4x^2 - 8x$$
$$f''(x) = 12x^2 + 8x - 8$$

ให้ $f'(x) = 0$

$$\therefore \quad 4x(x^2 + x - 2) = 0$$
$$4x(x + 2)(x - 1) = 0$$

และ $x = 0, \quad x = -2, \quad x = 1$

นั่นคือค่าเชิงวิกฤตของ f คือ -2, 0 และ 1

การตัดสินว่า f มีค่าสูงสุดสัมพัทธ์หรือต่ำสุดสัมพัทธ์ที่ค่าวิกฤตนี้หรือไม่ ทำได้โดยพิจารณาเครื่องหมายของอนุพันธ์อันดับ 2 ณ ที่จุดนั้นและสรุปผลได้ตามตาราง 4.4.1

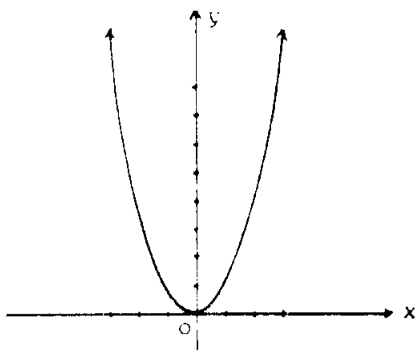
ตาราง 4.4.1

	$f(x)$	$f'(x)$	$f''(x)$	ผลสรุป
$x = -2$	$-\frac{32}{3}$	0	+	f มีค่าต่ำสุดสัมพัทธ์
$x = 0$	0	0	−	f มีค่าสูงสุดสัมพัทธ์
$x = 1$	$-\frac{5}{3}$	0	+	f มีค่าต่ำสุดสัมพัทธ์

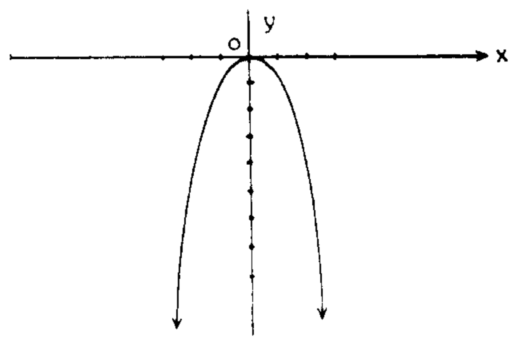
ถ้า $f''(c) = 0$ และ $f'(c) = 0$ จะสรุปค่าสูงสุด (ต่ำสุด) สัมพัทธ์ของฟังก์ชัน f ที่จุด c ไม่ได้ ดังตัวอย่างข้างล่างนี้

ตัวอย่าง 4.4.4 ถ้า $f(x) = x^4$ แล้ว $f'(x) = 4x^3$ และ $f''(x) = 12x^2$

ดังนั้น $f(0)$, $f'(0)$ และ $f''(0)$ ต่างก็เท่ากับ 0 ทดสอบโดยใช้อนุพันธ์อันดับ 1 จะเห็นว่า f มีค่าต่ำสุดสัมพัทธ์ที่ $x = 0$ ดังรูป 4.4.3



รูป 4.4.3



รูป 4.4.4

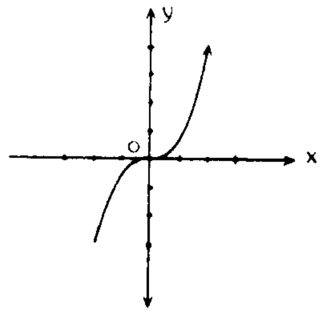
ตัวอย่าง 4.4.5 ถ้า $g(x) = -x^4$ แล้ว $g'(x) = -4x^3$ และ $g''(x) = -12x^2$

ดังนั้น $g(0) = g(0) = g''(0) = 0$ และทดสอบโดยใช้อนุพันธ์อันดับ 1 จะ

ได้ว่า g มีค่าสูงสุดสัมพัทธ์ที่ $x = 0$ ดังรูป 4.4.4

ตัวอย่าง 4.4.6 ถ้า $h(x) = x^3$ แล้ว $h'(x) = 3x^2$ และ $h''(x) = 6x$

ดังนั้น $h(0) = h'(0) = h''(0) = 0$ และฟังก์ชัน h ไม่มีค่าปลายสุดสัมพัทธ์ที่ $x = 0$ เพราะถ้า $x < 0$, $h(x) < h(0)$ และถ้า $x > 0$, $h(x) > h(0)$ ดังรูป 4.4.5



รูป 4.4.5

แบบฝึกหัด 4.4

ในแบบฝึกหัดข้อ 1 ถึง 5 จงหาอนุพันธ์อันดับ 1 และอนุพันธ์อันดับ 2 ของฟังก์ชันที่กำหนดให้

1) $f(x) = x^5 - 2x^3 + x$

2) $g(s) = 2s^4 - 4s^3 + 7s - 1$

3) $f(x) = \sqrt{x^2 + 1}$

4) $g(r) = \sqrt{r} + \frac{1}{\sqrt{r}}$

5) $G(x) = \frac{2 - \sqrt{x}}{2 + \sqrt{x}}$

6) จงหา $\frac{d^3y}{dx^3}$ ถ้า $y = x^4 - 2x^2 + x - 5$

7) จงหา $\frac{d^3s}{dt^3}$ ถ้า $s = \sqrt{4t + 1}$

8) จงหา $\frac{d^4f}{dx^4}$ ถ้า $f(x) = \frac{2}{x - 1}$

9) จงหา $\frac{d^3u}{dv^3}$ ถ้า $u = v\sqrt{v - 2}$

10) ให้ $x^3 + y^3 = 1$, จงแสดงว่า $\frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{2x}{y^5}$

11) ให้ $b^2x^2 - a^2y^2 = a^2b^2$ (a, b เป็นค่าคงที่) จงหา $\frac{d^2y}{dx^2}$

12) จงหาอัตราการเปลี่ยนแปลงของความชันของเส้นสัมผัสกราฟ $y = 2x^3 - 6x^2 - x + 1$ ที่จุด $(3, -2)$

13) จงหาความชันของเส้นสัมผัส ณ จุดใด ๆ บนกราฟ $y = x^4 + x^3 - 3x^2$ ซึ่งมีอัตราการเปลี่ยนแปลงของความชันของเส้นสัมผัสเป็น 0

จงหาค่าปลายสุดสัมพัทธ์ของฟังก์ชันต่อไปนี้ โดยใช้อนุพันธ์อันดับ 2 ทดสอบ ถ้าอนุพันธ์อันดับ 2 ใช้ไม่ได้ ก็ให้ใช้อนุพันธ์อันดับ 1 ทดสอบ

14) $f(x) = 3x^2 - 2x + 1$

15) $g(x) = x^3 - 5x + 6$

16) $f(x) = -4x^3 + 3x^2 + 18x$

17) $h(x) = 2x^3 \quad 9x^2 + 27$

18) $f(x) = (x - 4)^2$

19) $g(x) = (x + 2)^3$

20) $G(x) = (x - 3)^4$

21) $f(x) = x(x - 1)^3$

22) $h(x) = x\sqrt{x + 3}$

23) $f(x) = x\sqrt{8 - x^2}$

24) $f(x) = 4x^{1/2} + 4x^{-1/2}$

25) $g(x) = \frac{9}{x} + \frac{x^2}{9}$

4.5 ปัญหาเกี่ยวกับค่าสูงสุด (ต่ำสุด) สัมบูรณ์เพิ่มเติม
Additional Problem Involving Absolute Extrema

ตัวอย่าง 4.5.1 ให้ $f(x) = \frac{x^2 - 27}{x - 6}$ จงหาค่าสูงสุด (ต่ำสุด) สัมบูรณ์ (absolute extrema) ของ f บนช่วง [0, 6)

วิธีทำ ฟังก์ชัน f ต่อเนื่องบนช่วง [0, 6) (ไม่รวมจุด $x = 6$)

เพราะว่า $f'(x) = \frac{2x(x-6) - (x^2 - 27)}{(x-6)^2} = \frac{x^2 - 12x + 27}{(x-6)^2} = \frac{(x-3)(x-9)}{(x-6)^2}$

จะเห็นว่า f(x) มีอนุพันธ์สำหรับทุก ๆ ค่าของ x ที่อยู่ในช่วง [0, 6) และ $f'(x) = 0$ เมื่อ $x = 3$ หรือ 9

ดังนั้นค่าวิกฤตของ f ในช่วง [0, 6) เท่ากับ 3

และเมื่อใช้อนุพันธ์อันดับ 1 ทดสอบว่า f มีค่าสูงสุดสัมพัทธ์ที่ 3 หรือไม่ จะสรุปผลได้ดังตาราง 4.5.1

ตาราง 4.5.1

	f(x)	f'(x)	ผลสรุป
$0 \leq x < 3$		+	f เพิ่มขึ้น
$x = 3$	6	0	f มีค่าสูงสุดสัมพัทธ์
$3 < x < 6$		—	f ลดลง

เพราะว่า f มีค่าสูงสุดสัมพัทธ์ที่ 3 และ f เพิ่มขึ้นในช่วง [0, 3) และลดลงในช่วง (3, 6) เราสรุปได้ว่าในช่วง [0, 6) f มีค่าสูงสุดสัมบูรณ์ที่ 3 และค่าสูงสุดนั้นคือ $f(3) = 6$

ข้อสังเกต $\lim_{x \to 6^-} f(x) = -\infty$ เราสรุปได้ว่า f ไม่มีค่าต่ำสุดสัมบูรณ์ในช่วง [0, 6)

ตัวอย่าง 4.5.2 ให้ $f(x) = \frac{-x}{(x^2+6)^2}$ จงหาค่าสูงสุด (ต่ำสุด) สัมบูรณ์ของ f บนช่วง $(0, +\infty)$

วิธีทำ ฟังก์ชัน f ต่อเนื่องสำหรับทุกค่าของ x

$$f'(x) = \frac{-1(x^2+6)^2 + 4x^2(x^2+6)}{(x^2+6)^4}$$

$$= \frac{-(x^2+6) + 4x^2}{(x^2+6)^3}$$

$$= \frac{3x^2 - 6}{(x^2 + 6)^3}$$

แสดงว่า $f(x)$ มีอนุพันธ์สำหรับทุกค่าของ x

ให้ $f'(x) = 0$ เราจะได้ $x = \pm\sqrt{2}$

ดังนั้น $\sqrt{2}$ คือค่าวิกฤตของ f ในช่วง $(0, +\infty)$ เท่านั้น

และเมื่อใช้อนุพันธ์อันดับ 1 ทดสอบว่า f ที่ $\sqrt{2}$ ให้ค่าสูงสุดหรือต่ำสุด จะสรุปผลได้ดังตาราง 4.5.2

ตาราง 4.5.2

	$f(x)$	$f'(x)$	ผลสรุป
$0 < x < \sqrt{2}$		$-$	f ลดลง
$x = \sqrt{2}$	$-\frac{1}{64}\sqrt{2}$	0	f มีค่าต่ำสุดสัมพัทธ์
$\sqrt{2} < x < +\infty$		$+$	f เพิ่มขึ้น

เพราะว่า f มีค่าต่ำสุดสัมพัทธ์ที่ $\sqrt{2}$ และ f ลดลงในช่วง $(0, \sqrt{2})$ และเพิ่มขึ้นในช่วง $(\sqrt{2}, +\infty)$ ดังนั้นสรุปได้ว่า f มีค่าต่ำสุดสัมบูรณ์ที่ $\sqrt{2}$ บนช่วง $(0, +\infty)$ และค่านั้นคือ $f(\sqrt{2}) = -\frac{1}{64}\sqrt{2}$ และ f **ไม่มีค่าสูงสุดสัมบูรณ์ในช่วง** $(0, +\infty)$

ทฤษฎี 4.5.1 ให้ f เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องบนช่วง I ซึ่งมี c อยู่ในช่วงนี้ ถ้า f(c) เป็นค่าปลายสุดสัมพัทธ์ของ f บน I และ c เป็นค่าเดียวใน I ซึ่ง f มีค่าปลายสุดสัมพัทธ์แล้ว f(c) เป็นค่าปลายสุดสัมบูรณ์ของ f บนช่วง I และ

(ก) ถ้า f(c) เป็นค่าสูงสุดสัมพัทธ์ของ f บนช่วง I แล้ว f(c) เป็นค่าสูงสุดสัมบูรณ์ของ f บน I ด้วย

(ข) ถ้า f(c) เป็นค่าต่ำสุดสัมพัทธ์ของ f บนช่วง I แล้ว f(c) เป็นค่าต่ำสุดสัมบูรณ์ของ f บน I ด้วย

ตัวอย่าง 4.5.3 กล่องสี่เหลี่ยมปิดซึ่งมีฐานเป็นรูปสี่เหลี่ยมจัตุรัส มีปริมาตร 2000 ล.บ.นิ้ว วัสดุที่ใช้ทำฝากับก้นกล่องราคาตารางนิ้วละ 3 บาท และวัสดุที่ใช้ทำด้านข้างกล่องราคาตารางนิ้วละ 1.50 บาท จงหาขนาดของกล่องซึ่งจะทำให้มีราคาวัสดุต่ำสุด

วิธีทำ ให้ฐานของกล่องยาวด้านละ x นิ้ว

และสูง y นิ้ว

ให้ราคาวัสดุทั้งหมดที่ใช้เป็น $f(x)$

โดย $$f(x) = 6x^2 + \frac{12,000}{x} \tag{4.5.1}$$

โดเมนของ f คือ $(0, +\infty)$ และ f ต่อเนื่องตลอดช่วงนี้

$$f'(x) = 12x - \frac{12000}{x^2} \tag{4.5.2}$$

เมื่อ $x = 0$ เราหาค่า $f'(x)$ ไม่ได้ แต่ 0 ไม่อยู่ในโดเมนของ f

ให้ $f'(x) = 0$ จะได้ $x = 10$ เป็นค่าจริงเพียงค่าเดียว

ดังนั้น 10 เป็นค่าวิกฤต การพิจารณาว่าถ้า $x = 10$ แล้ว $f(x)$ เป็นค่าต่ำสุดสัมพัทธ์หรือไม่ ใช้อนุพันธ์อันดับ 2 ทดสอบ กล่าวคือ

จากสมการ 4.5.2 จะได้

$$f''(x) = 12 + \frac{24000}{x^3} > 0$$

	$f'(x)$	$f''(x)$	ผลสรุป
$x = 10$	0	+	f มีค่าต่ำสุดสัมพัทธ์

เพราะว่า f ต่อเนื่องบนช่วง $(0, +\infty)$ และมีค่าต่ำสุดสัมพัทธ์ของ f บนช่วง $(0, +\infty)$ เฉพาะที่ $x = 10$

โดยใช้ทฤษฎี 4.5.1 ข้อ (2) ค่าต่ำสุดสัมพัทธ์ของ f นี้คือค่าต่ำสุดสัมบูรณ์ของ f ด้วย และเพราะว่าปริมาตรของกล่องคือ $x^2y = 2000$ ดังนั้น ถ้า $x = 10$ จะได้ $y = 20$ จึงสรุปได้ว่า ถ้าจะให้เสียค่าวัสดุน้อยที่สุดในการผลิตกล่องนี้แล้ว ต้องทำกล่องซึ่งมีความสูง 20 นิ้ว และมีฐานสี่เหลี่ยมจัตุรัสยาวด้านละ 10 นิ้ว

ตัวอย่าง 4.5.4 โรงงานแห่งหนึ่งพบว่าต้นทุนการผลิตสินค้าชนิดหนึ่งเป็น $c(x) = 60x$ เมื่อ x เป็นจำนวนที่ผลิต และรายได้จากการขายสินค้า x ชิ้น เป็น $R(x) = -3x^2 + 480x$ จงหาว่าโรงงานควรผลิตสินค้าชนิดนี้ออกขายเท่าใดจึงจะได้กำไรสูงสุด

วิธีทำ ให้ฟังก์ชันแสดงกำไรเป็น $P(x)$

เนื่องจาก
$$\begin{aligned} P(x) &= R(x) - c(x) \\ &= -3x^2 + 420x \end{aligned}$$

ดังนั้น $$P'(x) = -6x + 420$$

โรงงานจะมีกำไรสูงสุด ถ้า

$$P'(x) = 0 = -6x + 420$$

ได้ $x = 70$

นั่นคือโรงงานจะต้องผลิตสินค้าออกขายจำนวน 70 ชิ้น

จึงจะทำให้ได้กำไรสูงสุด

ข้อสังเกต $P(x)$ เป็นฟังก์ชันกำลังสองมีสัมประสิทธิ์เป็นค่าลบ ถ้าเขียนกราฟจะได้พาราโบลารูปคว่ำ มีจุดยอดที่ $x = 70$ และ $P(70) = 14,700$ ซึ่งเป็นค่าสูงสุดของกราฟ

แบบฝึกหัด 4.5

จงหาค่าสูงสุด (ต่ำสุด) สัมบูรณ์ของฟังก์ชันต่อไปนี้ในช่วงที่กำหนดให้

1) $f(x) = x^2$; $(-3, 2]$

2) $F(x) = \dfrac{x + 2}{x - 2}$; $[-4, 4]$

3) $g(x) = 4x^2 - 2x + 1$; $(-\infty, +\infty)$

4) $f(x) = \dfrac{x^2 - 30}{x - 4}$; $(-\infty, 4)$

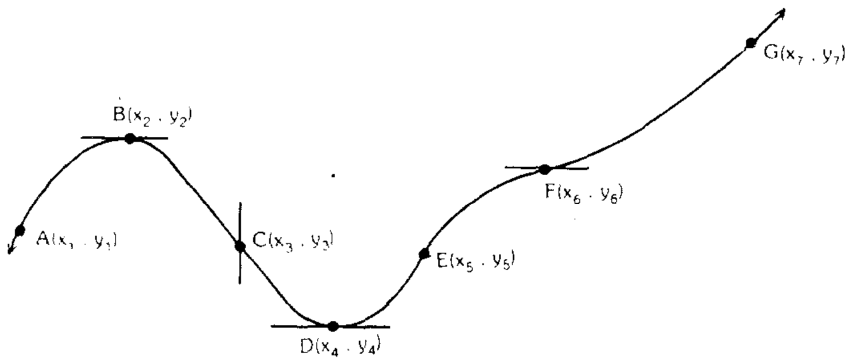
5) สนามรูปสี่เหลี่ยมผืนผ้าซึ่งมีพื้นที่ 2700 ตารางเมตร ต้องการล้อมรั้วโดยรอบ และรั้วแบ่งครึ่งสนาม ซึ่งรั้วสำหรับแบ่งครึ่งสนามราคาเมตรละ 80 บาท ส่วนรั้วโดยรอบสนามราคาเมตรละ 120 บาท จงหาขนาดของสนามซึ่งจะเสียค่ารั้วน้อยที่สุด

6) ถังเปิดรูปสี่เหลี่ยมผืนผ้าซึ่งมีฐานเป็นรูปสี่เหลี่ยมจัตุรัส และมีปริมาตร 125 ล.บ.เมตร ค่าวัสดุที่ใช้ทำก้นถังตารางเมตรละ 160 บาท และวัสดุสำหรับด้านข้างตารางเมตรละ 80 บาท จงหาขนาดของถังที่มีความจุเท่าเดิม แต่เสียค่าวัสดุน้อยที่สุด

7) กระดาษพิมพ์แผ่นหนึ่งมีพื้นที่สำหรับพิมพ์ 24 ตารางนิ้ว มีส่วนว่างขอบบนและล่างกว้าง $1\frac{1}{2}$ นิ้ว และด้านข้างว่าง 1 นิ้ว จงหาขนาดของกระดาษพิมพ์ที่เล็กที่สุดและมีพื้นที่ใช้ได้ตามต้องการ

4.6 ความเว้าและจุดเปลี่ยนความเว้า Concavity and Points of Inflection

พิจารณาจุด P ที่เคลื่อนที่ไปตามกราฟของรูป 4.6.1 จาก A ไปยัง G ตำแหน่งของ P จะแปรผันตามค่าของ x ที่เพิ่มขึ้นจาก x_1 ถึง x_7 ขณะที่ P เคลื่อนที่ไปตามกราฟจาก A ถึง B ความชันของเส้นสัมผัสกับกราฟเป็นบวกและมีค่าลดลง นั่นก็คือ เส้นสัมผัสหมุนตามเข็มนาฬิกา โดยที่กราฟนั้นอยู่ใต้เส้นสัมผัส แต่เมื่อจุด P อยู่ที่ B ความชันของเส้นสัมผัสเป็นศูนย์



รูป 4.6.1

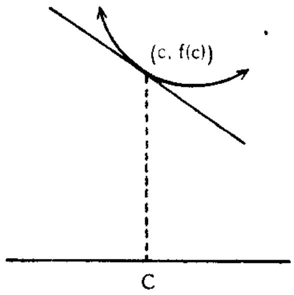
เมื่อ P เคลื่อนที่ต่อไปตามกราฟจาก B ไปยัง C ค่าความชันจะลดลงไปเรื่อย ๆ และความชันของเส้นสัมผัสในที่นี้มีค่าเป็นลบ เส้นสัมผัสยังคงหมุนตามเข็มนาฬิกา และกราฟอยู่ใต้เส้นสัมผัสนั้น เรากล่าวได้ว่าการเคลื่อนที่ของจุด P จาก A ไปยัง C ทำให้กราฟมีรูปร่างเป็นโค้งเว้าคว่ำ (convave downward) ขณะที่ P เคลื่อนที่ไปตามกราฟจาก C ไปยัง D ความชันของเส้นสัมผัสเป็นลบ แต่จะค่อย ๆ เปลี่ยนแปลงโดยมีค่าเพิ่มขึ้น นั่นคือเส้นสัมผัสหมุนทวนเข็มนาฬิกาและกราฟอยู่เหนือเส้นสัมผัสนั้น เมื่อ P เคลื่อนที่ถึงจุด D ความชันของเส้นสัมผัสเป็นศูนย์ เมื่อ P เคลื่อนที่ต่อไปจาก D ไปยัง E ความชันของเส้นสัมผัสจะมีค่าเป็นบวก และมีค่าเพิ่มขึ้นไปเรื่อย ๆ เส้นสัมผัสจะหมุนทวนเข็มนาฬิกา และกราฟอยู่เหนือเส้นสัมผัส กล่าวได้ว่ากราฟเป็นโค้งเว้าหงาย (concave upward) จาก C ไปยัง E ที่จุด C กราฟเปลี่ยนจากโค้งเว้าคว่ำ เป็นโค้งเว้าหงาย จึงเรียกจุด C ว่า จุดเปลี่ยนความเว้า (point of inflection) ซึ่งเขียนในรูปนิยามได้ ดังนี้

นิยาม 4.6.1 กราฟของฟังก์ชัน f เป็นโค้งหงายที่จุด $(c, f(c))$ ถ้า $f'(c)$ มีค่า (exist) และถ้ามีช่วงเปิด I ที่มี c ซึ่งทุก ๆ ค่าของ $x \neq c$ ใน I จุดทุกจุด $(x, f(x))$ บนกราฟจะต้องอยู่เหนือเส้นสัมผัสกับกราฟที่จุด $(c, f(c))$

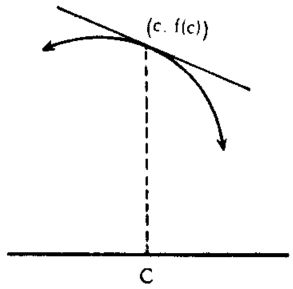
นิยาม 4.6.2 กราฟของฟังก์ชัน f เป็นโค้งเว้าคว่ำ ที่จุด (c, f(c)) ถ้า f'(c) มีค่า และถ้ามีช่วงเปิด I ที่มี c ซึ่งทุก ๆ ค่าของ $x \neq c$ ใน I จุด (x, f(x)) บนกราฟจะต้องอยู่ใต้เส้นสัมผัสกับกราฟที่ (c, f(c))

ตัวอย่าง 4.6.1 จงวาดภาพส่วนของกราฟของฟังก์ชัน f ซึ่งเป็นโค้งเว้าหงาย ที่จุด (c, f(c)) และส่วนของกราฟของฟังก์ชัน f ที่เป็นโค้งเว้าคว่ำ ที่จุด (c, f(c))

วิธีทำ ส่วนของกราฟของฟังก์ชัน f เขียนแสดงได้ตามลำดับดังรูป 4.6.2 และรูป 4.6.3



รูป 4.6.2
โค้งเว้าหงายที่จุด (c, f(c))



รูป 4.6.3
โค้งเว้าคว่ำที่จุด (c, f(c))

กราฟของฟังก์ชัน f ในรูป 4.6.1 เป็นโค้งเว้าคว่ำที่ทุก ๆ จุด (x, f(x)) เมื่อ x อยู่ในช่วงเปิด (x_1, x_3) และ (x_5, x_6) ในทำนองเดียวกัน กราฟของฟังก์ชัน f ในรูป 4.6.1 เป็นโค้งเว้าหงายที่ทุก ๆ จุด (x, f(x)) เมื่อ x อยู่ใน (x_3, x_5) และ (x_6, x_7)

ตัวอย่าง 4.6.2 จงหาว่ากราฟของฟังก์ชัน $f(x) = x^2$ และ $g(x) = -x^2$ มีโค้งเว้าคว่ำหรือโค้งเว้าหงายที่ใด

วิธีทำ

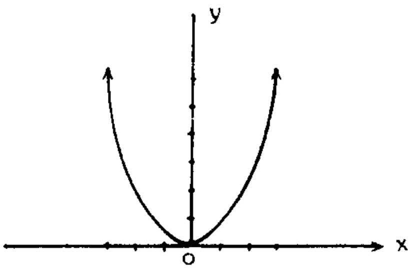
$$f(x) = x^2$$
$$f'(x) = 2x$$
$$f''(x) = 2$$

$f''(x) > 0$ สำหรับทุกค่าของ x ดังนั้น กราฟ f จะต้องอยู่เหนือเส้นสัมผัสกราฟทุก ๆ เส้น เพราะฉะนั้น กราฟของ f จึงเป็นโค้งเว้าหงายที่ทุก ๆ จุด ดังรูป 4.6.4

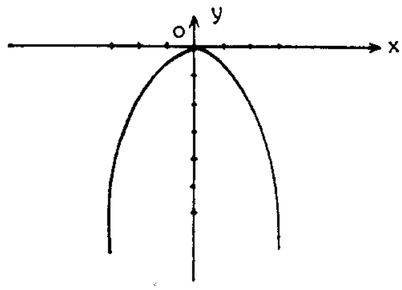
และ

$$g(x) = -x^2$$
$$g'(x) = -2x$$
$$g''(x) = -2$$

$g''(x) < 0$ สำหรับทุกค่าของ x ดังนั้นกราฟของ g จะต้องอยู่ใต้เส้นสัมผัสกราฟทุก ๆ เส้น เพราะฉะนั้นกราฟของ g จึงเป็นโค้งเว้าคว่ำที่ทุก ๆ จุด ดังรูป 4.6.5



รูป 4.6.4



รูป 4.6.5

ทฤษฎี 4.6.3 ให้ f เป็นฟังก์ชันซึ่งหาอนุพันธ์ได้บนบางช่วงเปิดที่ประกอบด้วย c แล้ว

ก) ถ้า $f''(c) > 0$ กราฟของ f เป็นโค้งเว้าหงาย ที่ $(c, f(c))$

ข) ถ้า $f''(c) < 0$ กราฟของ f เป็นโค้งเว้าคว่ำ ที่ $(c, f(c))$

ในที่นี้จะไม่พิสูจน์ทฤษฎี 4.6.3 แต่อย่างไรก็ตามบทกลับของทฤษฎี 4.6.3 ไม่เป็นความจริง ตัวอย่างเช่น ถ้า f เป็นฟังก์ชันกำหนดโดย $f(x) = x^4$ กราฟของ f เป็นโค้งเว้าหงายที่จุด $(0, 0)$ แต่ $f''(0) = 0$ ทั้งนี้จะเห็นได้ว่า เงื่อนไขที่เพียงพอ (sufficient condition) ของกราฟของฟังก์ชัน f ที่จะมีกราฟเป็นโค้งเว้าหงายที่จุด $(c, f(c))$ คือ $f''(c) > 0$ แต่เงื่อนไขนี้ไม่ใช่เงื่อนไขที่จำเป็น (necessary condition) ในทำนองเดียวกัน เงื่อนไขที่ไม่จำเป็นแต่เป็นเงื่อนไขที่เพียงพอ ที่กราฟของฟังก์ชัน f จะมีโค้งเว้าคว่ำที่จุด $(c, f(c))$ คือ $f''(c) < 0$

ถ้ามีจุดบนกราฟของฟังก์ชัน ซึ่งเป็นจุดที่เส้นกราฟให้ความเว้าเปลี่ยนจากเว้าคว่ำเป็นเว้าหงาย หรือเปลี่ยนจากเว้าหงายเป็นเว้าคว่ำแล้ว กราฟจะตัดกับเส้นสัมผัสของกราฟที่จุดนั้น ซึ่งจุดเหล่านี้เรียกว่า จุดเปลี่ยนความเว้า (point of inflection)

นิยาม 4.6.4 จุด $(c, f(c))$ เป็นจุดเปลี่ยนความเว้าของกราฟของฟังก์ชัน f ถ้ากราฟมีเส้นสัมผัสที่จุดนั้น และถ้ามีช่วงเปิด I ที่มี c อยู่ ซึ่งถ้า x อยู่ใน I แล้ว จะได้ว่า

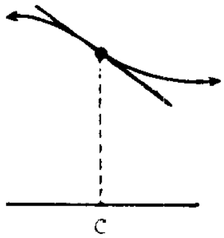
ก) $f''(x) < 0$ ถ้า $x < c$ และ $f''(x) > 0$ ถ้า $x > c$; หรือ

ข) $f''(x) > 0$ ถ้า $x < c$ และ $f''(x) < 0$ ถ้า $x > c$

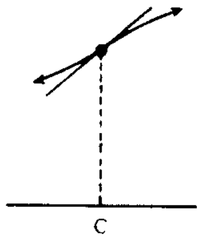
ตัวอย่าง 4.6.3 จงเขียนกราฟแสดงจุดเปลี่ยนความเว้าตามเงื่อนไขที่ (ก) และ (ข) ของนิยาม 4.5.4

วิธีทำ จุดเปลี่ยนความเว้าตามเงื่อนไข (ก) ของนิยาม 4.6.4 นั้น กราฟเป็นโค้งเว้าคว่ำที่จุดถัดไปทางซ้ายของจุดเปลี่ยนความเว้าและกราฟเป็นโค้งเว้าหงายที่จุดถัดไปทางขวามือของจุดเปลี่ยนความเว้า ดังรูป 4.6.6 และรูป 4.6.7

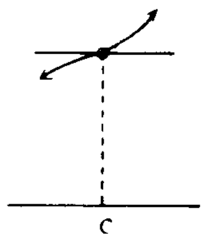
จุดเปลี่ยนความเว้าตามเงื่อนไข (ข) ของนิยาม 4.6.4 นั้น กราฟให้ความโค้งเปลี่ยนจากโค้งเว้าหงายไปเป็นโค้งเว้าคว่ำที่จุดเปลี่ยนความเว้า ดังรูป 4.6.8



รูป 4.6.6



รูป 4.6.7



รูป 4.6.8

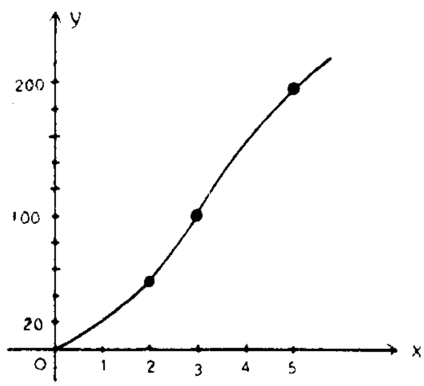
ข้อสังเกต สำหรับรูป 4.6.8 จะเห็นว่าเส้นสัมผัสอยู่ในแนวระดับที่จุดเปลี่ยนความเว้า ส่วนกราฟในรูป 4.6.1 มีจุดเปลี่ยนความเว้าที่จุด C, E, และ F

ตัวอย่าง 4.6.4 สมมุติว่าในเวลา t ชั่วโมง หลังจากคนงานเริ่มทำงานตั้งแต่เวลา 7 นาฬิกา คนงานในโรงงานสามารถทำงานเฉพาะอย่างร่วมกันได้จำนวน f(t) หน่วย โดยที่

$$f(t) = 21t + 9t^2 - t^3 \qquad 0 \le t \le 5$$

อยากทราบว่าในช่วงใดอัตราการทำงานของคนงานเพิ่มขึ้น และในช่วงใดมีอัตราลดลง และเมื่อเวลาใดคนงานทำงานมีประสิทธิภาพสูงสุด

วิธีทำ หาค่าของฟังก์ชัน f(t) สำหรับจำนวนเต็ม t จาก 1 ถึง 5 ดังตาราง 4.6.1 จึงเขียนกราฟของ f บนช่วง [0, 5] ได้ดังรูป 4.6.9



รูป 4.6.9

ตาราง 4.6.1

t	1	2	3	4	5
f(t)	29	70	117	164	205

จากสมการ

$$f(t) = 21t + 9t^2 - t^3 \qquad 0 \le t \le 5$$

$$f'(t) = 21 + 18t - 3t^2$$

และ

$$f''(t) = 18 - 6t$$

$$= 6(3 - t)$$

สังเกตว่า $f''(t) > 0$ ถ้า $0 < t < 3$ และ $f''(t) < 0$ ถ้า $3 < t < 5$ จากนิยาม

4.6.4 (ข) จะได้ว่า กราฟของ f มีจุดเปลี่ยนความเว้าที่ $t = 3$ จากทฤษฎี 4.3.3 เพราะว่า $f''(t) > 0$ เมื่อ $0 < t < 3$ ดังนั้น $f'(t)$ เพิ่มขึ้นบน $[0, 3]$ และเพราะว่า $f''(t) < 0$ เมื่อ $3 < t < 5$ ดังนั้น $f'(t)$ ลดลงบน $[3, 5]$ เพราะฉะนั้น เมื่อ $f'(t)$ เป็นอัตราแปรเปลี่ยน ของ $f(t)$ เมื่อเทียบกับ t

จึงสรุปได้ว่า ใน 3 ชั่วโมงแรก (จาก 7 นาฬิกา ถึง 10 นาฬิกา) ผลผลิตในการทำงานของคนงานมีอัตราเพิ่มขึ้น และในช่วง 2 ชั่วโมงที่เหลือ (จาก 10 นาฬิกาจนถึงเที่ยง) ผลผลิตในการทำงานของคนงานมีอัตราลดลง และที่ $t = 3$ (ที่ 10 นาฬิกา) คนงานให้ผลผลิตมีประสิทธิภาพสูงสุด จุดที่คนงานให้ผลผลิตที่มีประสิทธิภาพสูงสุดเรียก "point of diminishing returns" ซึ่งจุดนี้เป็นจุดเปลี่ยนความเว้าของกราฟของ f นั่นเอง

ตัวอย่าง 4.6.5 เป็นที่คาดหวังว่า t เดือนหลังวันที่ 1 มกราคม จนกระทั่ง 1 กรกฎาคม ราคาสินค้าชนิดหนึ่งจะเป็น $P(t)$ บาท ซึ่ง

$$P(t) = 40 + 3t^2 - \frac{1}{3}t^2 \qquad 0 \leq t \leq 6$$

จงหาว่าจุดเปลี่ยนความเว้านั้นคือจุดที่ t มีค่าเท่าไร?

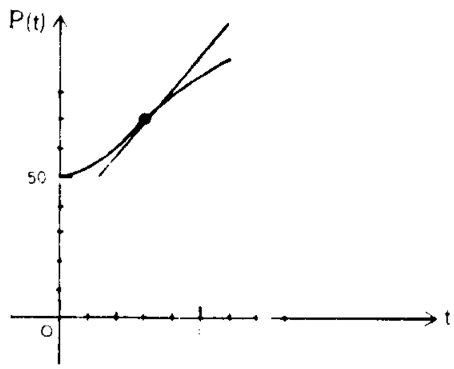
วิธีทำ

$$P'(t) = 6t - t^2$$

$$P''(t) = 6 - 2t$$

เมื่อ $0 < t < 3$, $P''(t) > 0$ และเมื่อ $3 < t < 6$, $P''(t) < 0$

ดังนั้นจากนิยาม 4.6.4 (ข) กราฟของ P จึงให้จุดเปลี่ยนความเว้าที่ $t = 3$ ดังรูป 4.6.10



รูป 4.6.10

สรุปได้ว่า เมื่อ $0 < t < 3$ ราคาสูงขึ้น และอัตราเงินเฟ้อของสินค้าเพิ่มขึ้น เมื่อ $3 < t < 6$ ราคาเพิ่มขึ้น แต่อัตราเงินเฟ้อของสินค้าลดลง ดังนั้น ที่จุดเปลี่ยนความเว้า (ที่ $t = 3$) ราคาเพิ่มขึ้นที่อัตราสูงสุด และอัตราเงินเฟ้อเปลี่ยนจากเพิ่มขึ้นเป็นลดลง

สำหรับนิยาม 4.6.4 ไม่ได้แสดงอะไรเกี่ยวกับค่าของอนุพันธ์ลำดับที่สองของ f ที่จุดเปลี่ยนความเว้า ทฤษฎีบทต่อไปกล่าวว่าถ้าอนุพันธ์ลำดับสองหาค่าได้ (exist) ที่จุดเปลี่ยนความเว้า ค่าของอนุพันธ์ลำดับสองจะต้องมีค่าเป็นศูนย์ที่จุดนั้น

ทฤษฎี 4.6.5 ถ้าฟังก์ชัน f หาอนุพันธ์ได้บนบางช่วงเปิดที่มี c และถ้า (c, f(c)) เป็นจุดเปลี่ยนความเว้าของกราฟ f แล้ว ถ้า $f''(c)$ หาค่าได้แล้ว $f''(c) = 0$

พิสูจน์ ให้ g เป็นฟังก์ชัน ซึ่ง $g(x) = f'(x)$ แล้ว $g'(x) = f''(x)$ เพราะว่า (c, f(c)) เป็นจุดเปลี่ยนความเว้าของกราฟ f แล้ว $f''(x)$ เปลี่ยนเครื่องหมายที่ c และดังนั้น $g'(x)$ เปลี่ยนเครื่องหมายที่ c ด้วย เพราะฉะนั้น โดยอาศัยการทดสอบด้วยอนุพันธ์อันดับหนึ่ง (ท.บ. 4.3.4) g มีค่าสูงสุดสัมพัทธ์ที่ c และ c เป็นจำนวนวิกฤตของ g เพราะว่า $g'(c) = f''(c)$ และเพราะว่าโดยสมมุติฐาน $f''(c)$ หาค่าได้ จึงได้ว่า $g'(c)$ หาค่าได้ เพราะฉะนั้นโดยทฤษฎี 4.1.3, $g'(c) = 0$ และ $f''(c) = 0$ ซึ่งเป็นสิ่งที่ต้องการพิสูจน์

แต่บทกลับของทฤษฎี 4.6.5 ไม่เป็นความจริง

ถ้าอนุพันธ์อันดับสองของฟังก์ชันเป็นศูนย์ที่จำนวน c ไม่เป็นจริงที่จะกล่าวว่า กราฟของฟังก์ชันจะมีจุดเปลี่ยนความเว้าที่ $x = c$ ดังจะแสดงให้เห็นในตัวอย่างต่อไปนี้

ตัวอย่าง 4.6.6 สำหรับฟังก์ชัน $f(x) = x^4$

$f'(x) = 4x^3$ และ $f''(x) = 12x^2$ จะเห็นว่า $f''(0) = 0$ และ $f''(x) > 0$ ถ้า $x < 0$; $f''(x) > 0$ ถ้า $x > 0$ กราฟเป็นโค้งเว้าหงาย (concave upward) ที่จุดบนกราฟถัดไปทางซ้าย (0, 0) และที่จุดถัดไปทางขวาของ (0, 0) แต่จุด (0, 0) ไม่เป็นจุดเปลี่ยนความเว้า จากตัวอย่างในหัวข้อที่ผ่านมา ได้แสดงให้เห็นแล้วว่าฟังก์ชัน f นี้ มีค่าต่ำสุดสัมพัทธ์ที่ศูนย์และกราฟเป็นโค้งเว้าหงายที่จุด (0, 0)

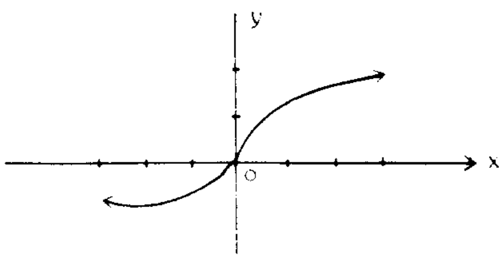
กราฟของฟังก์ชันอาจจะให้จุดเปลี่ยนความเว้าได้ แม้ว่าอนุพันธ์อันดับสองที่จุดนั้นหาค่าไม่ได้ก็ตาม ซึ่งจะแสดงให้เห็นในตัวอย่างต่อไป

ตัวอย่าง 4.6.7 สำหรับฟังก์ชัน $f(x) = x^{1/3}$ จงหาจุดเปลี่ยนความเว้า และเขียนกราฟของ f มาด้วย

วิธีทำ $f'(x) = \frac{1}{3}x^{-2/3}$ และ $f''(x) = -\frac{2}{9}x^{-5/3}$

จะเห็นว่า $f''(0)$ หาค่าไม่ได้ แต่ถ้า $x < 0$ แล้ว, $f''(x) > 0$ และถ้า $x > 0$ แล้ว $f''(x) < 0$

ดังนั้น f มีจุดเปลี่ยนความเว้าที่ (0, 0) รูปของกราฟของฟังก์ชันนี้แสดงให้เห็นดังรูป 4.6.11



รูป 4.6.11

ข้อสังเกต จะพบว่าฟังก์ชันนี้ $f'(0)$ ก็หาค่าไม่ได้เช่นกัน ส่วนเส้นสัมผัสของกราฟที่จุด (0, 0) คือแกน y

การเขียนส่วนของเส้นสัมผัสที่จุดเปลี่ยนความเว้า จะช่วยในการเขียนกราฟที่มีจุดเปลี่ยนความเว้า เส้นสัมผัสนี้เรียกว่า inflectional tangent

ดังนั้นในตัวอย่าง 4.6.7 แกน y จึงเป็นเส้นสัมผัสที่จุดเปลี่ยนความเว้า (inflectional tangent)

ตัวอย่าง 4.6.8 สำหรับฟังก์ชัน $f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x + 1$ จงหาจุดเปลี่ยนความเว้าของกราฟของฟังก์ชัน และจงหาว่าที่ใดเป็นโค้งเว้าหงาย และที่ใดเป็นโค้งเว้าคว่ำ และจงเขียนรูปแสดงส่วนหนึ่งของเส้นสัมผัสที่จุดเปลี่ยนความเว้าด้วย

วิธีทำ

$$f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x + 1$$

$$f'(x) = 3x^2 - 12x + 9$$

$$f''(x) = 6x - 12$$

$f''(x)$ หาค่าได้ตลอดทุกค่าของ x ดังนั้นจุดที่จะเป็นไปได้ที่จะเป็นจุดเปลี่ยนความเว้าก็คือที่ $f''(x) = 0$ นั่นก็คือ เมื่อ $x = 2$ ในการพิจารณาว่าจุดเปลี่ยนความเว้าคือที่ $x = 2$ ทำได้โดยการตรวจสอบว่า $f''(x)$ เปลี่ยนเครื่องหมายหรือไม่ และในขณะเดียวกันก็พิจารณาความเว้าของกราฟในแต่ละช่วง ดังแสดงในตาราง 4.6.2

ตาราง 4.6.2

	$f(x)$	$f'(x)$	$f''(x)$	ผลสรุป
$-\infty < x < 2$			–	กราฟเป็นโค้งเว้าคว่ำ
$x = 2$	3	-3	0	กราฟมีจุดเปลี่ยนความเว้า
$2 < x < +\infty$			+	กราฟเป็นโค้งเว้าหงาย

จากตัวอย่าง 4.3.1 เราทราบว่าฟังก์ชันนี้มีความสูงสุดสัมพัทธ์ที่ $x = 1$ และความต่ำสุดสัมพัทธ์ที่ $x = 3$ การเขียนรูปแสดงส่วนของเส้นตรงของเส้นสัมผัสที่จุดเปลี่ยนความเว้าแสดงให้เห็นดังรูป 4.6.12