สรุปบทที่ 4
การประยุกต์ของอนุพันธ์

4.1 สรุปเรื่องค่าสูงสุดและต่ำสุดของฟังก์ชัน
(Maximum and minimum values of a function)

นิยาม 4.1.1 ฟังก์ชัน f มีค่าสูงสุดสัมพัทธ์ ณ ที่ $x = c$ ถ้าในช่วงเปิดมีค่า c ที่ทำให้ $f(c) \geq f(x)$ สำหรับทุก ๆ ค่า x ในช่วงเปิดนี้

นิยาม 4.1.2 ฟังก์ชัน f มีค่าต่ำสุดสัมพัทธ์ ณ ที่ $x = c$ ถ้าในช่วงเปิดมีค่า c ซึ่งทำให้ $f(c) \leq f(x)$ สำหรับทุก ๆ ค่า x ในช่วงเปิดนี้

ถ้าฟังก์ชัน f มีค่าสูงสุดหรือค่าต่ำสุดสัมพัทธ์ที่ c แล้วจะเรียกว่า f มีค่าปลายสุดสัมพัทธ์ที่ c

ทฤษฎีบท 4.1.1 ถ้ากำหนดค่า f(x) ได้ สำหรับทุก ๆ ค่า x ในช่วงเปิด (a, b) และถ้า f มีค่าปลายสุดสัมพัทธ์ที่ $x = -c$ ซึ่ง $a < c < b$ แล้ว $f'(c) = 0$

นิยาม 4.1.3 ถ้า c เป็นจำนวนในโดเมนของฟังก์ชัน f และถ้า $f'(c) = 0$ หรือ $f'(c)$ หาค่าไม่ได้จะเรียก c ว่าเป็นค่าวิกฤตของ f

นิยาม 4.1.4 ฟังก์ชัน f มีค่าสูงสุดสัมบูรณ์บนช่วงหนึ่งช่วงใดถ้ามีจำนวน c ที่อยู่ในช่วงนั้นซึ่ง $f(c) \geq f(x)$ สำหรับทุก ๆ x ในช่วงนั้น ในกรณีเช่นนี้ f(c) เป็นค่าสูงสุดสัมบูรณ์ของ f บนช่วงนั้น

นิยาม 4.1.5 ฟังก์ชัน f มีค่าต่ำสุดสัมบูรณ์บนช่วงหนึ่งช่วงใดถ้ามีจำนวน c ที่อยู่ในช่วงนั้นซึ่ง $f(c) \leq f(x)$ สำหรับทุก ๆ x ในช่วงนั้น ในกรณีเช่นนี้ f(c) เป็นค่าต่ำสุดสัมบูรณ์ของ f บนช่วงนั้น

นิยาม 4.1.6 f(c) เป็นค่าสูงสุดสัมบูรณ์ของฟังก์ชัน f ถ้า c อยู่ในโดเมนของ f และถ้า $f(c) \geq f(x)$ สำหรับทุกๆ ค่า x ในโดเมนของ f

นิยาม 4.1.7 f(c) เป็นค่าต่ำสุดสัมบูรณ์ของฟังก์ชัน f ถ้า c อยู่ในโดเมนของ f และ $f'(c) \leqslant f(x)$ สำหรับทุก ๆ ค่า x ในโดเมนของ f

ทฤษฎีบท 4.1.2 ถ้าฟังก์ชัน f เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องบนช่วงปิด [a, b] จะมีค่าสูงสุดสัมบูรณ์และค่าต่ำสุดสัมบูรณ์บนช่วงปิด [a, b]

การหาค่าสูงสุดสัมบูรณ์ และค่าต่ำสุดสัมบูรณ์มีขั้นตอนดังต่อไปนี้

1. หาค่าของฟังก์ชันที่จุดวิกฤตของ f บนช่วงปิด [a, b]
2. หาค่า f(a) และ f(b)
3. ค่ามากที่สุดจากข้อที่ 1 และข้อที่ 2 เป็นค่าสูงสุดสัมบูรณ์
   ค่าน้อยที่สุดจากข้อที่ 1 และข้อที่ 2 เป็นค่าต่ำสุดสัมบูรณ์

แบบฝึกหัด 4.1

1. จงหาจำนวนวิกฤตของฟังก์ชันที่กำหนดให้

$$f(x) = x^3 + 7x^2 - 5x$$

วิธีทำ หาอนุพันธ์ฟังก์ชัน f เทียบกับ x

$$f'(x) = 3x^2 + 14x - 5 \qquad (1)$$

หาค่า x ที่จะทำให้ $f'(x) = 0$ โดย

จากสมการ (1) ให้เท่ากับ 0 แล้วแก้สมการหาค่า x

$$3x^2 + 14x - 5 = 0$$

$$(3x - 1)(x + 5) = 0$$

$$\therefore \quad x = \frac{1}{3} \text{ หรือ } -5$$

จาก (1) เพราะว่า $f'(\frac{1}{3}) = 0$ และ $f'(-5) = 0$

เพราะฉะนั้น $\frac{1}{3}$ และ -5 เป็นค่าวิกฤตของ $f(x)$ **ตอบ**

2. จงหาจำนวนวิกฤตของฟังก์ชันที่กำหนดให้

$$f(x) = x^4 + 4x^3 - 2x^2 - 12x$$

วิธีทำ หาอนุพันธ์ฟังก์ชัน f เทียบกับ x

$$f'(x) = 4x^3 + 12x^2 - 4x - 12 \qquad (1)$$

หาค่า x ที่จะทำให้ $f'(x) = 0$ โดยให้

$$f'(x) = 0$$

$$4x^3 + 12x^2 - 4x - 12 = 0$$

$$(x - 1)(4x^2 + 16x + 12) = 0$$

$$(x - 1)(4x + 12)(x + 1) = 0$$

$$\therefore \quad x = 1, -3, -1$$

จาก (1) เพราะว่า $f'(1) = 0,\ f'(-1) = 0,\ f'(-3) = 0$

เพราะฉะนั้น 1, −1, −3 เป็นค่าวิกฤตของ f(x) **ตอบ**

3. จงหาจำนวนวิกฤตของฟังก์ชันที่กำหนดให้

$$f(x) = x^{6/5} - 12x^{1/5}$$

วิธีทำ **หาอนุพันธ์ฟังก์ชัน** f เทียบกับ x

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{6x^{1/5}}{5} - 12.\frac{1}{5}x^{-4/5} \\ &= \frac{6x^{1/5}}{5} - \frac{12x^{-4/5}}{5} \qquad (1) \end{aligned}$$

หาค่า x ที่ทำให้ f'(x) = 0 โดยให้

$$\begin{aligned} f'(x) &= 0 \\ \frac{6x^{1/5}}{5} - \frac{12x^{-4/5}}{5} &= 0 \\ \frac{6x^{1/5}}{5} &= \frac{12x^{-4/5}}{5} \\ x^{1/5}.\ x^{4/5} &= \frac{12}{5} \cdot \frac{5}{6} \\ x &= 2 \end{aligned}$$

จาก (1) เพราะว่า f'(2) = 0 และ f'(0) หาค่าไม่ได้

เพราะฉะนั้น 2, 0 เป็นค่าวิกฤตของ f(x) **ตอบ**

4. จงหาจำนวนวิกฤตของฟังก์ชันที่กำหนดให้

$$f(x) = (x^2 - 4)^{2/3}$$

วิธีทำ หาอนุพันธ์ฟังก์ชัน f เทียบกับ x

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{2}{3}(x^2 - 4)^{-1/3} \quad 2x \\ &= \frac{4x}{3(x^2 - 4)^{-1/2}} \qquad (1) \end{aligned}$$

หาค่า x ที่ทำให้ $f'(x) = 0$ โดยให้

$$f'(x) = 0$$

$$\frac{4x}{3(x^2 - 4)^{1/3}} = 0$$

$$4x = 0$$

$$x = 0 \qquad (2)$$

เพราะว่า $f'(x) = \dfrac{4x}{3(x^2 - 4)^{1/3}}$ หาค่าไม่ได้ ถ้า

$$3(x^2 - 4)^{1/3} = 0$$

$$(x^2 - 4)^{1/3} = 0$$

$$(x^2 - 4) = 0$$ ยกกำลังสามทั้งสองข้าง

$$x^2 = 4$$

$$x = 2, -2. \qquad (3)$$

จากสมการ (2) และ (3) จะได้ว่า

$f'(0) = 0$, $f'(2)$ และ $f'(-2)$ หาค่าไม่ได้

เพราะฉะนั้น 0, 2, −2 เป็นค่าวิกฤตของ $f(x)$ **ตอบ**

5. จงหาจำนวนวิกฤตของฟังก์ชันที่กำหนดให้

$$f(x) = \frac{x}{x^2 - 9}$$

วิธีทำ หาอนุพันธ์ฟังก์ชัน f เทียบกับ x

$$f'(x) = \frac{(x^2 - 9) - x(2x)}{(x^2 - 9)^2}$$ อนุพันธ์ของผลหาร

$$= \frac{(x^2 - 9 - 2x^2)}{(x^2 - 9)^2}$$

$$= \frac{-x^2 - 9}{(x^2 - 9)^2} \qquad (1)$$

หาค่า x ที่ทำให้ $f'(x) = 0$ โดยให้

$$f'(x) = 0$$

$$\frac{-x^2 - 9}{(x^2 - 9)^2} = 0$$

$$-x^2 - 9 = 0$$

$$-x^2 = 9$$

$$x^2 = -9$$

$$x = \pm\sqrt{-9}$$ เป็นค่าจินตภาพ

นั้นคือไม่มีค่า x ใด ๆ ที่จะทำให้ $f'(x) = 0$

และ $f'(x)$ หาค่าไม่ได้ถ้า $x = 3$ และ -3 แต่ 3 และ -3 ไม่เป็น โดเมนต์ของฟังก์ชัน f ดังนั้น 3, -3 ไม่เป็นค่าวิกฤตของ $f(x)$

เพราะฉะนั้น $f(x)$ จะไม่มีค่าวิกฤต **ตอบ**

6. จงหาค่าปลายสุดสัมบูรณ์ ของฟังก์ชันบนช่วงที่กำหนดให้ และหาค่าของ x ที่ทำให้ได้ค่าปลายสุดสัมบูรณ์ พร้อมทั้งเขียนกราฟของฟังก์ชันด้วย ถ้า

$$f(x) = 4 - 3x \; ; \quad (-1, 2]$$

วิธีทำ เพราะว่าฟังก์ชัน f ต่อเนื่องบนช่วง $(-1, 2]$ โดยทฤษฎีค่าปลายสุด

ขั้นแรกหา $f'(x)$

$$f'(x) = -3$$

ซึ่งไม่มีค่า x ใด ๆ ที่จะทำให้ $f'(x) = 0$ เพราะ $f'(x) = -3$ เสมอ สำหรับค่า x ใด ๆ ดังนั้นจึงไม่มีค่าวิกฤต

ขั้นสอง พิจารณาค่าของฟังก์ชัน f ณ.จุดปลายของช่วง $(-1, 2)$

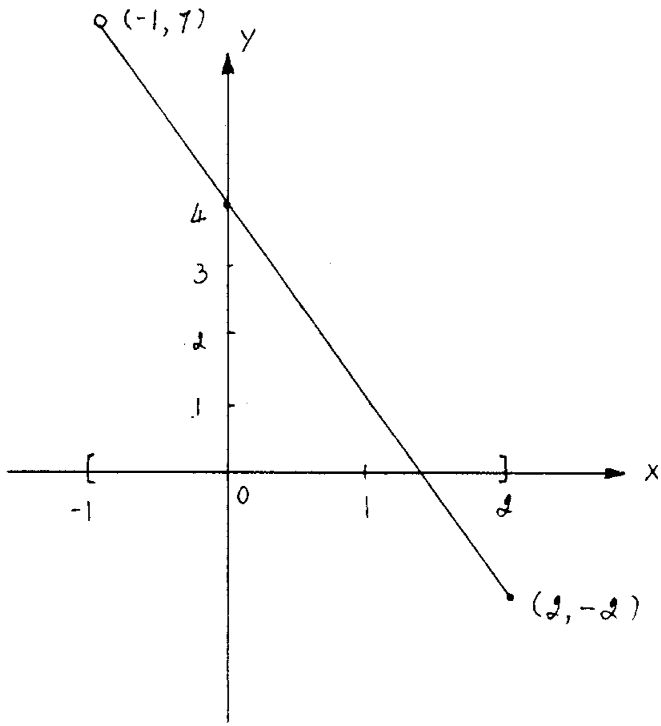
เพราะว่า $f(2) = 4 - 3(2)$

$$= -2 \qquad (1)$$

และ $\lim_{x \to -1^+} f(x) = \lim_{x \to -1^+} (4 - 3x) = 7$

ซึ่ง f(x) มีค่าน้อยกว่า 7 เสมอสำหรับ $x \in (-1, 2]$

จากสมการ (1) f มีค่าต่ำสุดสัมบูรณ์เป็น −2 ณ.ที่จุด x = 2 และค่าสูงสุดสัมบูรณ์ไม่มี และสามารถเขียนกราฟดังรูป **ตอบ**



7. จงหาค่าปลายสุดสัมบูรณ์ และหาค่าของ x ที่ทำให้ได้ค่าปลายสุดสัมบูรณ์ พร้อมทั้งเขียนกราฟของฟังก์ชัน f(x) ซึ่ง

$$f(x) = \frac{1}{x} \quad ; \quad [-2, 3]$$

วิธีทำ เพราะว่า

$$\lim_{x \to 0^-} f(x) = \lim_{x \to 0^-} \frac{1}{x} = -\infty$$

และ $$\lim_{x \to 0^+} f(x) = \lim_{x \to 0^+} \frac{1}{x} = \infty$$

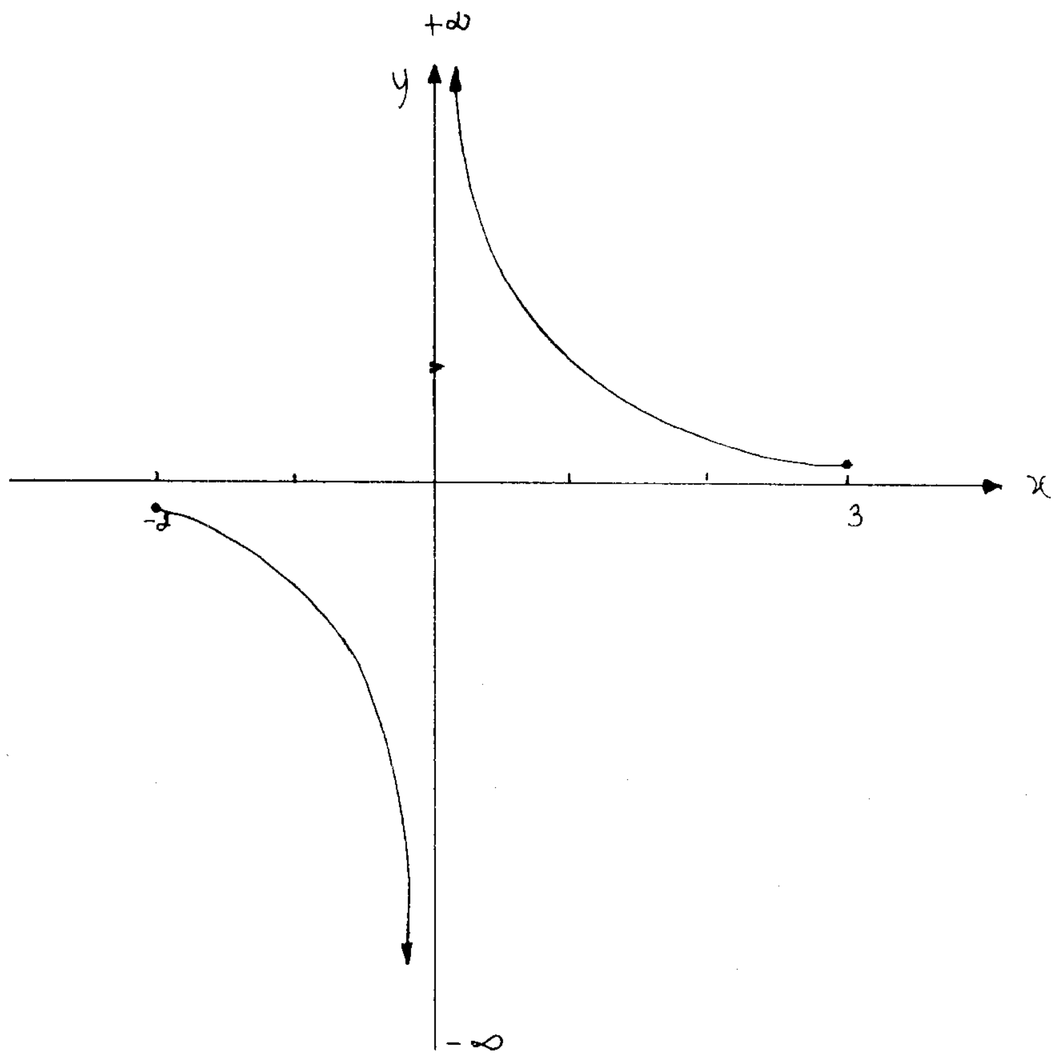
เพราะฉะนั้น $$\lim_{x \to 0^-} f(x) \neq \lim_{x \to 0^+} (f(x)$$

แสดงว่า ฟังก์ชัน f ไม่ต่อเนื่องบนช่วง [-2, 3]

จากทฤษฎีบท ค่าปลายสุด ได้ว่า f จะไม่มีค่าสูงสุดสัมบูรณ์ และไม่มีค่าต่ำสุดสัมบูรณ์

ตอบ

และเขียนกราฟได้ดังรูป



8. จงหาค่าปลายสุดสัมบูรณ์ ของฟังก์ชันบนช่วงที่กำหนดให้ และหาค่าของ x ที่ทำให้ ได้ค่าปลายสุดสัมบูรณ์ พร้อมทั้งเขียนกราฟของฟังก์ชันด้วย ถ้า

$$f(x) = (3 + x)^{\frac{1}{2}} \quad ; \quad [-3, +\infty]$$

วิธีทำ เพราะว่า f(x) ต่อเนื่องบนช่วง $[-3, +\infty]$

จากทฤษฎี ค่าปลายสุดสัมบูรณ์

ขั้นหนึ่ง หาค่าวิกฤต

$$f'(x) = \frac{1}{2}(3 + x)^{-\frac{1}{2}}$$

$$= \frac{1}{2(3 + x)^{\frac{1}{2}}}$$

เพราะว่า $f'(-3)$ หาค่าไม่ได้ ฉะนั้น -3 เป็นค่าวิกฤต และ $f(-3) = 0$ (1)

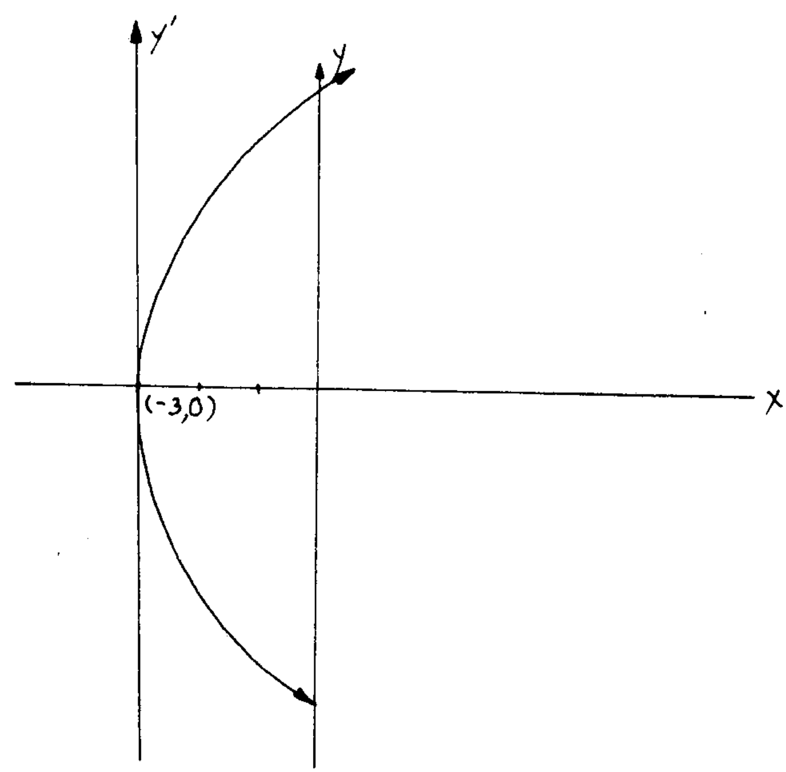
ขั้นสอง พิจารณาค่าของ f(x) ณ.จุดปลายของช่วง

เพราะว่า $f(-3) = 0$ และ $f(\infty)$ มีค่ามาก ๆ (2)

จาก (1) และ (2)

f(x) มีค่าต่ำสุดสัมบูรณ์ เป็น 0 ณ จุด $x = -3$ และค่าสูงสุดสัมบูรณ์ไม่มี **ตอบ**

และสามารถเขียนกราฟดังรูป



9. จงหาค่าปลายสุดสัมบูรณ์ ของฟังก์ชันบนช่วงที่กำหนดให้ และหาค่าของ x ที่ทำให้ได้ค่าปลายสุดสัมบูรณ์ พร้อมทั้งเขียนกราฟของฟังก์ชันด้วย ถ้า

$$f(x) = \frac{4}{(x-3)^2} \quad ; \quad [2, 5]$$

วิธีทำ ขั้นที่หนึ่ง หาค่าวิกฤต

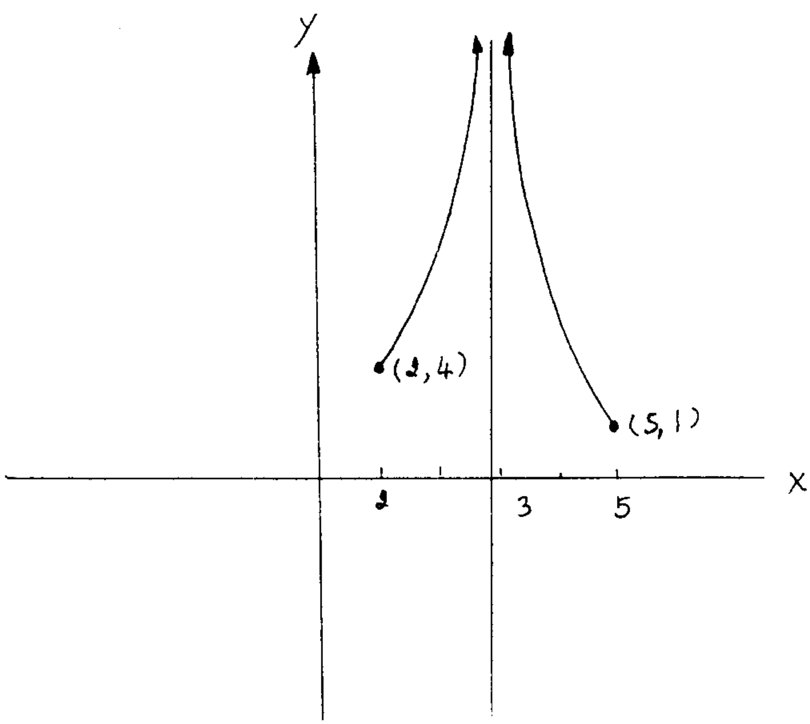
$$f'(x) = \frac{-8}{(x-3)}$$

เพราะว่า f(3) หาว่าไม่ได้ ฉะนั้น 3 เป็นค่าวิกฤต และ f(3) มีค่ามาก ๆ และ ไม่มีค่า x ใด ๆ ที่จะทำให้ f'(x) = 0 (1)

ขั้นที่สอง พิจารณาค่าของ f(x) ณ.จุดปลายของช่วง [2, 5] เพราะว่า f(2) = 4 และ f(5) = 1 (2)

จาก (1) และ (2) ค่าน้อยที่สุดคือ f(5) = 1 เมื่อ x = 5 ซึ่งเป็นค่าของต่ำสุดสัมบูรณ์ ส่วนค่าที่มากที่สุดหาค่าไม่ได้ ฉะนั้นไม่มีค่าสูงสุดสัมบูรณ์ **ตอบ**

และสามารถเขียนกราฟดังรูป



10. จงหาค่าปลายสุดสัมบูรณ์ ของฟังก์ชันบนช่วงที่กำหนดให้ และหาค่าของ x ที่ทำให้ได้ค่าปลายสุดสัมบูรณ์ พร้อมทั้งเขียนกราฟของฟังก์ชันด้วยถ้า

$$f(x) = \frac{3x}{9 - x^2} \quad ; \quad (-3, 2)$$

วิธีทำ ขั้นที่หนึ่ง หาค่าวิกฤต เพราะว่า f(x) ต่อเนื่องบนช่วง $(-3, 2)$

และ
$$f(x) = \frac{3(9 - x^2) - 3x(-2x)}{(9 - x^2)^2}$$

$$= \frac{27 - 3x^2 + 6x^2}{(9 - x^2)^2}$$

$$= \frac{3x^2 + 27}{(9 - x^2)^2}$$

เพราะว่า $f'(3)$ หาค่าไม่ได้ เพราะฉะนั้น 3 เป็นค่าวิกฤต แต่ $3 \notin (-3, 2)$ ดังนั้น $f(3)$ หาค่าไม่ได้ (1)

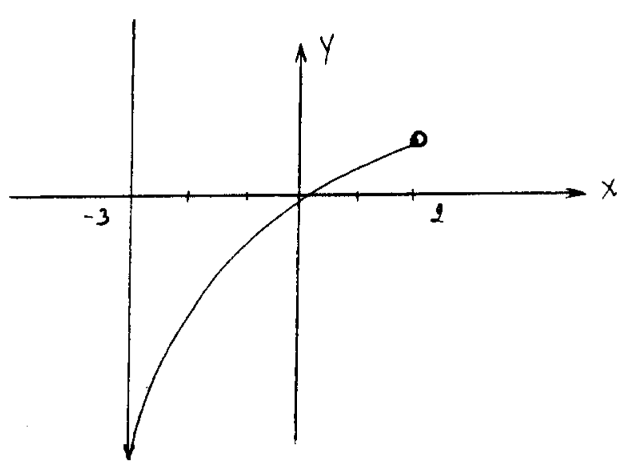
ขั้นที่สอง พิจารณาค่าของ f(x) ณ.จุดปลายของช่วง $(-3, 2)$

เพราะว่า $f(-3)$ มีค่าน้อยมาก ซึ่ง f(x) ต่าง ๆ บนช่วง $(-3, 2)$ มีค่ามากกว่า $f(-3)$ เสมอ แสดงว่า f(x) สำหรับ x บนช่วง $(-3, 2)$ ไม่มีค่าต่ำสุด

และ $f(2) = \frac{6}{5}$ ซึ่ง f(x) บนช่วง $(-3, 2)$ มีค่าน้อยกว่า f(2) เสมอ แสดงว่า f(x) สำหรับ x บนช่วง $(-3, 2)$ ไม่มีค่ามากสุด (2)

จาก (1) และ (2) แสดงว่า f(x) ไม่มีค่าสูงสุดและต่ำสุด สัมบูรณ์ **ตอบ**

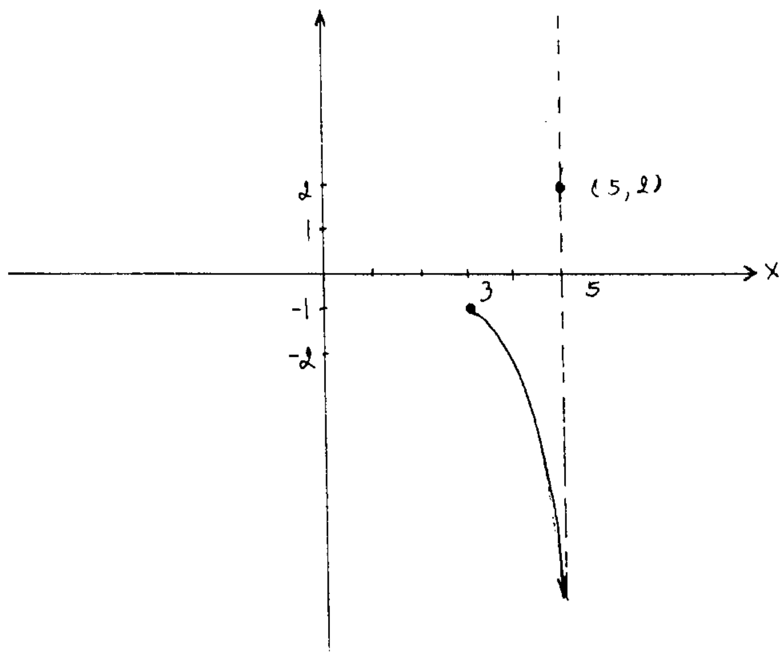
และสามารถเขียนกราฟดังรูป



11. จงหาค่าปลายสุดสัมบูรณ์ของฟังก์ชันบนช่วงที่กำหนดให้ และหาค่าของ x ที่ทำให้ได้ค่าปลายสุดสัมบูรณ์ พร้อมทั้งเขียนกราฟของฟังก์ชันด้วย ถ้า

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{2}{x-5} & \text{ถ้า } x \neq 5 \\ 2 & \text{ถ้า } x = 5 \end{cases} \quad ; [3, 5]$$

วิธีทำ จากกราฟของ f(x) บนช่วง [3, 5] ค่าสูงสุดสัมบูรณ์ของ f(x) บนช่วง [3, 5] ปรากฏที่ x = 5 ซึ่ง f(5) = 2 ส่วนค่าต่ำสุดสัมบูรณ์ของ f(x) บนช่วง [3, 5] หาค่าไม่ได้ ตอบ



12. จงหาค่าสูงสุด และต่ำสุดสัมบูรณ์ ของฟังก์ชันบนช่วงที่กำหนดให้ พร้อมทั้งเขียนกราฟของฟังก์ชันบนช่วงนี้ด้วย ถ้า

$$f(x) = x^3 + 5x - 4 \quad ; [-3, -1]$$

วิธีทำ ขั้นที่หนึ่ง หาค่าวิกฤต เพราะว่า

$$f'(x) = 3x^2 + 5$$

ให้ $f'(x) = 0$

$$3x^2 + 5 = 0$$

$$x^2 = -\frac{5}{3}$$

เพราะฉะนั้น x หาค่าไม่ได้ นั้นคือ ไม่มีค่า x ใดเลยในช่วง $[-3, -1]$ จะทำให้ $f'(x) = 0$ และ $f'(x) \neq 0$ สำหรับ $x \in [-3, -1]$ เพราะฉะนั้นไม่มีค่าวิกฤต (1)

ขั้นที่สอง พิจารณาค่าของ $f(x)$ ณ.จุดปลายของช่วง $[-3, -1]$

เพราะว่า
$$\begin{aligned} f(-3) &= (-3)^3 + 5(-3) - 4 \\ &= -27 - 15 - 4 \\ &= -46 \end{aligned}$$

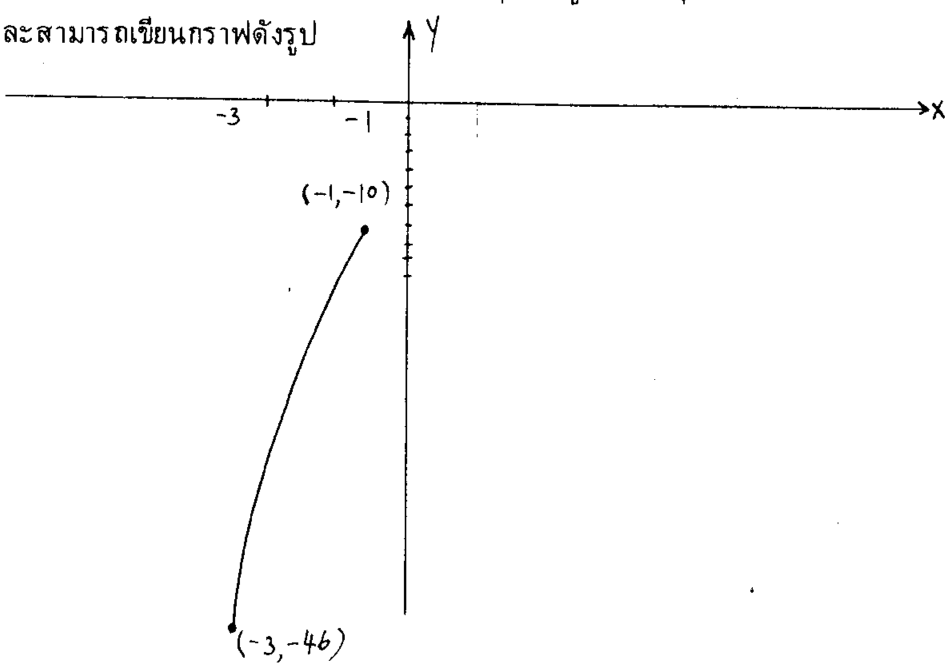
และ
$$\begin{aligned} f(-1) &= (-1)^3 + 5(-1) - 4 \\ &= -1 - 5 - 4 \\ &= -10 \qquad (2) \end{aligned}$$

จาก (1) และ (2) $f(-1) = -10$ เป็นค่าสูงสุด และ $f(-3) = -46$ เป็นค้าต่ำสุด

เพราะฉะนั้น $f(-1) = -10$ เป็นค่าสูงสุดสัมบูรณ์ ณ.จุด $x = -1$

$f(-3) = -46$ เป็นค่าต่ำสุดสัมบูรณ์ ณ.จุด $x = -3$ **ตอบ**

และสามารถเขียนกราฟดังรูป



13. จงหาค่าสูงสุด และต่ำสุดสัมบูรณ์ ของฟังก์ชันบนช่วงที่กำหนดให้พร้อมทั้งเขียนกราฟของฟังก์ชันบนช่วงนี้ด้วย ถ้า

$$f(x) = x^4 - 8x^2 + 16 \quad ; \quad [-4, 0)$$

วิธีทำ ขั้นที่หนึ่ง หาค่าวิกฤต เพราะว่า

$$f'(x) = 4x^3 - 16x$$

ให้ $f'(x) = 0$

$$4x^3 - 16x = 0$$

$$4x(x^2 - 4) = 0$$

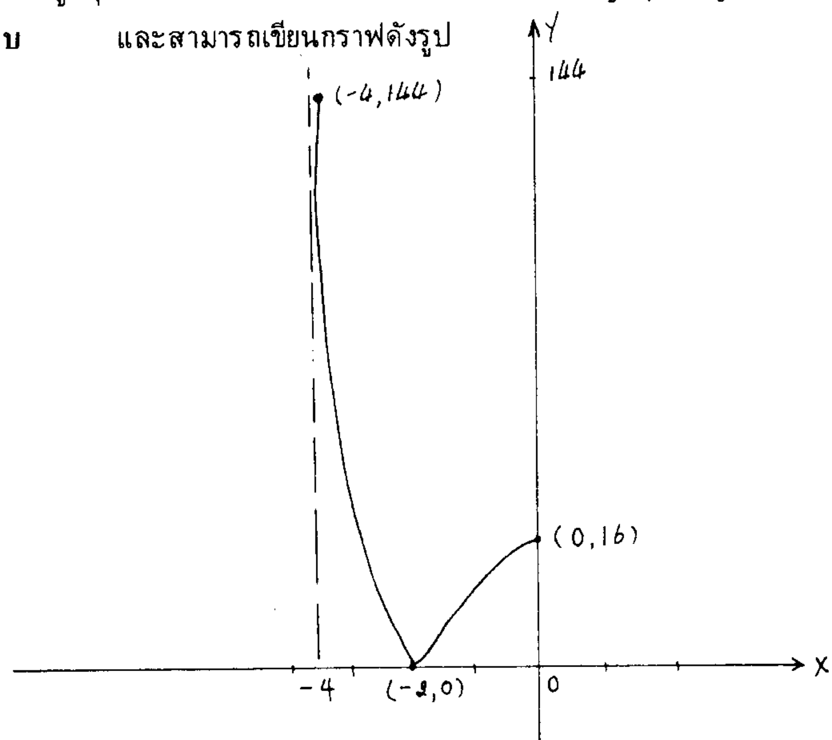
เพราะฉะนั้น $x = 0$ หรือ $x = \pm 2$ แต่ $2 \notin [-4, 0]$ ดังนั้น $x = 0, -2$ เป็นค่าวิกฤต และ $f(0) = 16.$ $f(-2) = 0$ (1)

ขั้นที่สอง พิจารณาค่าของ $f(x)$ ณ. จุดปลายของช่วง $[-4, 0]$

เพราะว่า $f(-4) = 144$ และ $f(0) = 16$ (2) จาก (1) และ (2)

$f(-2) = 0$ เป็นค่าต่ำสุดของฟังก์ชัน ณ.จุด -2 และเป็นค่าต่ำสุดสัมบูรณ์

และ $f(-4) = 144$ เป็นค่าสูงสุดของฟังก์ชันบนช่วง $[-4, 0]$ และเป็นค่าสูงสุดสัมบูรณ์ ณ.จุด $x = -4$ **ตอบ** และสามารถเขียนกราฟดังรูป



14. จงหาค่าสูงสุด และต่ำสุดสัมบูรณ์ ของฟังก์ชันบนช่วงที่กำหนดให้ พร้อมทั้งเขียนกราฟของฟังก์ชันบนช่วงนี้ด้วยถ้า

$$f(x) \quad = \quad x^4 - 8x^2 + 16 \quad ; [0, 3]$$

วิธีทำ ขั้นที่หนึ่ง หาค่าวิกฤต เพราะว่า

$$f'(x) \quad = \quad 4x^3 - 16x$$

ให้

$$f'(x) \quad = \quad 0$$

$$4x^3 - 16x \quad = \quad 0$$

$$4x(x^2 - 4) \quad = \quad 0$$

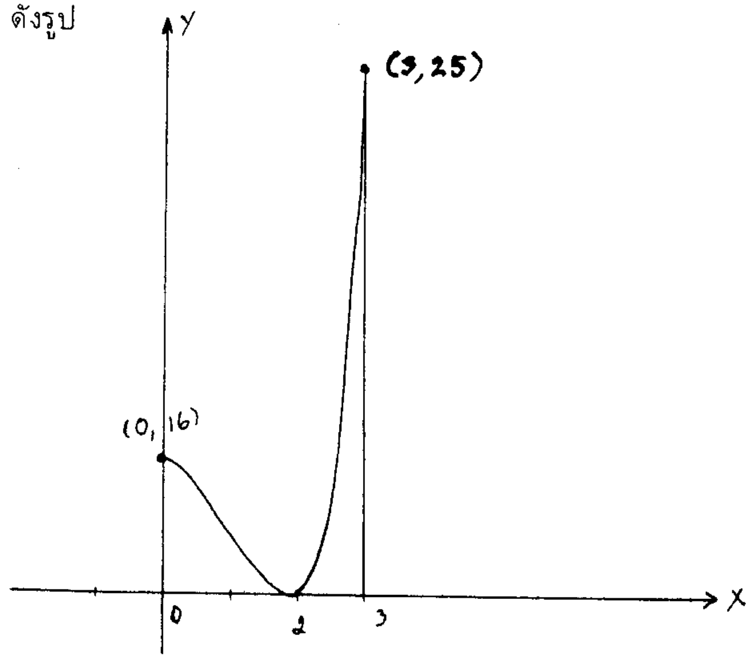
เพราะฉะนั้น $x = \ , \pm 2$ แต่ $-2 \notin [0, 3]$ ดังนั้น $x = 0, 2$ เป็นค่าวิกฤต และ $f(0) = 16$ และ $f(2) = 0$ (1)

ขั้นที่สอง พิจารณาค่าของ $f(x)$ ณ.จุดปลายของช่วง $[0, 3]$ เพราะว่า $f(0) = 16$ และ $f(3) = 25$ (2)

จาก (1) และ (2) $f(2) = 0$ เป็นค่าต่ำสุดของ $f(x)$ บนช่วง $[0, 3]$ และเป็นค่าต่ำสุดสัมบูรณ์

$f(3) = 25$ เป็นค่าสูงสุดของ $f(x)$ บนช่วง $[0, 3]$ และเป็นค่าสูงสุดสัมบูรณ์ **ตอบ**

และสามารถเขียนกราฟ ดังรูป



15. จงหาค่าสูงสุด และต่ำสุดสัมบูรณ์ของฟังก์ชันบนช่วงที่กำหนดให้ พร้อมทั้งเขียนกราฟของฟังก์ชันบนช่วงนี้ด้วยถ้า

$$f(x) = \frac{x}{x+2} \quad ; [-1, 2]$$

วิธีทำ ขั้นที่หนึ่ง หาค่าวิกฤต เพราะว่า

$$f'(x) = \frac{(x+2)-x}{(x+2)^2} = \frac{2}{(x+2)^2}$$

เพราะว่า $f'(-2)$ หาค่าไม่ได้ เพราะฉะนั้น -2 เป็นค่าวิกฤต

แต่ $-2 \in [-1, 2]$

ฉะนั้น $f(-2)$ ไม่มีค่า (1)

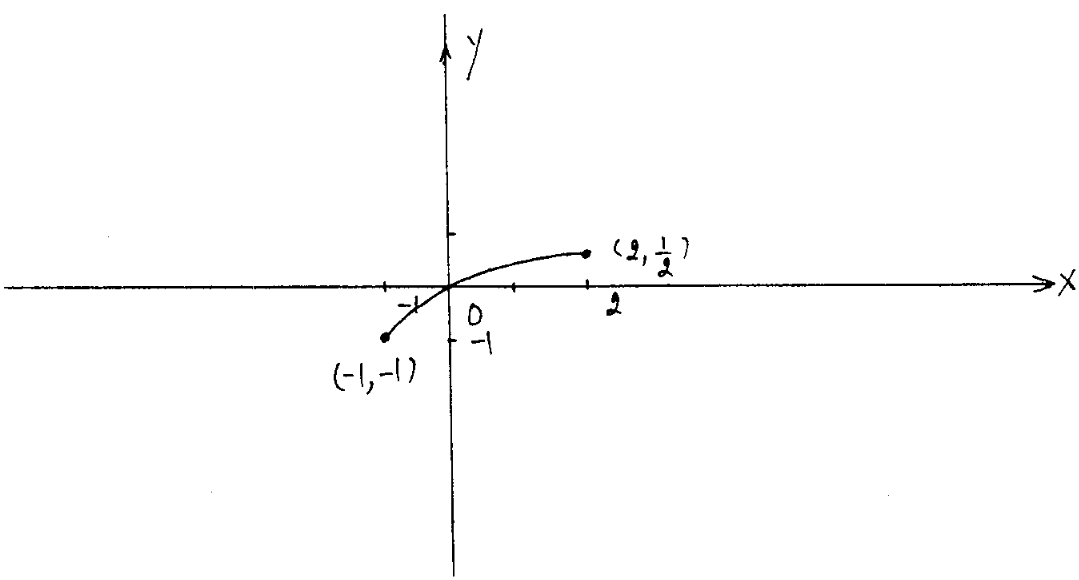
ขั้นที่สอง พิจารณาค่าของ $f(x)$ ณ.จุดปลายของช่วง $[-1, 2]$ เพราะว่า $f(-1) = -1$ และ $f(2) = \frac{1}{2}$ (2)

จาก (1) และ (2)

$f(-1) = -1$ เป็นค่าต่ำสุดของ $f(x)$ บนช่วง $[-1, 2]$ และเป็นค่าต่ำสุดสัมบูรณ์

$f(2) = \frac{1}{2}$ เป็นค่าสูงสุดของ $f(x)$ บนช่วง $[-1, 2]$ และเป็นค่าสูงสุดสัมบูรณ์ ตอบ

และสามารถเขียนกราฟดังรูป



16. จงหาค่าสูงสุดและต่ำสุดสัมบูรณ์ ของฟังก์ชันบนช่วงที่กำหนดให้ พร้อมทั้งเขียนกราฟของฟังก์ชันบนช่วงนี้ ถ้า

$$f(x) = (x+1)^{2/3} \quad ; \quad [-2, 1]$$

วิธีทำ ขั้นที่หนึ่ง หาค่าวิกฤต เพราะว่า

$$f'(x) = \frac{2}{3}(x+1)^{-1/3} = \frac{2}{3(x+1)^{1/3}}$$

เพราะว่า $f'(-1)$ หาค่าไม่ได้

เพราะฉะนั้น -1 เป็นค่าวิกฤต และ

$$f(-1) = 0 \qquad (1)$$

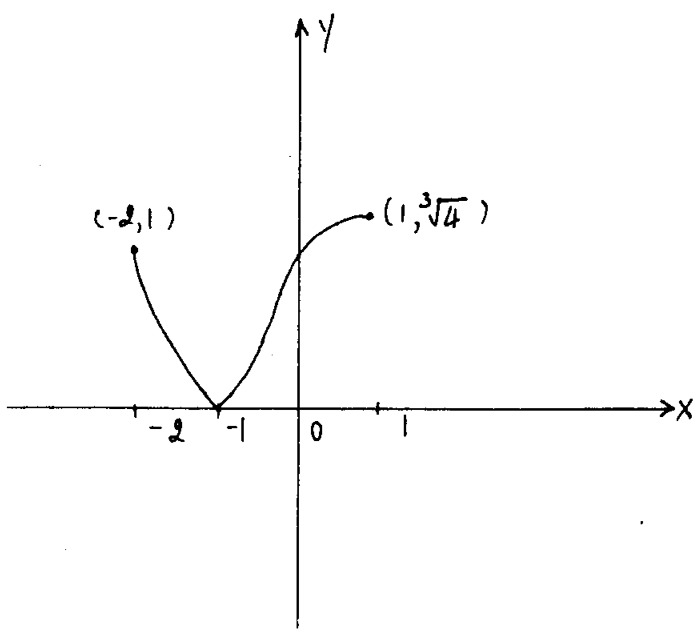
ขั้นที่สอง พิจารณาค่าของ $f(x)$ ณ.จุดปลายของช่วง $[-2, 1]$ เพราะว่า $f(-2) = 1$ และ $f(1) = \sqrt[3]{4}$ (2)

จาก (1) และ (2)

$f(-1) = 0$ เป็นค่าต่ำสุดของ $f(x)$ บนช่วง $[-2, 1]$ และเป็นค่าต่ำสุดสัมบูรณ์

$f(1) = \sqrt[3]{4}$ เป็นค่าสูงสุดของ $f(x)$ บนช่วง $[-2, 1]$ และเป็นค่าสูงสุดสัมบูรณ์ **ตอบ**

และเขียนกราฟดังรูป



17. จงหาค่าสูงสุด และต่ำสุดสมบูรณ์ของฟังก์ชันบนช่วงที่กำหนดให้ พร้อมทั้งเขียนกราฟของฟังก์ชันบนช่วงนี้ ถ้า

$$f(x) = \begin{cases} 3x - 4 & -3 \leqslant x < 1 \\ x^2 - 2 & 1 \leqslant x \leqslant 3 \end{cases} \quad ; \quad [-3, 3]$$

วิธีทำ ขั้นที่หนึ่ง หาค่าวิกฤต เพราะว่า

$$f'(x) = \left\{ \begin{array}{ll} 3 & -3 \leqslant x < 1 \\ 2x & 1 \leqslant x \leqslant 3 \end{array} \right\}$$

เพราะว่า $f'(x) = 3$ ถ้า $-3 \leqslant x < 1$ ซึ่ง $f'(x) \neq 0$ แสดงว่า ณ ช่วงนี้ หาค่าวิกฤตไม่ได้

และ $f'(x) = 2x$ ถ้า $1 \leqslant x \leqslant 3$ ซึ่ง $f'(0) = 0$ แต่ 0 ไม่ได้อยู่ในช่วงที่กำหนดให้ แสดงว่า ณ.ช่วงนี้หาค่าวิกฤตไม่ได้ (1)

ขั้นที่สอง พิจารณาค่าของ f(x) ณ.จุดปลายของช่วง [−3, 3]

เพราะว่า $f(-3) = 3(-3) - 4$

$= -13$

และ $f(3) = 3^2 - 2 = 9 - 2$

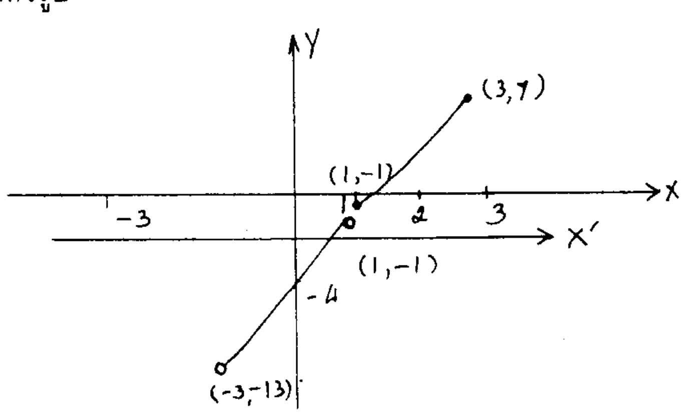
$= 7$ (2)

จาก (1) และ (2)

$f(-3) = -13$ เป็นค่าต่ำสุดของ f(x) บนช่วง [−3, 3] และเป็นค่าต่ำสุดสัมบูรณ์

$f(3) = 7$ เป็นค่าสูงสุดของ f(x) บนช่วง [−3, 3] และเป็นค่าสูงสุดสัมบูรณ์ **ตอบ**

และเขียนกราฟดังรูป



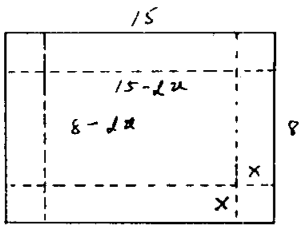
4.2 สรุปเรื่องการประยุกต์ที่เกี่ยวกับค่าปลายสุดสัมบูรณ์บนช่วงปิด

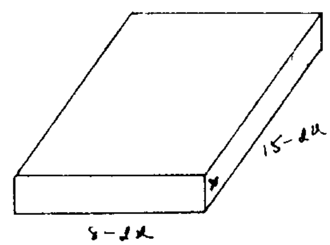
ในหัวข้อนี้จะพิจารณาปัญหาที่มีคำตอบเป็นค่าปลายสุดสัมบูรณ์ของฟังก์ชันบนช่วงปิด โดยใช้ทฤษฎีค่าปลายสุดซึ่งกำหนดว่ามีทั้งค่าสูงสุดสัมบูรณ์และค่าต่ำสุดสัมบูรณ์บนช่วงปิดของฟังก์ชันนั้น ถ้าฟังก์ชันนั้นมีความต่อเนื่องบนช่วงปิด

แบบฝึกหัด 4.2

1. โรงงานทำกล่องดีบุกต้องการใช้แผ่นดีบุกขนาด 8 × 15 นิ้ว โดยตัดทั้งสี่มุมเป็นรูปสี่เหลี่ยมจัตุรัส แล้วยกเป็นความสูงของกล่องดีบุก

จงหาความยาวที่ยาวที่สุดของด้านของสี่เหลี่ยมจัตุรัส ซึ่งจะทำให้กล่องดีบุกมีปริมาตรมากที่สุด





วิธีทำ ให้ x เป็นความยาวของด้านจัตุรัสที่ตัดออก มีหน่วยเป็นนิ้ว V(x) คือปริมาตรของกล่องมีหน่วยเป็นลูกบาศก์นิ้ว

ปริมาตร $V(x) = (15 - 2x)(8 - 2x)(x) \quad ; \quad x \in [0, 4]$

$$= 4x^3 - 46x^2 + 120x \qquad (1)$$

เพราะว่า V(x) ต่อเนื่องบนช่วงนี้ จากทฤษฎีค่าปลายสุดจะได้ว่า V(x) มีค่าสูงสุดสัมบูรณ์บนช่วยนี้ ซึ่งอยู่ ณ.จุดวิกฤต หรือที่จุดปลายของช่วงนี้

ขั้นที่หนึ่ง หาจุดวิกฤต เพราะว่า

$$v'(x) = 12x^2 - 92x + 120$$

ให้ $v'(x) = 0$

$$12x^2 - 92x + 120 = 0$$

$$3x^2 - 23x + 30 = 0$$

$$(3x - 5)(x - 6) = 0$$

$x = \frac{5}{3}$ $\qquad x = 6$ แต่ $6 \notin [0, 4]$

เพราะฉะนั้น $x = \frac{5}{3}$ เป็นค่าวิกฤต

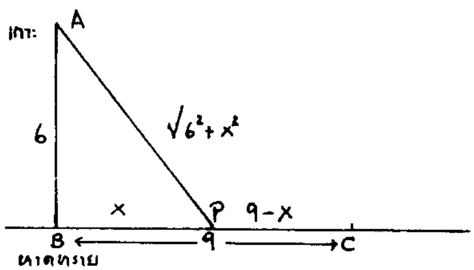
จากสมการ (1) $V(\frac{5}{3})$ $= \frac{2450}{27}$ (2)

ขั้นที่สอง พิจารณาค่า $V(x)$ บนจุดปลายของช่วง $[0, 4]$

จากสมการ (1) $V(0) = 0$ และ $V(4) = 0$ (3)

จากสมการ (2) และ (3) $V(x)$ มีปริมาตรมากที่สุดบนช่วง $[0, 4]$ เมื่อ $x = \frac{5}{3}$ นั่นคือ ความยาวของสี่เหลี่ยมจตุรัสจะต้องตัดออกยาวด้านละ $\frac{5}{3}$ นิ้ว **ตอบ**

2. ให้ A เป็นจุดอยู่บนเกาะแห่งหนึ่งอยู่ห่างจากหาดทรายที่จุด B 6 ไมล์ ชายคนหนึ่งอยู่บนเกาะต้องการจะไปที่จุด C ซึ่งอยู่ที่หาดทรายห่างจาก B 9 ไมล์ เขาเช่าเรือ 2.50 ดอลล่าต่อไมล์ เดินทางมายังจุด P ซึ่งอยู่ระหว่าง B และ C หลักงจากนั้นเช่าแท๊กซี่ 2 ดอลล่าต่อไมล์จาก P ถึง C จงหาค่าโดยสารที่ถูกที่สุดจาก A ถึงจุด C



วิธีทำ ให้ A เป็นจุด ๆ หนึ่งบนเกาะ B และ C เป็นจุดสองจุดอยู่บนหาดทราย

P เป็นจุด ๆ หนึ่งอยู่ระหว่าง B และ C

x เป็นระยะจากจุด B ไปยัง P เป็นไมล

$9 - x$ เป็นระยะจากจุด P ไปยัง C และ $x \in [0, 9]$

$AP = \sqrt{6^2 + x^2}$ เป็นระยะทางจากจุด A ไปยัง P เป็นไมล์

$C(x)$ เป็นค่าเดินทางทั้งหมดจากจุด A ถึง C เป็นดอลลา

$C(x)$ = ค่าเดินทางจาก A ถึง P + ค่าเดินทางจา P ถึง C

$$C(x) = 2.5\sqrt{6^2 + x^2} + 2(9 - x)$$

$$= 2.5(36 + x^2)^{\frac{1}{2}} + (18 - 2x) \quad ; \quad x \in [0, 9] \quad (1)$$

เพราะว่า $C(x)$ ต่อเนื่องบนช่วงนี้ จากทฤษฎีค่าปลายสุดจะได้ว่า $C(x)$ มีค่าต่ำสุดสัมบูรณ์บนช่วงนี้ ซึ่งอยู่ ณ. จุดวิกฤต หรือที่จุดปลายของช่วงนี้

ขั้นที่หนึ่ง หาจุดวิกฤต เพราะว่า

$$C'(x) = \frac{2.5}{2}(36 + x^2)^{-\frac{1}{2}}(2x) - 2$$

$$= \frac{2.5x}{(36 + x^2)^{\frac{1}{2}}} - 2$$

ให้ $C'(x) = 0$

$$\frac{2.5x}{(36 + x^2)^{\frac{1}{2}}} - 2 = 0$$

$$\frac{2.5x}{(36 + x^2)^{\frac{1}{2}}} = 2$$

$$\frac{2.5x}{2} = (36 + x^2)^{\frac{1}{2}}$$

$$\frac{6.25x^2}{4} = 36 + x^2 \quad \text{ยกกำลังสอง}$$

$$\frac{6.25x^2}{4} - x^2 = 36$$

$$\frac{2.25x^2}{4} = 36$$

$$2.25x^2 = 36 \times 4$$

$$x^2 = \frac{36 \times 4}{2.25} = \frac{144}{2.25}$$

$$x = \frac{12}{1.5} = 8 \quad \text{ถอดรากที่สอง}$$

เพราะฉะนั้น $x = 8$ เป็นค่าวิกฤษ

จากสมการ (1)

$$C(8) = 23 \text{ ดอลล่าร์} \qquad (2)$$

ขั้นที่สอง พิจารณา $C(x)$ บนจุดปลายช่วง $[0, 9]$

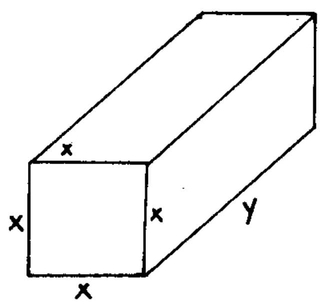
จากสมการ (1)

$$C(0) = 33 \text{ และ } C(9) = 2.5\sqrt{117} \qquad (3)$$

จากสมการ (2) และ (3)

C(8) = 23 มีค่าต่ำสุดสัมบูรณ์ นั่นคือ C(x) เป็นค่าใช้จ่ายต่ำสุดในการเดินทางจากจุด A ไปยัง C และจุด P อยู่ห่างจากจุด B 8 ไมล์ **ตอบ**

3. ในการส่งห่อของเพื่อจะส่งทางไปรษณีย์ ผลรวมของความยาว กับความยาวของเส้นรอบรูปของภาคตัด (CROSS SECTION) ต้องไม่เกิน 100 นิ้ว ถ้าวัตถุมีรูปร่างเป็นกล่องรูปสี่เหลี่ยมผืนผ้า ซึ่งรูปภาคตัด (CROSS SECTION) เป็นสี่เหลี่ยมจัตุรัส จงหาขนาดของกล่อง ซึ่งมีปริมาตรมากที่สุดที่ไปรษณีย์จะส่งให้ได้



วิธีทำ y เป็นความยาวของกล่องเป็นนิ้ว
x เป็นภาคตัดของสี่เหลี่ยมจัตุรัสเป็นนิ้ว
V เป็นปริมาตรกล่อง เป็นลูกบาศก์นิ้ว

ปริมาตร $V = x^2y$ (1)

เพราะว่า ความยาว + เส้นรอบรูปของภาคตัด = 100

$$Y + 4x = 100$$

$$Y = 100 - 4x$$ แทนค่า y ใน (1)

$$V(x) = x^2(100 - 4x)$$

$$= 100x^2 - 4x^3 \quad ; \quad x \in [0, 25] \quad (1)$$

เพราะว่า V(x) ต่อเนื่องบนช่วงนี้ จากทฤษฎีค่าปลายสุดจะได้ว่า V(x) มีค่าสูงสุดสัมบูรณ์ซึ่งอยู่ ณ. จุดวิกฤต หรือจุดปลายของช่วงนี้

ขั้นที่หนึ่ง หาจุดวิกฤต เพราะว่า

$$y'(x) = 200x - 12x^2$$

ให้ $$y'(x) = 0$$

$$200x - 12x^2 = 0$$

$x(200 - 12x) = \quad 0$

$x = 0$, และ $x = \frac{50}{3}$ ซึ่งเป็นค่าวิกฤต และ

$V(0) = 0, \quad V\left(\frac{50}{3}\right) = \frac{700,000}{27}$ (2)

ขั้นที่สอง พิจารณา $V(x)$ ณ. จุดปลายของช่วง $[0, 25]$

เพราะว่า $V(0) = 0$ และ $V(25) = 0$ (3)

จากสมการ (2) และ (3)

$V\left(\frac{50}{3}\right) = \frac{700,000}{27}$ เป็นปริมาตรที่มากที่สุด ณ.จุด $x = \frac{50}{3}$

และได้ $y = \frac{100}{3}$ หมายถึงกล่องยาว $\frac{100}{3}$ และภาคตัดซึ่งเป็นสี่เหลี่ยมจัตุรัสยาวด้านละ $\frac{50}{3}$ **ตอบ**

4. ถ้าโรงงานสามารถทำกำไรได้ 20 บาท ต่อ 1 ชิ้น ถ้าผลิตสินค้าไม่เกิน 800 ชิ้น ต่อสัปดาห์ แต่จะกำไรลดลง 0.02 บาท ต่อ 1 ชิ้น สำหรับสินค้าที่ผลิตเกินกว่า 800 ชิ้น จงหาจำนวนสินค้าที่โรงงานจะผลิตออกมาเพื่อที่จะให้ได้กำไรสูงสุด ในหนึ่งสัปดาห์

วิธีทำ ให้ x เป็นจำนวนสินค้าที่ผลิตต่อสัปดาห์

$P(x)$ เป็นผลกำไรแต่ละสัปดาห์

จะได้กำไร $20x$ ถ้า $0 \leqslant x \leqslant 800$ (1)

ถ้า $x \geqslant 800$ ชิ้นกำไรลดลง $0.02(x - 800)$ ซึ่งจะได้กำไรชิ้นละ

$$20 - 0.02(x - 800)$$

จะได้กำไร $x[20 - 0.02(x - 800)] = 36x - 0.02x^2$ (2)

จากสมการ (1) และ (2)

$$P(x) = \begin{cases} 20x & ; \quad 0 \leqslant x \leqslant 800 \\ 36x - 0.02x^2 & ; \quad 800 < x \leqslant 1800 \end{cases}$$

และ $P(x)$ ต่อเนื่องบนช่วง $x \in [0, 1,800]$

เพราะฉะนั้น โดยใช้ทฤษฎีค่าปลายสุดจะมีค่าสูงสุดสัมบูรณ์ สำหรับฟังก์ชัน $P(x)$ บนช่วงนี้

เพราะว่า $P'(x) = \begin{cases} 20 & ; \quad 0 \leqslant x \leqslant 800 \\ 36 - 0.04x & ; \quad 800 < x \leqslant 1800 \end{cases}$ (3)

เพราะว่า $P'_{-}(800) = 20$ เมื่อ $x \longrightarrow 800$ ทางซ้ายมือ

และ $P'_{+}(800) = 4$ เมื่อ $x \longrightarrow 800$ ทางขวามือ

ดังนั้น $P'_{-}(800 \neq P'_{+}(800)$

แสดงว่า $p'(800)$ หาค่าไม่ได้ แล้ว 800 เป็นจำนวนวิกฤต (4)

จากสมการ (3) ให้ $P'(x) = 0$

$$36 - 0.04x = 0$$

$$x = \frac{36}{.04} = 900$$

เพราะฉะนั้น 900 เป็นจำนวนวิกฤต (5)

จากสมการ (4) และ (5) และจุดปลายของช่วง [0, 1800] หาค่า

$P(0) = 0$, $P(800) = 16000$, $P(900) = 16200$, $P(1800) = 0$

ค่าสูงสุดของ $P(x)$ คือ 16200 เมื่อ $x = 900$

ดังนั้นควรผลิตสินค้าทั้งหมด 900 ชิ้นต่อสัปดาห์ จะทำให้ได้กำไรสูงสุด 16200 บาทต่อสัปดาห์ **ตอบ**

5. ชมรมแห่งหนึ่งเก็บเงินค่าสมาชิก ต่อปี 100 บาท ถ้าสมาชิกมากกว่า 600 คน ได้ลด 50 สตางค์ ถ้าสมาชิกน้อยกว่า 600 คน จะต้องเสียเพิ่มอีก 50 สตางค์ จงหาจำนวนสมาชิกที่จะทำให้ชมรมมีผลประโยชน์มากที่สุด ทุก ๆ ปี

วิธีทำ ให้ x เป็นจำนวนสมาชิกต่อปี

$P(x)$ เป็นผลประโยชน์ต่อปี

ถ้าสมาชิกน้อยกว่า 600 คน จะมีผลประโยชน์

$$P(x) = x(100 + .5\ (600 - x) \quad ; \quad 0 \leqslant x \leqslant 600$$

$$= 400x - .5x^2$$

ถ้าสมาชิกมากกว่า 600 คน จะมีผลประโยชน์

$$P(x) = x(100 - .5(x - 600))$$
$$= 400x - .5x^2 \quad ; \quad 600 < x \leqslant 800$$

เพราะฉะนั้น $p(x) = 400x - .5x^2 \quad ; \quad 0 \leqslant x \leqslant 800$

$$P'(x) = 400 - x$$

ให้ $P'(x) = 0$

$$400 - x = 0$$
$$x = 400 \quad \text{เป็นค่าวิกฤต}$$

และ $P(400) = 80{,}000 \qquad (1)$

หาค่า P(x) ณ.จุดปลายของช่วง [0, 800] เพราะว่า

$P(0) = 0$ และ $P(800) = 0 \qquad (2)$

จากสมการ (1) และ (2)

$P(400) = 80{,}000$ มีค่าสูงสุด

เพราะฉะนั้นชมรมแห่งนี้จะต้องรับสมาชิก 400 คน จึงจะทำให้มีผลประโยชน์มากที่สุด 80,000 บาท **ตอบ**

4.3 สรุปเรื่องฟังก์ชันเพิ่มและฟังก์ชันลดกับอนุพันธ์อันดับหนึ่ง

นิยาม ถ้าให้ $y = f(x)$ เป็นฟังก์ชันที่กำหนดให้ในช่วงหนึ่งช่วงใดแล้วฟังก์ชัน f จะเรียกว่า **เพิ่มขึ้น** ในช่วงนั้นก็ต่อเมื่อ $f(x_1) < f(x_2)$ สำหรับ $x_1 < x_2$ ซึ่ง x_1 และ x_2 เป็นจำนวนจริงใด ๆ ในช่วงนั้น

นิยาม ถ้าให้ $y = f(x)$ เป็นฟังก์ชันที่กำหนดให้ในช่วงหนึ่งช่วงใดแล้วฟังก์ชัน f จะเรียกว่า **ลดลง** ในช่วงนั้นก็ต่อเมื่อ $f(x_1) > f(x_2)$ สำหรับ $x_1 < x_2$ ซึ่ง x_1 และ x_2 เป็นจำนวนจริงใด ๆ ในช่วงนั้น

ทฤษฎี ให้ f เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องบนช่วงปิด [a, b] และหาอนุพันธ์ได้ในช่วงเปิด (a, b)

1) ถ้า $f'(x) > 0$ สำหรับทุกค่าของ x ที่อยู่ในช่วง (a, b) แล้ว f **จะเพิ่มขึ้นบนช่วง** [a, b]

2) ถ้า $f'(x) < 0$ สำหรับทุกค่าของ x ที่อยู่ในช่วง (a, b) แล้ว f จะลดลงบนช่วง [a, b]

ทฤษฎี ให้ f เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องที่ทุก ๆ จุดในช่วงเปิด (a, b) และ c เป็นจำนวนจริง ที่อยู่ระหว่าง a กับ b ถ้าฟังก์ชัน f มีอนุพันธ์ที่ทุก ๆ จุดของช่วง (a, b) ยกเว้นที่จุด c และ

1) ถ้า $f'(x) > 0$ สำหรับทุกค่าของ x ในช่วงเปิดซึ่งมี c เป็นจุดขวาสุดของช่วง และถ้า $f'(x) < 0$ สำหรับทุกค่าของ x ในช่วงเปิดที่มี c เป็นจุดซ้ายสุดของช่วงแล้ว f **จะมีค่าสูงสุดสัมพัทธ์ที่จุด** c

2) ถ้า $f'(x) < 0$ สำหรับทุกค่าของ x ในช่วงเปิดที่มี c เป็นจุดขวาสุดของช่วง และถ้า $f'(x) > 0$ สำหรับทุกค่าของ x ในช่วงเปิดที่มี c เป็นจุดซ้ายสุดของช่วงแล้ว f **จะมีค่าต่ำสุดสัมพัทธ์ที่จุด** c

เมื่อเราทราบนิยามและทฤษฎีแล้วก็พอจะสรุปการหาค่าปลายสุดสัมพัทธ์ของฟังก์ชัน f ได้ดังต่อไปนี้

1) หา $f'(x)$

2) หาค่าวิกฤตของ f นั่นคือ หาค่า x ซึ่ง $f'(x) = 0$ หรือ $f'(x)$ หาค่าไม่ได้

3) ใช้ทฤษฎีพิจารณาว่า f มีค่าสูงสุดสัมพัทธ์หรือต่ำสุดสัมพัทธ์ นั่นคือ

ถ้า $f'(x) \begin{cases} > 0 & \text{สำหรับ } x \in (a, c) \\ < 0 & \text{สำหรับ } x \in (c, b) \end{cases}$ แล้ว f(c) เป็นค่าสูงสุดสัมพัทธ์

ถ้า $f'(x) \begin{cases} < 0 & \text{สำหรับ } x \in (a, c) \\ > 0 & \text{สำหรับ } x \in (c, b) \end{cases}$ แล้ว f(c) เป็นค่าต่ำสุดสัมพัทธ์

แบบฝึกหัด 4.3

ในแบบฝึกหัดแต่ละข้อจงหาดังต่อไปนี้

ก) หาค่าปลายสุดสัมพัทธ์ของ f โดยใช้อนุพันธ์อันดับหนึ่งทดสอบ

ข) หาค่าของ x ณ จุดซึ่ง f มีค่าสูงสุดหรือต่ำสุด

ค) หาช่วงซึ่งฟังก์ชัน f เพิ่ม

ง) หาช่วงซึ่งฟังก์ชัน f ลด

จ) เขียนรูปของฟังก์ชันที่กำหนดให้

1 $\quad f(x) = x^2 - 4x - 1$

วิธีทำ $f'(x) = 2x - 4$

$f(x)$ มีอนุพันธ์ที่ทุกค่าของ x ให้ $f'(x) = 0$ เราจะได้

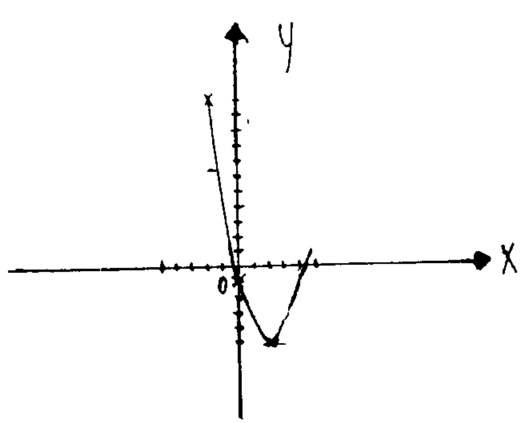
$2x - 4 = 0$

$\therefore x = 2$

ดังนั้นค่าวิกฤตของ f คือ 2

ใช้อนุพันธ์ที่หนึ่งทดสอบ และสรุปผลดังตาราง

	$f(x)$	$f'(x)$	ผลสรุป
$x < 2$		$-$	f ลดลง
$x = 2$	-5	0	f มีค่าต่ำสุดสัมพัทธ์
$2 < x$		$+$	f เพิ่มขึ้น



2 $f(x) = 2x^3 - x^2 + 3x - 1$

วิธีทำ $f'(x) = 6x^2 - 2x + 3$

$f(x)$ มีอนุพันธ์ที่ทุกค่าของ x ให้ $f'(x) = 0$ จะได้

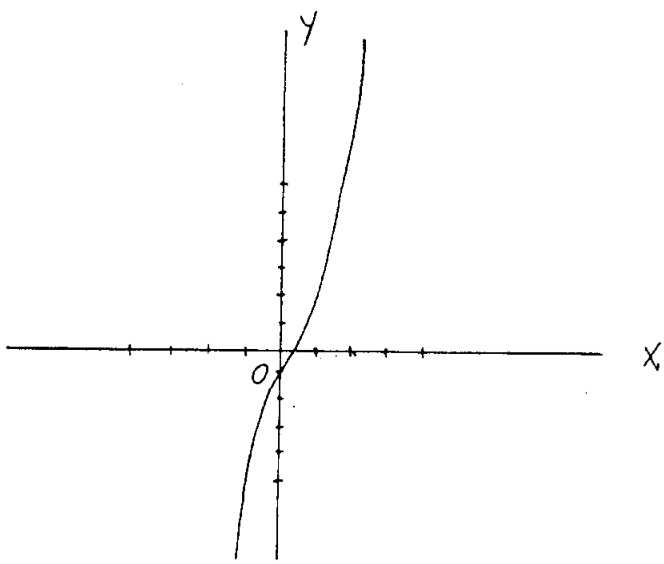
$6x^2 - 2x + 3 = 0$

ไม่มีค่า x ที่เป็นจริงและทำให้ $f'(x) = 0$ ได้

ดังนั้น f ไม่มีค่าปลายสุดสัมพัทธ์

ฟังก์ชัน f เพิ่มบนช่วง $(-\infty, +\infty)$

ไม่มีช่วงที่ฟังก์ชัน f ลด



3 $f(x) = x^5 - 5x^3 - 20x - 2$

วิธีทำ $f'(x) = 5x^4 - 15x^2 - 20$

$f(x)$ มีอนุพันธ์ที่ทุกค่าของ x ให้ $f'(x) = 0$ จะได้

$5x^4 - 15x^2 - 20 = 0$

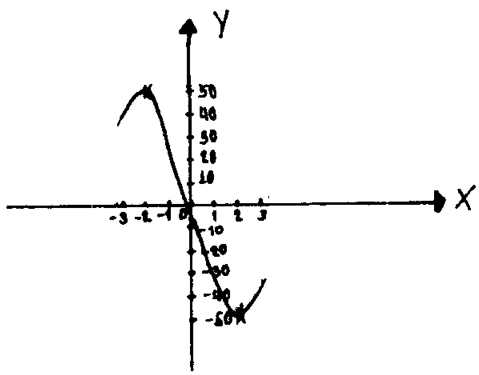
$(5x^2 - 20)(x^2 + 1) = 0$

$\therefore x = \pm 2$ และ $x = \pm \sqrt{-1}$

ดังนั้นค่าวิกฤตคือ ± 2

ใช้อนุพันธ์ที่หนึ่งทดสอบ และสรุปผลดังตาราง

	f(x)	f'(x)	ผลสรุป
$x < -2$		+	f เพิ่มขึ้น
$x = -2$	46	0	f มีค่าสูงสุดสัมพัทธ์
$-2 < x < 2$		−	f ลดลง
$x = 2$	−50	0	f มีค่าต่ำสุดสัมพัทธ์
$2 < x$		+	f เพิ่มขึ้น



4 $\qquad f(x) = \sqrt{x} - \dfrac{1}{\sqrt{x}}$

วิธีทำ $f(x) = x^{\frac{1}{2}} - x^{-\frac{1}{2}}$

$$f'(x) = \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}} + \frac{1}{2}x^{-\frac{3}{2}}$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{x}} + \frac{1}{2\sqrt{x^3}}$$

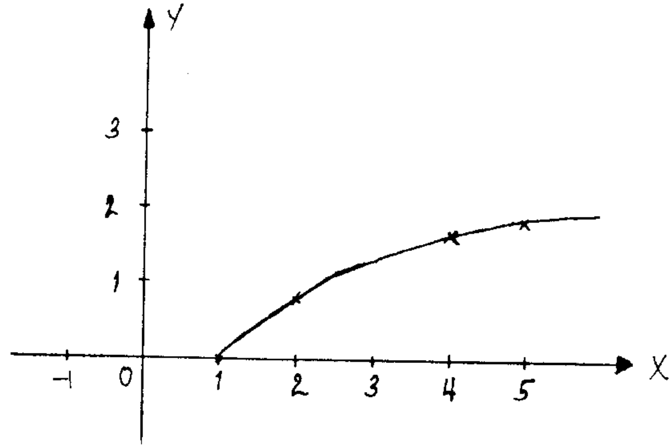
หาค่า $f'(x)$ ไม่ได้เมื่อ $x \leq 0$

และไม่สามารถหาค่า x ที่ทำให้ $f'(x) = 0$ ได้

ดังนั้นฟังก์ชัน f ไม่มีค่าปลายสุดสัมพัทธ์

ฟังก์ชันจะเพิ่มขึ้นบนช่วง $(0, +\infty)$

ไม่มีช่วงที่ฟังก์ชัน f จะลดลง



5 $\qquad f(x) = 2x\sqrt{3-x}$

วิธีทำ $\qquad f(x) = 2x(3-x)^{\frac{1}{2}}$

$$f'(x) = (2x)\left(-\frac{1}{2}\right)(3-x)^{-\frac{1}{2}} + 2(3-x)^{\frac{1}{2}}$$

$$= -x(3-x)^{-\frac{1}{2}} + 2(3-x)^{\frac{1}{2}}$$

$$= \frac{3(2-x)}{\sqrt{3-x}}$$

f(x) มีอนุพันธ์ที่ทุกค่าของ x ซึ่งน้อยกว่า 3

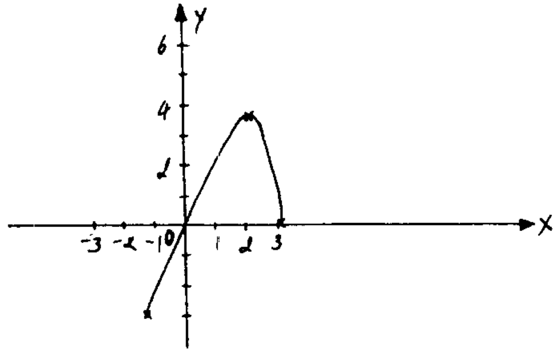
ให้ $f'(x) = 0$

$$\frac{3(2-x)}{\sqrt{3-x}} = 0$$

$x = 2$ เป็นค่าวิกฤตของ f

ใช้อนุพันธ์อันดับหนึ่งทดสอบ แล้วสรุปผลดังตาราง

	f(x)	f'(x)	ผลสรุป
$x < 2$		+	f เพิ่มขึ้น
$x = 2$	4	0	f มีค่าสูงสุดสัมพัทธ์
$2 < x < 3$		−	f ลดลง



6 $\quad f(x) = (1-x)^2(1+x)^3$

วิธีทำ $f(x) = (1-x)^2(1+x)^3$

$$f'(x) = (1-x)^2 3(1-x)^2 + (1+x)^3(-2)(1-x)$$

$$= (1+x)^2(1-x)[3(1-x) - 2(1+x)]$$

$$= (1-x)(1+x)^2(3 - 3x - 2 - 2x)$$

$$= (1-x)\ (1+x)^2\ (1-5x)$$

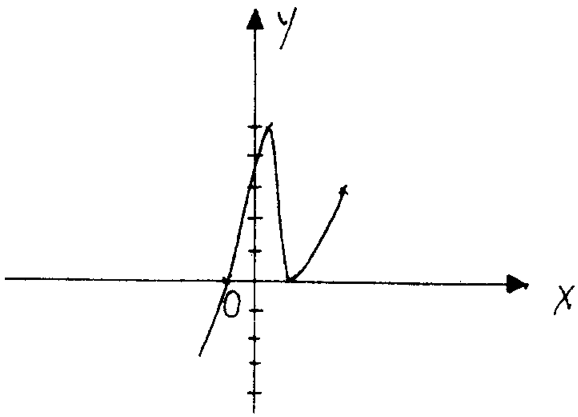
f มีอนุพันธ์ที่ทุกค่าของ x ให้ $f'(x) = 0$

$$(1-x)\ (1+x)^2(1-5x) = 0$$

$$x = -1,\ 1,\ \frac{1}{5}$$

ใช้อนุพันธ์อันดับหนึ่งทดสอบสรุปผลได้ดังตาราง

	f(x)	f'(x)	ผลสรุป
$x < -1$		+	f เพิ่ม
$x = -1$	0	0	f ไม่มีค่าสูงสุด (ต่ำสุด) สัมพัทธ์ที่ $x = -1$
$-1 < x < \frac{1}{5}$		+	f เพิ่ม
$x = \frac{1}{5}$	$\frac{3456}{625}$	0	f มีค่าสูงสุดสัมพัทธ์
$\frac{1}{5} < x < 1$		−	f ลดลง
$x = 1$	0	0	f มีค่าต่ำสุดสัมพัทธ์
$1 < x$		+	f เพิ่ม



7 $\quad f(x) = 2 - 3(x-4)^{\frac{2}{3}}$

วิธีทำ $\quad f(x) = 2 - 3(x-4)^{\frac{2}{3}}$

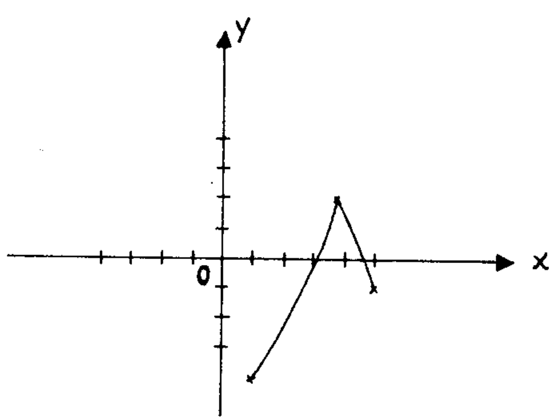
$$f'(x) = -2(x-4)^{-\frac{1}{3}}$$

แสดงว่าหาค่า f′ (x) ไม่ได้เมื่อ x = 4

เพราะฉะนั้น 4 เป็นค่าวิกฤตของ f

ผลสรุปแสดงได้ดังตาราง

	f(x)	f ' (x)	ผลสรุป
x < 4		+	f เพิ่ม
x = 4	2	ไม่มีอนุพันธ์	f มีค่าสูงสุดสัมพัทธ์
4 < x		–	f ลดลง



8

$$f(x) = \begin{cases} 2x + 1 & \text{ถ้า } x \leqslant 4 \\ 13 - x & \text{ถ้า } 4 < x \end{cases}$$

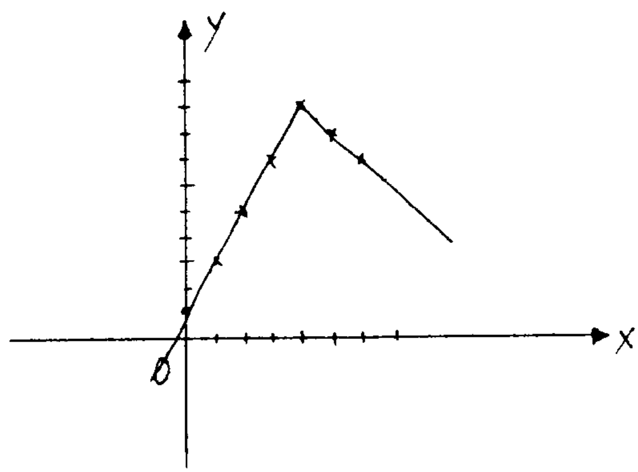
วิธีทำ ถ้า $x \leqslant 4$; $f'(x) = 2$

ถ้า $4 < x$; $f'(x) = -1$

แสดงว่าหาค่า $f'(4)$ ไม่ได้

เพราะฉะนั้น 4 เป็นค่าวิกฤตของ f

	f(x)	f'(x)	ผลสรุป
$x < 4$		+	f เพิ่มขึ้น
$x = 4$	9	ไม่มีอนุพันธ์	f มีค่าสูงสุดสัมพัทธ์
$4 < x$		–	f ลดลง



9

$$f(x) = \begin{cases} 2x + 9 & \text{ถ้า } x \leqslant -2 \\ x^2 + 1 & \text{ถ้า } -2 < x \end{cases}$$

วิธีทำ ถ้า $x \leqslant -2$; $f'(x) = 2$ $f'_-(-2) = 2$

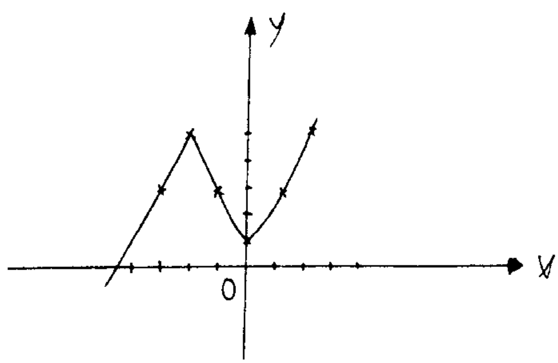
ถ้า $-2 < x$; $f'(x) = 2x$; $f'_+(-2) = 4$

แสดงว่าหาค่า $f'(-2)$ ไม่ได้

เพราะฉะนั้น -2 เป็นค่าวิกฤตของ f

และเพราะว่า $f'(x) = 0$ เมื่อ $x = 0$ ดังนั้น 0 เป็นค่าวิกฤตของ f ด้วย

	f(x)	f'(x)	ผลสรุป
$x < -2$		+	f เพิ่ม
$x = -2$	5	ไม่มีอนุพันธ์	f มีค่าสูงสุดสัมพัทธ์
$-2 < x < 0$		−	f ลดลง
$x = 0$	1	0	f มีค่าต่ำสุดสัมพัทธ์
$0 < x$		+	f เพิ่ม



10 $$f(x) = \begin{cases} (x-2)^2 - 3 & \text{ถ้า } x \leqslant 5 \\ \frac{1}{2}(x+7) & \text{ถ้า } 5 < x \end{cases}$$

วิธีทำ ถ้า $x \leqslant 5$; $f'(x) = 2(x-2)$; $f'_-(5) = 6$

ถ้า $5 < x$; $f'(x) = \frac{1}{2}$; $f'_+(5) = \frac{1}{2}$

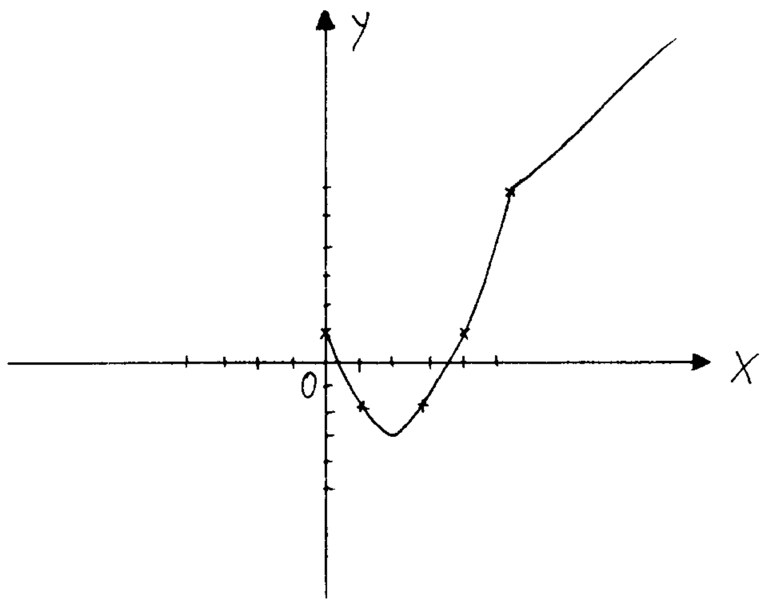
แสดงว่าหาค่า $f'(5)$ ไม่ได้

ดังนั้น 5 เป็นค่าวิกฤตของ f

และ $f'(x) = 0$ เมื่อ $x = 2$ ดังนั้น 2 เป็นค่าวิกฤตของ f

ผลสรุปแสดงได้ดังตาราง

	f(x)	f'(x)	ผลสรุป
$x < 2$		-	f ลดลง
$x = 2$	-3	0	f มีค่าต่ำสุดสัมพัทธ์
$2 < x < 5$		+	f เพิ่ม
$x = 5$	6	ไม่มีอนุพันธ์	f ไม่มีค่าปลายสุดสัมพัทธ์
$5 < x$		+	f เพิ่ม



11 $$f(x) = \begin{cases} 3x + 5 & \text{ถ้า } x < -1 \\ x^2 + 1 & \text{ถ้า } -1 \leqslant x < 2 \\ 7 - x & \text{ถ้า } 2 \leqslant x \end{cases}$$

วิธีทำ ถ้า $x < -1$; $f'(x) = 3$

ถ้า $-1 \leqslant x < 2$; $f'(x) = 2x$

ถ้า $2 \leqslant x$; $f'(x) = -1$

$f'_-(-1) = 3$ และ $f'_+(-1) = -2$ สรุปว่าหาค่า $f'(-1)$ ไม่ได้

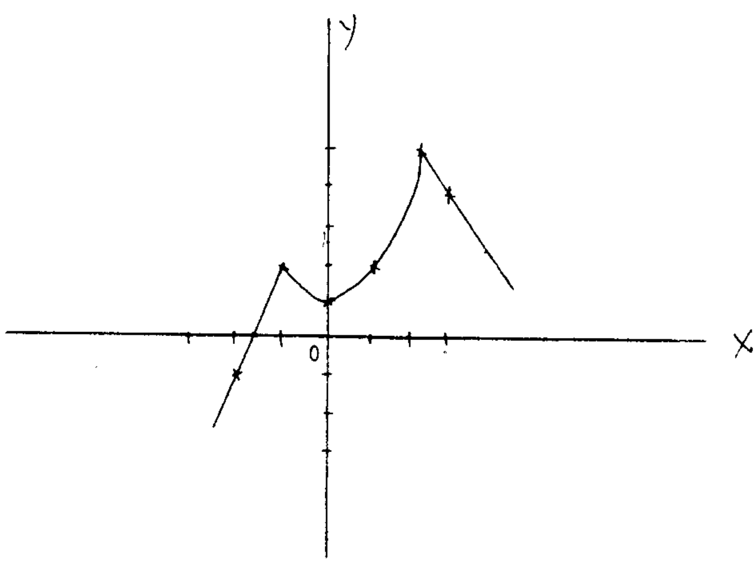
$f'_-(2) = 4$ และ $f'_+(2) = -1$ สรุปว่าหาค่า $f'(2)$ ไม่ได้

และเพราะว่า $f'(x) = 0$ เมื่อ $x = 0$

ดังนั้นค่าวิกฤตของ f คือ $-1, 0, 2$

ผลสรุปแสดงได้ดังตาราง

	f (x)	f '(x)	ผลสรุป
$x < -1$		+	f เพิ่ม
$x = -1$	2	ไม่มีอนุพันธ์	f มีค่าสูงสุดสัมพัทธ์
$-1 < x < 0$		−	f ลดลง
$x = 0$	1	0	f มีค่าต่ำสุดสัมพัทธ์
$0 < x < 2$		+	f เพิ่ม
$x = 2$	5	ไม่มีอนุพันธ์	f มีค่าสูงสุดสัมพัทธ์
$2 < x$		−	f ลดลง



12 $$f(x) = \begin{cases} (x+9)^2 - 8 & \text{ถ้า } x < -7 \\ -\sqrt{25 - (x+4)^2} & \text{ถ้า } -7 \leqslant x \leqslant 0 \\ (x-2)^2 - 7 & \text{ถ้า } 0 < x \end{cases}$$

วิธีทำ ถ้า $x < -7$; $f'(x) = 2(x+9)$

ถ้า $-7 \leqslant x \leqslant 0$; $f'(x) = (x+4)\,[25 - (x+4)^2]^{-\frac{1}{2}}$

ถ้า $0 < x$; $f'(x) = 2(x-2)$

แสดงว่า $f'_-(-7) = 4$ และ $f'_+(-7) = -\frac{3}{4}$ สรุปว่าหาค่า $f'(-7)$ ไม่ได้

$f'_-(0) = \frac{4}{3}$ และ $f'_+(0) = -4$ สรุปว่าหาค่า $f'(0)$ ไม่ได้

ดังนั้น -7 และ 0 เป็นค่าวิกฤตของ f

และเพราะว่า $f'(x) = 0$ เมื่อ $x = -9$

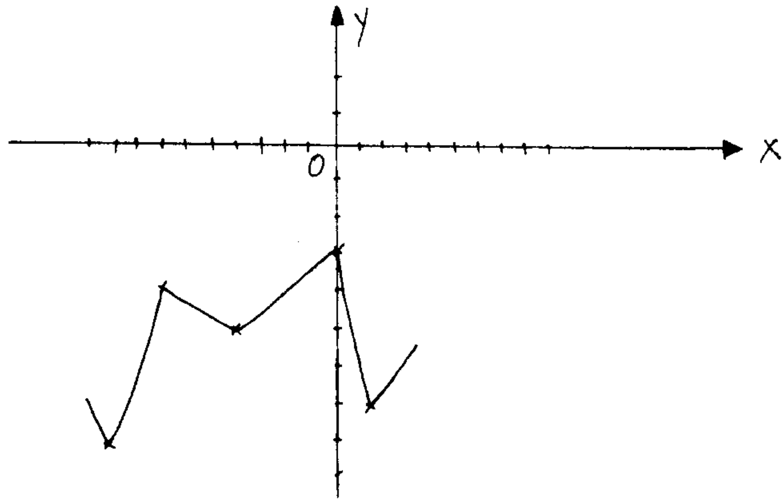
$f'(x) = 0$ เมื่อ $x = -4$

$f'(x) = 0$ เมื่อ $x = 2$

ดังนั้น $-9, -4, 2$ ก็เป็นค่าวิกฤตของ f ด้วย

เราจึงสรุปผลได้ดังตาราง

	$f(x)$	$f'(x)$	ผลสรุป
$x < -9$		$-$	f ลดลง
$x = -9$	-8	0	f มีค่าต่ำสุดสัมพัทธ์
$-9 < x < -7$		$+$	f เพิ่ม
$x = -7$	-4	ไม่มีอนุพันธ์	f มีค่าสูงสุดสัมพัทธ์
$-7 < x < -4$		$-$	f ลดลง
$x = -4$	-5	0	f มีค่าต่ำสุดสัมพัทธ์
$-4 < x < 0$		$+$	f เพิ่ม
$x = 0$	-3	ไม่มีอนุพันธ์	f มีค่าสูงสุดสัมพัทธ์
$0 < x < 2$		$-$	f ลดลง
$x = 2$	-7	0	f มีค่าต่ำสุดสัมพัทธ์
$2 < x$		$+$	f เพิ่มขึ้น



13 จงหาค่าของ a และ b ซึ่งทำให้ฟังก์ชัน $f(x) = x^3+ax^2+b$ จะมีค่าปลายสุดสัมพัทธ์ที่ (2,3)

วิธีทำ $f(x) = x^3+ax^2+b$

$f'(x) = 3x^2+2ax$

f(x) มีค่าปลายสุดสัมพัทธ์ที่ (2,3)

แสดงว่า $f(2) = 3$ และ $f'(2) = 0$

เพราะฉะนั้น $2^3+a(2)^2+b = 3$

$b = -5-4a$

และ $3(2)^2+4a = 0$

$a = -3$

$b = -5-4(-3) = 7$

นั่นคือ $a = -3$; $b = 7$

---

14 จงหาค่าของ a, b และ c ซึ่งทำให้ฟังก์ชัน $f(x) = ax^2+bx+c$ มีค่าสูงสุดสัมพัทธ์ของ 7 ที่ 1 และกราฟ $y = f(x)$ จะผ่านจุด $(2, -2)$

วิธีทำ $f(x) = ax^2+bx+c$

$f'(x) = 2ax+b$

$f(x)$ มีค่าสูงสุดสัมพัทธ์ที่ 1 เป็น 7

แสดงว่า $f(1) = 7$ และ $f'(1) = 0$

ดังนั้น $a(1)^2+b(1)+c = 7$

$$a+b+c = 7$$

และ $\quad 2a+b = 0$

และกราฟผ่านจุด $(2, -2)$

ดังนั้น $\quad 4a+2b+c = -2$

แก้สมการทั้งสามหาค่า a, b และ c ได้ดังนี้

$a = -9$, $b = 18$ และ $c = -2$

---

15 จงหาค่าของ a, b , c และ d ซึ่งทำให้ฟังก์ชัน $f(x) = ax^3+bx^2+cx+d$ มีค่าปลายสุดสัมพัทธ์ที่ $(1,2)$ และ $(2,3)$

วิธีทำ $f(x) = ax^3+bx^2+cx+d$

$f'(x) = 3ax^2+2bx+c$

$f(x)$ มีค่าปลายสุดสัมพัทธ์ที่ $(1,2)$ และ $(2,3)$

แสดงว่า $f(1) = 2$; $f'(1) = 0$

และ $f(2) = 3$; $f'(2) = 0$

เพราะฉะนั้น

$$a+b+c+d = 2$$

$$3a+2b+c = 0$$

$$8a+4b+2c+d = 3$$

$$12a+4b+c = 0$$

แก้สมการหาค่า a,b,c และ d ได้ดังนี้

$a = -2$, $b = 9$, $c = -12$ และ $d = 7$

4.4 สรุปเรื่องอนุพันธ์อันดับสูงของฟังก์ชัน และการใช้อนุพันธ์อันสองทดสอบหาค่าปลายสุดสัมพัทธ์

ถ้า f' เป็นอนุพันธ์ของฟังก์ชัน f แล้ว f' ก็เป็นฟังก์ชันด้วย และเรียกว่า f' เป็นอนุพันธ์อันดับหนึ่งของฟังก์ชัน f ถ้าสามารถหาอนุพันธ์ของฟังก์ชัน f' ได้ก็จะเรียกว่าเป็นอนุพันธ์อันดับสองของฟังก์ชัน f และเขียนแทนด้วย f'' และ f'' ก็เป็นฟังก์ชัน ถ้าสามารถหาอนุพันธ์ของฟังก์ชัน f'' ได้อีกก็จะเรียกว่าเป็นอนุพันธ์อันดับสามของฟังก์ชัน f และเขียนแทนด้วย f'''

ถ้า n เป็นจำนวนเต็มบวกซึ่งมากกว่า 1 แล้วอนุพันธ์อันดับ n ของฟังก์ชัน f ก็คืออนุพันธ์อันดับหนึ่งของอนุพันธ์อันดับ $(n-1)$ ของ f และเขียนแทนด้วย $f^{(n)}$ หรือ $\frac{d^nf}{dx^n}$ ถ้า $y = f(x)$ ก็เขียนแทนด้วย $\frac{d^ny}{dx^n}$

เราสามารถใช้อนุพันธ์อันดับสองของฟังก์ชัน f เพื่อทดสอบหาค่าปลายสุดสัมพัทธ์ได้โดยอาศัยทฤษฎีต่อไปนี้

ทฤษฎี ให้ c เป็นค่าวิกฤตของฟังก์ชัน f ซึ่งมีอนุพันธ์อันดับหนึ่งในช่วง (a, b) และ $f'(c) = 0$ โดย $c \in (a, b)$ และถ้าหา $f''(c)$ ได้แล้ว

1) ถ้า $f''(c) < 0$ แล้ว f มีค่าสูงสุดสัมพัทธ์ที่ c
2) ถ้า $f''(c) > 0$ แล้ว f มีค่าต่ำสุดสัมพัทธ์ที่ c

หมายเหตุ

ถ้า $f''(c) = 0$ เราใช้อนุพันธ์อันดับสองทดสอบไม่ได้ก็ต้องใช้อนุพันธ์อันดับหนึ่งทดสอบตามทฤษฎีในหัวข้อ 4.3

แบบฝึกหัดที่ 4.4

ในแบบฝึกหัดข้อ 1 ถึงข้อ 5 จงหาอนุพันธ์อันดับ 1 และอนุพันธ์อันดับ 2 ของฟังก์ชันที่กำหนดให้

1) $f(x) = x^5 - 2x^3 + x$

วิธีทำ $f'(x) = 5x^4 - 6x^2 + 1$

$f''(x) = 20x^3 - 12x$

---

2) $g(s) = 2s^4 - 4s^3 + 7s - 1$

วิธีทำ $g'(s) = 8s^3 - 12s^2 + 7$

$g''(s) = 24s^2 - 24s$

---

3) $f(x) = \sqrt{x^2 + 1}$

วิธีทำ $f(x) = (x^2 + 1)^{\frac{1}{2}}$

$$f'(x) = \frac{1}{2}(x^2 + 1)^{-\frac{1}{2}}(2x)$$

$$= x(x^2 + 1)^{-\frac{1}{2}} = \frac{x}{\sqrt{x^2 + 1}}$$

$$f''(x) = x\left(-\frac{1}{2}\right)(x^2 + 1)^{-3/2}(2x) + (x^2 + 1)^{-\frac{1}{2}}$$

$$= \frac{-x^2}{(x^2 + 1)^{3/2}} + \frac{1}{(x^2 + 1)^{\frac{1}{2}}}$$

$$= \frac{1}{(x^2 + 1)^{3/2}} = (x^2 + 1)^{-3/2}$$

4) $g(r) = \sqrt{r} + \dfrac{1}{\sqrt{r}}$

วิธีทำ $g(r) = r^{\frac{1}{2}} + r^{-4}$

$$g'(r) = \frac{1}{2}r^{-\frac{1}{2}} - \frac{1}{2}r^{-\frac{3}{2}}$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{r}} - \frac{1}{2\sqrt{r^3}}$$

$$g''(r) = -\frac{1}{4}r^{-\frac{3}{2}} + \frac{3}{4}r^{-\frac{5}{2}}$$

$$= -\frac{1}{4\sqrt{r^3}} + \frac{3}{4\sqrt{r^5}}$$

---

5) $G(x) = \dfrac{2 - \sqrt{x}}{2 + \sqrt{x}}$

วิธีทำ $G\ (x) = \dfrac{2 - 4 - T}{2 + \sqrt{x}}$

$$G'(x) = \frac{(2 + \sqrt{x})\left(-\frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}\right) - (2 - \sqrt{x})\left(\frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}\right)}{(2 + \sqrt{x})^2}$$

$$= \frac{-\frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}(2 + \sqrt{x} + 2 - \sqrt{x})}{(2 + \sqrt{x})^2}$$

$$= -2x^{-\frac{1}{2}}(2 + \sqrt{x})^{-2}$$

$$G''(x) = (-2)\left[(x^{-\frac{1}{2}})(-2)(2 + \sqrt{x})^{-3}\left(\frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}\right) + (2 + \sqrt{x})^{-2}\left(-\frac{1}{2}x^{-\frac{3}{2}}\right)\right]$$

$$= (-2)\left[-x^{-1}(2 + \sqrt{x})^{-3} + (2 + \sqrt{x})^{-2}\left(-\frac{1}{2}x^{-\frac{3}{2}}\right)\right]$$

$$= (-2)(-x^{-1})(2 + \sqrt{x})^{-3}\left[1 + (2 + \sqrt{x})\left(\frac{1}{2}\sqrt{x}\right)\right]$$

$$= \frac{2}{x}(2 + \sqrt{x})^{-3}\left(1 + \sqrt{x} + \frac{x}{2}\right)$$

---

6 จงหา $\frac{d^3y}{dx^3}$ ถ้า $y = x^4 - 2x^2 + x - 5$

วิธีทำ

$$y = x^4 - 2x^2 + x - 5$$

$$\frac{dy}{dx} = 4x^3 - 4x + 1$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = 12x^2 - 4$$

$$\frac{d^3y}{dx^3} = 24x$$

---

7 จงหา $\frac{d^3s}{dt^3}$ ถ้า $s = \sqrt{4t + 1}$

วิธีทำ

$$s = (4t + 1)^{1/2}$$

$$\frac{ds}{dt} = \frac{1}{2}(4t + 1)^{-1/2}(4)$$

$$= \frac{2}{\sqrt{4t + 1}}$$

$$\frac{d^2s}{dt^2} = 2(-\frac{1}{2})\ (4t + 1)^{-3/2}(4)$$

$$= \frac{-4}{\sqrt{(4t + 1)^3}}$$

$$\frac{d^3s}{dt^3} = (-4)(-\frac{3}{2})(4t + 1)^{-5/2}(4)$$

$$= 24(4t + 1)^{-5/2}$$

---

8 จงหา $\frac{d^4f}{dx^4}$ ถ้า $f(x) = \frac{2}{x - 1}$

วิธีทำ

$$f(x) = 2(x - 1)^{-1}$$

$$\frac{df}{dx} = 2(-1)(x - 1)^{-2}$$

$$= -2(x - 1)^{-2}$$

$$\frac{d^2f}{dx^2} = 4(x - 1)^{-3}$$

$$\frac{d^3f}{dx^3} = -12(x - 1)^{-4}$$

$$\frac{d^4f}{dx^4} = 48(x - 1)^{-5}$$

---

9 จงหา $\frac{d^3u}{dv^3}$ ถ้า $u = v\sqrt{v - 2}$

วิธีทำ

$$u = v(v - 2)^{\frac{1}{2}}$$

$$\frac{du}{dv} = v\left(\frac{1}{2}\right)(v - 2)^{-\frac{1}{2}} + (v - 2)^{\frac{1}{2}}$$

$$= (v - 2)^{-\frac{1}{2}}\frac{(3v - 4)}{2}$$

$$\frac{d^2u}{dv^2} = \frac{1}{2}\left[(v - 2)^{-\frac{1}{2}}(3) + (3v - 4)\left(-\frac{1}{2}\right)(v - 2)^{-3/2}\right]$$

$$= \frac{1}{4}(v - 2)^{-3/2}(3v - 8)$$

$$\frac{d^3u}{dv^3} = \frac{1}{4}\left[3(v - 2)^{-3/2} + (3v - 8)\left(-\frac{3}{2}\right)(v - 2)^{-5/2}\right]$$

$$= \overline{4}(v - 2)^{-5/2}\left[3(v - 2) - \frac{3}{2}(3v - 8)\right]$$

$$= \frac{1}{8}(v - 2)^{-5/2}(12 - 3v)$$

---

10 ให้ $x^3 + y^3 = 1$. จงแสดงว่า $\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{-2x}{y^5}$

วิธีทำ

$$x^3 + y^3 = 1$$

$$3x^2 + 3y^2\frac{dy}{dx} = 0$$

$$3y^2\frac{dy}{dx} = -3x^2$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-x^2}{y^2}$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{y^2(-2x) - (-x^2)(2y)dy/dx}{y^4}$$

แทนค่า $\frac{dy}{dx} = \frac{-x^2}{y^2}$ จะได้

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{-2xy^2 + 2x^2y\,(-x^2/y^2)}{y^4}$$

$$= \frac{-2x(y^2 + x^3/y)}{y^4}$$

$$= \frac{-2x\left(\frac{y^3 + x^3}{y}\right)}{y^4}$$

$$= \frac{-2x(1/y)}{y^4}$$

$$= \frac{-2x}{y^5}$$

---

11 ให้ $b^2x^2 - a^2y^2 = a^2b^2$ (a,b) เป็นค่าคงที่ จงหา $\frac{d^2y}{dx^2}$

วิธีทำ $b^2x^2 - a^2y^2 = a^2b^2$

$$2b^2x - 2a^2y\frac{dy}{dx} = 0$$

$$a^2y\frac{dy}{dx} = b^2x$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{b^2x}{a^2y}$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{(a^2y)(b^2) - (b^2x)\ a^2dy/dx}{a^4y^2}$$

$$= \frac{a^2b^2y - a^2b^2x(b^2x/a^2y)}{a^4y^2}$$

$$= \frac{a^2b^2y^2 - b^4x^2}{a^4y^3}$$

แทนค่า $b^2x^2 = a^2y^2 + a^2b^2$ จะได้

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{a^2b^2y^2 - b^2a^2y^2 - a^2b^4}{a^4y^2} = -\frac{b^4}{a^2y^2}$$

---

12 จงหาอัตราการเปลี่ยนแปลงของความชันของเส้นสัมผัสกราฟ $y = 2x^3 - 6x^2 - x + 1$ ที่จุด (3, −2)

วิธีทำ ความชันของเส้นสัมผัสกราฟ $y = f(x)$ ณ จุด (x, y) ใด ๆ คือ $\frac{dy}{dx}$

จาก $y = 2x^3 - 6x^2 - x + 1$

$$\frac{dy}{dx} = 6x^2 - 12x - 1$$

อัตราการเปลี่ยนแปลงของ $\frac{dy}{dx}$ ก็คือ $\frac{d^2y}{dx^2}$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = 12x - 12$$

ที่จุด (3, −2) $\frac{d^2y}{dx^2} = 36 - 12 = 24$

เพราะฉะนั้นที่จุด (3,−2) การเปลี่ยนแปลงของความชันของเส้นสัมผัสกราฟเป็น 24 เท่าของการเปลี่ยนแปลงของ x

---

13 จงหาความชันของเส้นสัมผัส ณ จุดบนกราฟ $y = x^4 + x^3 - 3x^2$ ซึ่งมีอัตราการเปลี่ยนแปลงของความชันของเส้นสัมผัสเป็น 0

วิธีทำ ความชันของเส้นสัมผัสกราฟ $y = f(x)$ ณ จุด (x,y) ใด ๆ คือ

จาก $y = x^4 + x^3 - 3x^2$

$$\frac{dy}{dx} = 4x^3 + 3x^2 - 6x$$

อัตราการเปลี่ยนแปลงของความชันของเส้นสัมผัสคือ $\frac{d^2y}{dx^2} = 0$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = 12x^2 + 6x - 6 = 0$$

$$2x^2 + x - 1 = 0$$

$$(2x - 1)(x + 1) = 0$$

$$x = -1, \frac{1}{2}$$

$$x = -1; \quad y = 1 - 1 - 3 = -3$$

$$x = \frac{1}{2}, \quad y = \frac{1}{16} + \frac{1}{8} - \frac{3}{4} = -\frac{9}{16}$$

เพราะฉะนั้นความชันของเส้นสัมผัสที่จุด (−1,−3) เท่ากับ 5

ความชันของเส้นสัมผัสที่จุด $(\frac{1}{2}, \frac{9}{16})$ เท่ากับ $-\frac{7}{4}$

จากข้อ 14 ถึงข้อ 24 จงหาค่าปลายสุดสัมพัทธ์ของฟังก์ชัน โดยใช้อนุพันธ์อันดับสองทดสอบ ถ้าอนุพันธ์อันดับสองใช้ไม่ได้ ก็ให้ใช้อนุพันธ์อันดับหนึ่งทดสอบ

14 $f(x) = 3x^2 - 2x + 1$

วิธีทำ

$$f(x) = 3x^2 - 2x + 1$$
$$f'(x) = 6x - 2$$
$$f''(x) = 6$$

ให้ $f'(x) = 0$

$$6x - 2 = 0$$
$$x = \frac{1}{3} = \text{ค่าเชิงวิกฤตของ } f$$

	$f''(x)$	$f'(x)$	$f''(x)$	ผลสรุป
$x = \frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$	0	+	f มีค่าต่ำสุดสัมพัทธ์

15 $g(x) = x^3 - 5x + 6$

วิธีทำ

$$g(x) = x^3 - 5x + 6$$
$$g'(x) = 3x^2 - 5$$
$$g''(x) = 6x$$

ให้ $g'(x) = 0$

$$3x^2 - 5 = 0$$
$$x = \pm\sqrt{\frac{5}{3}} \text{ ค่าเชิงวิกฤตของ } f$$

	$g(x)$	$g'(x)$	$g''(x)$	ผลสรุป
$x = \sqrt{\frac{5}{3}}$		0	+	f มีค่าต่ำสุดสัมพัทธ์
$x = -\sqrt{\frac{5}{3}}$		0	-	f มีค่าสูงสุดสัมพัทธ์

16 $\quad f(x) = -4x^3 + 3x^2 + 18x$

วิธีทำ $\quad f'(x) = -12x^2 + 6x + 18$

$f''(x) = -24x + 6$

ให้ $\quad f'(x) = 0$

$-12x^2 + 6x + 18 = 0$

$2x^2 - x - 3 = 0$

$x = -1, \frac{3}{2}$

ค่าเชิงวิกฤตของ f คือ -1 และ $\frac{3}{2}$

	f(x)	f'(x)	f"(x)	ผลสรุป
$x = -1$	-11	0	+	f มีค่าสูงสุดสัมพัทธ์
$x = \frac{3}{2}$	$\frac{81}{4}$	0	-	f มีค่าต่ำสุดสัมพัทธ์

17 $\quad h(x) = 2x^3 - 9x^2 + 27$

วิธีทำ $\quad h(x) = 2x^3 - 9x^2 + 27$

$h'(x) = 6x^2 - 18x$

$h''(x) = 12x - 18$

ให้ $\quad h'(x) = 0$

$6x^2 - 18x = 0$

$6x(x - 3) = 0$

$x = 0 \quad 3$

ค่าเชิงวิกฤตของ f คือ 0 และ 3

	h(x)	h'(x)	h"(x)	ผลสรุป
x = 0	27	0	-	f มีค่าต่ำสุดสัมพัทธ์
x = 3	0	0	+	f มีค่าสูงสุดสัมพัทธ์

18/196 $f(x) = (x - 4)^2$

วิธีทำ $f(x) = x^2 - 8x + 16$

$f'(x) = 2x - 8$

$f''(x) = 2$

ให้ $f'(x) = 0$

$2x - 8 = 0$

$x = 4$ เป็นค่าเชิงวิกฤต

	f(x)	f'(x)	f"(x)	ผลสรุป
x = 4	0	0	+	f มีค่าต่ำสุดสัมพัทธ์

19 $g(x) = (x + 2)^3$

วิธีทำ $g(x) = x^3 + 6x^2 + 12x + 8$

$g'(x) = 3x^2 + 12x + 12$

$g''(x) = 6x + 12$

ให้ $g'(x) = 0$

$3x^2 + 12x + 12 = 0$

$x^2 + 4x + 4 = 0$

$(x + 2)^2 = 0$

$x = -2$ เป็นค่าเชิงวิกฤต