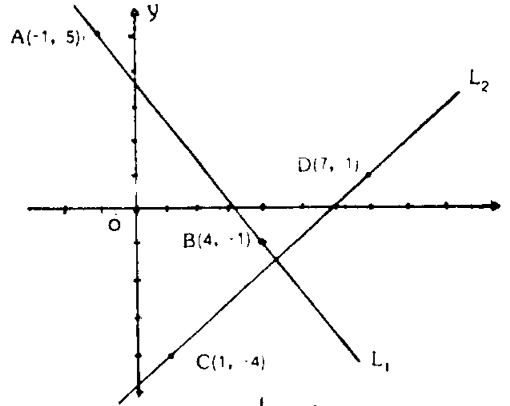
ความชันของ L_2 คือ

$$m_2 = \frac{1 - (-4)}{7 - 1} = \frac{5}{6}$$

จะได้ $m_1 m_2 = (-\frac{6}{5})(\frac{5}{6}) = -1$

นั่นคือ L_1 และ L_2 ตั้งฉากกัน

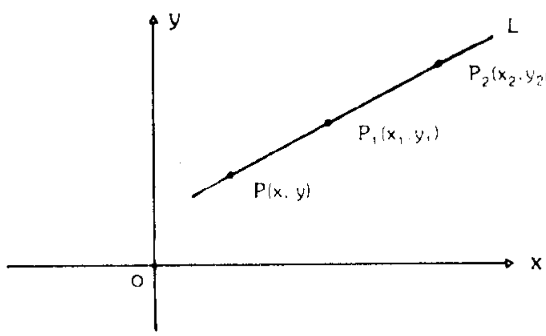


รูป 1.4.8

จากนิยาม 1.4.1 เราสามารถหาความชันของเส้นตรงได้ถ้าทราบจุดสองจุดซึ่งอยู่บนเส้นตรงนั้น ให้ $P_1(x_1, y_1)$ และ $P_2(x_2, y_2)$ เป็นจุดสองจุดบนเส้นตรง L คือ

$$m_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2\ x_1}$$

ถ้า P(x, y) เป็นจุดใด ๆ บนเส้นตรง L นี้ด้วย ดังรูป 1.4.9



รูป 1.4.9

เราอาจหาความชันของเส้นตรง L ซึ่งมีจุด P(x,y) และ $P_1(x_1, y_1)$ เป็นจุดสองจุดบนเส้นตรงได้ ดังนี้

$$m_2 = \frac{y - y_1}{x - x_1}$$

เนื่องจาก m_1 และ m_2 เป็นความชันของเส้นตรง L เดียวกัน ดังนั้น m_1 และ m_2 จะต้องเท่ากัน นั่นคือ

$$\frac{y - y_1}{x - x_1} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

ดังนั้นเราจึงสรุปได้ว่า สมการของเส้นตรงที่ผ่านจุด $P_1(x_1, y_1)$ และ $P_2(x_2, y_2)$ คือ

$$\frac{y - y_1}{x - x_1} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \qquad (1.4.1)$$

เมื่อ $x_1 \neq x_2$ แต่ถ้า $x_1 = x_2$ นั่นคือเส้นตรงอยู่ในแนวดิ่ง ทุกจุดบนเส้นตรงนี้จะมีแอบซิสซาเท่ากัน ดังนั้นถ้า $P(x, y)$ เป็นจุดใด ๆ บนเส้นตรงนี้ เราจะได้สมการของเส้นตรงนี้ คือ

$$x = x_1$$

ตัวอย่าง 1.4.2 จงหาสมการของเส้นตรงที่ผ่านจุด (6, -3) และ (-3, 3)

วิธีทำ เส้นตรงผ่านจุด (6, -3) และ (-3, 3) จะได้

$$\frac{y-(-3)}{x-6} = \frac{3-(-3)}{-3-6}$$

$$y+3 = -\frac{6}{9}(x-6)$$

$$y+3 = -\frac{2}{3}(x-6)$$

ดังนั้นสมการของเส้นตรงนี้คือ

$$y+3 = -\frac{2}{3}(x-6)$$

หรือ
$$y = -\frac{2}{3}x+1$$

ตัวอย่าง 1.4.3 จงหาสมการของเส้นตรงซึ่งผ่านจุด (3, 2) และ (3, 5)

วิธีทำ จะเห็นว่า $x_1 = x_2 = 3$

ดังนั้นสมการของเส้นตรงนี้คือ $x = 3$

จากสมการเส้นตรง (1.4.1) จะเห็นว่า $\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}$ คือความชันของเส้นตรงซึ่งผ่านจุด (x_1, y_1) และ (x_2, y_2) นั่นเอง ถ้า m คือความชันของเส้นตรงดังกล่าวนี้ เราจะได้

$$\frac{y-y_1}{x-x_1} = m$$

หรือ
$$y-y_1 = m(x-x_1) \qquad (1.4.2)$$

เป็นสมการของเส้นตรงซึ่งผ่านจุด (x_1, y_1) และมีความชันเท่ากับ m

ตัวอย่าง 1.4.4 จงหาสมการของเส้นตรงซึ่งผ่านจุด (3, 4) และมีความชันเท่ากับ $\frac{2}{3}$

วิธีทำ ในที่นี้ $(x_1, y_1) = (3, 4)$ และ $m = \frac{2}{3}$ แทนค่าใน (1.4.2) จะได้

$$y-4 = \frac{2}{3}(x-3)$$

หรือ
$$y = \frac{2}{3}x+2$$

เป็นสมการของเส้นตรงซึ่งผ่านจุด (3, 4) และมีความชันเท่ากับ $\frac{2}{3}$

จากสมการ (1.4.2) ถ้าเส้นตรงผ่านจุด (0, b) หรือกล่าวว่าเส้นตรงตัดแกน y ที่จุด (0, b) เราจะได้

$$y-b = m(x-0)$$

หรือ
$$y = mx+b \qquad (1.4.3)$$

เป็นสมการของเส้นตรงซึ่งตัดแกน y ที่จุด (0, b) และมีความชันเท่ากับ m เราจะเรียก b ว่า **ระยะตัดแกน y** (y-intercept)

ตัวอย่าง 1.4.5 จงหาสมการของเส้นตรงซึ่งมีความชันเท่ากับ 2 และมีระยะตัดแกน y เท่ากับ -3

วิธีทำ ระยะตัดแกน y เท่ากับ -3 หมายความว่าเส้นตรงตัดแกน y ที่ (0, -3) ดังนั้นจะได้

$$y = 2x + (-3)$$

หรือ

$$y = 2x - 3$$

เป็นสมการของเส้นตรงที่ต้องการ

ตัวอย่าง 1.4.6 จงหาความชันและระยะตัดแกน y ของเส้นตรง $3x + 4y = 7$

วิธีทำ จากสมการ $3x + 4y = 7$ จัดให้อยู่ในรูปเดียวกับสมการ (1.4.3) จะได้

$$Y = -\frac{3}{4}x + \frac{7}{4}$$

ดังนั้นความชันของเส้นตรงที่กำหนดให้คือ $m = -\frac{3}{4}$

และระยะตัดแกน y คือ $b = \frac{7}{4}$ หรือกล่าวว่าเส้นตรงนี้ตัดแกน y ที่จุด $(0, \frac{7}{4})$

จากตัวอย่าง 1.4.6 จะเห็นว่าสมการทั่ว ๆ ไปของเส้นตรงจะอยู่ในรูป $Ax + By + C = 0$ ซึ่งจะเรียกว่าสมการเชิงเส้น (linear equation) เพราะกำลังของตัวแปร x และ y เป็นหนึ่ง

ในการเขียนกราฟของสมการเส้นตรงนั้น เราเพียงแต่หาจุด 2 จุดบนเส้นตรงนั้น แล้วลากเส้นเชื่อมจุดทั้งสองนั้น ก็จะได้เส้นตรงที่ต้องการ ในการหาจุด 2 จุดบนเส้นตรงนั้นเพื่อให้ง่ายเรามักหาจุดที่เส้นตรงนั้นตัดแกน x (ค่าออร์ดิเนตจะเป็น 0) และจุดตัดแกน y (ค่าแอบ-ซิสซาจะเป็น 0) ถ้าเส้นตรงตัดแกน x ที่จุด (a, 0) เราจะเรียก a ว่า ระยะตัดแกน x (x-intercept) และถ้าเส้นตรงตัดแกน y ที่จุด (0, b) เราจะเรียก b ว่าระยะตัดแกน y (y-intercept)

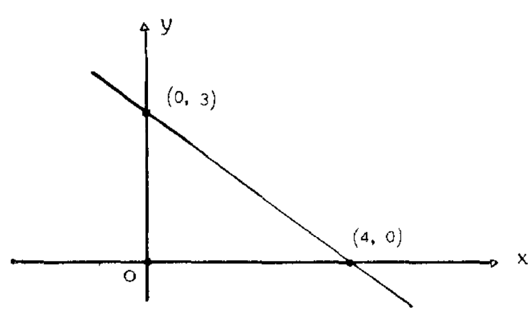
ตัวอย่าง 1.4.7 จงเขียนกราฟของเส้นตรง

$$3x + 4y = 12$$

วิธีทำ ถ้าให้ $y = 0$ จะได้ $x = 4$

นั่นคือ ระยะตัดแกน x เท่ากับ 4

หรือกล่าวว่าเส้นตรงตัดแกน x ที่จุด (4, 0)

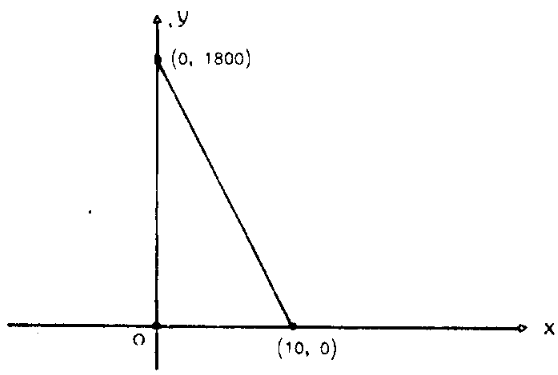


รูป 1.4.10

ถ้าให้ $x = 0$ จะได้ $y = 3$

ดังนั้นเส้นตรงจะตัดแกน y ที่จุด (0, 3) ดังรูป 1.4.10

ตัวอย่าง 1.4.8 บรรษัทแห่งหนึ่งซื้อเครื่องมือชนิดหนึ่งราคา 1,800 บาท เครื่องมือนี้มีอายุการใช้งาน 10 ปี สมุหบัญชีของบรรษัทได้ใช้วิธีอัตราเส้นตรง (straight-line method) ในการคิดค่าเสื่อมราคา นั่นคือราคาตามบัญชี (book value) ของเครื่องมือ จะลดลงในอัตราคงที่ ดังนั้นเมื่อสิ้นปีที่ 10 ราคาตามบัญชีของเครื่องมือจะเป็นศูนย์ สมมุติว่าเมื่อสิ้นปีที่ x ราคาตามบัญชีของเครื่องมือเท่ากับ y บาท ดังนั้นเมื่อ $x = 0$, $y = 1800$ และเมื่อ $x = 10$, $y = 0$ กราฟซึ่งแสดงความสัมพันธ์ระหว่าง x และ y คือส่วนของเส้นตรงซึ่งเชื่อมระหว่างจุด (0, 1800) และ (10, 0) ดังรูป 1.4.11



รูป 1.4.11

ถ้าให้ m คือความชันของส่วนของเส้นตรงนี้ จะได้

$$m = \frac{0 - 1800}{10 - 0} = -180$$

และเนื่องจากระยะตัดแกน y คือ $b = 1800$ ดังนั้น

$$y = -180x + 1800$$

เป็นสมการของเส้นตรงนี้เมื่อ $0 \leq x \leq 10$

ข้อสังเกต : จะเห็นว่า -180 ซึ่งเป็นความชันของเส้นตรงนี้คือค่าเสื่อมราคาต่อปีนั่นเอง แสดงว่าราคาตามบัญชีจะลดลงปีละ 180 บาท

แบบฝึกหัด 1.4

1. จงหาความชันของเส้นตรงซึ่งผ่านจุดที่กำหนดให้ต่อไปนี้

   1.1 $(2, 3)$, $(-4, 3)$ 1.2 $(5, 2)$, $(-2, -3)$

   1.3 $(\frac{1}{3}, \frac{1}{2})$, $(-\frac{5}{6}, \frac{2}{3})$ 1.4 $(-2.1, 0.3)$, $(2.3, 1.4)$

จากข้อ 2 - 11 จงหาสมการของเส้นตรงซึ่งสอดคล้องกับเงื่อนไขที่กำหนดให้ต่อไปนี้

2. ความชันเท่ากับ 4 และผ่านจุด $(2, -3)$
3. ผ่านจุด 2 จุด คือ $(3, 1)$ และ $(-5, 4)$
4. ผ่านจุด $(-3, -4)$ และขนานกับแกน y
5. ผ่านจุด $(1, -7)$ และขนานกับแกน x
6. ระยะตัดแกน x คือ -3 และระยะตัดแกน y คือ 4
7. ผ่านจุด $(1, 4)$ และขนานกับเส้นตรง $2x - 5y + 7 = 0$
8. ผ่านจุด $(-2, -5)$ และมีความชัน $\sqrt{3}$
9. ผ่านจุดกำเนิดและแบ่งครึ่งมุมระหว่างแกนทั้งสองซึ่งอยู่ในจตุภาคที่ 1 และ 3
10. ผ่านจุดกำเนิดและแบ่งครึ่งมุมระหว่างแกนทั้งสองซึ่งอยู่ในจตุภาคที่ 2 และ 4
11. มีความชันเท่ากับ -2 และระยะตัดแกน x เท่ากับ -4
12. จงหาความชันของเส้นตรงต่อไปนี้

    12.1 $4x - 6y = 5$ 12.2 $x + 3y = 7$

    12.3 $2x + 9 = 0$ 12.4 $3x - 5 = 0$

13. จงหาสมการของเส้นซึ่งผ่านจุด $(3, -5)$ และ $(1, -2)$ ในรูป $y = mx + b$
14. จงแสดงว่าเส้นตรง $3x + 5y + 7 = 0$ และเส้นตรง $3x + 5y - 2 = 0$ ขนานกัน
15. จงแสดงว่าเส้นตรง $3x + 5y + 7 = 0$ และเส้นตรง $5x - 3y - 2 = 0$ ตั้งฉากกัน
16. จงหาสมการของเส้นตรงซึ่งผ่านจุด $(-4, -5)$ และขนานกับเส้นตรงซึ่งมีสมการเป็น $x - 2y + 6 = 0$ พร้อมทั้งเขียนกราฟของเส้นตรงทั้งสองบนระนาบ -xy เดียวกัน
17. จุดสามจุดที่กำหนดให้ในแต่ละข้อต่อไปนี้ จงพิจารณาว่าจุดทั้งสามนั้นอยู่บนเส้นตรงเดียวกันหรือไม่ (อาศัยการหาความชันช่วยในการพิจารณา)

    17.1 $(2, 3)$, $(-4, -7)$, $(5, 8)$

    17.2 $(-3, 6)$, $(3, 2)$, $(9, -2)$

    17.3 $(2, -1)$, $(1, 1)$, $(3, 4)$

    17.4 $(4, 6)$, $(1, 2)$, $(-5, -4)$

18. สมมุติว่าซื้อเครื่องมือชนิดหนึ่งราคา A บาท เครื่องมือนี้มีค่าเสื่อมราคาเป็นอัตราเส้นตรงในช่วง n ปี ถ้าราคาตามบัญชีเป็น y บาท เมื่อสิ้นปีที่ x จงหาสมการแสดงความสัมพันธ์ระหว่าง y และ x ถ้าเครื่องมือนั้นราคา 3,000 บาท จงใช้วิธีคิดค่าเสื่อมราคาในอัตราเส้นตรงในช่วง 12 ปี หาราคาตามบัญชีเมื่อสิ้นปีที่ 5

19. ซื้อเครื่องจักรชนิดหนึ่งเมื่อปี 2511 ราคา 750,000 บาท ที่ดินราคา 150,000 บาท และสิ่งปรับปรุงที่ดิน (improvement) ราคา 600,000 บาท สำหรับสิ่งปรับปรุงที่ดินมีอายุการใช้งาน 20 ปี และมีค่าเสื่อมราคาเป็นอัตราเส้นตรง จงหาราคาตามบัญชีของสิ่งปรับปรุงที่ดินในปี 2519

20. บรรษัทแห่งหนึ่งซื้อเครื่องจักรราคา 15,000 บาท เมื่อสิ้นปีที่ 10 ราคาซากของเครื่องจักรเป็น 2,000 บาท ถ้าคิดค่าเสื่อมราคาโดยวิธีอัตราเส้นตรง จงหาราคาตามบัญชีของเครื่องจักร เมื่อสิ้นปีที่ 6

1.5 ฟังก์ชันและกราฟ Functions and Their Graphs

เราจะกล่าวว่า y เป็นฟังก์ชันของ x ถ้ามีกฎหรือสูตรซึ่งแสดงถึงความสัมพันธ์ระหว่าง x และ y โดยเราสามารถหาค่า y ได้หนึ่งค่าเมื่อกำหนดค่า x ให้หนึ่งค่า เช่น ฟังก์ชันซึ่งนิยามโดยกฎที่ว่า "y ได้จากการนำ 4 ไปบวกกับกำลังสองของ x" นั่นคือ $y = x^2 + 4$ ถ้า $x = 3$ จะได้ $y = 3^2 + 4 = 13$ จะเห็นว่าเราสามารถหาค่า y ได้ เมื่อกำหนดค่า x ให้ ดังนั้นเราจึงให้นิยามของฟังก์ชันได้ดังนี้

นิยาม 1.5.1 : ฟังก์ชันจากเซต A ไปยังเซต B คือกฎเกณฑ์ซึ่งบ่งถึงความสัมพันธ์ระหว่างสมาชิกของ A และ B โดยที่สมาชิกใน A แต่ละตัวจะต้องสัมพันธ์กับสมาชิกในเซต B หนึ่งตัวและเพียงตัวเดียวเท่านั้น ถ้า f เป็นฟังก์ชันจาก A ไปยัง B เราจะเขียนแทนด้วย $f : A \rightarrow B$

โดยปกติเรามักแทนสมาชิกของ A ด้วย x และแทนสมาชิกของ B ซึ่งสัมพันธ์กับ x ด้วย y ดังนั้นเราจึงอาจกล่าวได้ว่า ฟังก์ชันคือเซตของเลขคู่ลำดับ (x, y) โดยที่ x มีค่าไม่ซ้ำกันเลย เช่น ความสัมพันธ์ซึ่งนิยามโดย $y = x^2 + 4$ เป็นฟังก์ชัน หรือ ถ้าให้ f เป็นเซตของเลขคู่ลำดับ (x, y) ซึ่งสอดคล้องกับ $y = x^2 + 4$ นั่นคือ

$$f = \{ (x, y) \mid y = x^2 + 4 \}$$

เป็นฟังก์ชัน ถ้า x เป็นจำนวนจริง จะได้ว่า y ก็เป็นจำนวนจริงด้วย ดังนั้น f เป็นฟังก์ชันจากเซต R ไปยัง R เราจะเรียก x ว่าตัวแปร (variable) ส่วนค่า y นั้นจะแปรตามค่าของ x ดังนั้นบางครั้งเราจึงเรียก x ว่าตัวแปรอิสระ (independent variable) และเรียก y ว่าตัวแปรตาม *(dependent variable)*

ถ้า f เป็นฟังก์ชันจาก A ไปยัง B ซึ่งกำหนดค่า $y \in B$ ให้สัมพันธ์กับ $x \in A$ แล้ว เราจะแทน y ด้วย $f(x)$ นั่นคือ $y = f(x)$ และจะเรียก $f(x)$ ว่าอิมเมจ (image) ของ x ภายใต้ฟังก์ชัน f และเราจะเรียกเซต A ว่าโดเมน (domain) ของฟังก์ชัน f ซึ่งจะเขียนแทนด้วย D_f ดังนั้น

$$D_f = \{ x \mid x \in A \}$$

เราจะเรียกเซตของ $y \in B$ ซึ่งสัมพันธ์กับ $x \in A$ ว่าเรนจ์ (range) ของฟังก์ชัน f ซึ่งจะเขียนแทนด้วย R_f ดังนั้น

$$R_f = \{ y \in B \mid f(x) = y \text{ สำหรับบาง } x \in A \}$$

ตัวอย่าง 1.5.1 ให้จำนวนจริง x แต่ละตัวสัมพันธ์กับ x^2 จะเห็นว่าความสัมพันธ์ดังกล่าวนี้เป็นฟังก์ชัน ถ้าเราแทนฟังก์ชันนั้นด้วย f ดังนั้น

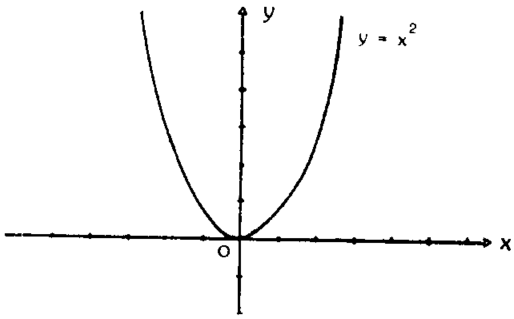
$$f(x) = x^2$$

หรือกล่าวว่า f เป็นฟังก์ชันซึ่งนิยามโดย $y = x^2$
หรืออาจกล่าวว่า f เป็นเซตของเลขคู่ลำดับ (x, y) ซึ่ง $y = x^2$
ในที่นี้โดเมนของฟังก์ชัน f คือจำนวนจริงทั้งหมด นั่นคือ

$$D_f = R = (-\infty, \infty)$$

ส่วนเรนจ์ของ f คือจำนวนจริงบวกและ 0 ดังนั้น

$$R_f = [0, \infty) = \{ x \in R \mid x \geq 0 \}$$

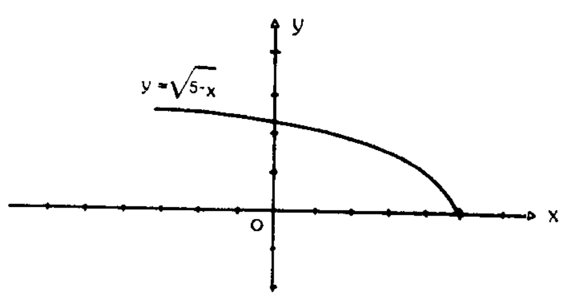


รูป 1.5.1

ในวิชาแคลคูลัสนั้นเรามักกล่าวถึงฟังก์ชันของจำนวนจริง นั่นคือ ฟังก์ชันที่มีโดเมนเป็นเซตของจำนวนจริง หรือสับเซตของจำนวนจริง ในกรณีที่โดเมนเป็นสับเซตของจำนวนจริง เรามักจะบ่งไว้ด้วย เช่น $y = x^2$ เมื่อ $0 \leq x \leq 1$ แสดงว่าโดเมนคือช่วงปิด $[0, 1]$ ซึ่งเป็นสับเซตของ R

ตัวอย่าง 1.5.2 ให้ f เป็นฟังก์ชันซึ่งนิยามโดย $y = \sqrt{5 - x}$
จะเห็นว่า ถ้า $x > 5$ จะทำให้ y ไม่เป็นจำนวนจริง
ดังนั้น x จะต้องเป็นจำนวนจริงซึ่งน้อยกว่าหรือเท่ากับ 5
นั่นคือ $D_f = \{ x \mid x \leq 5 \}$
ส่วนค่า y นั้นจะมากกว่าหรือเท่ากับ 0 ดังนั้น

$$R_f = \{ y \mid y \geq 0 \} = [0, \infty)$$

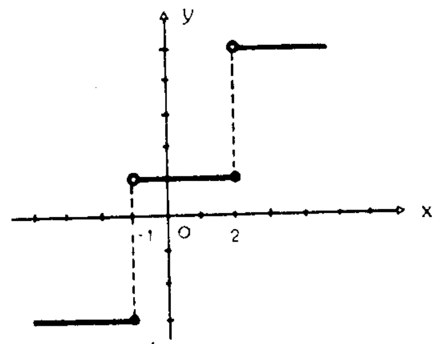


รูป 1.5.2

ตัวอย่าง 1.5.3 ให้ g เป็นฟังก์ชันซึ่งนิยามโดย

$$y = \begin{cases} -3 & \text{เมื่อ } x \leq -1 \\ 1 & \text{เมื่อ } -1 < x \leq 2 \\ 4 & \text{เมื่อ } 2 < x \end{cases}$$

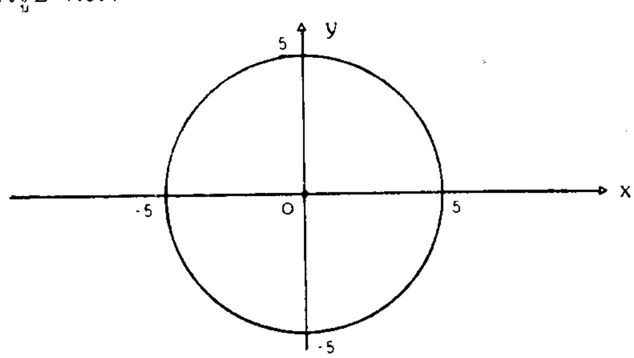
จะเห็นว่า x คือจำนวนจริงทั้งหมด ส่วน y มี 3 ค่า คือ -3, 1 และ 4 ดังนั้น โดเมนของ g คือ $(-\infty, \infty)$ ส่วนเรนจ์ของ g คือ $\{-3, 1, 4\}$ ดังรูป 1.5.3



รูป 1.5.3

ตัวอย่าง 1.5.4 จงพิจารณาเซต $g = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 = 25\}$

วิธีทำ จะเห็นว่า g ไม่เป็นฟังก์ชัน เพราะว่าถ้า x อยู่ในช่วง (-5, 5) จะให้ค่า y สองค่า เช่น เมื่อ x = 3 จะได้ $y = \pm 4$ แสดงว่า y สองค่าสัมพันธ์กับค่า x หนึ่งค่า ดังนั้น g จึงไม่เป็นฟังก์ชัน ดังรูป 1.5.4



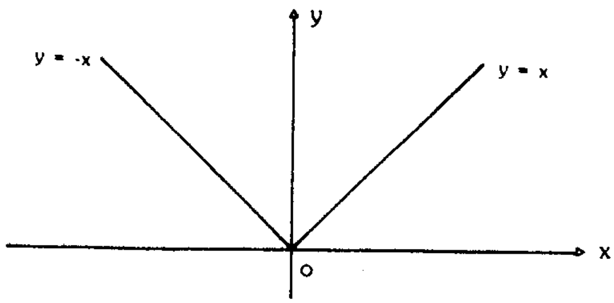
รูป 1.5.4

ตัวอย่าง 1.5.5 ให้ h เป็นฟังก์ชันซึ่งนิยามโดย

$$y = |x|.$$

วิธีทำ จะเห็นว่า x เป็นจำนวนจริงใด ๆ ก็ได้ แต่ y จะเป็นค่าลบไม่ได้ ดังนั้นโดเมนของ h คือ $(-\infty, \infty)$ และเรนจ์ของ h คือ $[0, \infty)$ จาก $y = |x|$ เราสามารถเขียนใหม่ได้

$$y = \begin{cases} x & \text{เมื่อ } x \geq 0 \\ -x & \text{เมื่อ } x < 0 \end{cases}$$



รูป 1.5.5

ตัวอย่าง 1.5.6 ให้ h เป็นฟังก์ชันซึ่งนิยามโดย

$$y = \frac{x^2 - 9}{x - 3}$$

จงหาโดเมน เรจน์ และกราฟ ของฟังก์ชัน

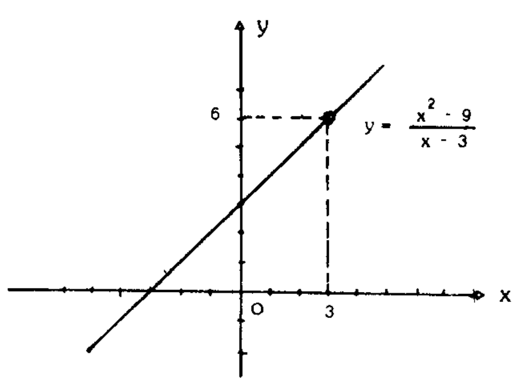
วิธีทำ จะเห็นว่า ถ้า $x = 3$ จะได้ $y = \frac{0}{0}$ ซึ่งไม่มีความหมาย เพราะเราไม่มีการหารด้วย 0 ดังนั้นโดเมนของ h คือจำนวนจริงทั้งหมดยกเว้น 3

แต่ $$y = \frac{x^2 - 9}{x - 3} = \frac{(x - 3)(x + 3)}{x - 3}$$

ดังนั้นเมื่อ $x \neq 3$ เราจะได้

$$y = x + 3$$

จะเห็นว่า y เป็นจำนวนจริงทั้งหมด ยกเว้น 6 เพราะ $x \neq 3$
ดังนั้นเรนจ์ของ h คือ จำนวนจริงทั้งหมดยกเว้น 3
ฉะนั้นกราฟของ h คือจุดทุกจุดบนเส้นตรง $y = x + 3$ ยกเว้นจุด (3, 6) ดังรูป 1.5.6



รูป 1.5.6

ดังได้กล่าวแล้วว่าฟังก์ชัน คือ กฎเกณฑ์ซึ่งทำให้เราสามารถหาค่าของ y หรือ $f(x)$ ได้ เมื่อกำหนดค่าของตัวแปรอิสระ x ให้ ดังนั้นสำหรับฟังก์ชัน

$$f(x) = x^2 - 5$$

คือกฎเกณฑ์ซึ่งทำให้เราหาค่าของฟังก์ชัน f ได้ โดยการยกกำลังสองตัวแปรอิสระ แล้วลบออกด้วย 5 ถ้าเราทำตามกฎดังกล่าวนี้ จะได้

$$f(3) = 3^2 - 5 = 4$$

$$\text{และ}\quad f(x+1) = (x+1)^2 - 5 = x^2 + 2x + 1 - 5 = x^2 + 2x - 4$$

จะเห็นว่า เมื่อค่าของตัวแปรอิสระเปลี่ยนแปลงจาก x เป็น $x + 1$ แล้ว ค่าของฟังก์ชันจะเปลี่ยนจาก $x^2 - 5$ เป็น $x^2 + 2x - 4$ นั่นคือเปลี่ยนไปเท่ากับ $(x^2 - 5) - (x^2 + 2x - 4) = 2x - 1$ นั่นเอง

ในทางคณิตศาสตร์เรามักใช้สัญญลักษณ์ $\triangle$ (delta) แทน "ค่าที่เปลี่ยนแปลงไป" เช่น $\triangle x$ แทนค่าของ x ที่เปลี่ยนไป ถ้าตัวแปรอิสระเปลี่ยนจาก x เป็น $x + 1$ จะได้ $\triangle x = 1$ ในทำนองเดียวกัน $\triangle y$ แทนค่าของ y ที่เปลี่ยนแปลงไป ดังนั้นเมื่อ $\triangle x = 1$ จะได้ $\triangle y = 2x - 1$ เป็นต้น

ตัวอย่าง 1.5.7 ให้ f เป็นฟังก์ชันซึ่งนิยามโดย

$$f(x) = x^2 + 3x - 4$$

จงหา $f(0)$, $f(-2)$ และ $f(x + \triangle x)$

วิธีทำ เนื่องจาก $f(x) = x^2 + 3x - 4$

ดังนั้น

$$f(0) = 0^2 + 3\cdot 0 - 4 = -4$$

$$f(-2) = (-2)^2 + 3(-2) - 4 = -6$$

$$\begin{aligned} f(x + \triangle x) &= (x + \triangle x)^2 + 3(x + \triangle x) - 4 \\ &= x^2 + 2x\triangle x + (\triangle x)^2 + 3x + 3\triangle x - 4 \\ &= x^2 + (2\triangle x + 3)x + (\triangle x)^2 + 3\triangle x - 4 \end{aligned}$$

ตัวอย่าง 1.5.8 ให้ $g(x) = \sqrt{3x - 1}$ จงหา $\dfrac{g(x+h) - g(x)}{h}$ เมื่อ $h \neq 0$

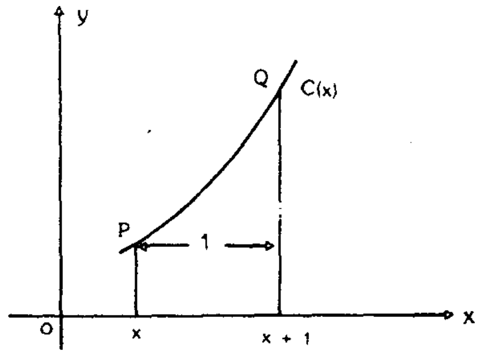
วิธีทำ

$$\begin{aligned} \frac{g(x+h) - g(x)}{h} &= \frac{\sqrt{3(x+h) - 1} - \sqrt{3x - 1}}{h} \\ &= \frac{(\sqrt{3x + 3h - 1} - \sqrt{3x - 1})(\sqrt{3x + 3h - 1} + \sqrt{3x - 1})}{h(\sqrt{3x + 3h - 1} + \sqrt{3x - 1})} \\ &= \frac{(3x + 3h - 1) - (3x - 1)}{h(\sqrt{3x + 3h - 1} + \sqrt{3x - 1})} \end{aligned}$$

$$= \frac{3h}{h(\sqrt{3x + 3h - 1} + \sqrt{3x - 1})}$$

$$= \frac{3}{\sqrt{3x + 3h - 1} + \sqrt{3x - 1}}$$

ตัวอย่าง 1.5.9 ให้ $C(x) = 100 + 6x + 0.01x^2$ เป็นฟังก์ชันของค่าใช้จ่ายในการผลิตสินค้าต่อ x หน่วย หมายความว่าถ้าเราต้องการผลิตสินค้า x หน่วย จะต้องเสียค่าใช้จ่ายทั้งหมดเท่ากับ $C(x)$ บาท รูป 1.5.8 คือกราฟของฟังก์ชัน $C(x)$



รูป 1.5.8

$C(x)$ คือค่าใช้จ่ายในการผลิตสินค้า x หน่วย

$C(x + 1)$ คือค่าใช้จ่ายในการผลิตสินค้า $x + 1$ หน่วย

ให้ $S(x)$

$$\begin{aligned} S(x) &= C(x + 1) - C(x) \\ &= [100 + 6(x + 1) + 0.01(x+1)^2] - [100 + 6x + 0.01x^2] \\ &= (100 + 6x + 6 + 0.01x^2 + 0.02x + 0.01) - (100 + 6x + 0.01x^2) \\ &= 0.02x + 6.01 \end{aligned}$$

จะเห็นว่า $S(x)$ คือค่าใช้จ่ายที่จะต้องจ่ายเพิ่มขึ้นถ้าเราเพิ่มการผลิต จาก x หน่วยเป็น $x + 1$ หน่วย นั่นคือ ในการผลิตสินค้าหน่วยที่ $x + 1$ จะต้องเสียค่าใช้จ่าย $0.02x + 6.01$ บาท เช่นค่าใช้จ่ายในการผลิตสินค้าหน่วยที 101 เป็นเงินเท่ากับ

$$S(100) = 0.02(100) + 6.01 = 8.01$$

เราจะเรียก $S(100)$ ว่า **marginal** cost ของสินค้าหน่วยที่ 101

ดังนั้น $S(x)$ คือ marginal cost ของสินค้าหน่วยที่ $x + 1$

แบบฝึกหัด 1.5

ในข้อ 1 - 10 จงหาโดเมนและเรนจ์ของฟังก์ชันที่กำหนดให้พร้อมทั้งเขียนกราฟของฟังก์ชันประกอบด้วย

1. $f = \{(x, y) \mid y = 3x - 1\}$
2. $g = \{(x, y) \mid y = x^2 + 2\}$
3. $F = \{(x, y) \mid y = 3x^2 - 6\}$
4. $G = \{(x, y) \mid y = \sqrt{x + 1}\}$
5. $h = \{(x, y) \mid y = \sqrt{3x - 4}\}$
6. $f = \{(x, y) \mid y = 4 - x^2\}$
7. $g = \{(x, y) \mid y = \sqrt{x^2 - 4}\}$
8. $H = \{(x, y) \mid y = |x - 3|\}$
9. $\phi = \{(x, y) \mid y = |3x + 2|\}$
10. $F = \{(x, y) \mid y = \frac{4x^2 - 1}{2x + 1}\}$

ในข้อ 11 - 26 จงหาโดเมนและเรนจ์ของฟังก์ชันที่กำหนดให้พร้อมทั้งเขียนกราฟประกอบ

11. $G : y = \begin{cases} -2 & \text{ถ้า } x \leq 3 \\ 2 & \text{ถ้า } 3 < x \end{cases}$

12. $h : y = \begin{cases} -4 & \text{ถ้า } x < -2 \\ -1 & \text{ถ้า } -2 \leq x \leq 2 \\ 3 & \text{ถ้า } 2 < x \end{cases}$

13. $f : y = \begin{cases} 2x - 1 & \text{ถ้า } x \neq 2 \\ 0 & \text{ถ้า } x = 2 \end{cases}$

14. $: y = \begin{cases} x + 5 & \text{ถ้า } x < -5 \\ \sqrt{25 - x^2} & \text{ถ้า } -5 \leq x \leq 5 \\ x - 5 & \text{ถ้า } 5 < x \end{cases}$

15. $H : y = \begin{cases} x^2 - 4 & \text{ถ้า } x < 3 \\ 2x - 1 & \text{ถ้า } 3 \leq x \end{cases}$

16. $h : y = \begin{cases} 6x + 7 & \text{ถ้า } x \leq -2 \\ 4 - x & \text{ถ้า } -2 < x \end{cases}$

17. $F : y = \frac{(x + 1)(x^2 + 3x - 10)}{x^2 + 6x + 5}$
18. $G : y = \frac{(x^2 + 3x - 4)(x^2 - 5x + 6)}{(x^2 - 3x + 2)(x - 3)}$
19. $f : y = \sqrt{x^2 - 3x - 4}$
20. $h : y = \sqrt{6x^2 - 5x - 4}$
21. $g : y = \frac{x^3 - 2x^2}{x - 2}$
22. $f : y = \frac{x^3 + 3x^2 + x + 3}{x + 3}$
23. $h : y = \frac{x^3 + 5x^2 - 6x - 30}{x + 5}$
24. $F : y = \frac{x^4 + x^3 - 9x^2 - 3x + 18}{x^2 + x - 6}$
25. $f : y = |x| + |x - 1|$
16. $g : y = |x| \cdot |x - 1|$

27. ให้ $f(x) = 2x^2 + 5x - 3$ จงหา

27.1 $f(-2)$	27.2 $f(-1)$	27.3 $f(0)$
27.4 $f(3)$	27.5 $f(n + 1)$	27.6 $f(2x^2)$
27.7 $f(x^2 - 3)$	27.8 $f(x + h)$	27.9 $f(x) + f(n)$

27.10 $\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$, $h \neq 0$

28. ให้ $g(x) = 3x^2 - 4$ จงหา

28.1 $g(-4)$ 28.2 $g(\frac{1}{2})$ 28.3 $g(x^2)$

28.4 $g(3x^2 - 4)$ 28.5 $g(x - h)$ 28.6 $g(x) - g(h)$

28.7 $\frac{g(x+h)-g(x)}{h}$, $h \neq 0$

29. ให้ $F(x) = \sqrt{2x + 3}$ จงหา

29.1 $F(-1)$ 29.2 $F(4)$ 29.3 $F(\frac{1}{4})$

29.4 $F(30)$ 29.5 $F(2x + 3)$ 29.6 $\frac{F(x+h)-F(x)}{h}$, $h \neq 0$

30. ให้ $G(x) = \sqrt{2x^2 + 1}$ จงหา

30.1 $G(-2)$ 30.2 $G(0)$ 30.3 $G(\frac{1}{5})$

30.4 $G(\frac{4}{7})$ 30.5 $G(2x^2 - 1)$ 30.6 $\frac{G(x+h)-G(x)}{h}$, $h \neq 0$

31. ถ้าค่าใช้จ่ายในการผลิตสินค้า x หน่วย เป็นเงิน $C(x) = 50 + x + 0.1x^2$ จงหา marginal cost ของสินค้าหน่วยที่ $x + 1$ และหน่วยที่ 11

1.6 พีชคณิตของฟังก์ชัน ชนิดของฟังก์ชัน และการประยุกต์

พิจารณาการบวก การลบ การคูณ และการหารของฟังก์ชัน เราเรียกฟังก์ชันที่เกิดขึ้นเหล่านี้ว่า ผลรวม ผลต่าง ผลคูณ และผลหาร ของฟังก์ชันเดิม ซึ่งมีนิยามดังนี้

นิยาม 1.6.1 : กำหนดให้ f และ g เป็นฟังก์ชัน 2 ฟังก์ชัน

(1) ผลรวมของ 2 ฟังก์ชัน ซึ่งเป็นฟังก์ชันนิยาม โดย

$$(f+g)(x) = f(x) + g(x)$$

(2) ผลต่างของ 2 ฟังก์ชัน แทนด้วย $f - g$ ซึ่งเป็นฟังก์ชันและนิยามโดย

$$(f-g)(x) = f(x) - g(x)$$

(3) ผลคูณของ 2 ฟังก์ชัน แทนด้วย $f \cdot g$ ซึ่งเป็นฟังก์ชันและนิยามโดย

$$(f \cdot g)(x) = f(x) \cdot g(x)$$

(4) ผลหารของ 2 ฟังก์ชัน แทนด้วย $\frac{f}{g}$ ซึ่งเป็นฟังก์ชัน และนิยามโดย

$$\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)} \quad ; \; g(x) \neq 0$$

ในแต่ละกรณี โดเมน (domain) ของฟังก์ชัน คือค่าของ x ทั้งหลายที่อยู่ในโดเมนของฟังก์ชัน f และ g ยกเว้นในกรณีที่ (4) ไม่รวมค่าของ x ซึ่ง $g(x) = 0$

ตัวอย่าง 1.6.1 กำหนดให้ f เป็นฟังก์ชันนิยามโดย

$$f(x) = \sqrt{x-2}$$

และ

$$g(x) = 2x + 1$$

จงหา
1. $(f+g)(x)$
2. $(f-g)(x)$
3. $(f \cdot g)(x)$
4. $\left(\frac{f}{g}\right)(x)$

วิธีทำ

1. $$(f+g)(x) = f(x) + g(x) = \sqrt{x-2} + 2x + 1$$

2. $$(f-g)(x) = f(x) - g(x) = \sqrt{x-2} - 2x - 1$$

3. $$(f \cdot g)(x) = f(x) \cdot g(x) = \sqrt{x-2}\,(2x+1)$$

4. $\quad (\frac{f}{g})(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$

$= \sqrt{\frac{x-2}{2x+1}}$

โดเมนของ f คือ $[2, \infty)$ และ โดเมนของ g คือ R ดังนั้นในข้อ (1), (2) และ (3) โดเมนของผลลัพธ์คือ $[2, \infty)$ สำหรับข้อ (4) ส่วนจะเป็นศูนย์เมื่อ $x = -\frac{1}{2}$ แต่ $-\frac{1}{2} \notin [2,\infty)$ ดังนั้น โดเมนของข้อ (4) ยังคงเป็น $[2, \infty)$

หมายเหตุ ผลคูณของ f และ f แทนด้วย f^2 ตัวอย่างเช่น $f(x) = 3x$ ดังนั้น f^2 เป็นฟังก์ชัน และ

$$f^2(x) = (3x)\cdot(3x) = 9x^2$$

ฟังก์ชันประกอบ (Composite Functions)

นิยาม 1.6.2 : กำหนดให้ f และ g เป็นฟังก์ชัน 2 ฟังก์ชัน ฟังก์ชันประกอบของ f และ g เขียนแทนด้วย fog และนิยามโดย

$$(fog)(x) \quad f(g(x))$$

โดเมนของ fog คือ เซ็ตของ x ใด ๆ ในโดเมนของ g ซึ่ง g(x) อยู่ในโดเมนของ f

ตัวอย่าง 1.6.2 กำหนดให้ $f(x) = \sqrt{x}$ และ $g(x) = 2x - 3$

จงหา fog และ โดเมนของ fog

วิธีทำ โดเมนของ f คือ $[0, \infty)$ โดเมนของ g คือ R (จำนวนจริง)

$$\begin{aligned}(fog)(x) &= f(g(x)) \\ &= f(2x-3) \\ &= \sqrt{2x-3}\end{aligned}$$

โดเมนของ fog คือเซ็ตของจำนวนจริง ซึ่ง $2x - 3 \geq 0$ หรือมีค่าเท่ากับ $[\frac{3}{2}, \infty)$

ตัวอย่าง 1.6.3 กำหนดให้ $f(x) = \sqrt{x}$ และ $g(x) = x^2 - 1$

จงหา
1. fof
2. gog
3. fog
4. gof

และหาโดเมนของฟังก์ชันประกอบในแต่ละข้อ

วิธีทำ โดเมนของ f คือ $[0, \infty)$ และ โดเมนของ g คือ $(-\infty, \infty)$

1. $\quad (fof)(x) = f(f(x)) \quad = f(\sqrt{x})$

$$= \sqrt{\sqrt{x}}$$

$$= \sqrt[4]{x}$$

โดเมนของ fof คือ $[0, \infty)$

2. $(g \circ g)(x) = g(g(x)) = g(x^2-1)$

$= (x^2-1)^2 - 1$

$= x^4 - 2x^2$

โดเมนของ $g \circ g$ คือ $(-\infty, \infty)$

3. $(f \circ g)(x) = f(g(x)) = f(x^2-1)$

$= \sqrt{x^2-1}$

โดเมนของ fog คือ $(-\infty, -1] \cup [1, \infty)$ หรือมีค่าเท่ากับทุกจำนวนจริง x ซึ่งไม่อยู่ใน $(-1, 1)$

4. $(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(\sqrt{x})$

$= (\sqrt{x})^2 - 1$

$= x - 1$

พิจารณา $(g \circ f)(x) = x - 1$ จะได้ โดเมนคือ R ซึ่งไม่จริง เพราะว่าโดเมนของ gof ตามนิยามคือ ค่า x ซึ่งอยู่ในโดเมนของ f โดยที่ f(x) อยู่ในโดเมนของ g ดังนั้น โดเมนของ gof คือ $[0, \infty)$

ถ้าพิสัย (range) ของฟังก์ชัน f เป็นจำนวนจริงเพียงค่าเดียว แล้วเรียก f เป็นฟังก์ชันคงที่ (constant function) นั่นคือ $f(x) = c$ เป็นฟังก์ชันคงที่ สำหรับ c เป็นจำนวนจริงใด ๆ กราฟของมันจะเป็นเส้นตรงซึ่งขนานและห่างจากแกน x เป็นระยะ c หน่วย

ฟังก์ชัน f กำหนดโดย

$$f(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + \dots\dots + a_{n-1}x + a_n$$

โดยที่ n เป็นจำนวนเต็มบวก และ $a_0, a_1, a_2, \dots\dots, a_n$ เป็นเลขจำนวนจริงและ $a_0 \neq 0$ จะเรียก f ว่าเป็นฟังก์ชันโพลีโนเมียล (polynomial function) ดีกรีที่ n ตัวอย่างเช่น

$$f(x) = 3x^5 - x^2 + 7x - 1$$

เป็นโพลีโนเมียลดีกรี 5

ถ้าดีกรีของฟังก์ชันโพลีโนเมียล เป็น 1 แล้ว ฟังก์ชันนี้เรียกว่า ฟังก์ชันเชิงเส้น (linear function) ถ้าดีกรีเป็น 2 เรียกว่าฟังก์ชันกำลังสอง (quadratic function) และถ้าดีกรีเป็น 3 เรียกว่าฟังก์ชันกำลังสาม (cubic function) เช่น

$f(x) = 2x - 1$ เป็นฟังก์ชันเชิงเส้น

$f(x) = 1 - 3x + 2x^2$ เป็นฟังก์ชันกำลังสอง

$f(x) = 3x^3 - 1$ เป็นฟังก์ชันกำลังสาม

ถ้าดีกรีของโพลีโนเมียลเป็นศูนย์ ฟังก์ชันนี้จะเป็นฟังก์ชันคงที่ โดยทั่วไปฟังก์ชันเชิงเส้นจะเขียนอยู่ในรูป

$$f(x) = mx + b$$

เมื่อ m, b เป็นค่าคงที่ และ $m \neq 0$ กราฟของฟังก์ชันนี้เป็นเส้นตรง มี m เป็นความชัน และ b เป็นระยะแกนตัด y

ในกรณีที่ $f(x) = x$ จะเรียกฟังก์ชันนี้ว่า "ฟังก์ชันเอกลักษณ์" (Identity function)" และฟังก์ชัน

$$f(x) = ax^2 + bx + c$$

เขียนแทนรูปทั่วไปของฟังก์ชันกำลังสอง เมื่อ a, b และ c เป็นค่าคงที่ และ $a \neq 0$

ถ้าฟังก์ชันใด อยู่ในรูปผลหารของโพลีโนเมียลฟังก์ชันสองฟังก์ชันแล้ว จะเรียกฟังก์ชันนี้ว่า "ฟังก์ชันตักยะ (rational function)" เช่น

$$f(x) = \frac{x^3 - x^2 + 5}{x^2 - 9}$$

เป็นฟังก์ชันตักยะซึ่งมีโดเมนคือ เซ็ตของจำนวนจริงไม่รวม 3 และ -3

ฟังก์ชันพีชคณิต (Algebraic function) คือฟังก์ชันซึ่งเกิดจากการกระทำโดยเครื่องหมายทางพีชคณิตจำนวนนับได้ถ้วนต่อฟังก์ชันเอกลักษณ์ และฟังก์ชันคงที่ เครื่องหมายพีชคณิตประกอบด้วย เครื่องหมาย บวก ลบ คูณ หาร ยกกำลัง และถอดรูท ตัวอย่างของฟังก์ชันพีชคณิต คือ

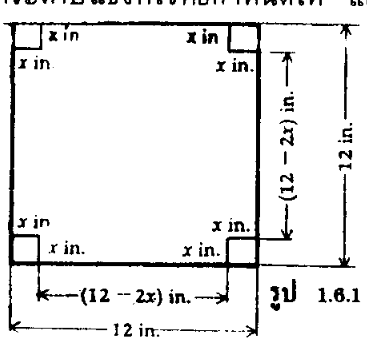
$$f(x) = \frac{(x^2 - 3x + 1)^3}{\sqrt{x^4 + 1}}$$

นอกจากฟังก์ชันพีชคณิต ยังมีฟังก์ชันที่ควรพิจารณาในแคลคูลัสเบื้องต้น คือ ฟังก์ชันอดิศัย (Trancendental function) ตัวอย่างของฟังก์ชันอดิศัย คือ ฟังก์ชันลอการิทึม (logarithm function) ฟังก์ชันเอกโพเนนเชียล (exponential function) ซึ่งจะกล่าวในบทต่อไป

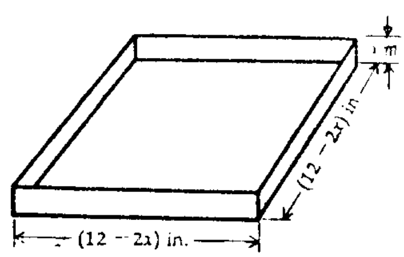
ตัวอย่าง 1.6.4 ผู้ผลิตกล่องกระดาษแข็งต้องการจะทำกล่องแบบเปิดด้านบนจากกระดาษแข็งชิ้นหนึ่งซึ่งมีพื้นที่เป็น 12 x 12 ตารางนิ้ว โดยตัดมุมทั้งสี่ออกเป็นสี่เหลี่ยมจตุรัสเท่า ๆ กัน จงหาปริมาตรของกล่องในรูปของฟังก์ชันของความยาวด้านของสี่เหลี่ยมจตุรัสที่ตัดออก และหาโดเมนของฟังก์ชันนั้นด้วย

วิธีทำ ให้ x = ความยาวด้านของสี่เหลี่ยมจตุรัสที่ตัดออกมีหน่วยเป็นนิ้ว

จำนวนนิ้วของด้านทั้งสามของกล่องคือ x ,(12 − 2x) และ (12 − 2x) รูปที่ 1.6.1 แสดงชิ้นกระดาษแข็งที่โจทย์กำหนดให้ และรูป 1.6.2 แสดงรูปของกล่อง



รูป 1.6.1



รูป 1.6.2

ให้ $V(x)$ แทนปริมาตรของกล่องมีหน่วยเป็นลูกบาศก์นิ้ว จะได้ว่า

$$V(x) = x(12-2x)(12-2x) \qquad (1.6.1)$$

หรือ $$V(x) = 144x - 48x^2 + 4x^3$$

จากสมการ (1.6.1) เราพบว่า $V(0) = 0$ และ $V(6) = 0$ เพราะฉะนั้นจะเห็นได้ว่าค่าของ x จะอยู่ระหว่าง 0 และ 6 ดังนั้นโดเมนของ V คือช่วงเปิด $(0, 6)$

ในบทที่ 4 จะศึกษาวิธีหาค่าของ x ซึ่งทำให้กล่องมีปริมาตรมากที่สุดเท่าที่จะเป็นไปได้

ตัวอย่าง 1.6.5 ผู้ผลิตนาฬิกา สามารถผลิตนาฬิกาชนิดหนึ่งราคาต้นทุน 150 บาทต่อเรือน ผู้ผลิตคาดว่าถ้าราคาขายของนาฬิกาชนิดนี้เป็น x บาทต่อเรือน และจำนวนของนาฬิกาที่ขายได้ต่อสัปดาห์ คือ $(350 - x)$ เรือน

1. จงหากำไรต่อสัปดาห์ในรูปของฟังก์ชันของ x
2. จากคำตอบ ข้อ 1. จงหากำไรต่อสัปดาห์ ถ้าขายนาฬิกาเรือนละ 300 บาท

วิธีทำ (1) กำไรหาได้โดยเอารายได้ลบต้นทุนทั้งหมด ให้ R บาท เป็นรายได้ต่อสัปดาห์ เพราะว่า รายได้คือผลคูณระหว่างราคานาฬิกาแต่ละเรือนกับจำนวนนาฬิกาที่ขาย เราจะได้

$$R = x(350 - x) \qquad (1.6.2)$$

ให้ C บาท เป็นราคาต้นทุนของนาฬิกาทั้งหมดซึ่งขายได้ในแต่ละสัปดาห์ เพราะว่าราคาต้นทุนทั้งหมดคือ ผลคูณของราคาต้นทุนแต่ละเรือนกับจำนวนของนาฬิกาที่ขายได้ ดังนั้นจะได้ว่า

$$C = 150(350 - x) \qquad (1.6.3)$$

ให้ $P(x)$ บาท คือกำไรต่อสัปดาห์ ดังนั้น

$$\begin{aligned} P(x) &= R - C \\ &= x(350 - x) - 150(350 - x) \\ &= (350 - x)(x - 150) \qquad (1.6.5) \end{aligned}$$

(2) จำนวนกำไรต่อสัปดาห์ ถ้าราคาขายเป็น 300 บาทต่อเรือน คือ $P(300)$ จาก (5) จะได้

$$\begin{aligned} P(300) &= (350 - 300)(300 - 150) \\ &= 50 \times 150 \\ &= 22500 \end{aligned}$$

นั่นคือกำไรต่อสัปดาห์ เป็น 22,500 บาท เมื่อขายนาฬิกาเรือนละ 300 บาท

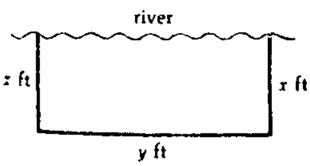
ใน 2 **ตัวอย่างต่อไปนี้** ประกอบด้วย 2 สมการซึ่งเกี่ยวข้องกับตัวแปรตาม (dependent variable) 1 ตัว และตัวแปรต้น (independent variables) 2 ตัว การแก้ปัญหาแบบนี้ จะ

จัดตัวแปรตามให้อยู่ในรูปของฟังก์ชันของตัวแปรต้นตัวหนึ่ง โดยการกำจัดตัวแปรต้นอีกตัวหนึ่งออกจากสมการทั้งสองนั้น

ตัวอย่าง 1.6.6 ในการสร้างรั้วล้อมรอบสนามหญ้ารูปสี่เหลี่ยมผืนผ้าซึ่งอยู่ริมฝั่งแม่น้ำ ยกเว้นด้านที่ติดกับแม่น้ำ ราคาวัสดุที่ใช้สร้างรั้วเป็น 80 บาทต่อความยาว 1 ฟุต สำหรับสองด้าน และ 120 บาทต่อความยาว 1 ฟุต สำหรับด้านซึ่งขนานกับแม่น้ำ ค่าใช้จ่ายทำรั้วทั้งหมดเป็น 36,000 บาท

1. ถ้า x ฟุต เป็นความยาวของปลายสนาม จงบอกขนาดพื้นที่ของสนามในรูปของฟังก์ชัน ของ x
2. จงหาโดเมนของฟังก์ชันผลลัพธ์

วิธีทำ



รูป 1.6.3

ให้	x	=	ความยาวของด้านปลายของสนามมีหน่วยเป็นฟุต	
	y	=	ความยาวของด้านขนานกับแม่น้ำมีหน่วยเป็นฟุต	
	A	=	พื้นที่ของสนาม มีหน่วยเป็นตารางฟุต	
ดังนั้น	A	=	xy	(1.6.6)

เพราะว่าราคาของวัสดุที่ใช้ด้านปลายสนามแต่ละด้านเป็น 80 บาทต่อ 1 ฟุต และความยาวด้านปลายเป็น x ฟุต ค่าทำรั้วแต่ละด้านเป็น $80x$ ในทำนองเดียวกัน ค่าทำรั้วด้านขนานกับแม่น้ำเป็น $120y$ บาท เพราะฉะนั้นค่าทำรั้วทั้งสามด้าน

$$80x + 80x + 120y = 36{,}000 \tag{1.6.7}$$

แก้สมการ (1.6.7) หาค่า y ในเทอมของ x จะได้

$$120y = 36{,}000 - 160x$$

$$y = 300 - \frac{4}{3}x \tag{1.6.8}$$

แทนค่า y จากสมการ (1.6.8) ลงในสมการ (1.6.6)

$$A = x\left(300 - \frac{4}{3}x\right)$$

สมการนี้จะอยู่ในฟังก์ชันของ x แทนค่าฟังก์ชันนี้ด้วย f นั่นคือ $f(x)$ เป็นพื้นที่ของสนาม (หน่วยเป็นตารางฟุต) และ

$$f(x) = x\left(300 - \frac{4}{3}x\right)$$

2. เพราะว่าทั้ง x และ y ไม่เป็นค่าลบ เพราะฉะนั้นค่าน้อยที่สุดของ x และ y ที่สามารถเป็นได้ คือ 0 และเมื่อ $y = 0$

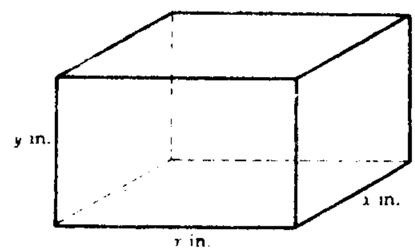
จากสมการ (1.6.7) จะได้ $x = 225$ ดังนั้น 225 จึงเป็นค่าที่มากที่สุดของ x เท่าที่สามารถกำหนดได้ ด้วยเหตุนี้ x จะมีค่าอยู่บนช่วงปิด $[0, 225]$ และช่วงปิดนี้ คือ โดเมนของ f

หมายเหตุ : ในบทที่ 4 จะพิจารณาตัวอย่างที่ 1.6.6 เพิ่มขึ้นอีก โดยจะศึกษาถึงวิธีการหาด้านกว้างและด้านยาวของสนาม ซึ่งจะทำให้ได้พื้นที่มากที่สุด ภายในวงเงินสร้างรั้ว 36,000 บาท

ตัวอย่าง 1.6.7 กล่องปิดใบหนึ่งมีฐานของกล่องเป็นรูปสี่เหลี่ยมจัตุรัสและมีปริมาตรเป็น 2,000 ลูกบาศก์นิ้ว ราคาวัสดุที่ใช้ทำด้านบนและด้านล่างของกล่อง คือ 3 บาทต่อตารางนิ้ว และ 1.50 บาท ต่อตารางนิ้ว สำหรับด้านข้างของกล่อง

1. ถ้า x เป็นความยาวของด้านของสี่เหลี่ยมจัตุรัสที่เป็นฐานมีหน่วยเป็นนิ้ว จงหาราคาวัสดุที่ใช้ในรูปของฟังก์ชันของ x มีหน่วยเป็นบาท

2. จงหาโดเมนของฟังก์ชันผลลัพธ์



รูป 1.6.4

วิธีทำ

ให้ x = ความยาวของด้านของสี่เหลี่ยมที่เป็นฐานของกล่องมีหน่วยเป็นนิ้ว

y = ความลึกของกล่องมีหน่วยเป็นนิ้ว

C = ราคาวัสดุที่ใช้ทำกล่องมีหน่วยเป็นบาท

พื้นที่ด้านบนและด้านล่างของกล่อง $= 2x^2$

และพื้นที่ด้านข้างของกล่อง $= 4xy$

ดังนั้นจะได้

$$C = 3(2x^2) + \frac{3}{2}(4xy) \qquad (1.6.9)$$

เพราะว่าปริมาตรของกล่องคือผลคูณของพื้นที่ของฐานกับความลึกของกล่อง

$$x^2y = 2{,}000 \qquad (1.6.10)$$

แก้สมการ (1.6.10) ให้ y อยู่ในเทอมของ x แล้วแทนค่าลงในสมการ (1.6.9)

$$C = 6x^2 + \frac{12,000}{x}$$

สมการนี้แสดงว่า C เป็นฟังก์ชันของ x ถ้าแทน C ด้วย f(x) นั่นคือ f(x) คือราคาวัสดุ มีหน่วยเป็นบาท

$$f(x) = 6x^2 + \frac{12,000}{x}$$

2. สังเกตว่า x มีค่าเป็นศูนย์ไม่ได้ เพราะว่า x เป็นตัวส่วนของเทอมที่สองทางขวาของสมการ ซึ่งนิยาม f(x) อย่างไรก็ตาม x สามารถเป็นเลขจำนวนบวกใด ๆ นั่นคือ โดเมนของ f คือ $(0, \infty)$

หมายเหตุ : ในบทที่ 4 จะศึกษาวิธีการทำกล่องให้ได้ขนาดที่มีราคาต้นทุนทำกล่องต่ำที่สุด

ตัวอย่าง 1.6.8 ในการวางแผนของร้านขายกาแฟ คาดว่าถ้ามีที่นั่ง 40 ถึง 80 ที่ จะได้กำไร 8 บาท ต่อ 1 ที่นั่ง ต่อวัน อย่างไรก็ตาม ถ้ามีที่นั่งมากกว่า 80 ที่ กำไรต่อที่ต่อวันจะลดลง 4 สตางค์ คูณกับจำนวนของที่นั่งที่มากกว่า 80 ที่นั่งขึ้นไป ถ้าให้ x เป็นจำนวนที่นั่ง ให้บอกจำนวนบาทที่กำไรทั้งหมดในแต่ละวันอยู่ในรูปของฟังก์ชันของ x กำหนดว่ากำไรไม่เป็นลบ

วิธีทำ กำหนดให้

x = จำนวนที่นั่ง

P(x) = จำนวนเงินที่ได้กำไรในแต่ละวัน

$$P(x) = 8x \; ; \; 40 \leq x \leq 80$$

เมื่อ $x > 80$

$$P(x) = x\{8 - 0.04\,(x - 80)\}$$

$$= 11.20x - 0.04x^2$$

ดังนั้นเราจะได้

$$P(x) = \begin{cases} 8x \; ; \; 40 \leq x \leq 80 \\ 11.20x - 0.04x^2 \; ; \; 80 < x \leq 280 \end{cases}$$

ขอบเขตบน (upper bound) $x = 280$ หาได้จากสมการ $11.20x - 0.04x^2 = 0$ และเมื่อ $x > 280$ สมการ $11.20x - 0.04x^2$ เป็นลบ (แต่โจทย์กำหนดให้กำไรไม่เป็นลบ) ดังนั้นค่า $x > 280$ จึงใช้ไม่ได้

จากนิยาม x เป็นจำนวนเต็ม ดังนั้น x จะเป็นจำนวนเต็มใด ๆ บนช่วงปิด [40, 280]

แบบฝึกหัด 1.6

จากแบบฝึกหัดข้อ 1 ถึง 10 ฟังก์ชัน f และ g ถูกนิยามมาให้ ในแต่ละปัญหานิยามฟังก์ชันดังต่อไปนี้ (ก) $f + g$ (ข) $f - g$ (ค) $f \cdot g$ (ง) $\frac{f}{g}$ (จ) $\frac{g}{f}$ (ฉ) fog (ช) gof จงหาโดเมนของฟังก์ชันผลลัพธ์ (resulting function) เหล่านี้

1. $f(x) = x - 5$; $g(x) = x^2 - 1$
2. $f(x) = \sqrt{x}$; $g(x) = x^2 + 1$
3. $f(x) = \frac{x+1}{x-1}$; $g(x) = \frac{1}{x}$
4. $f(x) = \sqrt{x}$; $g(x) = 4 - x^2$
5. $f(x) = \sqrt{x}$; $g(x) = x^2 - 1$
6. $f(x) = |x|$; $g(x) = |x - 3|$
7. $f(x) = x^2 - 4$; $g(x) = 4x - 3$
8. $f(x) = \sqrt{x + 2}$; $g(x) = x^2 + 4$
9. $f(x) = \frac{1}{x-3}$; $g(x) = \frac{x}{x+1}$
10. $f(x) = \sqrt{x}$; $g(x) = \frac{1}{x^2}$
11. ผู้ผลิตกล่องดีบุกต้องการทำกล่องโดยใช้แผ่นดีบุกขนาด 8 x 15 ตารางนิ้ว ตัดพื้นที่สี่เหลี่ยมจัตุรัสที่มุมทั้งสี่ออกเท่า ๆ กัน แล้วพับด้านทั้งสี่ขึ้น

    (ก) ถ้า x เป็นความยาวของด้านของสี่เหลี่ยมจัตุรัสที่ถูกตัดออก มีหน่วยเป็นนิ้ว ให้บอกปริมาตรของกล่องใบนี้ที่อยู่ในรูปฟังก์ชันของ x

    (ข) หาโดเมนของฟังก์ชันผลลัพธ์ (resulting function)
12. ที่ดินรูปสี่เหลี่ยมผืนผ้าถูกล้อมรอบด้วยรั้ว และแบ่งครึ่งตรงกลางด้วยรั้วอีกอันหนึ่ง ถ้าราคาทำรั้วตรงกลางเป็น 2 บาทต่อ 1 ฟุต และค่าทำรั้วล้อมรอบที่ดินรูปสี่เหลี่ยมผืนผ้าเป็น 5 บาทต่อฟุต และราคาทำรั้วทั้งหมดเป็น 960 บาท

    (ก) ถ้า x เป็นความยาวของรั้วที่แบ่ง ให้บอกจำนวนของพื้นที่ที่อยู่ในรูปฟังก์ชันของ x

    (ข) หาโดเมนของฟังก์ชันผลลัพธ์
13. สนามรูปสี่เหลี่ยมผืนผ้ามีพื้นที่ 2,700 ตารางหลา ถูกสร้างรั้วล้อมรอบด้านทั้งสี่ และรั้วที่แบ่งครึ่งพื้นที่ผืนนี้ ราคาค่าทำรั้วตรงกึ่งกลางพื้นที่เป็น 4 บาทต่อ 1 หลา และค่าทำรั้วรอบด้านทั้งสี่เป็น 6 บาทต่อ 1 หลา

    (ก) ถ้า x เป็นความยาวของรั้วที่แบ่งครึ่งพื้นที่ให้บอกจำนวนบาทซึ่งเป็นค่าทำรั้วที่อยู่ในรูปฟังก์ชันของ x

(ข) หาโดเมนของฟังก์ชันผลลัพธ์

14. แท้งค์น้ำเปิดด้านบนรูปสี่เหลี่ยมผืนผ้า มีฐานเป็นสี่เหลี่ยมจัตุรัส และมีปริมาตรเป็น 125 ลูกบาศก์หลา ราคาต่อหนึ่งตารางหลาสำหรับด้านล่างเป็น 8 บาท และสำหรับด้านข้างเป็น 4 บาท

(ก) ถ้า x เป็นความยาวของด้านฐานมีหน่วยเป็นหลา จงบอกราคาของโลหะที่ใช้ทำเป็นบาทที่อยู่ในรูปฟังก์ชันของ x

(ข) หาโดเมนของฟังก์ชันผลลัพธ์

15. ช่างไม้คนหนึ่งสามารถทำตู้วางหนังสือราคาตู้ละ 20 บาท ถ้าช่างไม้ขายตู้วางหนังสือตู้ละ x บาท ประมาณว่าตู้วางหนังสือจะสามารถขายได้ 200 − 2x ตู้ต่อเดือน

(ก) จงบอกกำไรที่ช่างไม้ได้รับใน 1 เดือน ที่อยู่ในรูปฟังก์ชันของ x

(ข) ใช้ผลจากข้อ (ก) หากำไรตลอดเดือน ถ้าราคาขายของตู้วงงหนังสือเป็น 65 บาท

16. บริษัทหนึ่งได้ประดิษฐ์เครื่องอิเลคโทรนิคออกวางตลาดเป็นสินค้าใหม่ ระหว่างปีแรกต้นทุนคงที่ (fixed costs) ของสินค้าใหม่เป็น 140,000 บาท และต้นทุนผลิตสินค้าใหม่แต่ละหน่วยเป็น 25 บาท ซึ่งราคานี้สามารถเปลี่ยนแปลงได้ (variable costs) ในระหว่างปีแรกราคาขายเป็น 65 บาทต่อหน่วย

(ก) ถ้า x คือจำนวนหน่วยที่ขายในปีแรก จงบอกกำไรปีแรกที่อยู่ในรูปฟังก์ชันของ x

(ข) ถ้าประมาณว่า 23,000 หน่วย ถูกขายในระหว่างปีแรก ใช้ผลลัพธ์จากข้อ (ก) หากำไรในปีแรก

(ค) จำนวนหน่วยที่จะขายได้ในปีแรก เพื่อว่าบริษัทจะไม่กำไรและขาดทุน

17. ต้นทุนคงที่ (fixed costs) ประจำเดือนของบริษัทผลิตรองเท้าเล่นสกีแห่งหนึ่งเป็น 4,200 บาท และต้นทุนผลิตรองเท้าเล่นสกีคู่ละ 55 บาท (ราคานี้เปลี่ยนแปลงได้) ราคาขายรองเท้าเล่นสกีคู่ละ 105 บาท

(ก) ถ้า x เป็นจำนวนรองเท้าเล่นสกีที่ขายได้ ในระหว่างเดือน ให้บอกกำไรในระหว่างเดือนเป็นบาทที่อยู่ในรูปฟังก์ชันของ x

(ข) ใช้ผลจากข้อ (ก) หากำไรในเดือนธันวาคม ถ้ารองเท้าเล่นสกีขายได้ 600 คู่ ในเดือนนั้น

(ค) รองเท้าเล่นสกีจะขายไปเท่าใดในระหว่างเดือนเพื่อว่าบริษัทจะไม่ขาดทุนหรือกำไร

18. ผู้ผลิตคนหนึ่งสามารถทำกำไรได้ 20 บาทต่อชิ้น ถ้าเขาผลิตไม่มากกว่า 800 ชิ้นต่อสัปดาห์ และกำไรต่อชิ้นจะลดลง 2 สตางค์ คูณกับสิ่งที่เขาผลิตมากกว่า 800 ชิ้น ถ้าให้ x เป็นจำนวนชิ้นที่เขาผลิตในแต่ละสัปดาห์ จงบอกกำไรของผู้ผลิตตลอดสัปดาห์เป็นบาทที่อยู่ในรูปฟังก์ชันของ x กำหนดว่ากำไรไม่มีค่าเป็นลบ

19. ในการจัดทัศนศึกษาของโรงเรียนแห่งหนึ่ง สามารถจัดอาหารและที่พักให้นักเรียนได้ 250 คน โดยทางโรงเรียนเรียกเก็บเงินคนละ 15 บาท ถ้าจำนวนนักเรียนที่ไปไม่มากกว่า 150 คน อย่างไรก็ตามเงินที่เก็บจากนักเรียนจะลดลงคนละ 5 สตางค์ คูณจำนวนนักเรียนที่ไปมากกว่า 150 คน จนกระทั่งเงินที่เก็บต่อคนเป็น 10 บาท ถ้า x เป็นจำนวนนักเรียนที่ไปเที่ยว จงบอกรายได้เป็นบาทที่อยู่ในรูปฟังก์ชันของ x

1.7 สมการอุปสงค์และอุปทาน Demand and Supply Equations

พิจารณาเหตุการณ์ที่มีผลต่อผู้ผลิต โดยเฉพาะตัวแปรคือราคาสินค้าและปริมาณความต้องการของสินค้า กำหนดให้ p เป็นราคาสินค้า 1 หน่วย มีหน่วยเป็นบาท และ x เป็นจำนวนหน่วยสินค้าที่ต้องการ

จากผลข้างต้นพบว่า จำนวนของสินค้าที่ต้องการในตลาดของผู้ซื้อ จะขึ้นอยู่กับราคาของสินค้า กล่าวคือ ขณะที่สินค้าราคาตก ผู้ซื้อจะมีความต้องการซื้อสินค้ามาก แต่เมื่อราคาสินค้าสูงขึ้น จะเป็นตรงกันข้ามคือ ผู้ซื้อจะมีความต้องการซื้อน้อยลง

สมการซึ่งกำหนดความสัมพันธ์ระหว่างจำนวนสินค้า x ที่ผู้ซื้อต้องการ กับราคาสินค้า p เรียกว่า สมการอุปสงค์ (demand equation) ซึ่งได้มาโดยใช้วิธีการทางสถิติต่อข้อมูลทางเศรษฐศาสตร์ และสามารถเขียนสมการได้ 2 แบบ คือ

$$p = f(x) \tag{1.7.1}$$

หรือ

$$x = g(p) \tag{1.7.2}$$

ฟังก์ชัน f ในสมการ (1.7.1) เรียกว่า "ฟังก์ชันราคา (price function)" และ $f(x)$ บาทเป็นราคา 1 หน่วยสินค้า เมื่อ x หน่วยเป็นจำนวนสินค้าที่ผู้ซื้อต้องการฟังก์ชัน g ในสมการ (1.7.2) เรียกว่า "ฟังก์ชันอุปสงค์ (demand function)" และ $g(p)$ เป็นจำนวนหน่วยของสินค้าซึ่งผู้ซื้อต้องการ ถ้า p เป็นราคาต่อ 1 หน่วยของสินค้า ตามปกติในทางเศรษฐศาสตร์ โดเมนของฟังก์ชันราคา และฟังก์ชันอุปสงค์ จะประกอบด้วยจำนวนที่ไม่เป็นลบ

กราฟของสมการอุปสงค์ เรียกว่า "เส้นโค้งอุปสงค์ (demand curve)" เมื่อเขียนเส้นโค้งอุปสงค์จะใช้แกนดิ่งแทนราคา และแกนนอนแทนจำนวนสินค้าที่ผู้ซื้อต้องการ เพราะว่าสมการอุปสงค์ที่กำหนดให้อาจจะใช้ได้กับค่าเฉพาะบางค่าของ x และ p ดังนั้น มีความจำเป็นที่ต้องจำกัดค่าของ x และ p ในช่วงปิด นั่นคือ $x \in \{0, a\}$ และ $p \in \{0, b\}$

ตัวอย่างเช่น พิจารณาสมการอุปสงค์

$$p^2 + 2x - 16 = 0 \tag{1.7.3}$$

เพราะว่าโดยปกติในทางเศรษฐศาสตร์ตัวแปร x และ p จะไม่เป็นลบ เมื่อแก้สมการ (1.7.3) หาค่า p เราจะตัดค่า p ที่เป็นลบทิ้ง จึงได้

$$p = \sqrt{16 - 2x} \tag{1.7.4}$$

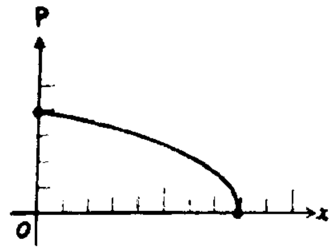
ซึ่งอยู่ในรูปของสมการ (1.7.1) ทั้งนี้ฟังก์ชันราคาสำหรับสมการอุปสงค์ (1.7.3) คือ ฟังก์ชัน f ซึ่ง

$$f(x) = \sqrt{16 - 2x}$$

แก้สมการ (1.7.3) หา x จะได้

$$x = 8 - \tfrac{1}{2}p^2 \qquad (1.7.5$$

ซึ่ง x เป็นฟังก์ชันของ p เหมือนสมการ (1.7.2) และฟังก์ชันอุปสงค์เป็นฟังก์ชันของ p โดยที่ $g(p) = 8 - \frac{1}{2}p^2$ การเขียนเส้นโค้งอุปสงค์แสดงในรูป 1.7.1 กราฟถูกจำกัดในควอดแรนท์ที่ 1 (เพราะไม่ต้องการให้ค่า x และ p เป็นลบ) จากสมการ (1.7.4) พบว่า $p \le 4$ และ $16 - 2x \ge 0$ หรือ $x \le 8$ ดังนั้น $x \in [0, 8]$ และ $p \in [0, 4]$



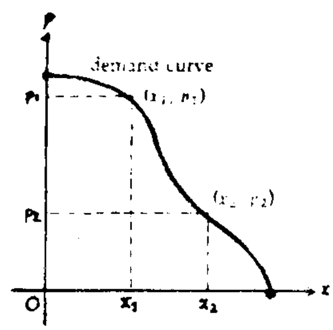
รูป 1.7.1

ในการเพิ่มข้อจำกัดว่า x และ p ไม่เป็นลบภายใต้เหตุการณ์ปกติ จะกำหนดเงื่อนไขว่า ขณะที่ราคาต่อหน่วยสินค้าลดลงความต้องการสินค้าจะเพิ่มขึ้น และขณะที่ราคาต่อหน่วยสินค้าเพิ่มขึ้น ความต้องการซื้อสินค้าจะลดลง นั่นคือ

ถ้า p_1 บาท เป็นราคาต่อหน่วยของสินค้า x_1 หน่วย

และ p_2 บาท เป็นราคาต่อหน่วยของสินค้า x_2 หน่วย

แล้ว $x_2 > x_1$ ก็ต่อเมื่อ $p_2 < p_1$ ดูรูป 1.7.2



รูป 1.7.2

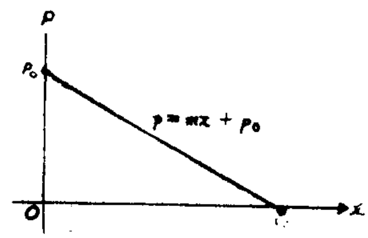
สมการอุปสงค์แบบที่ง่ายที่สุด คือ สมการเชิงเส้นซึ่งสามารถเขียนอยู่ในรูป

$$p = mx + p_0 \qquad (1.7.6)$$

โดยที่ $m < 0$ กราฟของสมการเส้นตรงนี้ส่วนหนึ่งจะอยู่ในควอดแรนท์ที่ 1 ซึ่งมีความชัน m และ p_0 เป็นจุดตัดของเส้นตรงบนแกน p ดูรูป 1.7.3 สังเกตว่า p_0 เป็นจำนวนบาทในราคาต่อหน่วยสูงสุดที่ลูกค้าจะจ่ายตามสมการอุปสงค์ (1.7.6) ถ้าแก้สมการ (1.7.6) เพื่อหาค่า x จะได้สมการในรูป

$$x = kp + x_0$$

โดยที่ $k < 0$ เพราะว่า $x = x_0$ เมื่อ $p = 0$, x_0 คือจำนวนหน่วยของปริมาณอุปสงค์ เมื่อราคาของสินค้าเท่ากับศูนย์ เมื่อ $k < 0$ หมายความว่า ความต้องการซื้อลดลงขณะที่ราคาสินค้าเพิ่มขึ้นจากศูนย์ และสินค้าสูญเสียภาวะอิสระ (free status)



รูป 1.7.3

ตัวอย่าง 1.7.1 บริษัทท่องเที่ยวแห่งหนึ่งรู้ว่าเมื่อราคาของการท่องเที่ยวต่อคนเป็น 60 บาท จำนวนตั๋วที่ขายโดยเฉลี่ยต่อการท่องเที่ยวครั้งหนึ่งตก 300 ใบ และเมื่อราคาเพิ่มขึ้น 100 บาท จำนวนตั๋วที่ขายโดยเฉลี่ยเป็น 180 ใบ ถ้าสมการอุปสงค์เป็นแบบเชิงเส้น จงหาสมการพร้อมทั้งวาดรูปของเส้นอุปสงค์

วิธีทำ

ให้ x = จำนวนตั๋วที่มีผู้ต้องการซื้อ และ

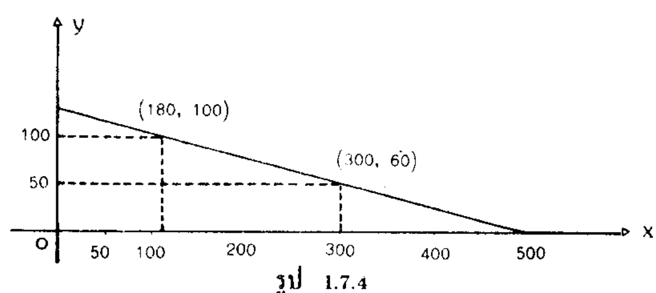
p = จำนวนบาทต่อตั๋ว 1 ใบ

เพราะว่า $x = 300$ เมื่อ $p = 60$ และ $x = 180$ เมื่อ $p = 100$ จุด (300, 60) และ (180, 100) จะอยู่บนเส้นตรงที่ต้องการหา ใช้จุด 2 จุดบนเส้นตรงนี้ หาค่าความชัน จะได้

$$p - 60 = \frac{100 - 60}{180 - 300}(x - 300)$$

$$x + 3p = 480$$

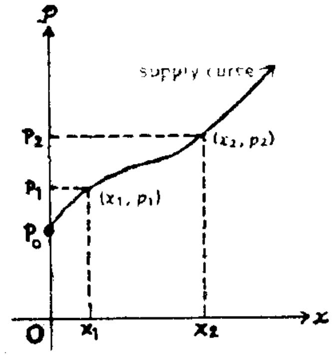
เพราะว่า $x \geq 0$ และ $p \geq 0$ เส้นโค้งอุปสงค์จะถูกจำกัดให้อยู่ในควอดแรนท์ที่ 1 เท่านั้น การเขียนเส้นโค้งอุปสงค์แสดงตามรูป 1.7.4



รูป 1.7.4

กำหนดว่า x เป็นจำนวนหน่วยที่แน่นอนของสินค้าที่ผลิตโดยผู้ผลิต และ p เป็นราคา 1

หน่วยสินค้า กำหนดว่ามีตัวแปรเพียง 2 ตัวเท่านั้น สมการอุปทาน (supply equation) คือสมการที่เกี่ยวข้องกับตัวแปรทั้งสองนี้ ตามปกติในทางเศรษฐศาสตร์ x และ p จะต้องไม่เป็นลบ และ $x_2 > x_1$ ก็ต่อเมื่อ $p_2 > p_1$ นั่นคือขณะราคาสินค้าที่ขายโดยผู้ผลิตมีราคาสูงขึ้น ผู้ผลิตจะเพิ่มการผลิตเพื่อรับผลประโยชน์จากราคาที่สูงขึ้น โดยวิธีเดียวกัน มีความโน้มเอียงที่จะลดจำนวนผลผลิต เมื่อราคาขายลดลง กราฟของสมการอุปทานเรียกว่า เส้นโค้งอุปทาน (supply curve) ดูตามรูป 1.7.5 ซึ่งแสดงการเขียนเส้นโค้งอุปทานในสภาพปกติ เมื่อ $x = 0$, $p = p_0$ เป็นจำนวนบาทในราคาต่อหน่วย ที่จะไม่มีสินค้าวางเมื่อราคาต่อหน่วยมากขึ้น ผู้ผลิตสินค้าจะผลิตสินค้าเข้าสู่ตลาดมากขึ้น

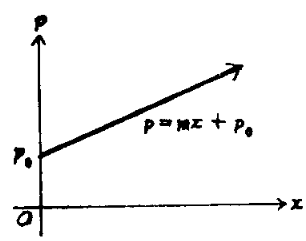


รูป 1.7.5

สมการอุปทานแบบที่ง่ายที่สุด คือสมการเชิงเส้น และสามารถเขียนอยู่ในรูป

$$p = mx + p_0$$

เมื่อ $m > 0$ ตามรูป 1.7.6 แสดงการเขียนกราฟของสมการซึ่งกราฟนี้ คือส่วนหนึ่งที่อยู่ในควอดแรนท์ที่ 1 ของเส้นตรงตัดแกน p ที่จุด p_0 และมีความชันเป็น m



รูป 1.7.6

ตัวอย่าง 1.7.2 ถ้าจะให้ขายโต๊ะแบบพิเศษชนิดหนึ่งในราคาไม่มากกว่า 2500 บาท จะทำให้ไม่มีโต๊ะวางขายในตลาด แต่ถ้าราคาโต๊ะเป็น 3500 บาท จะมีโต๊ะ 2000 ตัววางขายในตลาด จงหาสมการอุปทาน ถ้าเป็นสมการเชิงเส้น พร้อมทั้งเขียนเส้นโค้งอุปทาน

วิธีทำ กำหนดให้

x เป็นจำนวนโต๊ะที่ผลิตขาย และ

p เป็นราคาขายโต๊ะ 1 ตัว มีหน่วยเป็นบาท

เมื่อ p = 2500, x = 0 และ เมื่อ p = 3500, x = 2000 ดังนั้น จุด (0, 2500) และ (2000, 3500) อยู่บนเส้นโค้งอุปทาน ใช้จุดทั้ง 2 นี้หาความชัน เพื่อสร้างสมการเส้นตรง

สูตรสมการเส้นตรง

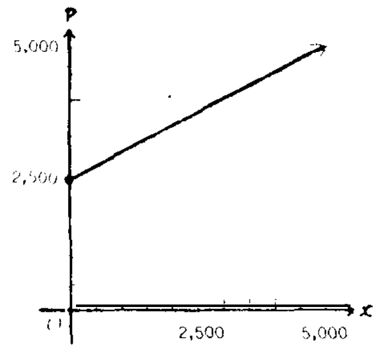
$$y - y_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x - x_1)$$

แทนค่า

$$p - 2500 = \frac{3500 - 2500}{2000 - 0}(x - 0)$$

$$p = \frac{1}{2}x + 2500$$

เขียนรูปของเส้นโค้งอุปทาน แสดงตามรูป 1.7.7

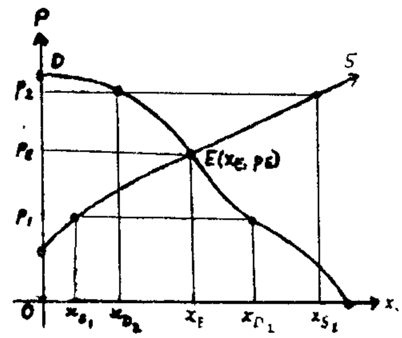


รูป 1.7.7

ในที่นี้จะเรียกบริษัททั้งหลายที่ผลิตสินค้าชนิดเดียวกันว่าอุตสาหกรรม (Industy) ตลาดสำหรับสินค้าเฉพาะประกอบด้วยอุตสาหกรรมและผู้ซื้อสินค้า (ซึ่งอาจประกอบด้วยฝ่ายธุรกิจ รัฐบาล หรือผู้ซื้อรายย่อย) สมการอุปทานของตลาดหาได้จากสมการอุปทานของทุก ๆ บริษัทในอุตสาหกรรม และสมการอุปสงค์ของตลาดหาได้จากสมการอุปสงค์ของผู้ซื้อทุกฝ่าย ต่อไปนี้จะแสดงวิธีการหาราคาสมดุลย์ (Equilibrium price) และ จำนวนสมดุลย์ (Equilibrium amount) ของสินค้าในตลาด

สมดุลย์ตลาด (Market equilibrium) เกิดขึ้นเมื่อปริมาณของสินค้าที่ผู้ซื้อต้องการเท่ากันกับปริมาณของสินค้าที่ผู้ผลิตต้องการขายในราคาเดียวกัน นั่นก็คือ เมื่อราคาของสินค้าที่ผู้ซื้อต้องการซื้อเท่ากับราคาของสินค้าที่ผู้ผลิตต้องการขาย เมื่อสมดุลย์ตลาดเกิดขึ้นเรียกปริมาณของสินค้าที่ผลิตว่า จำนวนสมดุลย์ (equilibrium amount) และราคาของสินค้าว่า ราคาสมดุลย์ (equilibrium price) จำนวนสมดุลย์และราคาสมดุลย์หาได้ โดยการแก้สมการอุปสงค์ของตลาด

และสมการอุปทานของตลาดตามรูป 1.7.8 แสดงให้เห็นกราฟอุปสงค์ของตลาดและอุปทานของตลาด คือ D และ S ตามลำดับ จุด E คือ จุดสมดุลย์ (point of equilibrium) และพิกัด (coordinate) ของจุดนี้ คือ x_E และ p_E โดยที่ x_E หน่วย คือจำนวนสมดุลย์ และ p_E บาท เป็นราคาสมดุลย์ ตามรูป 1.7.8 กำหนดราคาของสินค้าเป็น p_1 บาท ดังนั้น โรงงานจะต้องวางแผนขายสินค้า x_{S_1} หน่วย และผู้บริโภคจะวางแผนซื้อ x_{D_1} หน่วย ด้วยเหตุนี้จะเกิดการขาดแคลนสินค้า $(x_{D_1} - x_{S_1})$ หน่วย เป็นผลให้ราคาสินค้าสูงขึ้นเป็น p_E บาท และปริมาณการผลิตจะเพิ่มเป็น x_E หน่วย อย่างไรก็ตาม ถ้าราคาเป็น p_2 บาท ดังนั้นผู้ซื้อจะวางแผนซื้อเพียง x_{D_2} หน่วย และโรงงานจะวางแผนขาย x_{S_2} หน่วย ผลที่ตามมา ทางโรงงานจะมีสินค้าเหลือ $(x_{S_2} - x_{d_2})$ หน่วย และบังคับให้ราคาสินค้าลดไปเป็น p_E บาท และปริมาณสินค้าที่ผลิตลดลงเป็น x_E หน่วย



รูป 1.7.8

ตัวอย่าง 1.7.3 สมการอุปสงค์ของตลาดและสมการอุปทานของตลาดคือ

$$x^2 + p^2 + 2x - 24 = 0 \tag{1.7.7}$$

และ

$$2x - p + 2 = 0 \tag{1.7.8}$$

ตามลำดับ โดยที่ p เป็นราคาสินค้ามีหน่วยเป็นบาท และ 100x เป็นปริมาณสินค้า จงหาจำนวนสมดุลย์และราคาสมดุลย์ พร้อมทั้งเขียนกราฟ อุปสงค์และอุปทานบนแกนชุดเดียวกัน และแสดงจุดสมดุลย์

วิธีทำ จุดสมดุลย์หาได้ โดยการแก้สมการทั้งสองที่โจทย์กำหนดมาให้ จากสมการ (1.7.8) หาค่า $p = 2x + 2$ แล้วแทนค่าลงใน (1.7.7) จะได้

$$\begin{aligned} x^2 + (2x+2)^2 + 2x - 24 &= 0 \\ x^2 + 4x^2 + 8x + 4 + 2x - 24 &= 0 \\ 5x^2 + 10x - 20 &= 0 \\ x^2 + 2x - 4 &= 0 \end{aligned}$$

ใช้สูตรหาค่า x จากสมการกำลังสอง (quadratic formula)

$$x = \frac{-2 \pm \sqrt{4 + 16}}{2}$$

$$= \frac{-2 \pm 2\sqrt{5}}{2}$$

$$x = -1 \pm \sqrt{5}$$

เราจะใช้สัญญลักษณ์ $\approx$ มีความหมายเป็น "เท่ากับ (โดยประมาณ)" เช่น $\sqrt{5} \approx 2.236$ ดังนั้น

$$x = -1 \pm 2.236$$

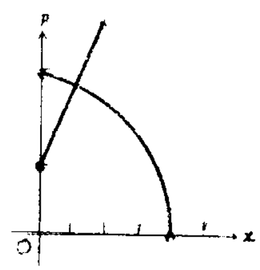
เพราะว่า $x \geq 0$ (ค่า x เป็นลบไม่ได้) เราจึงได้ $x \approx 1.24$ แทนค่า x ใน (1.7.8) จะได้ $p \approx 4.48$ เพราะฉะนั้นราคาสมดุลย์คือ 4.48 บาท และจำนวนสมดุลย์เป็น 124 หน่วย (เพราะว่าโจทย์กำหนดให้จำนวนสินค้า = 100x หน่วย) เขียนสมการแรกอยู่ในรูป

$$(x + 1)^2 + p^2 = 25 = (5)^2$$

พบว่ากราฟ ของสมการนี้เป็นรูปวงกลมซึ่งมีจุดศูนย์กลางอยู่ที่จุด (-1, 0) และรัศมียาว 5 หน่วย เพราะว่า $x \geq 0$ และ $p \geq 0$ เส้นโค้งอุปสงค์จะเป็นส่วนหนึ่งของวงกลมซึ่งอยู่ในควอทแรนท์ที่ 1 แก้สมการอุปทานหา p จะได้

$$p = 2x + 2$$

ดังนั้นเส้นโค้งอุปทานคือส่วนหนึ่งของเส้นตรงที่อยู่ในควอดแรนท์ที่ 1 มีความชันเป็น 2 และตัดแกน p ที่จุด (0, 2) เขียนรูปที่ต้องการ



รูป 1.7.9

ข้อควรสังเกต ถ้าเส้นโค้งอุปสงค์และเส้นโค้งอุปทานไม่ตัดกันในควอดแรนท์ที่ 1 จะกล่าวได้ว่าสมดุลย์ไม่มีความหมาย ตัวอย่างเช่น ถ้าส่วนโค้งตัดกันในควอดแรนท์ที่ 2 เราจะอธิบายได้ว่าจำนวนสมดุลย์เป็นลบ และการที่จะพูดว่าปริมาณผลผลิตเป็นลบนั้นย่อมไม่มีความหมาย

แบบฝึกหัดที่ 1.7

จากแบบฝึกหัดข้อที่ 1 ถึง 10 กำหนดให้เป็นสมการเส้นตรง ให้เขียนส่วนหนึ่งของเส้นตรงในควอดแรนท์ที่ 1 และหาว่าส่วนของเส้นตรงนี้เป็นเส้นโค้งอุปสงค์ (demand curve) หรือเส้นโค้งอุปทาน (supply curve) หรือไม่เป็นทั้ง 2 อย่าง

1. $2x - 3p + 6 = 0$
2. $4x + 5p - 10 = 0$
3. $x + 4p = 7$
4. $3x - 4p + 24 = 0$
5. $3x + 5p + 12 = 0$
6. $3p = 2$
5. $4p - 5 = 0$
8. $4x - 3p = 0$
9. $5p - 6x = 0$
10. $2x + 6p + 3 = 0$

จากแบบฝึกหัดข้อ 11 ถึง 14 กำหนดสมการอุปสงค์ของสินค้าเฉพาะอย่างหนึ่งมาให้ (ก) เขียนกราฟของเส้นโค้งอุปสงค์ (ข) หาราคาสูงสุดที่ผู้ซื้อสามารถซื้อได้ และ (ค) หาความต้องการซื้อสูงสุดถ้าสินค้ามีเหลือเฟือ

11. $3x + 2p - 15 = 0$
12. $x^2 + p^2 = 36$
13. $p^2 + 4p + 2x - 10 = 0$
14. $x^2 + 2x + 3p - 23 = 0$

จากแบบฝึกหัดข้อ 15 ถึง 18 กำหนดสมการอุปทานสำหรับสินค้าเฉพาะอย่างหนึ่งมาให้ (ก) เขียนกราฟของเส้นโค้งอุปทาน (ข) หาราคาต่ำสุดที่สินค้าสามารถจะผลิตได้

15. $x^2 - 4p + 12 = 0$
16. $2x - 6p + 9 = 0$
17. $p^2 + 8p - 6x - 20 = 0$
18. $2x^2 + 12x - 3p + 24 = 0$

19. บริษัทหนึ่งขายสินค้าได้ 20,000 หน่วย เมื่อขายหน่วยละ 14 บาท และบริษัทพบว่าเขาสามารถจะขายได้มากขึ้นอีก 2,000 หน่วย เมื่อลดราคาขายลงหน่วยละ 2 บาท จงหาสมการอุปสงค์ (กำหนดให้เป็นเส้นตรง) พร้อมทั้งเขียนรูป

20. เมื่อราคาขายเป็น 40 บาท หลอดไฟ 10,000 หลอด สามารถขายได้ในตลาด แต่เมื่อเพิ่มขึ้นอีกหน่วยละ 5 บาท หลอดไฟสามารถขายได้ 8,000 หลอด ถ้าสมการอุปทานเป็นเส้นตรง จงหาสมการอุปทานพร้อมทั้งเขียนกราฟ

จากแบบฝึกหัดข้อ 21 ถึง 24 กำหนดความต้องการของตลาด (market's demand) และสมการอุปทานมาให้ (ก) ให้หาจำนวนสมดุลย์ (equilibrium amount) และราคาสมดุลย์ (equilibrium price) และ (ข) เขียนเส้นโค้งของอุปสงค์และอุปทานบนแกนชุดเดียวกัน พร้อมทั้งแสดงจุดสมดุลย์ (point of equilibrium)

21. $x + 2p - 15 = 0, \quad x - 3p + 3 = 0$

22. $3x + p - 21 = 0, \quad 3x - 4p + 9 = 0$

23. $3x^2 + p - 10 = 0, \quad x^2 + 2x - p + 4 = 0$

24. $p^2 + p + x - 12 = 0, \quad 2p^2 - 2p - x - 4 = 0$