ดังนั้น $g(-2) = 0 = g'(-2) = g''(-2)$

และ $g(x)$ ไม่มีค่าปลายสุดสัมพัทธ์ที่ $x = -2$

เพราะถ้า $x < -2$, $g(x) < g(-2)$ และถ้า $x > -2$, $g(x) > g(-2)$

20 $G(x) = (x-3)^4$

วิธีทำ

$$G(x) = x^4 - 12x^3 + 54x^2 - 108x + 81$$

$$G'(x) = 4x^3 - 36x^2 + 108x - 108$$

$$G''(x) = 12x^2 - 72x + 108$$

ให้ $G'(x) = 0$

$$4x^3 - 36x^2 + 108x - 108 = 0$$

$$x^3 - 9x^2 + 27x - 27 = 0$$

$$(x-3)^3 = 0$$

$x = 3$ เป็นค่าเชิงวิกฤต

$G(3) = 0 = G'(3) = G''(3)$ และทดสอบโดยใช้อนุพันธ์อันดับ 1

จะได้ว่า G มีค่าต่ำสุดสัมพัทธ์ที่ $x = 3$

	$G(x)$	$G'(x)$	ผลสรุป
$x < 3$		-	G ลดลง
$x = 3$	0	0	G มีค่าต่ำสุดสัมพัทธ์
$x > 3$		+	G เพิ่ม

21 $f(x) = x(x-1)^3$

วิธีทำ

$$f(x) = x^4 - 3x^3 + 3x^2 - x$$

$$f'(x) = 4x^3 - 9x^2 + 6x - 1$$

$$f''(x) = 12x^2 - 18x + 6$$

ให้ $f'(x) = 0$

$$4x^3 - 9x^2 + 6x - 1 = 0$$
$$(x-1)^2(4x-1) = 0$$
$$x = 1, \frac{1}{4}$$

ดังนั้นค่าเชิงวิกฤตของ f คือ $\frac{1}{4}$ และ 1

$f(1) = f'(1) = f''(1) = 0$ และไม่มีค่าปลายสุดสัมพัทธ์

ที่จุด $x = 1$ เพราะถ้า $x < 1$, $f(x) < f(1)$ และถ้า $x > 1$ แล้ว

$f(x) > f(1)$

	$f(x)$	$f'(x)$	ผลสรุป
$x < \frac{1}{4}$		-	f ลดลง
$x = \frac{1}{4}$	$\frac{27}{256}$	0	f มีค่าต่ำสุดสัมพัทธ์
$x > \frac{1}{4}$		+	f เพิ่ม

22 $\quad h(x) = x\sqrt{x+3}$

วิธีทำ

$$h(x) = x(x+3)^{\frac{1}{2}}$$
$$h'(x) = \frac{1}{2}x(x+3)^{-\frac{1}{2}} + (x+3)^{\frac{1}{2}}$$
$$h''(x) = \frac{1}{2}[(x)(-\frac{1}{2})(x+3)^{-\frac{3}{2}} + (x+3)^{-\frac{1}{2}}] + \frac{1}{2}(x+3)^{-\frac{1}{2}}$$
$$= \frac{1}{2}(x+3)^{-\frac{1}{2}}[-\frac{x}{2}(x+3)^{-1} + 1 + 1]$$
$$= \frac{1}{2}(x+3)^{-\frac{1}{2}}[-\frac{x}{2}(x+3)^{-1} + 2]$$

ให้ $h'(x) = 0$

$$\frac{1}{2}x(x+3)^{-\frac{1}{2}} + (x+3)^{\frac{1}{2}} = 0$$
$$(x+3)^{-\frac{1}{2}}[\frac{x}{2} + (x+3)] = 0$$

$$(x+3)^{-\frac{1}{2}}\frac{(3x+6)}{2} = 0$$

$$\frac{3x+6}{2} = 0$$

$x = -2$ เป็นค่าวิกฤตของ h

	h(x)	h'(x)	h''(x)	ผลสรุป
x = -2	- 2	0	+	f มีค่าต่ำสุดสัมพัทธ์

23 $\quad f(x) = x\sqrt{8-x^2}$

วิธีทำ $\quad f(x) = x(8-x^2)^{\frac{1}{2}}$

$$f'(x) = \frac{1}{2}x(8-x^2)^{-\frac{1}{2}}(-2x) + (8-x^2)^{\frac{1}{2}}$$

$$= -x^2(8-x^2)^{-\frac{1}{2}} + (8-x^2)^{\frac{1}{2}}$$

$$= (8-x^2)^{-\frac{1}{2}}(8-2x^2)$$

ให้ $f'(x) = 0$

$$0 = (8-x^2)^{-\frac{1}{2}}(8-2x^2)$$

$$8-2x^2 = 0$$

$x = \pm 2$ เป็นค่าเชิงวิกฤตของ f

$$f''(x) = (8-x^2)^{-\frac{1}{2}}(-4x) + (8-2x^2)\left(-\frac{1}{2}\right)(8-x^2)^{-\frac{3}{2}}(-2x)$$

$$= -4x(8-x^2)^{-\frac{1}{2}} + x(8-2x^2)(8-x^2)^{-\frac{3}{2}}$$

	f(x)	f'(x)	f''(x)	ผลสรุป
x = -2	- 4	0	+	f มีค่าต่ำสุดสัมพัทธ์
x = 2	4	0	-	f มีค่าสูงสุดสัมพัทธ์

24 $\quad f(x) = 4x^{\frac{1}{2}} + 4x^{-\frac{1}{2}}$

วิธีทำ

$$f(x) = 4x^{\frac{1}{2}} + 4x^{-\frac{1}{2}}$$

$$f'(x) = 2x^{-\frac{1}{2}} - 2x^{-\frac{3}{2}}$$

$$f''(x) = -x^{-\frac{3}{2}} + 3x^{-\frac{5}{2}}$$

ให้ $\quad t'(x) = 0$

$$2x^{-\frac{1}{2}} - 2x^{-\frac{3}{2}} = 0$$

$$x^{-\frac{3}{2}}(x - 1) = 0$$

$x = 1$ เป็นค่าวิกฤตของ f

	$f(x)$	$f'(x)$	$f''(x)$	ผลสรุป
$x = 1$	8	0	+	f มีค่าต่ำสุดสัมพัทธ์

4.5 สรุปเรื่องปัญหาเกี่ยวกับค่าปลายสุดสัมบูรณ์เพิ่มเติม

ทฤษฎี ให้ f เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องบนช่วง I ซึ่งมี c อยู่ในช่วงนี้ ถ้า f(c) เป็นค่าปลายสุดสัมพัทธ์บน I และ c เป็นค่าเดียวใน I ซึ่ง f มีค่าปลายสุดสัมพัทธ์แล้ว f(c) เป็นค่าปลายสุดสัมบูรณ์ของ f บนช่วง I และ

1) ถ้า f(c) เป็นค่าสูงสุดสัมพัทธ์ของ f บนช่วง I แล้ว f(c) เป็นค่าสูงสุดสัมบูรณ์ของ f บนช่วง I ด้วย
2) ถ้า f(c) เป็นค่าต่ำสุดสัมพัทธ์ของ f บนช่วง I แล้ว f(c) เป็นค่าต่ำสุดสัมบูรณ์บนช่วง I ด้วย

แบบฝึกหัดที่ 4.5

จงหาค่าสูงสุด (ต่ำสุด) สัมบูรณ์ของฟังก์ชันต่อไปนี้ในช่วงที่กำหนดให้

1 $f(x) = x^2$; $[-3, 2]$

วิธีทำ ฟังก์ชัน f ต่อเนื่องบนช่วง $[-3,2]$

$f'(x) = 2x$

จะเห็นว่า f(x) มีอนุพันธ์สำหรับทุกค่าของ x ที่อยู่ในช่วง $[-3,2]$

และ $f'(x) = 0$ เมื่อ $x = 0$

ดังนั้นค่าวิกฤตในช่วง $[-3,2]$ คือ 0

ใช้อนุพันธ์อันดับ 1 ทดสอบว่า f(0) เป็นค่าสูงสุดหรือต่ำสุดสรุปผลดังนี้

	f(x)	f'(x)	ผลสรุป
$x < 0$		$-$	f ลดลง
$x = 0$	0	0	f มีค่าต่ำสุดสัมพัทธ์
$x > 0$		$+$	f เพิ่มขึ้น

ดังนั้น $f(0) = 0$ เป็นค่าต่ำสุดสัมบูรณ์บนช่วง $[-3,2]$

2 $F(x) = \dfrac{x+2}{x-2}$; $[-4, 4]$

วิธีทำ

$$F'(x) = \frac{(x-2)-(x+2)}{(x-2)^2}$$

$$= \frac{-4}{(x-2)^2}$$

จะเห็นว่า F ไม่ต่อเนื่องและไม่มีอนุพันธ์ที่ $x = 2$

ดังนั้น F ไม่มีค่าสูงสุด (ต่ำสุด) สัมบูรณ์ชนช่วง $[-4, 4]$

3 $g(x) = 4x^2 - 2x + 1 \quad ; \quad (-\infty, +\infty)$

วิธีทำ ฟังก์ชัน g ต่อเนื่องบนช่วง $(-\infty, +\infty)$

$g'(x) = 8x - 2$

g(x) มีอนุพันธ์สำหรับทุกค่าของ x ที่อยู่ในช่วง $(-\infty, +\infty)$

ให้ $g'(x) = 0 = 8x - 2$

$x = \frac{1}{4}$

ค่าวิกฤตของ g คือ $\frac{1}{4}$

ใช้อนุพันธ์ที่หนึ่งทดสอบว่า $g(\frac{1}{4})$ เป็นค่าสูงสุดหรือต่ำสุดสัมบูรณ์

สรุปได้ดังตาราง

	$g(x)$	$g'(x)$	ผลสรุป
$x < \frac{1}{4}$		$-$	f ลดลง
$x = \frac{1}{4}$	$\frac{3}{4}$	0	f มีค่าต่ำสุดสัมบูรณ์
$\frac{1}{4} < x$		$+$	f เพิ่มขึ้น

4 $f(x) = \dfrac{x^2 - 30}{x - 4} \quad ; \quad (-\infty, 4)$

วิธีทำ ฟังก์ชัน f ต่อเนื่องบนช่วง $(-\infty, 4)$

$$f'(x) = \frac{(x-4)(2x) - (x^2 - 30)}{(x-4)^2}$$

$$= \frac{2x^2 - 8x - x^2 + 30}{(x-4)^2}$$

$$= \frac{x^2 - 8x + 30}{(x-4)^2}$$

ให้ $f'(x) = 0$

แสดงว่า $x^2 - 8x + 30 = 0$

ไม่สามารถหา x ที่เป็นจริงและทำให้ $f'(x) = 0$ ได้

ดังนั้น f ไม่มีค่าปลายสุดสัมพัทธ์บนช่วง $(-\infty, 4)$

5 สนามรูปสี่เหลี่ยมผืนผ้าซึ่งมีพื้นที่ 2700 ตารางเมตร ต้องการล้อมรั้วโดยรอบและรั้วแบ่งครึ่งสนาม ซึ่งรั้วสำหรับแบ่งครึ่งสนามราคาเมตรละ 80 บาท ส่วนรั้วโดยรอบสนามราคาเมตรละ 120 บาท จงหาขนาดของสนามซึ่งจะเสียค่ารั้วน้อยที่สุด

วิธีทำ ให้สนามยาว x เมตร

และ กว้าง y เมตร

ให้ค่าทำรั้วทั้งหมดเป็น $f(x)$

ดังนั้น $f(x) = 120(2x + 2y) + 80y$

$$= 240x + 320y$$

แต่พื้นที่สนามทั้งหมดเท่ากับ 2700 ตารางเมตร

เพราะฉะนั้น $xy = 2700$

$$y = \frac{2700}{x}$$

นั่นคือ $f(x) = 240x + 320\left(\frac{2700}{x}\right)$

x ต้องอยู่ในช่วง $(0, +\infty)$ และ f ต่อเนื่องตลอดช่วงนี้

$$f'(x) = 240 - \frac{864000}{x^2}$$

ให้ $f'(x) = 0 = 240 - \frac{864000}{x^2}$

$$0 = \frac{240x^2 - 864000}{x^2}$$

$$240x^2 - 864000 = 0$$

$$x^2 = 3600$$

$$x = 60$$

ดังนั้น 60 เป็นค่าวิกฤตของ f

ใช้อนุพันธ์อันดับ 2 ทดสอบว่า f(60) เป็นค่าต่ำสุดหรือไม่

$$f''(x) = \frac{864000}{x^3} > 0$$

แสดงว่า f(60) เป็นค่าต่ำสุดสัมพัทธ์ของ f ซึ่งมีเพียงค่าเดียวใน $(0, \infty)$

เพราะว่าสนามมีพื้นที่เท่ากับ $xy = 2700$ ถ้า $x = 60$ จะได้ $y = 45$

ดังนั้นสนามจะต้องกว้าง 45 เมตร ยาว 60 เมตร จึงจะเสียค่ารั้วน้อยที่สุด

6. ถังเปิดรูปสี่เหลี่ยมผืนผ้าซึ่งมีฐานเป็นรูปสี่เหลี่ยมจัตุรัส และมีปริมาตร 125 ล.บ.เมตร ค่าวัสดุที่ใช้ทำก้นถังตารางเมตรละ 160 บาท และวัสดุสำหรับด้านข้างตารางเมตรละ 80 บาท จงหาขนาดของถังที่มีความจุเท่าเดิมแต่เสียค่าวัสดุน้อยที่สุด

วิธีทำ ให้ถังมีฐานยาวด้านละ x เมตร

และถังสูง y เมตร

ถังนี้มีปริมาตร $= x^2y = 125$ ล.บ.เมตร ....(A)

ให้ f(x) เป็นค่าวัสดุที่ใช้ทำถัง

$$f(x) = 160x^2 + 80\ (4xy)$$

$$= 160x^2 + 320\ xy$$

จาก (A) ได้ $y = \frac{125}{x^2}$

$$f(x) = 160x^2 + \frac{320\ (125)}{x}$$

โดเมนของ f คือ $(0, \infty)$

$$f'(x) = 320x - \frac{320(125)}{x^2}$$

เมื่อ $x = 0$ เราหาค่า $f'(x)$ ไม่ได้แต่ $x =$ ไม่อยู่ในโดเมนของ f

ให้ $f'(x) = 0$

$$320x - \frac{320(125)}{x^2} = 0$$

$$320x^3 - 320(125) = 0$$

$$x^3 = 125$$

$$x = 5$$

ดังนั้น 5 เป็นค่าวิกฤตของ f

ใช้อนุพันธ์อันดับ 2 ทดสอบว่า f(5) เป็นค่าต่ำสุดสัมพัทธ์หรือไม่

$$f''(x) = 320 + \frac{320(250)}{x^3} > 0$$

แสดงว่า f(5) เป็นค่าต่ำสุดสัมพัทธ์ของ f ซึ่งมีเพียงค่าเดียวใน $(0, \infty)$ เพราะว่าปริมาตรของถังคือ $x^2y = 125$ ถ้า $x = 5$ จะได้ $y = 5$ ดังนั้นจะต้องทำถังซึ่งมีฐานจัตุรัสด้านละ 5 เมตร และสูง 5 เมตร จึงจะได้ถังมีปริมาตรตามต้องการและเสียค่าวัสดุน้อยที่สุด

4.6 สรุปเรื่องความเว้าและจุดเปลี่ยนความเว้า (Concavity and Points of Inflection)

นิยาม 4.6.1 กราฟของฟังก์ชัน f เป็นโค้งหงายที่จุด $(c, f(c))$ ถ้า $f'(c)$ มีค่า (exist) และถ้ามีช่วงเปิด I ที่มี c ซึ่งทุก ๆ ค่าของ $x \neq c$ ใน I จุดทุกจุด $(x, f(x))$ บนกราฟจะต้องอยู่เหนือเส้นสัมผัสกับกราฟที่จุด $(c, f(c))$

นิยาม 4.6.2 กราฟของฟังก์ชัน f เป็นโค้งเว้าคว่ำ ที่จุด $(c, f(c))$ ถ้า $f'(c)$ มีค่า และถ้ามีช่วงเปิด I ที่มี c ซึ่งทุก ๆ ค่าของ $x \neq c$ ใน I จุด $(x, f(x))$ บนกราฟจะต้องอยู่ใต้เส้นสัมผัสกับกราฟที่ $(c, f(c))$

ทฤษฎี 4.6.3 ให้ f เป็นฟังก์ชันซึ่งหาอนุพันธ์ได้บนบางช่วงเปิดที่ประกอบด้วย c แล้ว

ก) ถ้า $f''(c) > 0$ กราฟของ f เป็นโค้งเว้าหงาย ที่ $(c, f(c))$

ข) ถ้า $f''(c) < 0$ กราฟของ f เป็นโค้งเว้าคว่ำ ที่ $(c, f(c))$

ข้อสังเกต แต่อย่างไรก็ตามบทกลับของทฤษฎี 4.6.3 ไม่เป็นความจริง ตัวอย่างเช่น ถ้า f เป็นฟังก์ชันกำหนดโดย $f(x) = x^4$ กราฟของ f เป็นโค้งเว้าหงายที่จุด $(0, 0)$ แต่ $f''(0) = 0$ ทั้งนี้จะเห็นได้ว่า เงื่อนไขที่เพียงพอ (sufficient condition) ของกราฟของฟังก์ชัน f ที่จะมีกราฟเป็นโค้งเว้าหงายที่จุด $(c, f(c))$ คือ $f''(c) > 0$ แต่เงื่อนไขนี้ไม่ใช่เงื่อนไขที่จำเป็น (necessary condition) ในทำนองเดียวกัน เงื่อนไขที่ไม่จำเป็นแต่เป็นเงื่อนไขที่เพียงพอ ที่กราฟของฟังก์ชัน f จะมีโค้งเว้าคว่ำที่จุด $(c, f(c))$ คือ $f''(c) < 0$

ถ้ามีจุดบนกราฟของฟังก์ชัน ซึ่งเป็นจุดที่เส้นกราฟให้ความเว้าเปลี่ยนจากเว้าคว่ำเป็นเว้าหงาย หรือเปลี่ยนจากเว้าหงายเป็นเว้าคว่ำแล้ว กราฟจะตัดกับเส้นสัมผัสของกราฟที่จุดนั้น ซึ่งจุดเหล่านี้เรียกว่า จุดเปลี่ยนความเว้า (point of inflection)

นิยาม 4.6.4 จุด $(c, f(c))$ เป็นจุดเปลี่ยนความเว้าของกราฟของฟังก์ชัน f ถ้ากราฟมีเส้นสัมผัสที่จุดนั้น และถ้ามีช่วงเปิด I ที่มี c อยู่ ซึ่งถ้า x อยู่ใน I แล้ว จะได้ว่า

ก) $f''(x) < 0$ ถ้า $x < c$ และ $f''(x) > 0$ ถ้า $x > c$ หรือ

ข) $f''(x) > 0$ ถ้า $x < c$ และ $f''(x) < 0$ ถ้า $x > c$

ทฤษฎี 4.6.5 ถ้าฟังก์ชัน f หาอนุพันธ์ได้บนบางช่วงเปิดที่มี c และถ้า $(c, f(c))$ เป็นจุดเปลี่ยนความเว้าของกราฟ f, แล้ว ถ้า $f''(c)$ หาค่าได้แล้ว $f''(c) = 0$

ข้อสังเกต 1) บทกลับของทฤษฎี 4.6.5 ไม่เป็นความจริง

ถ้าอนุพันธ์อันดับสองของฟังก์ชันเป็นศูนย์ที่จำนวน c ไม่เป็นจริงที่จะกล่าวว่า กราฟของฟังก์ชันจะมีจุดเปลี่ยนความเว้าที่ $x = c$

2) กราฟของฟังก์ชันอาจจะให้จุดเปลี่ยนความเว้าได้ แม้ว่าอนุพันธ์อันดับสองที่จุดนั้นหาค่าไม่ได้ก็ตาม

แบบฝึกหัด 4.6

ตั้งแต่ข้อ 1 ถึงข้อ 5 จงพิจารณาว่าที่ใดเป็นเว้าคว่ำ ที่ใดเป็นเว้าหงาย และจงหาจุดเปลี่ยนความเว้าทุกจุดที่มี

1.
$$f(x) = x^3 + 9x$$
$$f'(x) = 3x^2 + 9$$
$$f''(x) = 6x$$

$f''(x)$ หาค่าได้ตลอดทุกค่าของ x ดังนั้นจุดที่จะเป็นไปได้ที่จะเป็นจุดเปลี่ยนความเว้าก็คือที่ $f''(x) = 0$ ซึ่งจะได้ $6x = 0$ หรือ $x = 0$ ในการพิจารณาว่าจุดเปลี่ยนความเว้า คือที่ $x = 0$ ทำได้โดยการตรวจสอบว่า $f''(x)$ เปลี่ยนเครื่องหมายหรือไม่ และในขณะเดียวกันก็จะได้พิจารณาความเว้าของกราฟในแต่ละช่วง ดังแสดงในตาราง

	$f(x)$	$f'(x)$	$f''(x)$	ผลสรุป
$-\infty < x < 0$			$-$	กราฟเป็นเว้าคว่ำ
$x = 0$	0	9	0	กราฟมีจุดเปลี่ยนความเว้า
$0 < x < \infty$			$+$	กราฟเป็นเว้าหงาย

เว้าคว่ำ ในช่วง $x < 0$; เว้าหงายในช่วง $x > 0$; $(0, 0)$ คือจุดเปลี่ยนความเว้า

2.
$$F(x) = x^4 - 8x^3 + 24x^2$$
$$F'(x) = 4x^3 - 24x^2 + 48x$$
$$F''(x) = 12x^2 - 48x + 48$$

เพราะว่า $f''(x)$ หาค่าได้ทุกค่าของ x จุดเปลี่ยนความเว้าที่จะเป็นได้ คือที่ $f''(x) = 0$

ให้ $$12x^2 - 48x + 48 = 0$$
$$12(x^2 - 4x + 4) = 0$$
$$12(x-2)(x-2) = 0$$
$$\therefore \quad x = 2$$

นั่นคือ $x = 2$

$$F(2) = (2)^4 - 8(2)^3 + 24(2)^2$$
$$= 16 - 64 + 96$$
$$= 48$$

ในการพิจารณาว่า (2, 48) เป็นจุดเปลี่ยนความเว้าหรือไม่ ใช้การทดสอบการเปลี่ยนเครื่องหมายของ $f''(x)$ พร้อมกันนี้จะพิจารณาความเว้าของกราฟในแต่ละช่วง จากตารางข้างล่าง

	$f(x)$	$f'(x)$	$f''(x)$	ผลสรุป
$-\infty < x < 2$			+	กราฟเป็นเว้าหงาย
$x = 2$	48	32	0	กราฟไม่มีจุดเปลี่ยนความเว้า
$2 < x < \infty$			+	กราฟเป็นเว้าหงาย

ตอบ กราฟเป็นเว้าหงายที่ทุก ๆ จุด; ไม่มีจุดเปลี่ยนความเว้า

3. $$g(x) = \frac{x}{x^2 - 1}$$
$$g'(x) = \frac{(x^2 - 1) - x(2x)}{(x^2 - 1)^2} = \frac{x^2 - 1 - 2x^2}{(x - 1)^2}$$
$$= \frac{-x^2 - 1}{(x^2 - 1)^2} = \frac{-(x^2 + 1)}{(x^2 - 1)^2}$$

$$g''(x) = -\left(\frac{(x^2-1)^2(2x) - (x^2+1)(2)(x^2-1)(2x)}{(x^2-1)^4}\right)$$

$$= \frac{-2x\,(x^2-1)^2 + 4x(x^2-1)(x^2+1)}{(x^2-1)^4}$$

$$= \frac{2x\,(x^2-1)\,[-(x^2-1) + 2\,(x^2+1)]}{(x^2-1)^4}$$

$$= \frac{2x\,[-x^2+1+2x^2+2]}{(x^2-1)^3}$$

เพราะว่า $g''(x)$ หาค่าไม่ได้เมื่อ $x = \pm 1$ และเมื่อ $g''(x) = 0$ จะได้

$$\frac{2x\,[x^2+3]}{(x^2-1)^3} = 0$$

$$\therefore\quad x\,[x^2+3] = 0$$

$$\therefore\quad x = 0,\ \pm\sqrt{-3} \notin R$$

$\therefore$ x ที่จะต้องทดสอบว่าเป็นจุดเปลี่ยนความเว้าหรือไม่ คือ $x = -1, 0, 1$

อาศัยการทดสอบโดยอนุพันธ์ลำดับ 2 สำหรับจุดเปลี่ยนความเว้าและความเว้าของ f ได้ดังตาราง

	$g(x)$	$g'(x)$	$g''(x)$	ผลสรุป
$-\infty < x < -1$			$g''(-2) = -$	กราฟเป็นเว้าคว่ำ
$x = -1$	หาค่าไม่ได้	หาค่าไม่ได้	หาค่าไม่ได้	กราฟไม่มีจุดเปลี่ยนความเว้า
$-1 < x < 0$			$g''(-.3) = +$	กราฟเป็นเว้าหงาย
$x = 0$	0	-1	0	กราฟมีจุดเปลี่ยนความเว้า
$0 < x < 1$			$g''(.3) = -$	กราฟเป็นเว้าคว่ำ
$x = 1$	หาค่าไม่ได้	หาค่าไม่ได้	หาค่าไม่ได้	กราฟไม่มีจุดเปลี่ยนความเว้า
$1 < x < \infty$			$g''(2) = +$	กราฟเป็นเว้าหงาย

ตอบ กราฟเป็นเว้าหงายที่ $-1 < x < 0$ และ $x > 1$, กราฟเป็นเว้าคว่ำที่ $x < -1$ และ $0 < x < 1$ จุด (0, 0) เป็นจุดเปลี่ยนความเว้า

4)

$$f(x) = (x-2)^{1/5}$$

$$f'(x) = \frac{1}{5}(x-2)^{-4/5}(1) = \frac{1}{5}(x-2)^{-4/5}$$

$$f''(x) = \left(\frac{1}{5}\right)\left(-\frac{4}{5}\right)(x-2)^{-9/5}$$

$$= \frac{-4}{25}(x-2)^{-9/5} = \frac{-4}{25(x-2)^{9/5}}$$

เพราะว่า $f''(x)$ หาค่าไม่ได้ เมื่อ $x = 2$

และเพราะ $f''(x) = 0$ เมื่อ $\frac{-4}{25(x-2)^{9/5}} = 0$ แต่ไม่สามารถหาค่า x ซึ่ง $f'(x) = 0$ ได้

ดังนั้น จะใช้อนุพันธ์อันดับสองทดสอบความเว้าของกราฟ และจะดูว่าที่ $x = 2$ เป็นจุดเปลี่ยนความเว้าหรือไม่ ดังตารางต่อไปนี้

	$f(x)$	$f'(x)$	$f''(x)$	ผลสรุป
$x < 2$			+	กราฟเป็นเว้าหงาย
$x = 2$	0	0	หาค่าไม่ได้	กราฟมีจุดเปลี่ยนความเว้า
$x > 2$			−	กราฟเป็นเว้าคว่ำ

กราฟเป็นเว้าหงาย เมื่อ $x \angle 2$; กราฟเป็นเว้าคว่ำ เมื่อ $x > 2$ และจุด (2, 0) เป็นจุดเปลี่ยนความเว้า

ตอบ

5.

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{ถ้า } x < 0 \\ -x^2 & \text{ถ้า } x \geq 0 \end{cases}$$

$$f'(x) = \begin{cases} 2x & \text{ถ้า } x < 0 \\ -2x & \text{ถ้า } x \geq 0 \end{cases}$$

$$f''(x) = \begin{cases} 2 & \text{ถ้า } x < 0 \\ -2 & \text{ถ้า } x \geq 0 \end{cases}$$

$\because \quad f''_{-}(0) = 2$ และ $f''_{+}(0) = -2$

$\therefore \quad f''_{-}(0) \neq f''_{+}(0) \quad \therefore \quad f''(0)$ หาค่าไม่ได้

$\therefore$ x = 0 อาจจะเป็นจุดเปลี่ยนความเว้าของกราฟ f

และไม่มี x ใด ซึ่งจะทำ f"(x) = 0 และ

$\therefore$ ก็จะใช้อนุพันธ์ลำดับสอง ทดสอบจุดเปลี่ยนความเว้าและความเว้าของกราฟ f ดังตาราง

	f(x)	f'(x)	f"(x)	ผลสรุป
$x < 0$			+	กราฟเป็นเว้าหงาย
$x = 0$	0	0	หาค่าไม่ได้	กราฟมีจุดเปลี่ยนความเว้า
$x > 0$			−	กราฟเป็นเว้าคว่ำ

กราฟเป็นเว้าหงาย เมื่อ $x \angle 0$; กราฟเป็นเว้าคว่ำ เมื่อ $x > 0$ จุด (0, 0) เป็นจุดเปลี่ยนความเว้า

ตอบ

6. **ถ้า** $f(x) = ax^3 + bx^2$ จงหาค่า a และ b ที่ทำให้ f มีจุดเปลี่ยนความเว้าที่ (1, 2)

$$\because \quad f(x) = ax^3 + bx^2$$

$$\therefore \quad f'(x) = 3ax^2 + 2bx$$

$$f''(x) = 6ax + 2b$$

จุดเปลี่ยนความเว้า คือจุด x ทั้งหลาย ซึ่งทำให้ f"(x) หาค่าไม่ได้ หรือ f"(x) = 0 ในกรณีนี้ไม่มี x ใด ที่จะทำให้ f"(x) หาค่าไม่ได้

$\therefore$ จะพิจารณา f"(x) = 0 นั่นคือ

$$6ax + 2b = 0 \quad \ldots\ldots\ldots(1)$$

เมื่อทราบว่าจุดเปลี่ยนความเว้าอยู่ที่ (1, 2)

เราจึงทราบจาก $f(x) = ax^3 + bx^2$ ว่า

$$f(1) = a(1)^3 + b(1)^2 = 2$$

หรือ $a + b = 2$ ....(2)

จาก (1) จุด (1, 2) เป็น จุดเปลี่ยนความเว้า ซึ่งให้ $f''(1) = 0$

$\therefore$ $6a(1) + 2b = 0$

หรือ $6a + 2b = 0$ ....(3)

(2) x 6 $6a + 6b = 12$ .... (4)

(4) (3) $4b = 12$

$\therefore$ $b = 3 \Rightarrow a = -1$

$\therefore$ $a = 1 \quad b = 3$ **ตอบ**

7. ถ้า $f(x) = ax + bx^2 + cx + d$ จงหาค่า a, b, c และ d ที่ซึ่ง f ให้ค่าต่ำสุด หรือสูงสุดที่ (0, 3) และกราฟของ f ให้จุดเปลี่ยนความเว้าที่ (1, −1)

$\because$ $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$

$\therefore$ $f'(x) = 3ax^2 + 2bx + c$

$f''(x) = 6ax + 2b$

f จะให้ค่าต่ำสุดหรือค่าสูงสุด ที่ค่าวิกฤตของ f เมื่อ $f'(x)$ หาค่าไม่ได้ หรือ $f'(x) = 0$ ในกรณีนี้ไม่มี x ใด ที่จะทำให้ $f'(x)$ หาค่าไม่ได้ แต่เมื่อ $f'(x) = 0$ แล้ว

$3ax^2 + 2bx + c = 0$ ......(1)

และในกรณีที่กราฟ f ให้จุดเปลี่ยนความเว้าที่ (1, −1) ซึ่ง $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$

$\therefore$ $-1 = f(1) = a + b + c + d$ ......(2)

กรณีที่กราฟ f ให้จุดต่ำสุด หรือจุดสูงสุดที่ (0, 3) ซึ่ง

$$\therefore \quad f(0) = 3 = a(0)^3 + b(0)^2 + c(0) + d$$

$$= d \qquad \ldots\ldots(3)$$

จาก (1) ∵ f ให้ค่าสูงสุด หรือต่ำสุด ที่ (0, 3)

$$\therefore \quad 3a(0)^2 + 2b(0) + c = 0$$

$$c = 0 \qquad \ldots\ldots(4)$$

∴ f จะมีจุดเปลี่ยนความเว้าที่ $f''(x)$ หาค่าไม่ได้
หรือ $f''(x) = 0$ ซึ่งเราจะใช้แต่กรณีหลัง

$$\therefore \quad f''(x) = bax + 2b = 0$$

ซึ่งความสัมพันธ์นี้ให้จุดเปลี่ยนความเว้าที่ (1, −1)

$$\therefore \quad 6a(1) + 2b = 0$$

$$6a + 2b = 0 \qquad \ldots\ldots(5)$$

แทนค่า $c = 0$, $d = 3$ ใน *(2)*

$$a + b = -1 - 0 - 3 = -4 \qquad \ldots\ldots(6)$$

$$(6) \times 2 \quad 2a + 2b = -8 \qquad \ldots\ldots(7)$$

$$(5) - (7) \qquad 4a = 8 \Rightarrow a = 2$$

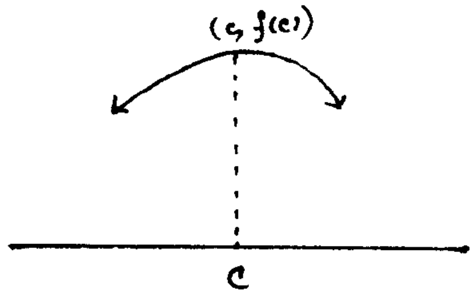
$$\Rightarrow b = -6$$

$$\therefore \quad \left.\begin{aligned} a &= 2 \\ b &= -6 \\ c &= 0 \\ d &= 3 \end{aligned}\right\} \text{ ตอบ}$$

ตั้งแต่ข้อ 8 ถึงข้อ 13 จงเขียนส่วนของกราฟ f ที่ผ่านจุดซึ่ง $x = c$ ถ้าเงื่อนไขที่กำหนดให้พอเพียงแต่ในกรณีเงื่อนไขที่กำหนดให้ไม่พอเพียง จงอธิบายในการเขียนกราฟ สมมุติว่า f ต่อเนื่องบนบางช่วงเปิดที่มี c อยู่ด้วย

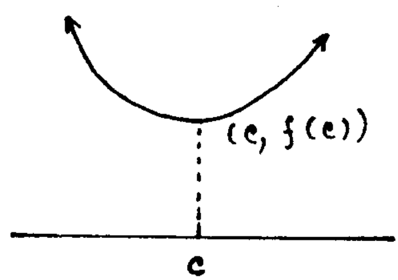
8. $f'(x) > 0$ ถ้า $x < c$; $f'(x) < 0$ ถ้า $x > c$

$f''(x) < 0$ ถ้า $x < c$; $f''(x) < 0$ ถ้า $x > c$



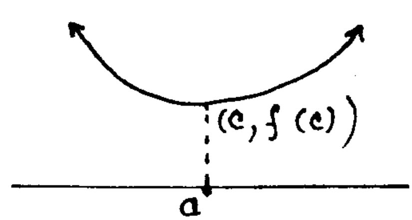
9. $f''(c) = 0$; $f'(c) = 0$; $f''(x) > 0$ ถ้า $x < c$;

$f''(x) > 0$ ถ้า $x > c$

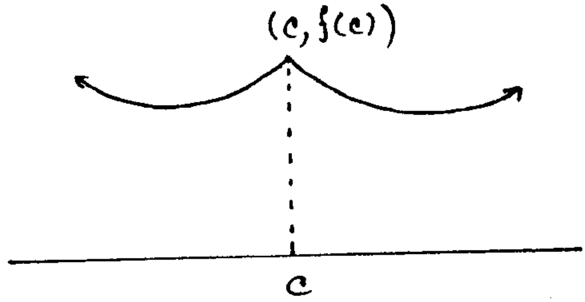


10. $f'(c) = 0$; $f'(x) < 0$ ถ้า $x < c$; $f''(x) > 0$

ถ้า $x > c$

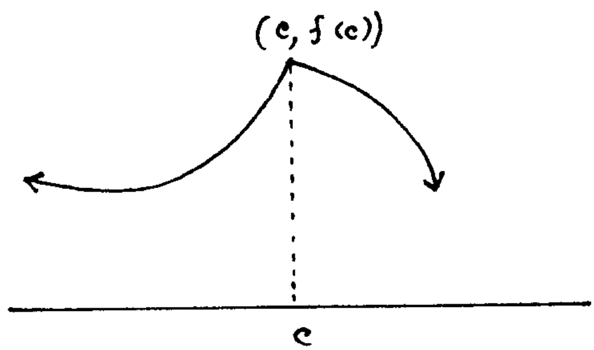


11. $f(c)$ หาค่าไม่ได้ ; $f''(x) > 0$ ถ้า $x < c$; $f''(x) > 0$ ถ้า $x > c$

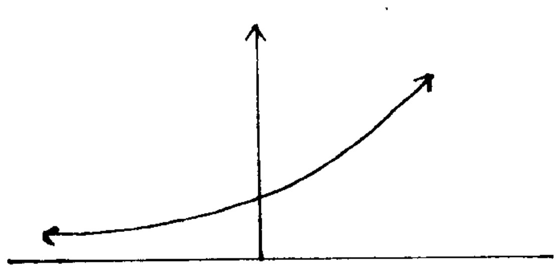


12. $\lim_{x \to c^-} f'(x) = +\infty$; $\lim_{x \to c^+} f'(x) = 0$;

$f''(x) > 0$ ถ้า $x < c$; $f''(x) < 0$ ถ้า $x > c$



13. จงเขียนกราฟของฟังก์ชัน f ซึ่ง f(x), f'(x) และ f"(x) หาค่าได้ และมีค่าเป็นบวกสำหรับทุกค่าของ x



4.7 สรุปเรื่องการเขียนกราฟของฟังก์ชัน

(Applications to drawing a sketch of the graph of a function)

เมื่อกำหนด $f(x)$ มาให้ และต้องการที่จะเขียนรูปกราฟของ $f(x)$ ต้องดำเนินการตามกระบวนการดังนี้ ขั้นแรก หา $f'(x)$ และ $f''(x)$ แล้วหาจำนวนวิกฤตของ f ซึ่งคือค่าของ x ในโดเมนของ f ที่ทำให้หาค่าของ $f'(x)$ (does not exist) หรือ $f'(x) = 0$ ขั้นต่อมาก็นำจำนวนวิกฤตเหล่านั้นมาทดสอบโดยอาศัยการทดสอบอนุพันธ์ลำดับที่ 1 และการทดสอบโดยอนุพันธ์ลำดับที่สองมาใช้เพื่อที่จะหาว่าที่จำนวนวิกฤตดังกล่าวให้ค่าสูงสุดสัมพัทธ์ ค่าต่ำสุดสัมพัทธ์ หรือไม่ใช่ทั้งคู่ ยังต้องพิจารณาหาช่วงที่ f เพิ่มขึ้น คือช่วงที่ x ทั้งหลายให้ค่า $f'(x)$ เป็นบวก และช่วงที่ f ลดลง คือช่วงที่ x ทั้งหลายให้ค่า $f'(x)$ เป็นลบ ในการพิจารณาช่วงที่ f เพิ่มขึ้นหรือลดลง (monotonic) ตรวจสอบจำนวนวิกฤต ที่ซึ่ง f ไม่ให้ค่าสูงสุดหรือค่าต่ำสุดสัมพัทธ์ ด้วยค่าของ x ซึ่งทำให้ $f''(x) = 0$ หรือ $f''(x)$ หาค่าไม่ได้นั้นอาจจะเป็นจุดเปลี่ยนความเว้า ในการตรวจสอบเมื่อพบว่า $f''(x)$ เปลี่ยนเครื่องหมายที่แต่ละค่าของ x ตามปกติแล้วแต่ละค่าของ x ก็จะเป็นจุดเปลี่ยนความเว้า แต่ถ้าค่าของ x ให้ค่า $f''(x)$ เป็นบวก และ $f''(x)$ เป็นลบ ค่าของ x นั้น ๆ ก็จะให้จุดซึ่งกราฟเป็นโค้งเว้าหงาย และจุดที่กราฟเป็นโค้งเว้าคว่ำ ตามลำดับ นอกจากนั้นยังให้ประโยชน์ในการหาความชันของแต่ละเส้นสัมผัสที่จุดเปลี่ยนความเว้าด้วย ดังนั้นข้อมูลต่าง ๆ ดังได้กล่าวมาแล้ว ควรจะได้สร้างตารางขึ้นก่อน เขียนภาพของกราฟ

แบบฝึกหัด 4.7

สำหรับแต่ละฟังก์ชันต่อไปนี้ จงหาค่าต่ำสุดหรือค่าสูงสุดสัมพัทธ์ ของ f จุดเปลี่ยนความเว้าของกราฟ f ช่วงที่ f เพิ่มขึ้น ช่วงที่ f ลดลง ช่วงที่กราฟเว้าหงาย ช่วงที่กราฟเว้าคว่ำ ความชันของเส้นสัมผัสที่จุดเปลี่ยนความเว้า จงเขียนภาพของกราฟในแต่ละข้อมาด้วย

1 $\quad f(x) = 2x^3 - 6x + 1$

$f'(x) = 6x^2 - 6$

$f''(x) = 12x$

หาค่าวิกฤตของ f โดยพิจารณา 1) ไม่มี x ซึ่ง f'(x) หาค่าไม่ได้

2) ให้ $f'(x) = 0$

$\therefore \quad 6x^2 - 6 = 0$

$x = \pm\sqrt{\frac{6}{6}} = \pm 1$

พิจารณาจุดเปลี่ยนความเว้า โดยให้

$f''(x) = 0$

$\therefore \quad 12x = 0$

$x = 0$

สร้างตารางพิจารณาจุดที่ซึ่ง $x = -1, x = 0, x = 1$ และช่วงต่อไปนี้

$-\infty < x < -1, \quad -1 < x < 0, \quad 0 < x < 1, \quad 1 < x < \infty$

ดังตาราง

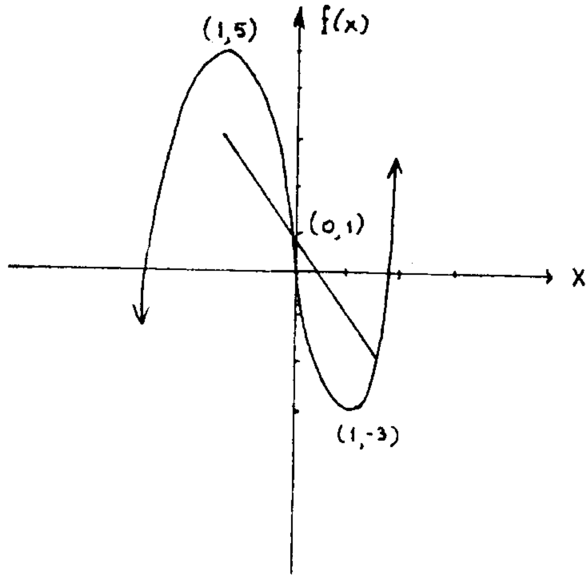
	f(x)	f′(x)	f″(x)	ผลสรุป
$-\infty < x < -1$		+	−	f เพิ่มขึ้น กราฟเว้าคว่ำ
$x = -1$	5	0	−	f มีค่าสูงสุดสัมพัทธ์ กราฟเว้าคว่ำ
$-1 < x < 0$		−	−	f ลดลง กราฟเว้าคว่ำ
$x = 0$	1	− 6	0	f ลดลง กราฟมีจุดเปลี่ยนความเว้า
$0 < x < 1$		−	+	f ลดลง กราฟเว้าหงาย
$x = 1$	− 3	0	+	f มีค่าต่ำสุดสัมพัทธ์ที่ $x = 1$ ซึ่ง $f(1) = -3$ กราฟเว้าหงาย
$1 < x < \infty$		+	+	f เพิ่มขึ้น กราฟเว้าหงาย

จึงสรุปได้ดังนี้

1. f มีค่าสูงสุดสัมพัทธ์ที่ $x = -1$ ซึ่ง $f(-1) = 5$
   f มีค่าต่ำสุดสัมพัทธ์ที่ $x = 1$ ซึ่ง $f(1) = -3$
2. จุด (0, 1) เป็นจุดเปลี่ยนความเว้าของกราฟ f
3. f เพิ่มขึ้นบน $(-\infty, -1]$, $[1, \infty)$
   f ลดลงบน $[-1, 0]$, $[0, 1] = [-1, 1]$
4. กราฟเว้าคว่ำ เมื่อ $x < 0$
   กราฟเว้าหงาย เมื่อ $x > 0$
5. $\left.\frac{dy}{dx}\right]_{(0,\ 1)} = -6$

ความชันของเส้นสัมผัสที่จุดเปลี่ยนความเว้า คือ $f'(x) = -6$

6. (1)



2 $\qquad f(x) = x^4 - 2x^3$

$f'(x) = 4x^3 - 6x^2$

$f''(x) = 12x^2 - 12x$

หาค่าวิกฤต ของ f

ให้ $\quad f'(x) = 0 \; ; \quad 4x^3 - 6x^2 = 0$

$$2x^2(2x-3) = 0$$

ซึ่ง $x = 0; \; x = \frac{3}{2}$ เป็นค่าวิกฤตของ f

พิจารณาจุดเปลี่ยนความเว้า

ให้

$$f''(x) = 0 \; ; \quad 12x^2 - 12x = 0$$

$$12x(x-1) = 0$$

$$\therefore \quad x = 0 \; ; \quad x = 1$$

ซึ่งจะต้องทดสอบว่า $x = 0, x = 1$ เป็นจุดเปลี่ยนความเว้าหรือไม่ สร้างตารางเพื่อพิจารณาจุด $x = 0, x = 1, x = \frac{3}{2}$ และช่วงที่ไม่รวมจุดเหล่านี้ ดังตาราง

	f(x)	f'(x)	f"(X)	ผลสรุป
$-\infty < x < 0$		$f'(-1)$ -	$f''(-1)$ +	f ลดลง กราฟเว้าหงาย
$x = 0$	0	0	0	เส้นสัมผัสอยู่ในแนวระดับ กราฟมีจุดเปลี่ยนความเว้า
$0 < x < 1$		$f'(\frac{1}{2})$ -	-	f ลดลง กราฟเว้าคว่ำ
$x = 1$	-1	-2	0	f ลดลง กราฟมีจุดเปลี่ยนความเว้า
$1 < x < \frac{3}{2}$			+	f ลดลง กราฟเว้าหงาย
$x = \frac{3}{2}$	$f\left(\frac{3}{2}\right)=\left(\frac{3}{2}\right)^4 - 2\left(\frac{3}{2}\right)^3 = -\frac{27}{16}$	0	$f''\left(\frac{3}{2}\right)=12\left(\frac{3}{2}\right)^2 - 12\left(\frac{3}{2}\right) = 9$	f มีค่าต่ำสุดสัมพัทธ์ กราฟเว้าหงาย
$\frac{3}{2} < x < \infty$		+	+	f เพิ่มขึ้น กราฟเว้าหงาย

1) f มีค่าต่ำสุดสัมพัทธ์ ที่ $x = \frac{3}{2}$ ซึ่ง $f(\frac{3}{2}) = -\frac{27}{16}$

2) จุดเปลี่ยนความเว้า คือ จุด $(0, 0), (1, -1)$

3) f เพิ่มขึ้นบน $[\frac{3}{2}, \infty)$

f ลดลงบน $(\infty, \frac{3}{2}] = (-\infty, 0], [0, 1], [1, \frac{3}{2}]$

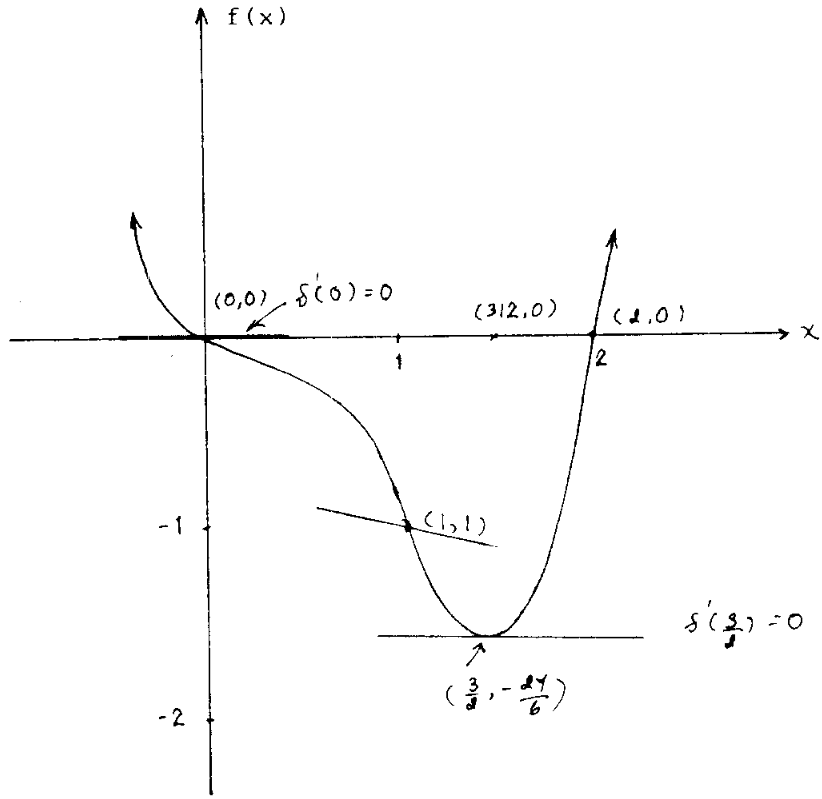
4) กราฟเว้าหงายสำหรับ $x < 0$ และ $x > 1$

กราฟเว้าคว่ำ สำหรับ $0 < x < 1$

5) ความชันของเส้นสัมผัส $f'(x)]_{(0,\ 0)} = 0$; $f'(x)]_{(1,\ -1)} = -2$

6) f(x)

6)



3.

$$f(x) = x^3 + 5x^2 + 3x - 4$$

$$f'(x) = 3x^2 + 10x + 3$$

$$f''(x) = 6x + 10$$

ให้ $f'(x) = 0 \Longrightarrow 3x^2 + 10x + 3 = 0$

$$x = \frac{-10 \pm \sqrt{100 - 4(3)(3)}}{2(3)}$$

$$= \frac{-10 \pm \sqrt{100 - 36}}{6} = \frac{-10 \pm \sqrt{64}}{6}$$

$$= \frac{-10 \pm 8}{6}$$

$\therefore \quad x = \frac{-2}{6} = -\frac{1}{3}, \quad x = -\frac{18}{6} = -3$

ให้ $f'(x) = 0 \Longrightarrow 6x + 10 = 0 \Longrightarrow x = \frac{-10}{6} = -\frac{5}{3}$

วิเคราะห์กราฟ f โดยอาศัยการพิจารณาจุดซึ่ง $x = -3$, $x = -\frac{5}{3}$, $x = -\frac{1}{3}$ และช่วงที่ไม่รวมจุดเหล่านี้ ดังตาราง

	f(x)	f′(x)	f″(x)	สรุปผล
$-\infty < x < -3$		$f(-4) = +$	$-$	f เพิ่มขึ้น กราฟเว้าคว่ำ
$x = -3$	5	0	$-$	f มีค่าสูงสุดสัมพัทธ์ที่ $x = -3$ ซึ่ง $f(-3) = 5$
$-3 < x < -\frac{5}{3}$		$f'(-2) = -$	$-$	f ลดลง กราฟเว้าคว่ำ
$x = -\frac{5}{3}$	7/27	$\frac{34}{4}$	0	กราฟมีจุดเปลี่ยนความเว้า
$-\frac{5}{3} < x < -\frac{1}{3}$		$f'(-\frac{1}{2}) = -$	+	f ลดลง กราฟเว้าหงาย
$x = -\frac{1}{3}$	$-\frac{121}{27}$	0	+	f มีค่าต่ำสุดสัมพัทธ์ที่ $x = -\frac{1}{3}$ ซึ่ง $f(-\frac{1}{3}) = \frac{-121}{27}$
$-\frac{1}{3} < x < \infty$		$f'(1) = +$	+	f เพิ่มขึ้น กราฟเว้าหงาย

1. $f(-3) = 5$ เป็นค่าสูงสุดความสัมพัทธ์

   $f(-\frac{1}{3}) = -\frac{121}{27}$ เป็นค่าต่ำสุดความสัมพัทธ์

2. จุดเปลี่ยนความเว้า คือ จุด $(-\frac{5}{3}, 7/27)$

3. f เพิ่มขึ้นบนช่วง $(-\infty, -3], [-\frac{1}{3}, \infty)$

   f ลดลงบน

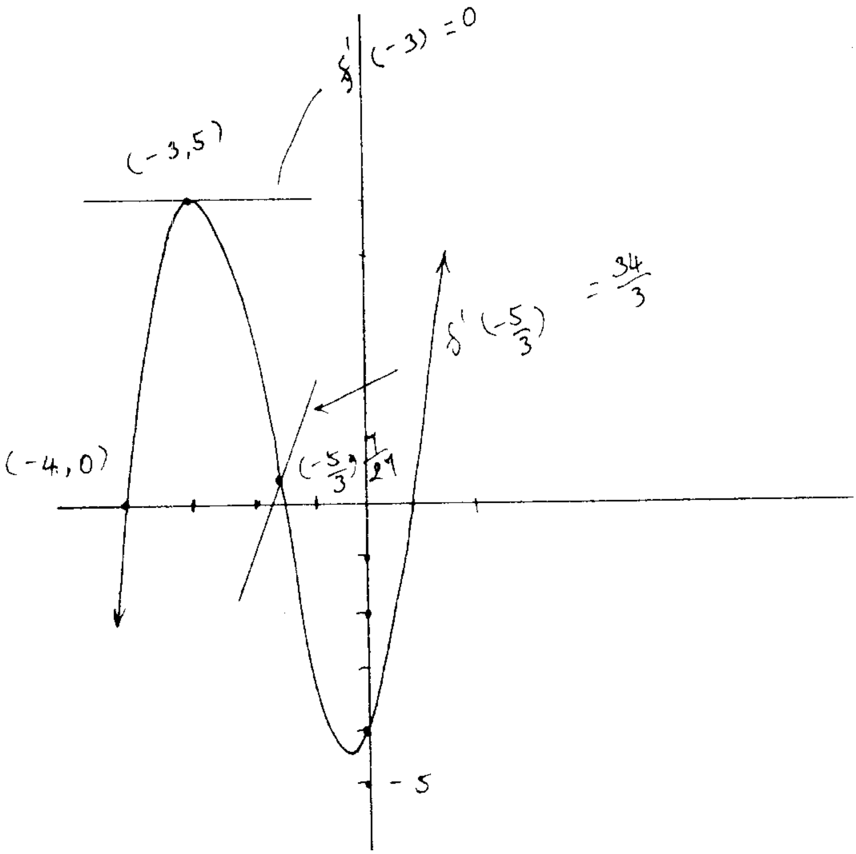
   $$[-3, -\frac{5}{3}], [-\frac{5}{3}, -\frac{1}{3}] = [-3, -\frac{1}{3}]$$

4. กราฟเว้าคว่ำสำหรับ $x < -\frac{5}{3}$

   กราฟเว้าหงาย สำหรับ $x > -\frac{5}{3}$

5. ความชันของเส้นสัมผัสที่จุดเปลี่ยนความเว้าคือ $f'(x)]_{(-\frac{5}{3}, \frac{7}{27})} = \frac{34}{3}$

6)



4.

$$f(x) = x^4 - 3x^3 + 3x^2 + 1$$

$$f'(x) = 4x^3 - 9x^2 - 6x$$

$$f''(x) = 12x^2 - 18x + 6$$

ให้ $f'(x) = 0$

$$\therefore\ 4x^3 - 9x^2 + 6x = 0$$

$$x(4x^2 - 9x + 6) = 0$$

$4x^2 - 9x + 6$

$$x = \frac{-(-9) \pm \sqrt{81 - 4(4)(6)}}{2(4)}$$

$$= \frac{9 \pm \sqrt{81 - 96}}{8} = \frac{9 \pm \sqrt{-15}}{8} \quad \notin R$$

นั่นคือ $x = 0$ หรือ $4x^2 - 9x + 6 = 0$

$\therefore x = 0$ เป็นค่าวิกฤตของ f

ให้ $f''(x) = 0$

$$12x^2 - 18x + 6 = 0$$

$$6(2x^2 - 3x + 1) = 0$$

$$6(2x - 1)(x - 1) = 0$$

$$x = \frac{1}{2}, \quad x = 1$$

สร้างตารางวิเคราะห์โดยพิจารณาจุดที่ซึ่ง $x = 0, x = \frac{1}{2}$, $x = 1$ และช่วงซึ่งไม่รวมค่า x เหล่านี้

	f(x)	f'(x)	f"(x)	ผลสรุป
$-\infty < x < 0$		−	+	f ลดลง กราฟเว้าหงาย
$x = 0$	1	0	+	f มีค่าต่ำสุดสัมพัทธ์ กราฟเว้าหงาย
$0 < x < \frac{1}{2}$		+	+	f เพิ่มขึ้น กราฟเว้าหงาย
$x = \frac{1}{2}$	23/16	5/3	0	f เพิ่มขึ้น กราฟมีจุดเปลี่ยนความเว้า
$\frac{1}{2} < x < 1$		+	−	f เพิ่มขึ้น กราฟเว้าคว่ำ
$x = 1$	2	1	0	f เพิ่มขึ้น กราฟมีจุดเปลี่ยนความเว้า
$1 < x$		+	+	f เพิ่มขึ้น กราฟเว้าหงาย

1) f มีค่าต่ำสุดสัมพัทธ์ที่ $x = 0$ ซึ่ง $f(0) = 1$

2) จุดเปลี่ยนความเว้าคือ (1/2, 23/16) , (1, 2)

3) f เพิ่มขึ้นบนช่วง $[0, \frac{1}{2}]$, $[\frac{1}{2}, 1]$, $[1, \infty$ หรือ $[0, \infty)$

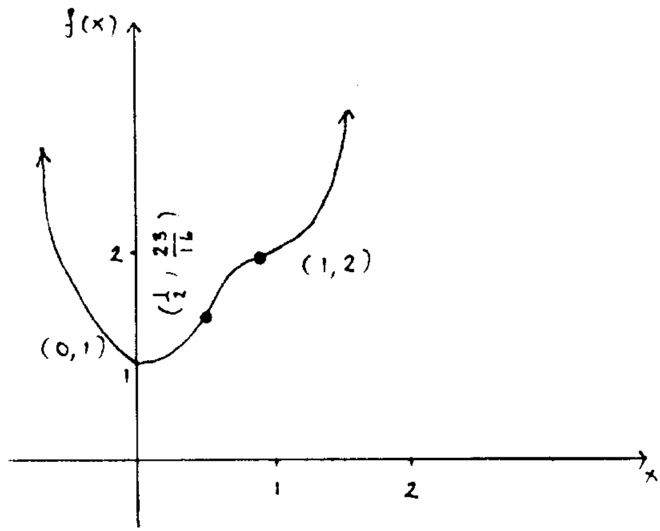
f ลดลงบนช่วง $(-\infty, 0]$

4) กราฟเว้าคว่ำ ในช่วง $\frac{1}{2} < x < 1$

กราฟเว้าหงาย เมื่อ $x < \frac{1}{2}$, $x > 1$

5) $f'(1/2) = 5/3$, $f'(1) = 1$

6)



5)

$$f(x) = \frac{1}{4}x^4 - \frac{1}{3}x^3 - x^2 + 1$$

$$f'(x) = x^3 - x^2 - 2x$$

$$f''(x) = 3x^2 - 2x - 2$$

ให้ $f'(x) = 0$

$$x^3 - x^2 - 2x = 0$$

$$x(x^2 - x - 2) = 0$$

$$x(x-2)(x+1) = 0$$

$\therefore\ x = 0,\ x = 2,\ x = -1$ เป็นค่าวิกฤตของ f

ให้ $f''(x) = 0$

$\therefore\ 3x^2 - 2x - 2 = 0$

$$x = \frac{-(-2) \pm \sqrt{4 - 4(3)(-2)}}{2(3)}$$

$$= \frac{2 \pm \sqrt{4+24}}{6} = \frac{2 \pm \sqrt{28}}{6} = \frac{2 \pm 2\sqrt{7}}{6}$$

$$= \frac{1 \pm \sqrt{7}}{3} = \frac{1}{3}(1 \pm \sqrt{7})$$

สร้างตารางเพื่อพิจารณาที่ซึ่ง $x = -1,\ \frac{1}{3}(1 - \sqrt{7}),$ $0,\ \frac{1}{3}(1 + \sqrt{7}),\ 2$ และช่วงต่อไปนี้ $(-\infty, -1)$, $(-1, \frac{1}{3}(1-\sqrt{7}))$, $(\frac{1}{3}(1-\sqrt{7}), 0)$, $(0, \frac{1}{3}(1+\sqrt{7}))$, $(\frac{1}{3}(1+\sqrt{7}), 2)$, $(2, \infty)$

	$f(x)$	$f'(x)$	$f''(x)$	ผลสรุป
$-\infty < x < -1$		$-$	$+$	f ลดลง กราฟเว้าหงาย
$x = -1$	7/12	0	$+$	f มีค่าต่ำสุดสัมพัทธ์ กราฟเว้าหงาย
$-1 < x < 1/3(1-\sqrt{7})$		$+$	$+$	f เพิ่มขึ้น กราฟเว้าหงาย
$x = 1/3\ (1-\sqrt{7})$	$f(1/3)(1-\sqrt{7})$	$+$	0	f เพิ่มขึ้น กราฟมีจุดเปลี่ยนความเว้า
$1/3(1-\sqrt{7}) < x < 0$		$+$	$+$	f เพิ่มขึ้น กราฟเว้าหงาย
$x = 0$	1	0	$-$	f มีค่าสูงสุดสัมพัทธ์ กราฟเว้าคว่ำ

	f(x)	f′(x)	f″(x)	ผลสรุป
$0<x<1/3(1+\sqrt{7})$		$-$	$-$	f ลดลง กราฟเว้าคว่ำ
$x = 1/3\ (1+\sqrt{7})$	$f(1/3)(1+\sqrt{7}))$	$-$	0	f ลดลง กราฟมีจุดเปลี่ยนความเว้า
$1/3(1+\sqrt{7})<x<2$		$-$	$+$	f ลดลง กราฟเว้าหงาย
$x = 2$	$-5/3$	0	$+$	f มีค่าต่ำสุดสัมพัทธ์ กราฟเว้าหงาย
$2 < x < \infty$		$+$	$+$	f เพิ่มขึ้น กราฟเว้าหงาย

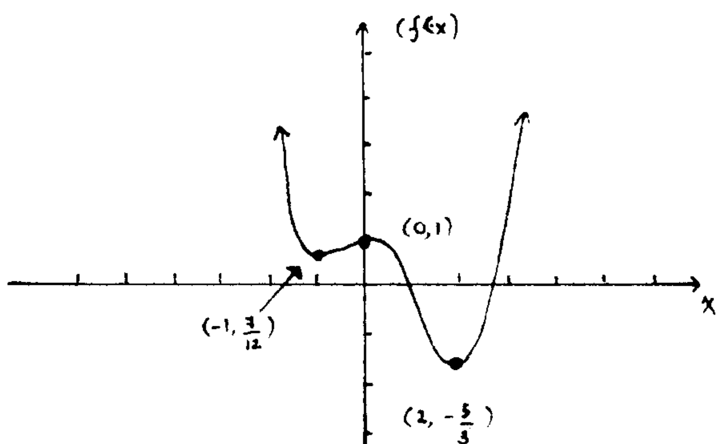
1. $f(-1) = 7/12$ เป็นค่าต่ำสุดสัมพัทธ์

   $f(0) = 1$ เป็นค่าสูงสุดสัมพัทธ์

   $f(2) = -\frac{5}{3}$ เป็นค่าต่ำสุดสัมพัทธ์
2. มีจุดเปลี่ยนความเว้าที่ $x = 1/3\,(1 \pm \sqrt{7})$
3. f ลดลงบน $(-\infty, -1]$ และ $[0, 2]$

   f เพิ่มขึ้นบน $[-1, 0]$ และ $[2, \infty)$
4. กราฟเว้าหงาย $x < 1/3\ (1 - \sqrt{7})$ และ $x > \frac{1}{3}(1 + \sqrt{7})$

   กราฟเว้าคว่ำ $1/3\ (1 - \sqrt{7}) < x < 1/3\ (1 + \sqrt{7})$



$$f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{ถ้า } x < 0 \\ 2x^2 & \text{ถ้า } x \geqslant 0 \end{cases}$$

$$f'(x) = \begin{cases} 2x & \text{ถ้า } x < 0 \\ 4x & \text{ถ้า } x \geqslant 0 \end{cases}$$

$$f''(x) = \begin{cases} 2 & \text{ถ้า } x < 0 \\ 4 & \text{ถ้า } x \geqslant 0 \end{cases}$$

หาค่าวิกฤตจาก $f'(x)$

ให้ $f'(x) = 0$ $\quad\therefore\quad 2x = 0 \Longrightarrow x = 0$

$\qquad\qquad\qquad\qquad 4x = 0 \Longrightarrow x = 0$

$\therefore\ x = 0$ เป็นค่าวิกฤตของ f

$\because\ f''_-(0) = 2$ และ $f''_+(0) = 4$

$\therefore\ f''_-(0) \neq f''_+(0)$

$\therefore\ f''(0)$ หาค่าไม่ได้

นั่นคือ $x = 0$ $\quad f''(x)$ หาค่าไม่ได้

$\therefore\ x = 0$ อาจจะเป็นจุดเปลี่ยนความเว้าของ f

สร้างตารางวิเคราะห์ค่า $f(x)$, $f'(x)$ และ $f''(x)$ ที่ $x = 0$

	$f(x)$	$f'(x)$	$f''(x)$	ผลสรุป
$x < 0$		$-$	$+$	f ลดลง กราฟเว้าหงาย
$x = 0$	0	0	$+$	f มีค่าต่ำสุดสัมพัทธ์ที่ $x = 0$ ซึ่ง $f(0) = 0$ กราฟเว้าหงาย
$x > 0$		$+$	$+$	f เพิ่มขึ้น กราฟเว้าหงาย

1. f มีค่าต่ำสุดสัมพัทธ์ที่ $x = 0$ ซึ่ง $f(0) = 0$

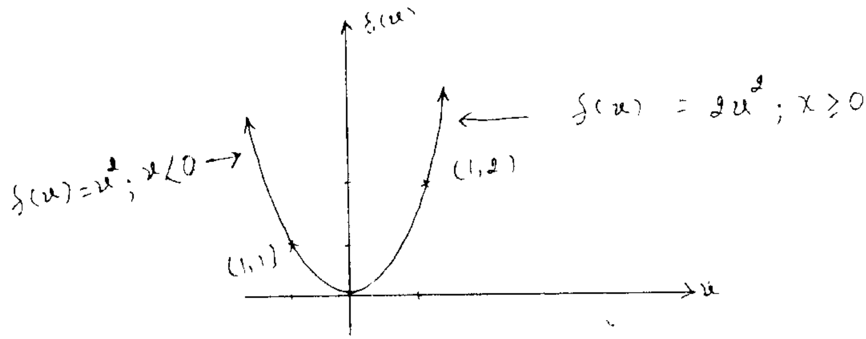
2. ไม่มีจุดเปลี่ยนความเว้า

3. f ลดลงบน $x \leqslant 0$; f เพิ่มขึ้นบน $x \geqslant 0$ หรือ $[0, \infty)$

4. กราฟเว้าหงายทุกหนทุกแห่ง (graph concave upward everywhere)

5. ไม่มีความชันที่จุดเปลี่ยนความเว้า

6.



$$f(x) = \begin{cases} -x^4 & \text{ถ้า } x < 0 \\ x^4 & \text{ถ้า } x \geqslant 0 \end{cases}$$

$$\therefore f'(x) = \begin{cases} -4x^3 & \text{ถ้า } x < 0 \\ 4x^3 & \text{ถ้า } x \geqslant 0 \end{cases}$$

$$f''(x) = \begin{cases} -12x^2 & \text{ถ้า } x < 0 \\ 12x^2 & \text{ถ้า } x \geqslant 0 \end{cases}$$

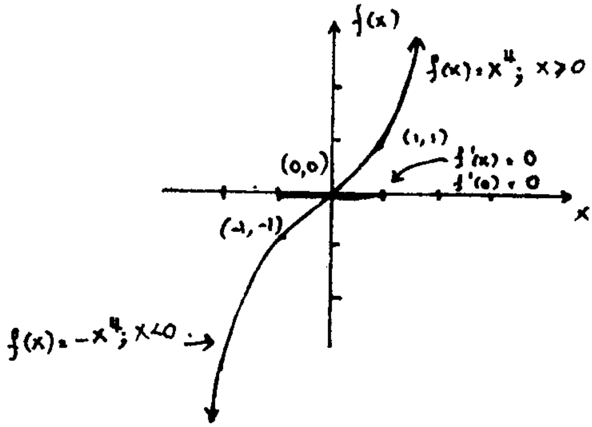
$\because f'(0) = 0$ และ $f''(0) = 0$

สร้างตารางวิเคราะห์ $x = 0$ และช่วงที่ไม่รวม $x = 0$

	$f(x)$	$f'(x)$	$f''(x)$	ผลสรุป
$x < 0$		+	−	f เพิ่มขึ้น กราฟเว้าคว่ำ
$x = 0$	0	0	0	กราฟมีจุดเปลี่ยนความเว้า
$x > 0$		+	+	f เพิ่มขึ้น กราฟเว้าหงาย

1. f ไม่มี rel. extremum (ไม่มีค่าปลายสุดสัมพัทธ์)
2. จุดเปลี่ยนความเว้าคือ (0, 0)
3. f เพิ่มขึ้นบน $(-\infty, 0]$, $[0, \infty]$ หรือ $(-\infty, \infty)$
4. กราฟเว้าคว่ำในช่วง $(-\infty, 0)$
   กราฟเว้าหงายในช่วง $(0, \infty)$
5. ความชันของเส้นสัมผัสที่จุดเปลี่ยนความเว้า $f'(x)\,]_{(0,\,0)} = 0$

6.



8.

$$
\begin{aligned}
f(x) &= (x+1)^3(x-2)^2 \\
f'(x) &= (x+1)^3(2)(x-2)(1) + (x-2)^2(3)(x+1)^2(1) \\
&= 2(x+1)^3(x-2) + 3(x-2)^2(x+1)^2 \\
&= (x-2)(x+1)^2[2(x+1) + 3(x-2)] \\
&= (x-2)(x+1)^2\ [2x + 2 + 3x - 6] \\
&= (x-2)(x+1)^2\ [5x - 4] \\
&= (x-2)(5x-4)(x+1)^2 \\
f''(x) &= (x-2)(5x-4)\ 2(x+1) \\
&\quad + [x+1]^2 \frac{d}{dx}[(x-2)(5x-4)] \\
&= 2(x-2)(5x-4)(x+1) \\
&\quad + (x+1)^2(x-2)\ 5 + (5x-4)(1))
\end{aligned}
$$

$$= 2(x-2)(5x-4)(x+1) + 5(x-2)(x+1)^2 + (5x-4)(x+1)^2$$

$$= (x+1)[2(x-2)(5x-4) + 5(x-2)(x+1) + (5x-4)(x+1)]$$

$$= (x+1)[10x^2 - 8x - 20x + 16 + 5x^2 - 5x - 10 + 5x^2 + x - 4]$$

$$= (x+1)(20x^2 - 32x + 2)$$

ให้ $f'(x) = 0$

$$\Rightarrow x = 2, \frac{4}{5}, -1 \quad \text{เป็นค่าวิกฤต}$$

ให้ $f''(x) = 0$

$$\therefore x = -1$$

และ $20x^2 - 32x + 2 = 0$

$$10x^2 - 16x + 2 = 0$$

$$x = \frac{-(-16) \pm \sqrt{256 - 4(10)(1)}}{20}$$

$$= \frac{16 \pm \sqrt{216}}{20} = \frac{16 \pm 6\sqrt{6}}{20}$$

$$= \frac{1}{10}(8 \pm 3\sqrt{6})$$

สร้างตารางพิจารณาจุดซึ่ง $x = -1, \frac{1}{10}(8 - 3\sqrt{6}), \frac{4}{5}, \frac{1}{10}(8 + 3\sqrt{6}), 2$

และช่วงต่อไปนี้ $x < -1$, $-1 < x < \frac{1}{10}(8 - 3\sqrt{6})$, $\frac{1}{10}(8 - 3\sqrt{6}) < x < \frac{4}{5}$

$\frac{4}{5} < x < \frac{1}{10}(8 + 3\sqrt{6})$, $\frac{1}{10}(8 + 3\sqrt{6}) < x < 2$, $x > 2$

ดังตาราง

	$f(x)$	$f'(x)$	$f''(x)$	ผลสรุป
$x < -1$		+	−	f เพิ่มขึ้น กราฟเว้าคว่ำ
$x = -1$	0	0	0	เส้นสัมผัส curve ที่จุดนี้ขนานแกน x กราฟมีจุดเปลี่ยนความเว้า
$-1 < x < \frac{1}{10}(8 - 3\sqrt{6})$		+	+	f เพิ่มขึ้น กราฟเว้าหงาย
$x = \frac{1}{10}(8 - 3\sqrt{6})$	$f(x)$	+	0	f เพิ่มขึ้น กราฟมีจุดเปลี่ยนความเว้า
$\frac{1}{10}(8 - 3\sqrt{6}) < x < \frac{4}{5}$		+	−	f เพิ่มขึ้น กราฟเว้าคว่ำ
$x = \frac{4}{5}$	$\frac{26,244}{3,125}$	0	−	f มีค่าสูงสุดสัมพัทธ์ กราฟเว้าคว่ำ
$\frac{4}{5} < x < \frac{1}{10}(8 + 3\sqrt{6})$		−	−	f ลดลง กราฟเว้าคว่ำ
$x = \frac{1}{10}(8 + 3\sqrt{6})$	$f(x)$	−	0	f ลดลง กราฟมีจุดเปลี่ยนความเว้า
$\frac{1}{10}(8 + 3\sqrt{6}) < x < 2$		−	+	f ลดลง กราฟเว้าหงาย
$x = 2$	0	0	+	f มีค่าต่ำสุดสัมพัทธ์ กราฟเว้าหงาย
$x > 2$		+	+	f เพิ่มขึ้น กราฟเว้าหงาย

1. f มีค่าสูงสุดสัมพัทธ์ ที่ $x = \frac{4}{5}$ ซึ่ง $f\left(\frac{4}{5}\right) = \frac{26,244}{3,125}$

   f มีค่าต่ำสุดสัมพัทธ์ ที่ $x = 2$ ซึ่ง $f(2) = 0$
2. จุดเปลี่ยนความเว้าของกราฟ f อยู่ที่ $(-1, 0)$ และที่ $x = \frac{1}{10}(8 \pm 3\sqrt{6})$

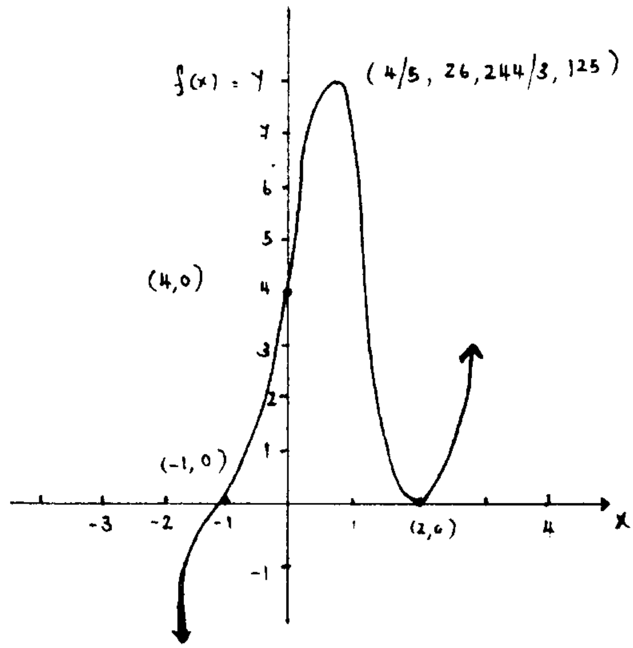
3. f เพิ่มขึ้นบน $\left(-\infty, \frac{4}{5}\right)$ และ $[2, \infty)$

f ลดลงบน $\left[\frac{4}{5}, 2\right]$

4. กราฟเว้าคว่ำ เมื่อ $x < -1$, $\frac{1}{10}(8 - 3\sqrt{6}) < x < \frac{1}{10}(8 + 3\sqrt{6})$

กราฟเว้าหงาย เมื่อ $-1 < x < \frac{1}{10}(x - 3\sqrt{6})$ และ $x > \frac{1}{10}(8 + 3\sqrt{6})$

5.



9. $f(x) = 3x^5 - 5x^4$

$f'(x) = 15x^4 - 20x^3$

$f''(x) = 60x^3 - 60x^2$

ให้ $f'(x) = 0 \quad \therefore \quad 15x^4 + 20x^3 = 0$

$5x^3(3x + 4) = 0$

$\therefore x = 0,\ x = -\frac{4}{3}$ เป็นค่าวิกฤตของ f

ให้ $f''(x) = 0 \quad \therefore \quad 60x^3 + 60x^2 = 0$

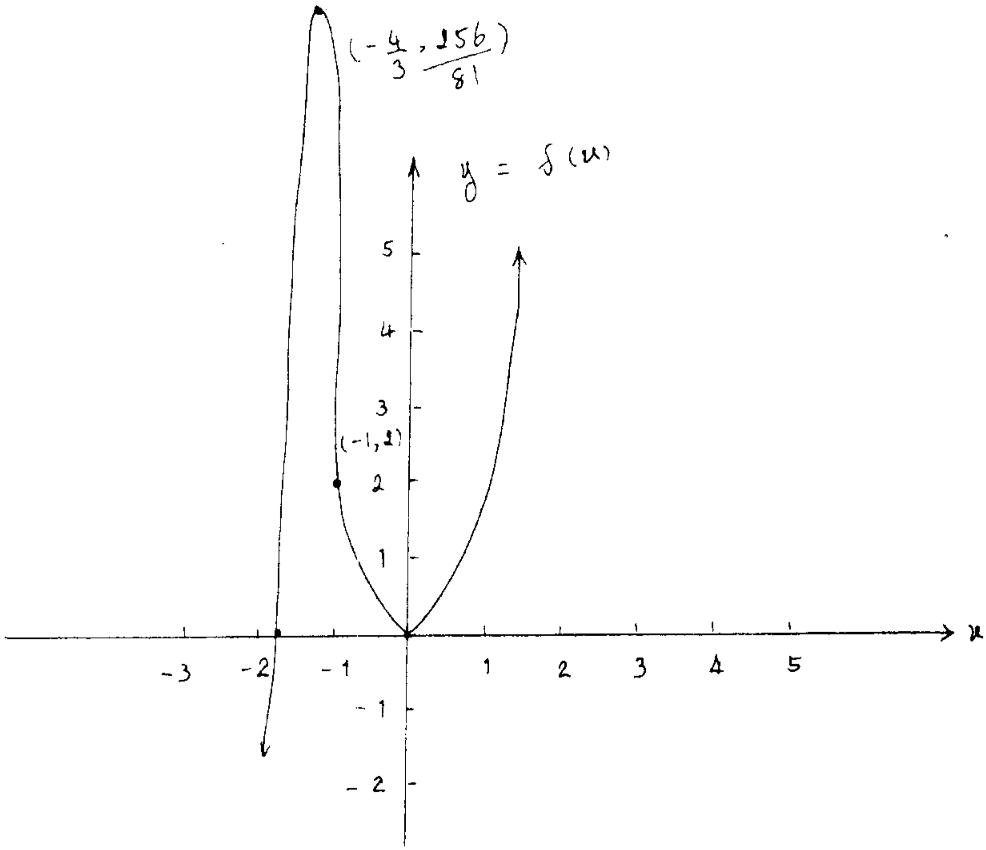
$60x^2(x + 1) = 0$

$\therefore x = 0,\ x = -1$ อาจเป็นจุดเปลี่ยนความเว้า

สร้างตารางวิเคราะห์สำหรับ ค่า $x = -\frac{4}{3}$, $x = -1$ และ $x = 0$ และช่วงที่ไม่รวมค่า x เหล่านี้

	$f(x)$	$f'(x)$	$f''(x)$	ผลสรุป
$-\infty < x < -\frac{4}{3}$		+	−	f เพิ่มขึ้น กราฟเว้าคว่ำ
$x = -4/3$	$\frac{256}{81}$	0	−	f มีค่าสูงสุดสัมพัทธ์ กราฟเว้าคว่ำ
$-\frac{4}{3} < x \ 1 \ -1$		−	−	f ลดลง กราฟเว้าคว่ำ
$x = -1$	2	− 5	0	f ลดลง กราฟมีจุดเปลี่ยนความเว้า
$-1 < x < 0$		−	+	f ลดลง กราฟเว้าหงาย
$x = 0$	0	0	0	f มีค่าต่ำสุดสัมพัทธ์ กราฟเว้าหงาย
$0 < x < \infty$		+	+	f เพิ่มขึ้น กราฟเว้าหงาย

1. $f(-\frac{4}{3}) = \frac{256}{81}$ เป็นค่าสูงสุดสัมพัทธ์ของกราฟ f
   $f(0) = 0$ เป็นค่าต่ำสุดสัมพัทธ์ของกราฟ f
2. $(-1, 2)$ เป็นจุดเปลี่ยนความเว้า
3. f เพิ่มขึ้นบน $(-\infty, -\frac{4}{3}]$ และ $[0, \infty)$; f ลดลงบน $[-\frac{4}{3}, 0)$
4. กราฟเว้าคว่ำ สำหรับ $x < -1$, กราฟเว้าหงาย สำหรับ $x > -1$



6. $f'(-1) = -5$

10. $f(x) = 3x^{2/3} - 2x$

$f'(x) = 3\left(\frac{2}{3}\right) x^{-1/3} - 2 = 2x^{-1/3} - 2 = \frac{2}{x^{1/3}} - 2$

$f''(x) = 2\left(-\frac{1}{3}\right) x^{-1/3 - 1} = -\frac{2}{3}x^{-4/3} = -\frac{2}{3x^{4/3}}$

ให้ $f'(x) = 0$

$\therefore \quad \frac{2}{x^{1/3}} - 2 = 0$

$\frac{2 - 2x^{1/3}}{x^{1/3}} = 0$

$$2x^{1/3} = 2$$

$$x^{1/3} = 1$$

$$x = 1$$

ให้ $f''(x) = 0$

$\therefore$ หาค่า x ไม่ได้

แต่ $f''(x)$ หาค่าไม่ได้เมื่อ $x = 0$

$\therefore$ สร้างตารางวิเคราะห์สำหรับค่า $x = 0, x = 1$ และช่วงที่ไม่รวมค่า x เหล่านี้

	f(x)	f'(x)	f"(x)	ผลสรุป
$-\infty < x < 0$		$-$	$-$	f ลดลง กราฟเว้าคว่ำ
$x = 0$	0	หาค่าไม่ได้	หาค่าไม่ได้	f มีค่าต่ำสุดสัมพัทธ์
$0 < x < 1$		$+$	$-$	f เพิ่มขึ้น กราฟเว้าคว่ำ
$x = 1$	1	0	$-\frac{2}{3}$	f มีค่าสูงสุดสัมพัทธ์ กราฟเว้าคว่ำ
$1 < x < \infty$		$-$	$-$	f ลดลง กราฟเว้าคว่ำ

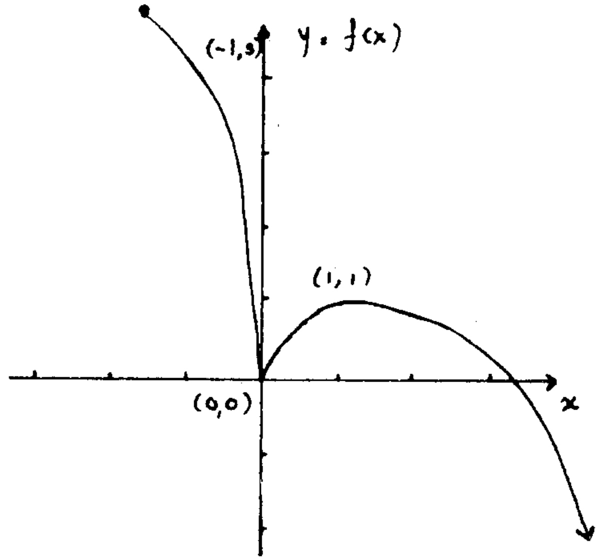
1. f มีค่าสูงสุดสัมพัทธ์ที่ $x = 1$ ซึ่ง $f(1) = 1$

   f มีค่าต่ำสุดสัมพัทธ์ที่ $x = 0$ ซึ่ง $f(0) = 0$

2. f เพิ่มขึ้นบน $[0, 1]$

   f ลดลงบน $(-\infty, 0]$ และ $[1, \infty)$

3. กราฟเว้าคว่ำเมื่อ $x < 0$ และ $\infty > 0$



11. $\quad f(x) = x^{1/3} + 2x^{4/3}$

$$f'(x) = \frac{1}{3}x^{-2/3} + 2\left(\frac{4}{3}\right)x^{1/3} = \frac{1}{3x^{2/3}} + \frac{8x^{1/3}}{3}$$

$$f''(x) = \frac{1}{3}\left(-\frac{2}{3}\right)x^{-5/3} + 2\left(\frac{4}{3}\right)\left(\frac{1}{3}\right)x^{-2/3}$$

$$= -\frac{2}{9x^{5/3}} + \frac{8}{9x^{2/3}}$$

ให้ $f'(x) = 0$

$$\therefore \quad \frac{1}{3x^{2/3}} + \frac{8}{3}x^{1/3} = 0$$

และ $f'(x)$ หาค่าไม่ได้ เมื่อ $x = 0$ ด้วย

$$\frac{1 + 8x^{1/3}(x^{2/3})}{3x^{2/3}} = 0$$

$$1 + 8x = 0$$

$$\therefore \quad x = -\frac{1}{8}$$

ให้ $f''(x) = 0$

$$\therefore \quad \frac{-2}{9x^{5/3}} + \frac{8}{9x^{2/3}} = 0$$

$$-2 + 8x = 0$$

$$\therefore \quad x = \frac{2}{8} = \frac{1}{4}$$

สร้างตารางวิเคราะห์สำหรับ $x = -\frac{1}{8}$, $x = 0$ และ $x = \frac{1}{4}$ และ ช่วงที่ไม่รวมค่า x เหล่านี้

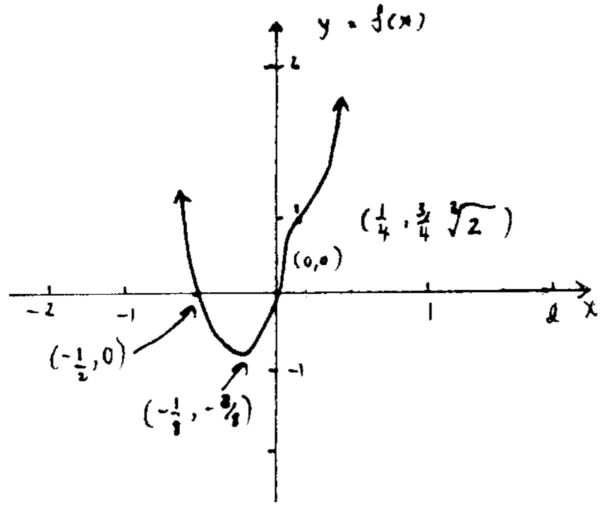
	$f(x)$	$f'(x)$	$f''(x)$	ผลสรุป
$-\infty < x < -1/8$		$-$	$+$	f ลดลง กราฟเว้าหงาย
$x = -1/8$	$-\frac{3}{8}$	0	$+$	f มีค่าต่ำสุดสัมพัทธ์ กราฟเว้าหงาย
$-1/8 < x < 0$		$+$		f เพิ่มขึ้น กราฟเว้าหงาย
$x = 0$	0	หาค่าไม่ได้	หาค่าไม่ได้	กราฟมีจุดเปลี่ยนความเว้า
$0 < x < \frac{1}{4}$		$+$	$+$	f เพิ่มขึ้น กราฟเว้าหงาย
$x = 1/4$	$\frac{3}{4}\sqrt[3]{2}$	$+$	0	f เพิ่มขึ้น กราฟมีจุดเปลี่ยนความเว้า
$1/4 < x < \infty$		$+$	$+$	f เพิ่มขึ้น กราฟเว้าหงาย

1. f มีค่าต่ำสุดสัมพัทธ์ ที่ $x = -1/8$ ซึ่ง $f(-1/8) = -3/8$
2. จุดเปลี่ยนความเว้าคือจุด $(0, 0)$, $(1/4, (3/4)\ \sqrt[3]{2})$
3. f เพิ่มขึ้นบน $[-1/8, \infty)$

   f ลดลงบน $(-\infty, -1/8]$
4. กราฟเว้าหงายเมื่อ $x < 0$ และ $x > \frac{1}{4}$

   กราฟเว้าคว่ำเมื่อ $0 < x < \frac{1}{4}$
5. ความชันของเส้นสัมผัสเส้น (curve) ที่จุด $(0, 0)$ หาค่าความชันไม่ได้ ดังนั้น เส้นสัมผัสนี้ขนานกับแกน y และความชันของเส้นสัมผัสที่สุด $(1/4, (3/4\ \sqrt[3]{2})$ หาค่าไม่ได้

6.



12.

$$f(x) = 2 + (x-3)^{1/3}$$

$$f'(x) = \frac{1}{3}(x-3)^{-2/3}(1) = \frac{1}{3(x-3)^{2/3}}$$

$$f''(x) = \frac{1}{3}\left(-\frac{2}{3}\right)(x-3)^{-5/3} = -\frac{2}{9(x-3)^{5/3}}$$

ไม่มี x ซึ่ง $f'(x) = 0$ แต่ $f'(x)$ หาค่าไม่ได้เมื่อ $x = 3$

และไม่มี x ซึ่ง $f''(x) = 0$, แต่ $f''(x)$ หาค่าไม่ได้เมื่อ $x = 3$

สร้างตารางพิจารณา จุดซึ่ง $x = 3$ และช่วง $x < 3$ และ $x > 3$ ดังนี้

	f(x)	f'(x)	f"(x)	ผลสรุป
$x < 3$		+	+	f เพิ่มขึ้น กราฟเป็นโค้งเว้าหงาย
$x = 3$	2	หาค่าไม่ได้	หาค่าไม่ได้	กราฟมีจุดเปลี่ยนความเว้า
$x > 3$		+	−	f เพิ่มขึ้น กราฟเป็นโค้งเว้าคว่ำ

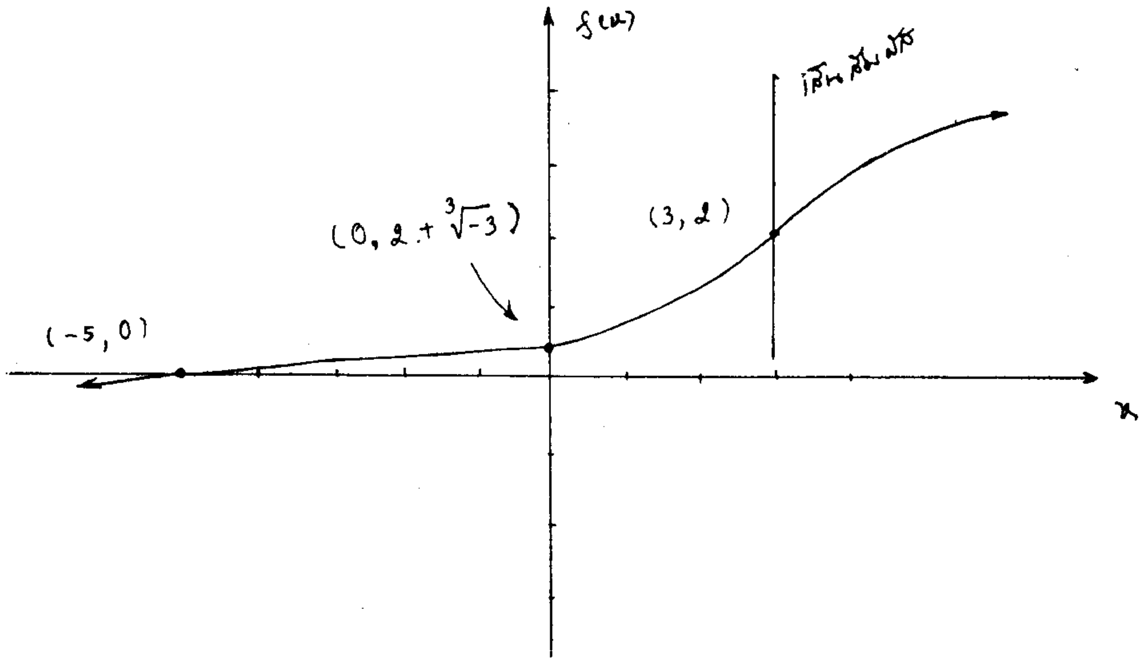
1. f ไม่มีค่าปลายสุดสัมพัทธ์ (ไม่มีค่าสูงสุดและต่ำสุดสัมพัทธ์)
2. จุด (3, 2) เป็นจุดเปลี่ยนความเว้า
3. f เพิ่มขึ้นบน $(-\infty, \infty)$

4. กราฟเว้าคว่ำเมื่อ $x > 3$

กราฟเว้าหงายเมื่อ $x < 3$

5. ความชันของเส้นสัมผัสที่จุดเปลี่ยนความเว้า หาค่าไม่ได้ ดังนั้น เส้นสัมผัสเส้นที่จุดเปลี่ยนความเว้า จึงขนานกับแกน y หรือ f(x)

6.



13. $$f(x) = 2 + (x - 3)^{5/3}$$

$$f'(x) = \frac{5}{3}(x - 3)^{2/3}(1) = \frac{5}{3}(x - 3)^{2/3}$$

$$f''(x) = \left(\frac{5}{3}\right)\left(\frac{2}{3}\right)(x - 3)^{-1/3} = \frac{10}{9(x - 3)^{1/3}}$$

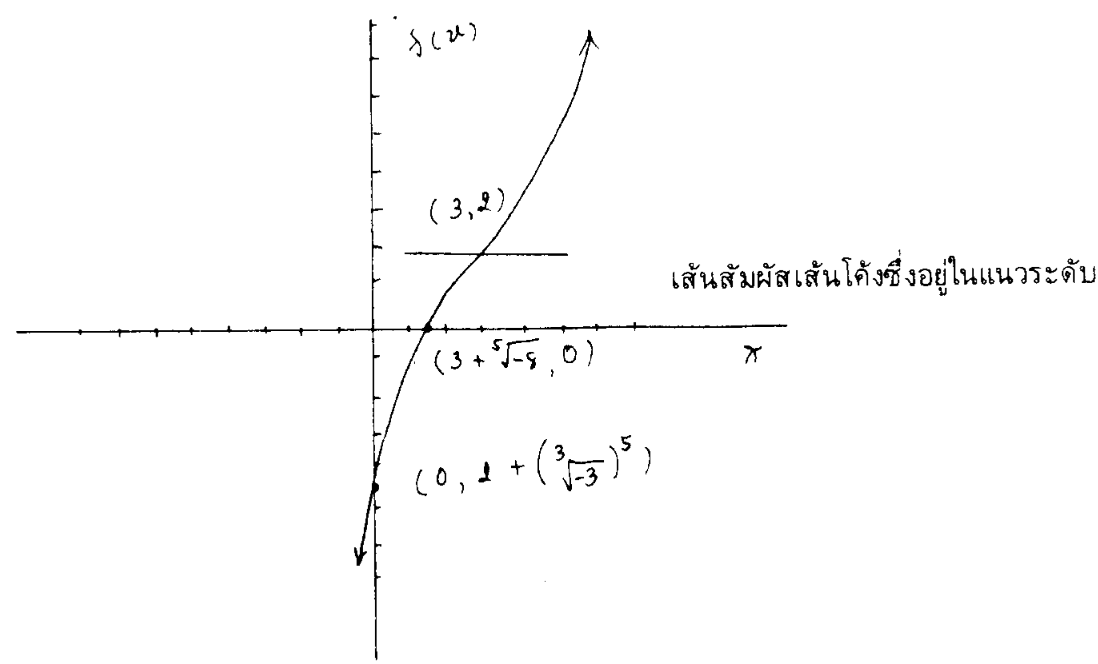
ให้ $f'(x) = 0$ ให้ $f''(x) = 0$ ไม่มี x ที่สอดคล้อง

$\therefore x = 3$ แต่ $f''(x)$ หาค่าไม่ได้ เมื่อ $x = 3$

สร้างตารางพิจารณาจุดซึ่ง $x = 3$ และช่วง $x < 3$ และ $x > 3$ ดังนี้

	f(x)	f'(x)	f''(x)	ผลสรุป
$-\infty < x < 3$		+	−	{ f เพิ่มขึ้น กราฟเป็นเว้าคว่ำ
$x = 3$	2	0	หาค่าไม่ได้	กราฟมีจุดเปลี่ยนความเว้า
$3 < x < \infty$		+	+	{ f เพิ่มขึ้น กราฟเป็นเว้าหงาย

1. f ไม่มีค่าปลายสุดสัมพัทธ์
2. (3, 2) เป็นจุดเปลี่ยนความเว้า
3. f เพิ่มขึ้น $(-\infty, 3], [3, \infty] \Rightarrow (-\infty, \infty)$
4. กราฟเว้าคว่ำ เมื่อ $x < 3$
   กราฟเว้าหงาย เมื่อ $x > 3$
5. ค่าความชันของเส้นสัมผัสที่ (3, 2) = 0
6.



14. $f(x) = 3 + (x+1)^{6/5}$

$f'(x) = \frac{6}{5}(x+1)^{1/5}(1) = \frac{6}{5}(x+1)^{1/5}$

$f''(x) = \frac{6}{5}\left(\frac{1}{5}\right)(x+1)^{-4/5} = \frac{6}{25(x+1)^{4/5}}$

ให้ $f'(x) = 0 \Rightarrow x = -1$

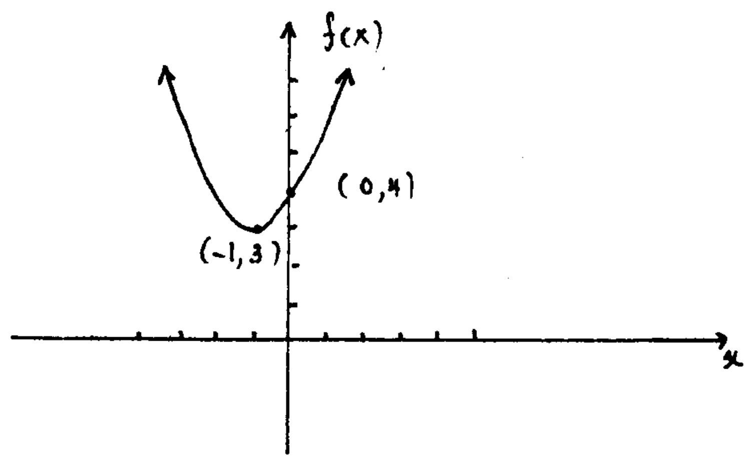
และ $f''(x)$ หาค่าไม่ได้เมื่อ $x = -1$

สร้างตารางพิจารณาค่า ซึ่ง $x = -1$ และช่วง $x < -1$ และ $x > -1$

	$f(x)$	$f'(x)$	$f''(x)$	ผลสรุป
$-\infty < x < -1$		$-$	$+$	f ลดลง กราฟเว้าหงาย
$x = -1$	3	0	หาค่าไม่ได้	f มีค่าต่ำสุดสัมพัทธ์
$-1 < x < \infty$		$+$	$+$	f เพิ่มขึ้น กราฟเว้าหงาย

1. f มีค่าต่ำสุดสัมพัทธ์ ที่ $x = -1$ ซึ่ง $f(-1) = 3$
2. f เพิ่มขึ้นบน $[-1, \infty)$

   f ลดลงบน $(-\infty, -1]$
3. กราฟเว้าหงายในช่วง $(-\infty, \infty)$ (เว้าหงายทุกหนทุกแห่ง)
4.



15. $f(x) = x^2\sqrt{4-x} = x^2(4-x)^{\frac{1}{2}}$

$$f'(x) = x^2\left(\frac{1}{2}\right)(4-x)^{-\frac{1}{2}}(-1) + (4-x)^{\frac{1}{2}}(2x)$$

$$= \frac{-x^2}{2(4-x)^{\frac{1}{2}}} + 2x(4-x)^{\frac{1}{2}}$$

$$= \frac{-x^2 + 4x(4-x)}{2(4-x)^{\frac{1}{2}}}$$

$$= \frac{-x^2 + 16x - 4x^2}{2(4-x)^{\frac{1}{2}}}$$

$$= \frac{-5x^2 + 16x}{2(4-x)^{\frac{1}{2}}}$$

$$f''(x) = \frac{2(4-x)^{\frac{1}{2}}(-10x+16) - (-5x^2+16x)(2)\left(\frac{1}{2}\right)(4-x)^{-\frac{1}{2}}(-1)}{4(4-x)}$$

$$= \frac{\dfrac{2(4-x)(-10x+16) + (-5x^2+16x)}{(4-x)^{\frac{1}{2}}}}{4(4-x)}$$

$$= \frac{\dfrac{15x^2 - 96x + 128}{(4-x)^{\frac{1}{2}}}}{\dfrac{4(4-x)}{1}}$$

$$= \frac{15x^2 - 96x + 128}{4(4-x)^{3/2}}$$

ให้ $f'(x) = 0$

$$\frac{-5x^2 + 16x}{2(4-x)^{\frac{1}{2}}} = 0$$

$$-5x^2 + 16x = 0$$

$$x(-5x+16) = 0$$

$$x = 0, \frac{16}{5}$$

ให้ $f''(x) = 0$

$$\frac{15x^2 - 96x + 128}{4(4-x)^{3/2}} = 0$$

$$15x^2 - 96x + 128 = 0$$

$$\therefore \quad x = \frac{96 \pm \sqrt{(-96)^2 - 4(15)(128)}}{2(15)}$$

$$= \frac{96 \pm \sqrt{9216 - 7680}}{30}$$

$$= \frac{96 \pm \sqrt{1536}}{30} = \frac{96 \pm 16\sqrt{6}}{30} = \frac{48 \pm 8\sqrt{6}}{15}$$

$$x = \frac{1}{15}(48 + 8\sqrt{6}),\ \frac{1}{15}(48 - 8\sqrt{6})$$

แต่ในกรณีที่ $f(x) = x^2\sqrt{4-x}$ นั้นจะเห็นว่า
x จะต้องมากกว่าหรือเท่ากับ 4 จึงจะทำให้ $f(x)$ เป็นจำนวนจริง ดังนั้นค่าของ x ที่จะพิจารณา จะต้องมากกว่า 4 ไม่ได้ แต่ $x = \frac{1}{15}(48 + 8\sqrt{6}$
มีค่ามากกว่า 4 ดังนั้นจึงไม่ต้องพิจารณา

สร้างตารางพิจารณาเมื่อ $x = 0,\ \frac{1}{15}(48 - 8\sqrt{6}).\ \frac{16}{5}$

	f(x)	f′(x)	f″(x)	ผลสรุป
$x < 0$		−	+	f ลดลง กราฟเว้าหงาย
$x = 0$	0	0	+	f มีค่าต่ำสุดสัมพัทธ์ กราฟเว้าหงาย
$0 < x < \frac{1}{15}(48 - 8\sqrt{6})$		+	+	f เพิ่มขึ้น กราฟเว้าหงาย
$x = \frac{1}{15}(48 - 8\sqrt{6})$		+	0	f เพิ่มขึ้น กราฟมีจุดเปลี่ยนความเว้า