สรุปบทที่ 3
อนุพันธ์

3.1 สรุปเรื่องเส้นสัมผัส และ อนุพันธ์

นิยาม 3.1.1 ถ้า f เป็นฟังก์ชันที่มีความต่อเนื่องที่ x_1 แล้ว เส้นสัมผัสกราฟของ f ที่จุด $P(x_1, f(x_1))$ คือ

1. เส้นที่ผ่านจุด P ซึ่งมีความชัน $m(x_1)$ โดย

$$m(x_1) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_1 + \Delta x) - f(x_1)}{\Delta x}$$

ถ้าลิมิตนี้หาค่าได้

2. เส้น $x = x_1$ ถ้า

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_1 + \Delta x) - f(x_1)}{\Delta x} = +\infty \text{ หรือ } -\infty$$

ถ้าไม่เป็นไปตามข้อ 1 หรือ ข้อ 2 แล้ว กราฟ f จะไม่มีเส้นสัมผัสที่จุด $P(x_1, f(x_1))$
เส้นสัมผัสในแนวระดับมีความชันเป็นศูนย์

นิยาม 3.1.2 อนุพันธ์ของฟังก์ชัน f คือ ฟังก์ชันที่เขียนแทนด้วย f' ซึ่งค่า ณ จุด x ใด ๆ ในโดเมนของ f ถูกกำหนดโดย

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

ถ้าลิมิตนี้หาค่าได้

สัญลักษณ์อื่นที่ใช้แทน $f'(x)$ คือ $D_x f(x)$

ถ้า $y = f(x)$ แล้ว $y' = f'(x) = \frac{dy}{dx}$

จากนิยาม 3.1.1 และนิยาม 3.1.2 จะเห็นว่าความชันของเส้นสัมผัสกราฟของ $y = f(x)$ ที่จุด $(x_1, f(x_1))$ คืออนุพันธ์ของ f ที่ x_1

ถ้าให้ $x_1 + \Delta x = x$ แล้ว "$\Delta x \to 0$" มีความหมายเหมือนกับ "$x \to x_1$"

นิยาม 3.1.3 ฟังก์ชัน f กล่าวว่า มีอนุพันธ์ที่ x_1 ถ้า $f'(x_1)$ สามารถหาค่าได้

นิยาม 3.1.4 ฟังก์ชันใด ๆ จะกล่าวว่า หาอนุพันธ์ได้ ถ้ามีอนุพันธ์ที่ทุก ๆ จุดในโดเมนของฟังก์ชันนั้น

แบบฝึกหัด 3.1

จากข้อ 1 ถึงข้อ 5 จงหาความชันของเส้นสัมผัสกับกราฟที่จุด (x_1, y_1) สร้างตาราง สำหรับค่า x, y และ m ที่จุดต่าง ๆ บนกราฟ เขียนเส้นกราฟ และเส้นที่มีความชันเป็นศูนย์

1. $y = 9 - x^2$

วิธีทำ $f(x) = 9 - x^2$

ดังนั้น $f(x_1) = 9 - x_1^2$

และ $f(x_1 + \Delta x) = 9 - (x_1 + \Delta x)^2$

จากสมการ (1) จะได้ว่า

$$m(x_1) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_1 + \Delta x) \quad f(x_1)}{Ax}$$

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{[9 - (x_1 + \Delta x)^2] - (9 - x_1^2)}{AX}$$

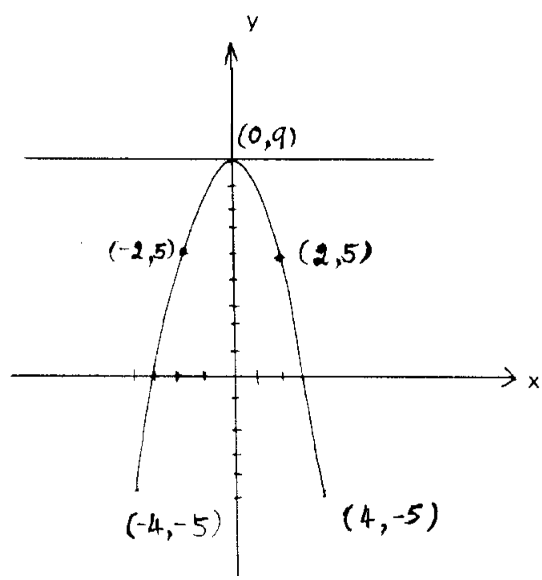
$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{9 - x_1^2 - 2x_1\Delta x - (\Delta x)^2 - 9 + x_1^2}{AX}$$

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{-2x_1\Delta x - (\Delta x)^2}{AX}$$

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{Ax\ (2x_1 - Ax,}{AX}$$

$$= 2x_1$$

x	y	m
4	−5	−8
3	0	−6
2	5	−4
1	8	−2
0	9	0
−1	8	2
−2	5	4
−3	0	6
−4	−5	8



2. $y = x^2 - 6x + 9$

วิธีทำ $f(x) = x^2 - 6x + 9$

ดังนั้น $f(x_1) = x_1^2 - 6x_1 + 9$

และ $f(x_1 + \Delta x) = (x_1 + \Delta x)^2 - 6(x_1 + \Delta x) + 9$

จากสมการ (1) จะได้ว่า

$$m(x_1) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_1 + \Delta x) - f(x_1)}{Ax}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{[(x_1 + \Delta x)^2 - 6(x_1 + \Delta x) + 9] - (x_1^2 - 6X, + 9)}{Ax}$$

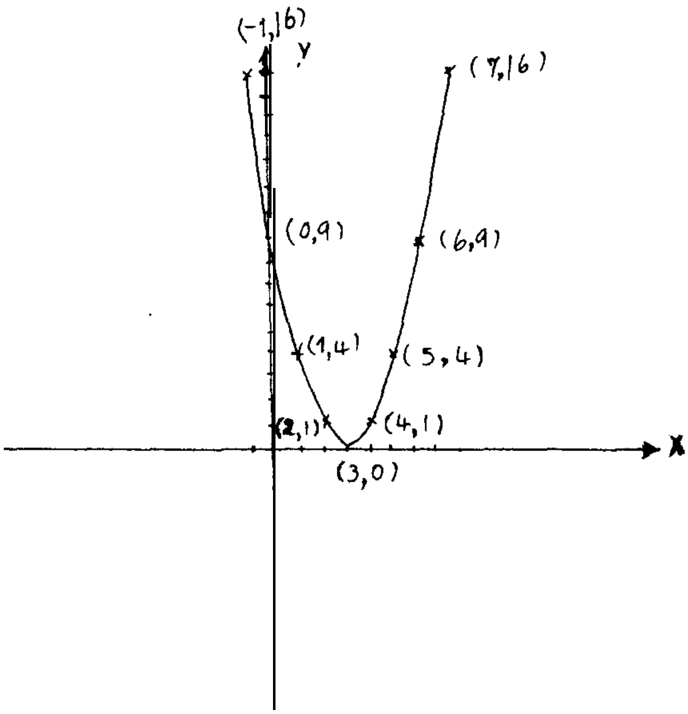
$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{x_1^2 + 2x_1\Delta x + (\Delta x)^2 - 6x_1 - 6\Delta x + 9 - x_1^2 + 6x_1 - 9}{Ax}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{2x_1\Delta x + (\Delta x)^2 - 6\Delta x}{Ax}$$

$$= \lim_{Ax-m} \frac{Ax\,(2x_1 + Ax - 6)}{Ax}$$

$$= 2x, \quad 6$$

x	y	m
−1	16	−8
0	9	−6
1	4	−4
2	1	−2
3	0	0
4	1	2
5	4	4
6	9	6
7	16	8



3. $y = 7-6x-x'$

วิธีทำ $f(x) = 7-6x-x^2$

ดังนั้น $f(x_1) = 7-6x,-x_1^2$

และ $f(x_1+\Delta x) = 7-6(x_1+\Delta x) - (x_1+\Delta x)^2$

จากสมการ (1) จะได้ว่า

$$m(x_1) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_1+\Delta x) - f(x_1)}{Ax}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{7-6(x_1+\Delta x) - (x_1+\Delta x)^2 - (7-6x,-x_1^2)}{Ax}$$

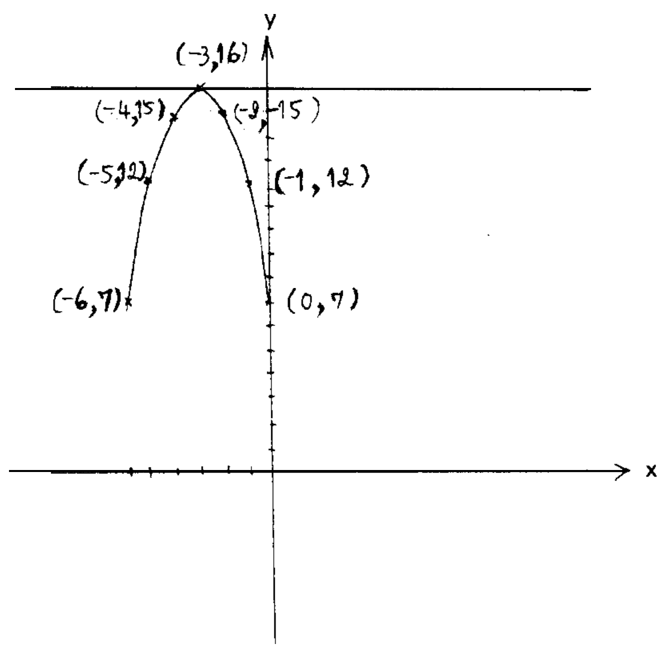
$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{7-6x,-6\Delta x - x_1^2 - 2x_1\Delta x - (\Delta x)^2 - 7 + 6x, + x_1^2}{Ax}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{-6\Delta x - 2x_1\Delta x - (\Delta x)^2}{Ax}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{Ax\,(-6-2x_1-Ax)}{Ax}$$

$-6-2x,$

x	y	m
−6	7	6
−5	12	4
−4	15	2
−3	16	0
−2	15	−2
−1	12	−4
0	7	−6



4. $y = x^3 - 3x$

วิธีทำ $f(x) = x^3 - 3x$

ดังนั้น $f(x_1) = x_1^3 - 3x_1$

และ $f(x_1 + \Delta x) = (x_1 + \Delta x)^3 - 3(x_1 + Ax)$

จากสมการ (1) จะได้ว่า

$$m(x_1) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_1 + \Delta x) - f(x_1)}{Ax}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{(x_1 + \Delta x)^3 - 3(x_1 + \Delta x) - (x_1^3 - 3x_1)}{Ax}$$

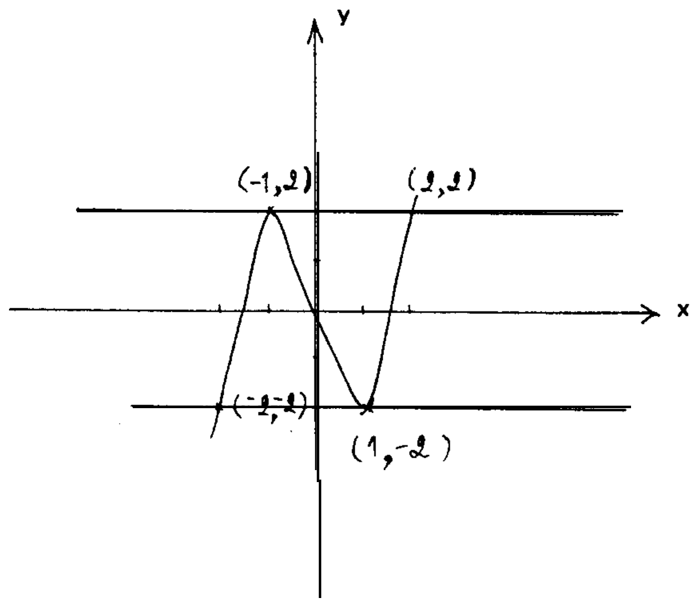
$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{x_1^3 + 3x_1^2\Delta x + 3x_1(\Delta x)^2 + (\Delta x)^3 - 3x_1 - 3\Delta x - x_1^3 + 3x_1}{Ax}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{3x_1^2\Delta x + 3x_1(\Delta x)^2 + (Ax)' - 3\Delta x}{Ax}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{Ax\,(3x_1^2 + 3x_1\Delta x + (Ax)' - 3)}{Ax}$$

$$= 3x_1^2 - 3$$

x	y	m
−2	−2	9
−1	2	0
0	0	−3
1	−2	0
2	2	9



5. $y = 4x^3 - 13x^2 + 4x - 3$

วิธีทำ $f(x) = 4x^3 - 13x' + 4x - 3$

ดังนั้น $f(x_1) = 4x_1^3 - 13x_1^2 + 4x_1 - 3$

และ $f(x_1 t \Delta x) = 4(x_1 + \Delta x)^3 - 13(x_1 + \Delta x)^2 + 4(x_1 + \Delta x) - 3$

จากสมการ (1) จะได้ว่า

$$m(x_1) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_1 + Ax_1 - f(x_1)}{Ax}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{1}{\Delta x} [4(x_1 + \Delta x)^3 - 13(x_1 + \Delta x)^2 t \ 4(x_1 + \Delta x) - 3 \\ -- (4x_1^3 - 13x_1^2 + 4x_1 - 3)]$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{1}{\Delta x} [4(x_1^3 \ t \ 3x_1^2 \Delta x + 3x_1(\Delta x)^2 + (\Delta x)^3 - 13(x_1^2 \ t \ 2x_1 \Delta x \\ + (\Delta x)^2) + 4x_1 \ t \ 4\Delta x \quad 3 - 4x_1^3 + 13x_1^2 - 4x_1 + 3]$$

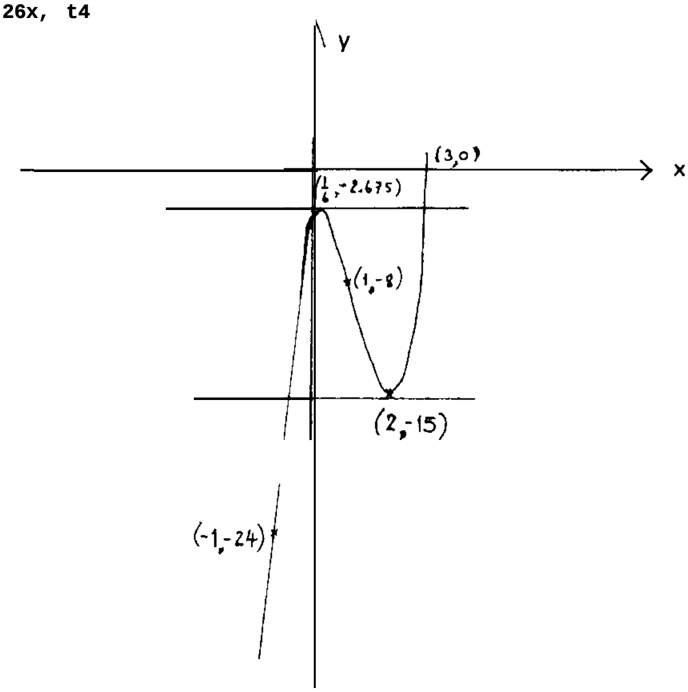
$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{1}{\Delta x} [4x_1 3 + 12x_1^2 \Delta x + 12x_1(\Delta x)^2 + 4(\Delta x)^3 - 13x_1^2 - 26x_1 \Delta x \\ - 13(\Delta x)^2 \ t \ 4x_1 + 4Ax - 3 \quad 4x_1^3 + 13x_1^2 - 4x_1 + 3]$$

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{1}{Ax} (12x_1^2 \Delta x \ t \ 12x_1(\Delta x)^2 + 4(\Delta x)^3 \quad 26x_1 \Delta x - 13(\Delta x)^2 \ t \ 4\Delta x)$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta x}{Ax} (12x_1^2 + 12x_1 \Delta x + 4(\Delta x)^2 - 26x_1 - 13 (\Delta x) + 4)$$

$$= 12x_1^2 - 26x_1 \ t4$$

x	y	m
1	−8	−10
$\frac{1}{6}$	−2.675	0
2	−15	0
0	−3	4
−1	−24	32
−2	−85	102
3	0	34



จากข้อ 6 ถึงข้อ 10 จงหาสมการของเส้นสัมผัสกับเส้นโค้งที่กำหนดให้ ณ จุดที่กำหนดให้

6. $y = x^2 - 4x - 5, (-2, 7)$

วิธีทำ $f(x) = x^2 - 4x - 5$

ดังนั้น $f(x_1) = x_1^2 - 4x_1 - 5$

และ $f(x_1 + \Delta x) = (x_1 \text{ t } \Delta x)^2 - 4(x_1 \text{ t Ax}) - 5$

จากสมการ (1) จะได้ว่า

$$m(x_1) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_1 + \Delta x) - f(x_1)}{\text{Ax}}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{(x_1 + \Delta x)^2 - 4(x_1 + \text{Ax}) - 5 - (x_1^2 - 4x_1 - 5)}{\text{Ax}}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{x_1^2 + 2x_1\Delta x \text{ t } (\Delta x)^2 - 4x_{,} - 4\text{Ax} - 5 - x_1^2 + 4x_1 + 5}{\text{Ax}}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{2x_1\Delta x \text{ t } (\Delta x)^2 - 4\text{Ax}}{\text{Ax}}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta x(2x_1 + \text{Ax} - 4)}{\text{Ax}}$$

$$= 2x_{,} - 4$$

ความชันของเส้นสัมผัสที่จุด (– 2.7) คือ

$$m(-2) = -4 - 4$$

$$= -8$$

สมการของเส้นสัมผัสตามต้องการ คือ

$$y - 7 = -8(x + 2)$$

$$= -8x - 16$$

$$8x + y + 9 = 0$$

ตอบ

7. $y = \frac{1}{8}x^3$, (4, 8)

วิธีทำ $f(x) = \frac{1}{8}x^3$

ดังนั้น $f(x_1) = \frac{1}{8}x_1^{\,3}$

และ $f(x_1 + \Delta x) = \frac{1}{8}(x_1 + \Delta x)^3$

จากสมการ (1) จะได้ว่า

$$m(x_1) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_1 + \Delta x) \quad f(x_1)}{Ax}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\frac{1}{8}(x_1 + \Delta x)^3 \quad \frac{1}{8}x_1^{\,3}}{AX}$$

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{1}{8} \times \frac{x_1^{\,3} + 3x_1^{\,2}\Delta x + 3x_1(\Delta x)^2 + (\Delta x)^3 \quad x_1^{\,3}}{Ax}$$

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta x(3x_1^{\,2} + 3x_1(\Delta x)\ t\,(\Delta x)^2)}{8Ax}$$

$$= \frac{3}{8}x_1^{\,2}$$

ความชันของเส้นสัมผัสที่จุด (4,8) คือ

$$m(4) = \frac{3}{8}(4^2)$$

$$= 6$$

สมการของเส้นสัมผัสตามต้องการคือ

$$y - 8 = 6(x - 4)$$

$$= 6x - 24$$

$$6x - y - 16 = 0$$

ตอบ

8. $y = \sqrt{9-4x}$, $(-4, 5)$

วิธีทำ $f(x) = \sqrt{9-4x}$

ดังนั้น $f(x_1) = \sqrt{9-4x_1}$

และ $f(x_1+\Delta x) = \sqrt{9-4(x_1+\Delta x)}$

จากสมการ (1) จะได้ว่า

$$m(x_1) = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_1+\Delta x)-f(x_1)}{Ax}$$

$$= \lim_{\Delta x\to 0}\frac{(\sqrt{9-4(x_1+\Delta x)}-\sqrt{9-4x_1})(\sqrt{9-4(x_1+\Delta x)}+\sqrt{9-4x_1})}{\Delta x(\sqrt{9-4(x_1+\Delta x)}+\sqrt{9-4x_1})}$$

$$= \lim_{\Delta x\to 0}\frac{(9-4(x_1+\Delta x))-(9-4x_1)}{\Delta x(\sqrt{9-4(x_1+\Delta x)}+\sqrt{9-4x_1})}$$

$$= \lim_{\Delta x\to 0}\frac{9-4x_1-4\Delta x-9+\Delta x_1}{\Delta x(\sqrt{9-4(x_1+\Delta x)}+\sqrt{9-4x_1})}$$

$$= \lim_{\Delta x\to 0}\frac{-4\Delta x}{\Delta x(\sqrt{9-4(x_1+\Delta x)}+\sqrt{9-4x_1})}$$

$$= \frac{-4}{\sqrt{9-4x_1}+\sqrt{9-4x_1}}$$

$$= \frac{-4}{2\sqrt{9-4x_1}}$$

$$= \frac{-2}{\sqrt{9-4x_1}}$$

ความชันของเส้นสัมผัสที่ $(-4,5)$ คือ

$$m(-4) = \frac{-2}{\sqrt{9-4(-4)}}$$

$$\frac{-2}{\sqrt{9+16}}$$

$$= \frac{2}{5}$$

สมการของเส้นสัมผัสตามต้องการ คือ

$$y-5 = -\frac{2}{5}(x+4)$$

$$5(y-5) = -2x-8$$

$$5y-25 = -2x-8$$

$$2x+5y = 17$$

ตอบ

9. $y = \frac{6}{x}$, (3, 2)

วิธีทำ $f(x) = \frac{6}{x}$

ดังนั้น $f(x_1) = \frac{6}{x_1}$

และ $f(x_1+\Delta x) = \frac{6}{x_1+ Ax}$

จากสมการ (1) จะได้ว่า

$$m(x_1) = \lim_{AX-0} \frac{f(x_1+\Delta x) - f(x_1)}{Ax}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\frac{6}{x_1+Ax} - \frac{6}{x_1}}{Ax}$$

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{6x_1 - 6(x, + \Delta x)}{\Delta x(x_1+\Delta x)\, x_1}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{6x,- \ 6x,- \ 6\Delta x}{\Delta x(x_1^2 + x_1\Delta x)}$$

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{-6}{x_1^2 + x_1\Delta x}$$

$$= \frac{-6}{x_1^2}$$

ความชันของเส้นสัมผัสที่ (3,2) คือ

$$m(3) = \frac{-6}{9}$$

$$= \frac{-2}{3}$$

สมการของเส้นสัมผัสตามต้องการคือ

$$y - 2 = -\frac{2}{3}(x - 3)$$

$$3(y - 2) = -2x\,t\,6$$

$$3y - 6 = -2x + 6$$

$$2x + 3y - 12 = 0$$

ตอบ

10. $y = \sqrt[3]{x}$, (8.2)

วิธีทำ $f(x) = \sqrt[3]{x}$

ดังนั้น $f(x_1) = \sqrt[3]{x_1}$

และ $f(x_1+\Delta x) = \sqrt[3]{x_1+\Delta x}$

จากสมการ (1) จะได้ว่า

$$m(x_1) = \lim_{\Delta x\to 0} \frac{f(x_1+\Delta x) - f(x_1)}{Ax}$$

$$= \lim_{\Delta x\to 0} \frac{\sqrt[3]{x_1+\Delta x} - \sqrt[3]{x_1}}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x\to 0} \frac{[(x_1+\Delta x)^{1/3} - x_1^{1/3}][(x_1+\Delta x)^{2/3} + (x_1+\Delta x)^{1/3}x_1^{1/3} + x_1^{2/3}]}{\Delta x[(x_1+\Delta x)^{2/3} + (x_1+\Delta x)^{1/3}x_1^{1/3} + x_1^{2/3}]}$$

$$= \lim_{\Delta x\to 0} \frac{(x_1+\Delta x) - x_1}{\Delta x[(x_1+\Delta x)^{2/3} + (x_1+\Delta x)^{1/3}x_1^{1/3} + x_1^{2/3}]}$$

$$= \lim_{\Delta x\to 0} \frac{1}{(x_1+\Delta x)^{2/3} + (x_1+\Delta x)^{1/3}x_1^{1/3} + x_1^{2/3}}$$

$$= \frac{1}{x_1^{2/3} + x_1^{1/3}x_1^{1/3} + x_1^{2/3}}$$

$$= \frac{1}{3x_1^{2/3}}$$

ความชันของเส้นสัมผัสที่ (8,2) คือ

$$m(8) = \frac{1}{3(8)^{2/3}}$$

$$= \frac{1}{12}$$

สมการของเส้นสัมผัสตามต้องการ คือ

$$y-2 = \frac{1}{12}(x-8)$$

$$12(y-2) = x-8$$

$$12y-24 = x-8$$

$$x-12y+16 = 0$$

ตอบ

จากข้อ 11 ถึงข้อ 15 จงหา $f'(x)$ สำหรับฟังก์ชันที่กำหนดให้ โดยใช้สูตร (4) ของหัวข้อนี้

11. $f(x) = 4x^2 + 5x + 3$

วิธีทำ ถ้า x เป็นจำนวนใด ๆ ในโดเมนของฟังก์ชัน f

จากสูตร (4) จะได้ว่า

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{[4(x+\Delta x)^2 + 5(x+\Delta x) + 3] - (4x^2 + 5x + 3)}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{4(x^2 + 2x\Delta x + (\Delta x)^2) + 5x + 5\Delta x + 3 - 4x^2 - 5x - 3}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{4x^2 + 8x\Delta x + 4(\Delta x)^2 + 5\Delta x - 4x^2}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{8x\Delta x + 4(\Delta x)^2 + 5\Delta x}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta x(8x + 4\Delta x + 5)}{\Delta x}$$

$$= 8x + 5$$ **ตอบ**

12. $f(x) = x^3$

วิธีทำ ถ้า x เป็นจำนวนใด ๆ ในโดเมนของฟังก์ชัน f

จากสูตร (4) จะได้ว่า

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{(x+\Delta x)^3 - x^3}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{x^3 + 3x^2\Delta x + 3x(\Delta x)^2 + (\Delta x)^3 - x^3}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta x(3x^2 + 3x\Delta x + (\Delta x)^2)}{\Delta x}$$

$$= 3x^2$$ **ตอบ**

13. $f(x) = \sqrt{x}$

วิธีทำ ถ้า x เป็นจำนวนใด ๆ ในโดเมนของฟังก์ชัน f

จากสูตร (4) จะได้ว่า

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + Ax, - f(x)}{Ax}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\sqrt{x + \Delta x} - \sqrt{x}}{Ax}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{(\sqrt{x + \Delta x} - \sqrt{x})(\sqrt{x + \Delta x} + \sqrt{x})}{\Delta x(\sqrt{x + \Delta x} + \sqrt{x})}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{x + \Delta x - x}{\Delta x(\sqrt{x + \Delta x} + \sqrt{x})}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{x} + \sqrt{x}}$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

ตอบ

14. $f(x) = \sqrt{3x + 5}$

วิธีทำ ถ้า x เป็นจำนวนใด ๆ ในโดเมนของฟังก์ชัน f

จากสูตร (4) จะได้ว่า

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + Ax, - f(x)}{Ax}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{(\sqrt{3(x + \Delta x) + 5} - \sqrt{3x + 5})(\sqrt{3(x + \Delta x) + 5} + \sqrt{3x + 5})}{\Delta x(\sqrt{3(x + \Delta x) + 5} + \sqrt{3x + 5})}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{(3(x + \Delta x) + 5) - (3x + 5)}{\Delta x(\sqrt{3(x + \Delta x) + 5} + \sqrt{3x + 5})}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{3x + 3\Delta x + 5 - 3x - 5}{\Delta x(\sqrt{3(x + \Delta x) + 5} + \sqrt{3x + 5})}$$

$$= \frac{3}{\sqrt{3x + 5} + \sqrt{3x + 5}}$$

$$= \frac{3}{2\sqrt{3x + 5}}$$

ตอบ

15. $f(x) = \dfrac{1}{x+1}$

วิธีทำ ถ้า x เป็นจำนวนใด ๆ ในโดเมนของฟังก์ชัน f

จากสูตร (4) จะได้ว่า

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{Ax}$$

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\frac{1}{x+\Delta x+1} - \frac{1}{x+1}}{Ax}$$

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{x+1-(x+\Delta x+1)}{\Delta x(x+\Delta x+1)(x+1)}$$

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{-Ax}{\Delta x(x+\Delta x+1)(x+1)}$$

$$\frac{-1}{(x+1)(x+1)}$$

$$\frac{-1}{(x+1)^2}$$

ตอบ

จากข้อ 16 ถึงข้อ 19 จงหา f'(a) สำหรับค่า a ที่กำหนดให้ โดยใช้สูตร (5) ของหัวข้อนี้

16. $f(x) = 1 - x^2$, $a = 3$

วิธีทำ $$f'(3) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(3+\Delta x) - f(3)}{\Delta x}$$

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{1-(3+\Delta x)^2 - (1-3^2)}{Ax}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{1-(9+6\Delta x+(\Delta x)^2) - 1 + 9}{AX}$$

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{1-9-6\Delta x-(\Delta x)^2 - 1 + 9}{Ax}$$

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta x(-6-\Delta x)}{Ax}$$

$$-6$$

ตอบ

17. $f(x) = \frac{4}{5x}, \ a = 2$

วิธีทำ $f'(2) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(2+\Delta x) - f(2)}{\Delta x}$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\frac{4}{5(2+\Delta x)} - \frac{4}{5(2)}}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{40 - 4(10 + 5\Delta x)}{10(10 + 5\Delta x)\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{40 - 40 - 20\Delta x}{(100 + 50\Delta x)\Delta x}$$

$$= \frac{-20}{100}$$

$$= \frac{-1}{5}$$ ตอบ

18. $f(x) = \frac{2}{x^3}, \ a = 6$

วิธีทำ $f'(6) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(6+\Delta x) - f(6)}{\Delta x}$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\frac{2}{(6+\Delta x)^3} - \frac{2}{6^3}}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{2(6^3) - 2(6+\Delta x)^3}{6^3(6+\Delta x)^3\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{432 - 2(216 + 3(6^2)\Delta x + 3(6)(\Delta x)^2 + (\Delta x)^3)}{216(6+\Delta x)^3\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{432 - 432 - 216\Delta x - 36(\Delta x)^2 - 2(\Delta x)^3}{216(6+\Delta x)^3\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta x(-216 - 36(\Delta x) - 2(\Delta x)^2)}{216(6+\Delta x)^3\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{-216 - 36(\Delta x) - 2(\Delta x)^2}{216(6+\Delta x)^3}$$

$$= \frac{-216}{(216)(216)}$$

$$= \frac{-1}{216}$$ ตอบ

19. $f(x) = \sqrt{x^2 - 9}$, $a = 5$

วิธีทำ $f'(5) = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{f(5+\Delta x) - f(5)}{Ax}$

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\sqrt{(5+\Delta x)^2 \quad 9} - \sqrt{5^2 - 9}}{\Delta x}$$

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\sqrt{25 + 10\Delta x + (Ax)' - 9} - \sqrt{25 - 9}}{Ax}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\sqrt{16 \text{ t } 10\Delta x \text{ t } (\Delta x)^2} - \sqrt{16}}{Ax}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{(\sqrt{16 + 10\Delta x + (\Delta x)^2} - 4)(\sqrt{16 \text{ t } 10\Delta x + (\Delta x)^2} + 4)}{\Delta x(\sqrt{16 \text{ t } 10\Delta x \text{ t } (\Delta x)^2} \text{ t } 4)}$$

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{16 \text{ t } 10\Delta x \text{ t } (Ax)' - 16}{\Delta x(\sqrt{16 \text{ t } 10\Delta x \text{ t } (Ax)'} \text{ t } 4)}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{Ax(10 + \Delta x)}{\Delta x(\sqrt{16 + 10\Delta x + (\Delta x)^2} + 4)}$$

$$= \frac{10}{\sqrt{16} + 4}$$

$$\frac{10}{4 + 4}$$

$$= \frac{10}{8}$$

$$\frac{5}{4}$$ **ตอบ**

จากข้อ 20 ถึงข้อ 24 จงหา f'(a) สำหรับค่า a ที่กำหนดให้ โดยใช้สูตร (8) ของหัวข้อนี้

20. $f(x) = 3x + 2$, $a = -3$

วิธีทำ จากสูตร (8) จะได้ว่า

$$f'(x_1) = \lim_{x + x_1} \frac{f(x) - f(x_1)}{x - x_1}$$

$$f'(-3) = \lim_{x \to -3} \frac{3x \text{ t } 2 - [3(-3) \text{ t } 2]}{x - (-3)}$$

$$= \lim_{x \to -3} \frac{3x + 2 - (-9 + 2)}{x+3}$$

$$= \lim_{x \to -3} \frac{3x + 2 + 7}{x+3}$$

$$= \lim_{x \to -3} \frac{3x + 9}{x+3}$$

$$= \lim_{x \to -3} \frac{3(x + 3)}{x+3}$$

$$= 3$$ **ตอบ**

21. $f(x) = x^2 - x + 4 \;,\; a = 4$

วิธีทำ จากสูตร (8) จะได้ว่า

$$f'(x_1) = \lim_{x \to x_1} \frac{f(x) - f(x_1)}{x - x_1}$$

$$f(4) = \lim_{x \to 4} \frac{x^2 - x + 4 - (4^2 - 4 + 4)}{x - 4}$$

$$= \lim_{x \to 4} \frac{x^2 - x + 4 - 16}{x - 4}$$

$$= \lim_{x \to 4} \frac{x^2 - x - 12}{x - 4}$$

$$= \lim_{x \to 4} \frac{(x + 3)(x - 4)}{x - 4}$$

$$= 7$$ **ตอบ**

22. $f(x) = 2 - x^3 \;,\; a = -2$

วิธีทำ จากสูตร (8) จะได้ว่า

$$f'(x_1) = \lim_{x \to x_1} \frac{f(x) - f(x_1)}{x - x_1}$$

$$f(-2) = \lim_{x \to -2} \frac{2 - x^3 - [2 - (-2)^3]}{x+2}$$

$$= \lim_{x \to -2} \frac{2 - x^3 - (2 + 8)}{x+2}$$

$$= \lim_{x \to -2} \frac{-x^3 - 8}{x+2}$$

$$\lim_{x \to -2} \frac{-(x^3 + 2^3)}{x+2}$$

$$= \lim_{x \to -2} \frac{-(x+2)(x^2 - 2x + 2')}{x+2}$$

$$= -(4 - 2(-2) + 4)$$

$$= -12$$ **ตอบ**

23. $f(x) = \sqrt{1+9x}$, $a = 7$

วิธีทำ จากสูตร (8) จะได้ว่า

$$f'(x_1) = \lim_{x \to x_1} \frac{f(x) - f(x_1)}{x - x_1}$$

$$f'(7) = \lim_{x \to 7} \frac{\sqrt{1+9x} - \sqrt{1+9(7)}}{x-7}$$

$$\lim_{x \to 7} \frac{\sqrt{1+9x} - \sqrt{64}}{x-7}$$

$$\lim_{x \to 7} \frac{(\sqrt{1+9x} - 8)(\sqrt{1+9x} + 8)}{(x-7)(\sqrt{1+9x} + 8)}$$

$$= \lim_{x \to 7} \frac{1 + 9x - 64}{(x-7)(\sqrt{1+9x} + 8)}$$

$$\lim_{x \to 7} \frac{9x - 63}{(x-7)(\sqrt{1+9x} + 8)}$$

$$\lim_{x \to 7} \frac{9(x-7)}{(x-7)(\sqrt{1+9x} + 8)}$$

$$\frac{9}{\sqrt{1+9(7)} + 8}$$

$$= \frac{9}{\sqrt{64} + 8}$$

$$= \frac{9}{8+8}$$

$$= \frac{9}{16}$$ **ตอบ**

24. $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{2x+3}}$, $a = 3$

วิธีทำ จากสูตร (8) จะได้ว่า

$$f'(x_1) = \lim_{x \to x_1} \frac{f(x) - f(x_1)}{x - x_1}$$

$$= \lim_{x \to 3} \frac{\frac{1}{\sqrt{2x+3}} - \frac{1}{\sqrt{2(3)+3}}}{x-3}$$

$$= \lim_{x \to 3} \frac{\frac{1}{\sqrt{2x+3}} - \frac{1}{3}}{x-3}$$

$$= \lim_{x \to 3} \frac{3 - \sqrt{2x+3}}{3\sqrt{2x+3}\,(x-3)}$$

$$= \lim_{x \to 3} \frac{(3 - \sqrt{2x+3})(3 + \sqrt{2x+3})}{3\sqrt{2x+3}\,(x-3)(3+\sqrt{2x+3})}$$

$$= \lim_{x \to 3} \frac{9 - 2x - 3}{3\sqrt{2x+3}\,(x-3)(3+\sqrt{2x+3})}$$

$$= \lim_{x \to 3} \frac{-2x + 6}{3\sqrt{2x+3}\,(x-3)(3+\sqrt{2x+3})}$$

$$= \lim_{x \to 3} \frac{-2(x-3)}{3\sqrt{2x+3}\,(x-3)(3+\sqrt{2x+3})}$$

$$= \frac{-2}{3\sqrt{2(3)+3}\,(3+\sqrt{2(3)+3})}$$

$$= \frac{-2}{3(3)(3+3)}$$

$$= \frac{-2}{9(6)}$$

$$= -\frac{1}{27}$$ **ตอบ**

จากข้อ 25 ถึงข้อ 26 จงหา $D_x y$

25. $y = x^2 + x^{-2}$

วิธีทำ $D_x y = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta y}{\Delta x}$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{Ax}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{(x + \Delta x)^2 \; t \; (x + \Delta x)^{-2} - (x^2 - x^{-2})}{Ax}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{x^2 + 2x\Delta x + (Ax,' + 1/(x^2 + 2x\Delta x + (Ax)') - x^2 - x^{-2}}{Ax}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{2x\Delta x + (\Delta x)^2 + 1/(x^2 + 2x\Delta x + (\Delta x)^2) - 1/x^2}{Ax}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{(2x\Delta x + (\Delta x)^2)(x^2)(x^2 + 2x\Delta x + (\Delta x)^2) + x^2 - (x^2 + 2x\Delta x + (\Delta x)^2)}{\Delta x(x^2 + 2x\Delta x + (\Delta x)^2)\, x^2}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{2x^5 \Delta x + 5x^4 (\Delta x)^2 + 4x^3 (\Delta x)^3 + x^2 (\Delta x)^4 - 2x\Delta x - (\Delta x)^2}{\Delta x(x^2 + 2x\Delta x + (\Delta x)^2)x^2}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{Ax\,(2x^5 + 5x^4 \Delta x + 4x^3 (\Delta x)^2 + x^2 (\Delta x)^3 - 2x - \Delta x)}{Ax\,(x^2 + 2x\Delta x + (\Delta x)^2)\, x^2}$$

$$= \frac{2x^5 - 2x}{x^4}$$

$$= 2x - \frac{2}{x^3}$$

ตอบ

26. $y = \frac{1}{x^2} - x$

วิธีทำ $D_x y = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{Ax}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\frac{1}{(x+\Delta x)^2} - (x+\Delta x) - (\frac{1}{x^2} - x)}{Ax}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\frac{1}{(x+\Delta x)^2} - x - Ax - \frac{1}{x^2} + x}{Ax}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{x^2 - \Delta x(x+\Delta x)^2 x^2 - (x+\Delta x)^2}{\Delta x(x+\Delta x)^2 x^2}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{x^2 - \Delta x(x^2)(x^2 + 2(\Delta x)x + (\Delta x)^2) - (x^2 + 2x\Delta x + (\Delta x)^2)}{\Delta x(x+\Delta x)^2 x^2}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{x^2 - \Delta x(x^4) - 2(\Delta x)^2 x - x^2(\Delta x)^3 - x^2 - 2xAx - (\Delta x)^2}{\Delta x(x^2 + 2\Delta x(x) + (\Delta x)^2)x^2}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{-\Delta x(x^4 + 2(\Delta x)x + x^2(\Delta x)^2 + 2x + \Delta x)}{Ax\,(x^2 + 2\Delta x(x) + (\Delta x)^2)x^2}$$

$$= \frac{-x^4 - 2x}{x^4}$$

$$= -1 - \frac{2}{x^3}$$ **ตอบ**

3.2 สรุปเรื่องการหาอนุพันธ์และความต่อเนื่อง

ถ้า f เป็นฟังก์ชันซึ่งหาอนุพันธ์ได้ที่ x_1 แล้ว f จะต่อเนื่องที่ x_1 ด้วย แต่ฟังก์ชันที่ต่อเนื่องที่จุด ๆ หนึ่งไม่จำเป็นต้องหาอนุพันธ์ได้ที่จุดนั้น

นิยาม 3.2.1 ถ้า f เป็นฟังก์ชันซึ่งกำหนดที่ x_1 แล้ว อนุพันธ์จากทางขวามือของ f ที่ x_1 ซึ่งแทนด้วย $f'_+(x_1)$ คือ

$$f'_+(x_1) = \lim_{\Delta x \to 0^+} \frac{f(x_1 + \Delta x) - f(x_1)}{\Delta x}$$

หรือ

$$f'_+(x_1) = \lim_{x \to x_1^+} \frac{f(x) - f(x_1)}{x - x_1}$$

ถ้าลิมิตนี้หาค่าได้

นิยาม 3.2.2 ถ้า f เป็นฟังก์ชันซึ่งกำหนดที่ x_1 แล้ว อนุพันธ์จากทางซ้ายมือของ f ที่ x_1 ซึ่งแทนด้วย $f'_-(x_1)$ คือ

$$f'_-(x_1) = \lim_{\Delta x \to 0^-} \frac{f(x_1 + \Delta x) - f(x_1)}{\Delta x}$$

หรือ

$$f'_-(x_1) = \lim_{x \to x_1^-} \frac{f(x) - f(x_1)}{x - x_1}$$

ถ้าลิมิตนี้หาค่าได้

แบบฝึกหัด 3.2

จากข้อ 1 ถึง 7 จงหา

a) จงพิสูจน์ว่า f ต่อเนื่องที่ x_1

b) จงหา $f'_-(x_1)$ และ $f'_+(x_1)$

c) f หาอนุพันธ์ที่ x_1 ได้หรือไม่

1. $$f(x) = \begin{cases} x+2 & \text{ถ้า } x \leqslant -4 \\ -x-6 & \text{ถ้า } x > -4 \end{cases}$$

$$x_1 = -4$$

วิธีทำ a)

1. $f(-4) = -4+2 = -2$

2. $\lim\limits_{x \to -4^-} f(x) = \lim\limits_{x \to -4^-} (x+2)$

$= -2$

$\lim\limits_{x \to -4^+} f(x) = \lim\limits_{x \to -4^+} (-x-6) = -2$

$\lim\limits_{x \to -4} f(x) = -2$

3. $\lim\limits_{x \to -4} f(x) = f(-4)$

$\therefore$ f ต่อเนื่องที่ - 4

b) $$f'_-(-4) = \lim_{\Delta x \to 0^-} \frac{f(-4+\Delta x) - f(-4)}{Ax}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0^-} \frac{[(-4+\Delta x)+2] - (-2)}{Ax}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0^-} \frac{(-4+\Delta x+2+2)}{Ax}$$

$$= 1$$

$$f'_+(-4) = \lim_{\Delta x \to 0^+} \frac{f(-4 \text{ t } \Delta x) - f(-4)}{Ax}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0^+} \frac{[-(-4+\Delta x) - 6] - (-2)}{Ax}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0^+} \frac{4 - \Delta x - 6 + 2}{\Delta x}$$

$$= -1$$

c) $\because \lim_{\Delta x \to 0^-} \frac{f(-4+\Delta x) - f(-4)}{\Delta x} \neq \lim_{\Delta x \to 0^+} \frac{f(-4+\Delta x) - f(-4)}{\Delta x}$

$\therefore \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(-4+\Delta x) - f(-4)}{\Delta x}$ หาค่าไม่ได้

นั่นคือ f ไม่สามารถหาอนุพันธ์ที่ -4 ได้ **ตอบ**

2. $f(x) = |x - 3|,\ x_1 = 3$

วิธีทำ a)

1. $f(3) = |3 - 3| = 0$

2. $\lim_{x \to 3^-} f(x) = \lim_{x \to 3^-} |x - 3| = 0$

   $\lim_{x \to 3^+} f(x) = \lim_{x \to 3^+} |x - 3| = 0$

   $\therefore \lim_{x \to 3} f(x) = 0$

3. $\lim_{x \to 3} f(x) = f(3)$

   $\therefore f$ ต่อเนื่องที่ 3

b) $f'_-(3) = \lim_{\Delta x \to 0^-} \frac{f(3+\Delta x) - f(3)}{\Delta x}$

$$= \lim_{\Delta x \to 0^-} \frac{|3 + \Delta x - 3| - 0}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0^-} \frac{|\Delta x|}{\Delta x} \quad \text{(เพราะว่าส่วนเป็นลบและเศษเป็นบวก)}$$

$$= -1$$

$f'_+(3) = \lim_{\Delta x \to 0^+} \frac{f(3+\Delta x) - f(3)}{\Delta x}$

$$= \lim_{\Delta x \to 0^+} \frac{|3 + \Delta x - 3| - 0}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0^+} \frac{|\Delta x|}{\Delta x}$$

$$= 1$$

c) $\because f'_-(3) \neq f'_+(3)$

$\therefore$ f หาอนุพันธ์ที่ 3 ไม่ได้ **ตอบ**

3. $f(x) = \begin{cases} -1 & \text{ถ้า } x < 0 \\ x - 1 & \text{ถ้า } x \geqslant 0 \end{cases}$

$x_1 = 0$

วิธีทำ a)

1. $f(0) = -1$

2. $\lim\limits_{x \to 0^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 0^-} (-1)$

$= -1$

$\lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 0^+} (x - 1)$

$= -1$

$\lim\limits_{x \to 0} f(x) = -1$

3. $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = f(0)$

$\therefore$ f ต่อเนื่องที่ 0

b) $f'_-(0) = \lim\limits_{\Delta x \to 0^-} \frac{f(0 + \Delta x) - f(0)}{\Delta x}$

$= \lim\limits_{\Delta x \to 0^-} \frac{-1 - (-1)}{\Delta x}$

$= 0$

$f'_+(0) = \lim\limits_{\Delta x \to 0^+} \frac{f(0 + \Delta x) - f(0)}{\Delta x}$

$= \lim\limits_{\Delta x \to 0^+} \frac{\Delta x - 1 - (-1)}{\Delta x}$

$= 1$

c) $\because f'_-(0) \neq f'_+(0)$

$\therefore f$ ไม่สามารถหาอนุพันธ์ที่ 0 ได้ **ตอบ**

4. $f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{ถ้า } x \leqslant 0 \\ -x^2 & \text{ถ้า } x > 0 \end{cases}$

$x_1 = 0$

วิธีทำ a)

1. $f(0) = 0$

2. $\lim_{x \to 0^-} f(x) = \lim_{x \to 0^-} x^2$

$= 0$

$\lim_{x \to 0^+} f(x) = \lim_{x \to 0^+} (-x^2)$

$= 0$

$\therefore \lim_{x \to 0} f(x) = 0$

3. $\lim_{x \to 0} f(x) = f(0)$

$\therefore f$ ต่อเนื่องที่ 0

b) $f'_-(0) = \lim_{\Delta x \to 0^-} \frac{f(0+\Delta x) - f(0)}{\Delta x}$

$= \lim_{\Delta x \to 0^-} \frac{(\Delta x)^2 - 0}{\Delta x}$

$= \lim_{\Delta x \to 0^-} (\Delta x)$

$= 0$

$f'_+(0) = \lim_{\Delta x \to 0^+} \frac{f(0+\Delta x) - f(0)}{\Delta x}$

$= \lim_{\Delta x \to 0^+} \frac{-(\Delta x)^2 - 0}{\Delta x}$

$= \lim_{\Delta x \to 0^+} (-\Delta x)$

$= 0$

c) $\because f'_-(0) = f'_+(0)$

$\therefore$ f หาอนุพันธ์ที่ 0 ได้ ตอบ

5. $f(x) = \begin{cases} \sqrt{1-x} & \text{ถ้า } x < 1 \\ (1-x)^2 & \text{ถ้า } x \geqslant 1 \end{cases}$

$x_1 = 1$

วิธีทำ a) 1. $f(1)$ 0

2. $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 1^-} \sqrt{1-x}$

$= 0$

$\lim\limits_{x\to 1^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 1^+} (1-x^2)$

$= 0$

$\therefore \lim\limits_{x\to 1} f(x) = 0$

3. $\lim\limits_{x\to 1} f(x) = f(1)$

$\therefore$ f ต่อเนื่องที่ 1

b) $f'_-(1) = \lim\limits_{\Delta x\to 0^-} \dfrac{f(1+\Delta x) - f(1)}{\Delta x}$

$= \lim\limits_{\Delta x\to 0^-} \dfrac{\sqrt{1-(1+\Delta x)} - 0}{\Delta x}$

$= \lim\limits_{\Delta x\to 0^-} \dfrac{\sqrt{1-1-\Delta x}}{\Delta x}$

$= \lim\limits_{\Delta x\to 0^-} \dfrac{\sqrt{-\Delta x}}{\Delta x}$

ลิมิตนี้หาค่าไม่ได้

$f'_+(1) = \lim\limits_{\Delta x\to 0^+} \dfrac{f(1+\Delta x) - f(1)}{\Delta x}$

$= \lim\limits_{\Delta x\to 0^+} \dfrac{(1-(1+\Delta x))^2 - 0}{\Delta x}$

$$= \lim_{\Delta x \to 0^+} \frac{(1-1-\Delta x)^2}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0^+} \frac{(\Delta x)^2}{\Delta x}$$

$$= 0$$

$$\therefore \lim_{\Delta x \to 0^-} \frac{f(1+\Delta x)-f(1)}{\Delta x} \neq \lim_{\Delta x \to 0^+} \frac{f(1+\Delta x)-f(1)}{\Delta x}$$

$\therefore$ f ไม่สามารถหาอนุพันธ์ที่ 1 ได้ **ตอบ**

6. $f(x) = \sqrt[3]{x+1}$ * x , = - 1

วิธีทำ a) 1. $f(-1) = 0$

2. $\lim_{x \to -1^-} f(x) = 0$

$\lim_{x \to -1^+} f(x) = 0$

$\therefore \lim_{x \to -1} f(x) = 0$

3. $\lim_{x \to -1} f(x) = f(-1)$

$\therefore$ f ต่อเนื่องที่ -1

b) $$f'_-(-1) = \lim_{\Delta x \to 0^-} \frac{f(-1+\Delta x)-f(-1)}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0^-} \frac{\sqrt[3]{(-1+\Delta x)+1} - 0}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0^-} \frac{\sqrt[3]{\Delta x}}{\Delta x}$$

ลิมิตนี้ไม่สามารถหาค่าได้

$$f'_+(-1) = \lim_{\Delta x \to 0^+} \frac{f(-1+\Delta x)-f(-1)}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0^+} \frac{\sqrt[3]{(-1+\Delta x)+1} - 0}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0^+} \frac{\sqrt[3]{\Delta x}}{\Delta x}$$

ลิมิตนี้ไม่สามารถหาค่าได้

c) $\because \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{f(-1 + Ax) - f(-1)}{Ax}$ หาค่าไม่ได้

$\therefore$ f จึงไม่สามารถหาอนุพันธ์ที่ -1 ได้ **ตอบ**

7. $f(x) = \begin{cases} 5 - 6x & \text{ถ้า } x \leqslant 3 \\ -4 - x^2 & \text{ถ้า } x > 3 \end{cases}$

$x_1 = 3$

a) 1. $f(3) = -13$

2. $\lim\limits_{x \to 3^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 3^-} (5 - 6x) = -13$

$\lim\limits_{x \to 3^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 3^+} (-4 - x^2) = -13$

$\lim\limits_{x \to 3} f(3) = -13$

3. $\lim\limits_{x \to 3} f(x) = f(3)$

$\therefore$ f ต่อเนื่องที่ 3

b) $f'_-(3) = \lim\limits_{\Delta x \to 0^-} \dfrac{f(3 + \Delta x) - f(3)}{Ax}$

$= \lim\limits_{\Delta x \to 0^-} \dfrac{[5 - 6(3 + \Delta x)] - (-13)}{Ax}$

$= \lim\limits_{\Delta x \to 0^-} \dfrac{5 - 18 - 6\Delta x + 13}{Ax}$

$= -8$

$f'_+(3) = \lim\limits_{\Delta x \to 0^+} \dfrac{f(3 + \Delta x) - f(3)}{\Delta x}$

$= \lim\limits_{\Delta x \to 0^+} \dfrac{[-4 - (3 + \Delta x)^2] - (-13)}{Ax}$

$= \lim\limits_{\Delta x \to 0^+} \dfrac{-4 - 9 - 6Ax - (\Delta x)^2 + 13}{Ax}$

$= \lim\limits_{\Delta x \to 0^+} \dfrac{-6\Delta x - (\Delta x)^2}{Ax}$

$= -6$

cl $\because \lim_{\Delta x \to 0^-} \frac{f(3+\Delta x) - f(3)}{Ax} = \lim_{\Delta x \to 0^+} \frac{f(3+\Delta x) - f(3)}{\Delta x}$

$\therefore f$ หาอนุพันธ์ที่ 3 ได้

8. กำหนดให้ $f(x) = x^{3/2}$ จงพิสูจน์ว่า f ต่อเนื่องจากทางขวามือที่ 0 และจงพิสูจน์ว่า $f'_+(0)$ หาค่าได้

วิธีทำ การพิสูจน์ว่า f(x) ต่อเนื่องจากทางขวามือที่ 0

1. $f(0) = 0$
2. $\lim_{x \to 0^+} f(x) = 0$
3. $\lim_{x \to 0^+} f(x) = f(0)$

$\therefore f$ ต่อเนื่องจากทางขวามือที่ 0

การพิสูจน์ว่า $f'_+(0)$ หาค่าได้

$$f'_+(0) = \lim_{\Delta x \to 0^+} \frac{f(0+Ax) - f(0)}{Ax}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0^+} \frac{(\Delta x)^{3/2} - 0}{Ax}$$

$$= 0$$ **ตอบ**

9. กำหนดให้ $f(x) = \sqrt{x-4}$ จงพิสูจน์ว่า f ต่อเนื่องจากทางขวามือที่ 4 และจงพิสูจน์ว่า $f'_+(4)$ หาค่าไม่ได้

วิธีทำ การพิสูจน์ว่า f(x) ต่อเนื่องจากทางขวามือที่ 4

1. $f(4) = 0$
2. $\lim_{x \to 4^+} f(x) = 0$
3. $\lim_{x \to 4^+} f(x) = f(4)$

$\therefore f$ ต่อเนื่องจากทางขวามือที่ 4

การพิสูจน์ว่า $f'_{+}(4)$ หาค่าไม่ได้

$$f'_{+}(4) = \lim_{\Delta x \to 0^{+}} \frac{f(4 + \Delta x) - f(4)}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0^{+}} \frac{\sqrt{4 + \Delta x - 4} - 0}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0^{+}} \frac{\sqrt{\Delta x}}{\Delta x}$$

$\therefore$ ลิมิตนี้หาค่าไม่ได้

$\therefore f'_{+}(4)$ หาค่าไม่ได้ **ตอบ**

3.3 สรุปเรื่องทฤษฎีเกี่ยวกับการหาอนุพันธ์ของฟังก์ชันพีชคณิต

การหาอนุพันธ์ของฟังก์ชันพีชคณิต มีสูตรดังนี้

ถ้า c เป็นตัวคงที่, n เป็นจำนวนจริงใด ๆ, f, g และ h เป็นฟังก์ชัน โดยที่ f และ g เป็นฟังก์ชันที่หาอนุพันธ์ได้แล้ว

1. $f(x) = c$

   $f'(x) = 0$

2. $f(x) = x^n$

   $f'(x) = nx^{n-1}$

3. $g(x) = c\,f(x)$

   $g'(x) = cf'(x)$

4. $h(x) = f(x) + g(x)$

   $h'(x) = f'(x) + g'(x)$

อนุพันธ์ของผลบวกของ 2 ฟังก์ชัน คือผลบวกของอนุพันธ์ของ 2 ฟังก์ชันนั้น ถ้าอนุพันธ์ของ 2 ฟังก์ชันนั้นหาค่าได้

5. อนุพันธ์ของผลบวกของฟังก์ชันที่มีจำนวนที่นับได้มีค่าเท่ากับผลบวกของอนุพันธ์ของฟังก์ชันเหล่านั้น ถ้าอนุพันธ์ของฟังก์ชันเหล่านั้นหาค่าได้

6. $h(x) = f(x) \cdot g(x)$

   $h'(x) = f(x) \cdot g'(x) + g(x) \cdot f'(x)$

   หรือ ดิฟผลคูณ = หน้าดิฟหลัง+หลังดิฟหน้า

   ดิฟ หมายถึงการหาอนุพันธ์ ซึ่งย่อมาจาก differentiation

7. $h(x) = \dfrac{f(x)}{g(x)}, \quad g(x) \neq 0$

   $h'(x) = \dfrac{g(x) \cdot f'(x) - f(x) \cdot g'(x)}{[g(x)]^2}$

   หรือ ดิฟเศษส่วน $= \dfrac{\text{ส่วนดิฟเศษ} - \text{เศษดิฟส่วน}}{\text{ส่วนยกกำลังสอง}}$

แบบฝึกหัด 3.3

จากข้อ 1 ถึงข้อ 15 จงหาอนุพันธ์ของฟังก์ชันที่กำหนดให้ โดยใช้ทฤษฎีต่าง ๆ ที่อยู่ในหัวข้อนี้

1. $f(x) = x^3 - 3x^2 + 5x - 2$

วิธีทำ $f'(x) = 3x^2 - 3(2x) + 5$

$= 3x' - 6x + s$ **ตอบ**

2. $f(x) = \frac{1}{8}x^8 - x^4$

วิธีทำ $f'(x) = \frac{1}{8}(8x^7) - 4x^3$

$= x^7 - 4x^3$ **ตอบ**

3. $F(t) = \frac{1}{4}t^4 - \frac{1}{2}t^2$

วิธีทำ $F'(t) = \frac{1}{4}(4t^3) - \frac{1}{2}(2t)$

$= t^3 - t$ **ตอบ**

4. $V(r) = \frac{4}{3}\pi r^3$

วิธีทำ $V'(r) = \frac{4}{3}\pi(3r^2)$

$= 4\pi r^2$ **ตอบ**

5. $F(x) = x^2 + 3x + \frac{1}{x^2}$

วิธีทำ $F(x) = x^2 + 3x + x^{-2}$

$F'(x) = 2x + 3 - 2x\text{-}5$

$= 2x + 3 - \frac{2}{x^3}$ **ตอบ**

6. $g(x) = \frac{3}{x^2} + \frac{5}{x^4}$

วิธีทำ $g(x) = 3x\text{-'}+ 5x^{-4}$

$g'(x) = 3(-2x^{-3})\ t\ 5(-4x^{-5})$

$= -6x^{-3} - 20x^{-5}$

$= \frac{-6}{x^3} - \frac{20}{x^5}$ **ตอบ**

7. $f(x) = 4x^{½} + 5x^{-½}$

วิธีทำ $f'(x) = 4(\frac{1}{2}x^{-½}) + 5(-\frac{1}{2}x^{-3/2})$

$\frac{2}{x^{½}} - \frac{5}{2x^{3/2}}$ ตอบ

8. $g(t) = \sqrt[3]{t} + \sqrt[3]{\frac{1}{t}}$

วิธีทำ $g(t) = t^{1/3} + (\frac{1}{t})^{1/3}$

$= t^{1/3} + t^{-1/3}$

$g'(t) = \frac{1}{3}t^{-2/3} + (-\frac{1}{3}t^{-4/3})$

$= \frac{1}{3t^{2/3}} - \frac{1}{3t^{4/3}}$

$= \frac{1}{3\sqrt[3]{t^2}} - \frac{1}{3t\sqrt[3]{t}}$ ตอบ

9. $f(x) = (2x^4 - 1)(5x^3 + 6x)$

วิธีทำ $f'(x) = (2x^4 - 1)(5(3x^2) + 6) + (5x^3+6x)(2(4x^3) - 0)$

$= (2x^4 - 1)(15x^2 + 6) + (5x^3 + 6x)(8x^3)$

$= (30x^6 + 12x^4 - 15x' - 6)$ t $(40x^6 + 48x^4)$

$= 70x^6 + 60x^4 - 15x' - 6$ ตอบ

10. $H(x) = \frac{x}{x-1}$

วิธีทำ $H'(x) = \frac{(x-1) - x(1-0)}{(x-l)'}$

$= \frac{x - l - x}{(x-1)'}$

$= \frac{-1}{(x-l)?}$ ตอบ

11. $f(x) = \frac{x^2 + 2x + 1}{x^2 - 2x + 1}$

วิธีทำ $f'(x) = \frac{(x^2 - 2x + 1)(2x + 2) - (x^2 + 2x + 1)(2x - 2)}{(x^2 - 2x + 1)^2}$

$= \frac{(2x^3 - 2x^2 - 2x + 2) - (2x^3 + 2x^2 - 2x \quad 2)}{(x-l)'}$

$$= \frac{-4x' + 4}{(x-1)^4}$$

$$= \frac{-4(x^2-1)}{(x-l)'}$$

$$= \frac{-4(x+1)(x-1)}{(x-1)^4}$$

$$= \frac{-4(x+1)}{(x-1)^3}$$ **ตอบ**

12. $g(x) = \frac{x^3-8}{x^3+8}$

วิธีทำ $g'(x) = \frac{(x^3+8)(3x^2) - (x^3-8)(3x^2)}{(x^3+8)'}$

$$= \frac{3x^5 + 24x^2 - 3x^5 + 24x^2}{(x^3+8)^2}$$

$$= \frac{48x^2}{(x^3+8)^2}$$ **ตอบ**

13. $f(x) = \frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}+1}$

วิธีทำ $f''(X) = \frac{(\sqrt{x}+1)(\frac{1}{2}x^{-1/2}) - (\sqrt{x}-1)(\frac{1}{2}x^{-1/2})}{(\sqrt{x}+1)^2}$

$$= \frac{\frac{1}{2} + \frac{1}{2}x^{-1/2} - \frac{1}{2} + \frac{1}{2}x^{-1/2}}{(\sqrt{x}+1)^2}$$

$$= \frac{x^{-1/2}}{(\sqrt{x}+1)^2}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{x}(\sqrt{x}+1)^2}$$ **ตอบ**

14. $f(u) = -5u + \frac{1}{\sqrt{u}} + \sqrt[3]{u^2}$

วิธีทำ $f(u) = -5u + u^{-1/2} + u^{2/3}$

$f'(u) = -5 - \frac{1}{2}u^{-3/2} + \frac{2}{3}u^{-1/3}$

$$= -5 - \frac{1}{2u^{3/2}} + \frac{2}{3u^{1/3}}$$

$$= -5 - \frac{1}{2u\sqrt{u}} + \frac{2}{3\sqrt[3]{u}}$$ **ตอบ**

15. $f(x) = \frac{2x+1}{x+5}(3x-1)$

วิธีทำ $f'(x) = \frac{2x+1}{x+5}(3) + (3x-1)\left[\frac{(x+5)(2)-(2x+1)(1)}{(x+5)^2}\right]$

$= \frac{6x+3}{x+5} + (3x-1)\frac{2x+10-2x-1}{(x+5)^2}$

$= \frac{6x+3}{x+5} + (3x-1)\frac{9}{(x+5)^2}$

$= \frac{(6x+3)(x+5)+(27x-9)}{(x+5)^2}$

$= \frac{6x^2+3x+15+27x-9}{(x+5)^2}$

$= \frac{6x^2+60x+6}{(x+5)^2}$

$= \frac{6(x^2+10x+1)}{(x+5)^2}$ **ตอบ**

16. จงหาสมการของเส้นสัมผัสกับเส้นโค้ง $y = x^{½} - 3x$ ที่จุด $(1, -2)$

วิธีทำ $m = \frac{dy}{dx} = \frac{1}{2}x^{-½} - 3$

$m_{(1,-2)} = \frac{1}{2} - 3 = -\frac{5}{2}$

$\frac{y+2}{x-1} = -\frac{5}{2}$

$y+2 = -\frac{5}{2}(x-1)$

$= -\frac{5}{2}x + \frac{5}{2}$

$y = -\frac{5}{2}x + \frac{5}{2} - 2$

$= -\frac{5}{2}x + \frac{1}{2}$

$2y = -5x+1$

$\therefore 5x + 2y - 1 = 0$

17. จงหาสมการของเส้นสัมผัสกับเส้นโค้ง $y = \frac{8}{x^2+4}$ ที่จุด (2, 1)

วิธีทำ $m = \frac{dy}{dx} = \frac{(x^2+4)(0) - 8(2x)}{(x^2+4)^2}$

$= \frac{-16x}{(x^2+4)^2}$

$m_{(2,1)} = \frac{-(16)(2)}{(2^2+4)^2} = -\frac{32}{64} = -\frac{1}{2}$

$\frac{y-1}{x-2} = -\frac{1}{2}$

$y - 1 = -\frac{1}{2}(x-2)$

$= -\frac{1}{2}x + 1$

$y = -\frac{1}{2}x + 2$

$2y = -x + 4$

$x + 2y - 4 = 0$ **ตอบ**

18. ให้ $f(x) = x^2 - 2x - 1$

a) จงหาจุดที่อยู่บนกราฟของ f ที่ซึ่งเส้นสัมผัสอยู่ในแนวระดับ

b) เขียนกราฟของ f และแสดงเส้นสัมผัสในแนวระดับ

วิธีทำ a) $f(x) = x^2 - 2x - 1$

$f'(x) = 2x - 2 = 0$

$x = 1$

ความชันของเส้นสัมผัสในแนวระดับมีค่า $= 0$

$f(1) = 1 - 2 - 1 = -2$

$\therefore$ จุด $(1, -2)$ เป็นจุดที่อยู่บนกราฟของ f ซึ่งเส้นสัมผัสอยู่ในแนวระดับ

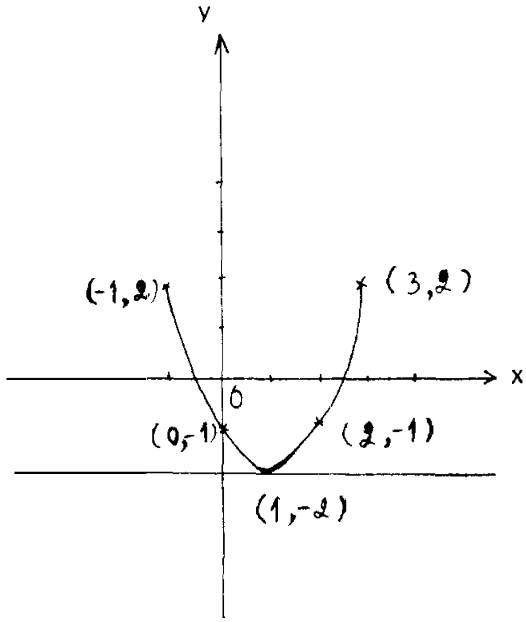
b) $f(2) = 4 - 4 - 1 = -1$

$f(3) = 9 - 6 - 1 = 2$

$f(4) = 16 - 8 - 1 = 7$

$f(0) = 0 - 0 - 1 = -1$

$f(-1) = 1 + 2 - 1 = 2$



19. ให้ $f(x) = -x^2 + 6x - 4$

a) จงหาจุดที่อยู่บนกราฟของ f ที่ซึ่งเส้นสัมผัสอยู่ในแนวระดับ

b) เขียนกราฟของ f และแสดงเส้นสัมผัสในแนวระดับ

วิธีทำ a) $f(x) = -x^2 + 6x - 4$

$f'(x) = -2x + 6$

ความชันของเส้นสัมผัสในแนวระดับมีค่า = 0

$\therefore -2x + 6 = 0$

$x = \frac{6}{2} = 3$

$f(3) = -3^2 + 6(3) - 4$

$= -9 + 18 - 4$

$= 5$

$\therefore$ จุด (3,5) เป็นจุดที่อยู่บนกราฟของ f ที่ซึ่งเส้นสัมผัสอยู่ในแนวระดับ

ตอบ

b) $f(1) = -1+6-4 = 1$

$f(2) = -2^2 + 6(2) - 4$

$= -4 + 12 - 4 = 4$

$f(0) = -4$

$f(4) = -4^2 + 6(4) - 4$

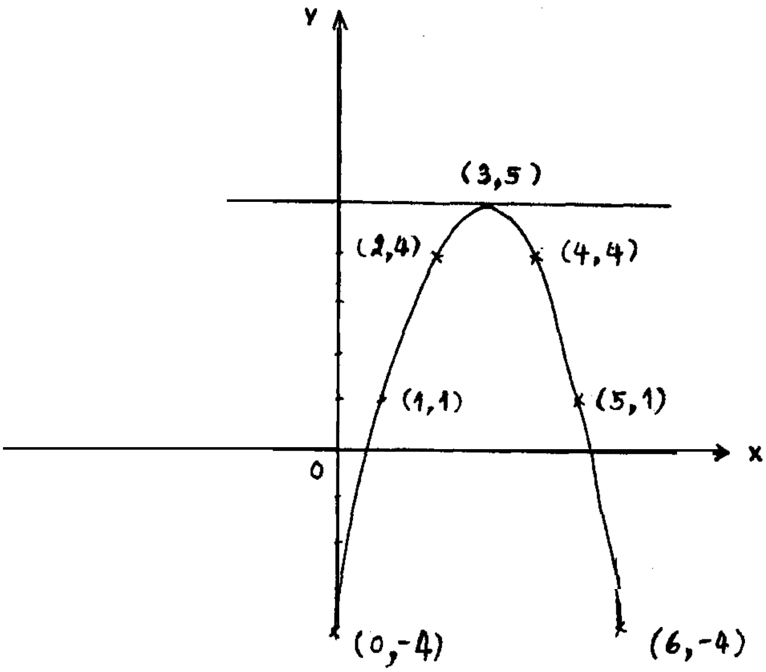
$= -16 + 24 - 4 \quad 3\ 4$

$f(5) = -5^2 + 6(5) - 4$

$= -25 + 30 - 4 = 1$

$f(6) = -6^2 + 6(6) - 4$

$= -36 + 36 - 4 = -4$



20. ให้ $f(x) = x + 2 + \frac{4}{x}$

a) จงหาจุดทุกจุดบนกราฟของ f ซึ่งเส้นสัมผัสอยู่ในแนวระดับ

b) เขียนกราฟของ f และแสดงเส้นสัมผัสในแนวระดับ

วิธีทำ a)

$$f(x) = x + 2 + \frac{4}{x}$$
$$= x + 2 + 4x^{-1}$$
$$f'(x) = 1 + 4(-1)(x)^{-2}$$
$$= 1 - 4x^{-2}$$

ความชันของเส้นสัมผัสในแนวระดับมีค่า $= 0$

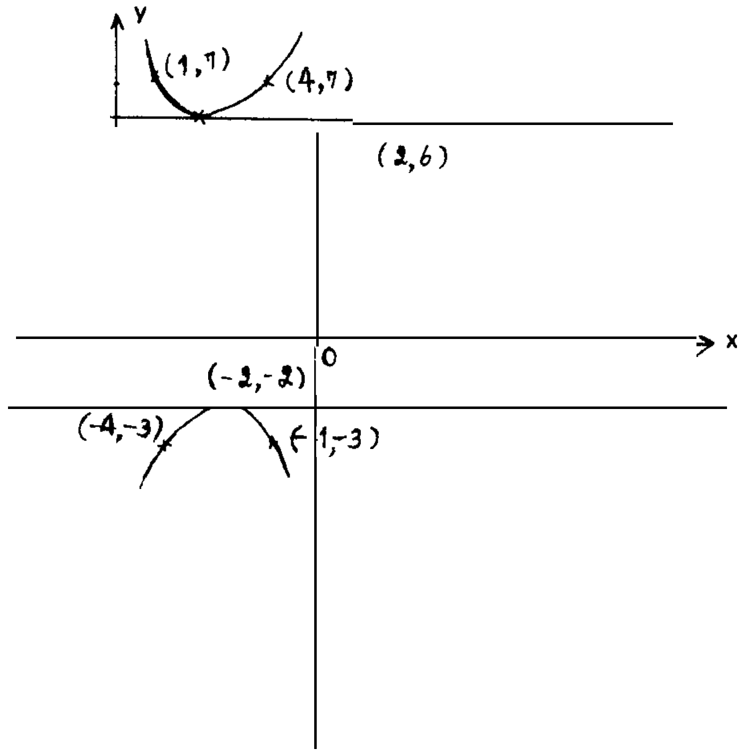
$$\therefore 1 - 4x^{-2} = 0$$
$$4x^{-2} = 1$$
$$x^{-2} = \frac{1}{4}$$
$$x^2 = 4$$
$$x = \pm 2$$
$$(2) = 2 + 2 + \frac{4}{2} = 6$$
$$(-2) = -2 + 2 + \frac{4}{-2} = -2$$

$\therefore$ จุด $(2,6)$ และ $(-2, -2)$ เป็นจุดที่อยู่บนกราฟของ f ซึ่งเส้นสัมผัสอยู่ในแนวระดับ

ตอบ

b)

$$f(1) = 1 + 2 + 4 = 7$$
$$f(2) = 2 + 2 + \frac{4}{2} = 6$$
$$f(4) = 4 + 2 + \frac{4}{4} = 7$$
$$f(-1) = -1 + 2 + \frac{4}{-1} = -3$$
$$(-3) = -3 + 2 + \frac{4}{-3}$$
$$= -1 - \frac{4}{3}$$
$$= -\frac{7}{3}$$
$$= -2\frac{1}{3}$$
$$f(-2) = -2 + 2 + \frac{4}{-2} = -2$$
$$f(-4) = -4 + 2 - 1 = -3$$


y
(1,7)
(4,7)
(2,6)
x
0
(-2,-2)
(-4,-3)
(-1,-3)

3.4 ต้นทุนเพิ่ม ความยืดหยุ่นของราคา และรายได้เพิ่ม

(Marginal Cost, Elasticity of Cost and Marginal Revenue)

ความแปรผันของปริมาณชนิดหนึ่ง เมื่อเทียบกับปริมาณอีกชนิดหนึ่ง ในทางเศรษฐศาสตร์อาจจะอธิบายได้โดยใช้แนวความคิด "เชิงเฉลี่ย" หรือ "เชิงเพิ่ม" สำหรับแนวความคิดเชิงเฉลี่ยนั้น แสดงความแปรผันของปริมาณบนพิสัย (range) ที่กำหนดให้ของค่าแห่งปริมาณชนิดที่สอง ส่วนแนวความคิดเชิงเพิ่มแสดงความเปลี่ยนแปลงโดยทันทีของปริมาณชนิดที่สอง เมื่อมีการเปลี่ยนไปเพียงเล็กน้อยในปริมาณชนิดที่สอง

ในการอธิบายจะให้ตัวอย่างทางเศรษฐศาสตร์พร้อมด้วยคำนิยามของต้นทุนเฉลี่ยและต้นทุนเพิ่ม ซึ่งแนวความคิดเหล่านี้เกี่ยวข้องกับเรื่องลิมิตและอนุพันธ์ในแคลคูลัสที่จะได้กล่าวถึงต่อไป

ถ้ากำหนดให้ต้นทุนในการผลิตสินค้า x หน่วย เป็น C(x) บาท

ฟังก์ชัน C เรียกว่า ฟังก์ชันต้นทุนรวม (total cost function)

และ x ซึ่งแทนจำนวนหน่วยของสินค้าต้องเป็นจำนวนเต็มบวก แต่เพื่อประยุกต์ใช้ในแคลคูลัส จึงกำหนดให้ x เป็นจำนวนจริงบวกเพื่อให้สอดคล้องกับเงื่อนไขความต่อเนื่องของฟังก์ชัน C

ต้นทุนเฉลี่ยของการผลิตสินค้าแต่ละหน่วย หาได้จากการหารต้นทุนรวมด้วยจำนวนหน่วยที่ผลิต ดังนั้น

ถ้า Q(x) เป็นค่าเฉลี่ย จะได้

$$Q(x) = \frac{C(x)}{x}$$

เรียก Q ว่าเป็นฟังก์ชันต้นทุนเฉลี่ย

ถ้าผลิตภัณฑ์ชนิดหนึ่งจำนวน x_1 หน่วย ถูกเปลี่ยนแปลงไปเป็นจำนวน Δx แล้วการเปลี่ยนแปลงในต้นทุนรวมจะกำหนดได้โดย $C(x_1+\Delta x)-C(x_1)$ และการเปลี่ยนแปลงเฉลี่ยในต้นทุนรวมอันเนื่องจากการเปลี่ยนแปลงไปของจำนวนการผลิตกำหนดได้โดย

$$\frac{C(x_1+\Delta x)-C(x_1)}{\Delta x} \qquad (3.4.1)$$

นักเศรษฐศาสตร์ใช้คำว่า "ต้นทุนเพิ่ม" (marginal cost) สำหรับค่าลิมิตของ (3.4.1) ที่หาได้เมื่อ x เข้าใกล้ศูนย์ ค่าลิมิตนี้ก็คืออนุพันธ์ของ C ที่ x_1 ซึ่งจะให้นิยามได้ดังต่อไปนี้

นิยาม 3.4.1 ถ้า $C(x)$ เป็นจำนวนบาทของต้นทุนรวมการผลิตสินค้า x หน่วย แล้วต้นทุนเพิ่ม เมื่อ $x = x_1$ กำหนดโดย $C'(x_1)$ ฟังก์ชัน C' เรียกว่าฟังก์ชันต้นทุนเพิ่ม และ $C'(x_1)$ หมายความถึงอัตราการเปลี่ยนแปลงของต้นทุนรวมเมื่อผลิตสินค้า x_1 หน่วย

กราฟของฟังก์ชันต้นทุนรวม ฟังก์ชันต้นทุนเพิ่ม และฟังก์ชันต้นทุนเฉลี่ย เรียกว่า เส้นต้นทุนรวม (total cost curve หรือ TC) เส้นต้นทุนเพิ่ม (marginal cost curve หรือ MC) และเส้นต้นทุนเฉลี่ย (average cost curve หรือ AC) ตามลำดับ จะศึกษากราฟเหล่านี้ให้ละเอียดขึ้นในหัวข้อ 4.8 หลังจากประยุกต์อนุพันธ์เพื่อเขียนกราฟ

นิยาม 3.4.2 ถ้า $C(x)$ เป็นจำนวนบาทของราคารวมในการผลิตสินค้า x ชิ้น และ $Q(x)$ บาท เป็นต้นทุนเฉลี่ยในการผลิตสินค้าแต่ละชิ้น แล้วต้นทุนยืดหยุ่น (elasticity of cost) แทนได้ด้วยฟังก์ชัน K ซึ่ง $K(x) = \dfrac{C'(x)}{Q(x)}$

ถ้าราคายืดหยุ่นน้อยกว่า 1 แล้วต้นทุนการผลิตต่อหน่วยต่อไปอาจน้อยกว่าต้นทุนเฉลี่ยของหน่วยที่ผลิตขึ้นแล้ว ถ้าต้นทุนยืดหยุ่นมากกว่า 1 แล้ว ต้นทุนเฉลี่ยแต่ละหน่วยจะเพิ่มเมื่อหน่วยต่อไปถูกผลิตขึ้น

ในหัวข้อ 1.6 เรากล่าวว่าสมการอุปสงค์เป็นอันหนึ่งที่ให้ความสัมพันธ์ระหว่าง p และ x เมื่อ p บาท เป็นราคาของสินค้าแต่ละหน่วยในจำนวนสินค้า x หน่วยที่ต้องการ ถ้าแก้สมการอุปสงค์หา p จะได้ฟังก์ชันราคา f ซึ่งกำหนดด้วย

$$p = f(x)$$

โดย x เป็นจำนวนจริงบวกและ f เป็นฟังก์ชันต่อเนื่อง

อีกฟังก์ชันหนึ่งที่สำคัญทางเศรษฐศาสตร์ก็คือฟังก์ชันรายได้รวม (total revenue function) และใช้สัญลักษณ์ R โดย

$$R(x) = px$$

เนื่องจาก p และ x เป็นจำนวนบวกภายใต้เงื่อนไขปกติ ดังนั้น $R(x)$ เป็นจำนวนบวกด้วย เมื่อ $x \neq 0$ จากสมการข้างบนเราได้

$$\frac{R(x)}{x} = p$$

แสดงว่ารายได้ต่อหน่วย (รายได้เฉลี่ย) และราคาต่อหน่วยเท่ากัน

นิยาม 3.4.3 ถ้า $R(x)$ เป็นรายได้รวมเมื่อมีอุปสงค์ในสินค้า x หน่วย แล้ว รายได้เพิ่ม (marginal revenue) ที่ $x = x_1$ คือ $R'(x_1)$ ฟังก์ชัน R' เรียกว่า ฟังก์ชันรายได้เพิ่ม

$R'(x_1)$ อาจเป็นบวกหรือลบหรืออาจเป็นศูนย์แล้วอาจอธิบายว่าเป็นอัตราการเปลี่ยนของรายได้รวม เมื่อสินค้าที่ต้องการมีจำนวน x_1 หน่วย เช่นเดียวกับที่ $C'(k)$ เป็นต้นทุนโดยประมาณของผลิตภัณฑ์หน่วยที่ $k+1$ หลังจากผลิตแล้ว k หน่วย $R'(k)$ เป็นรายได้โดยประมาณจากการขายสินค้าหน่วยที่ $k+1$ หลังจากได้ขายสินค้าไปแล้ว k หน่วย

กราฟของฟังก์ชันรายได้รวมและรายได้เพิ่มเรียกว่าเส้นรายได้รวม (total revenue curve หรือ TR) และเส้นรายได้เพิ่ม (marginal revenue curve หรือ MR) ตามลำดับ

เฉลยแบบฝึกหัด 3.4

1) จำนวนบาทในต้นทุนรวมในการทำนาฬิกาข้อมือ x เรือน ของโรงงานแห่งหนึ่ง กำหนด

โดย $C(x) = 1500 + 30x + x^2$ จงหา

ก) ฟังก์ชันต้นทุนเพิ่ม

ข) ต้นทุนเพิ่มเมื่อ $x = 40$

ค) ต้นทุนจริงในการผลิตนาฬิกาเรือนที่ 41

วิธีทำ

n) จาก $C(x) = 1500 + 30x + x^2$

ฟังก์ชันต้นทุนเพิ่มคือ $C'(x) = 30+2x$

Y) ต้นทุนเพิ่มเมื่อ $x = 40$ ก็คือ $C'(40)$

โดย $C'(40) = 30+2(40)$

$= 110$ บาท

ค) จาก $C(x) = 1500 + 30x + x^2$

$\therefore C(40) = 1500+30(40)+(40)^2$

$= 1500+1200+1600$

$= 4300$

และ $c(41) = 1500+30(41)+(41)^2$

$= 1500+1230+1681$

$= 4411$

$\therefore$ ต้นทุนจริงในการผลิตนาฬิกาเรือนที่ 41 คือ $c(41) - C(40)$

โดย $C(41) - C(40) = 4411-4300$

$= 111$ บาท

2) ถ้า $C(x)$ บาท เป็นต้นทุนรวมในการผลิตกระดาษ x หน่วย น้ำหนัก และ

$C(x) = 200 + \frac{50}{x} + \frac{x^2}{5}$ จงหา

ก) ฟังก์ชันต้นทุนเพิ่ม

ข) ต้นทุนเพิ่มเมื่อ $x = 10$

ค) ต้นทุนจริงในการผลิตกระดาษหน่วยน้ำหนักที่ 11

วิธีทำ จาก $C(x) = 200 + \frac{50}{x} + \frac{x^2}{5}$

ก) ฟังก์ชันต้นทุนเพิ่มคือ $C'(x) \;=\; -\frac{50}{x^2}+\frac{2x}{5}$

ข) ต้นทุนเพิ่มเมื่อ $x = 10$ คือ $C'(10) \;=\; -\frac{50}{100}+\frac{20}{5}$

$= 3\frac{1}{2}$ บาท

ค) ต้นทุนจริงในการผลิตกระดาษหน่วยน้ำหนักที่ 11 คือ $C(11) - C(10)$

เมื่อ $C(10) = 200+\frac{50}{10}+\frac{100}{5}$

$= 225$ บาท

และ $C(11) = 200+\frac{50}{11}+\frac{121}{5}$

$= 228\frac{41}{55}$ บาท

$$\therefore\ C(11) - C(10) = 228\frac{41}{55} - 225$$

$$= 3\frac{41}{55}$$

ดังนั้นต้นทุนจริงในการผลิตกระดาษหน่วยน้ำหนักที่ 11 คือ 3.75 บาท

3) ในการผลิตของเหลวโดยกรรมวิธีทางเคมีอันหนึ่ง และฟังก์ชันต้นทุนรวม C กำหนดโดย $C(x) = 6+\sqrt[4]{x}$ เมื่อ $C(x)$ บาทเป็นต้นทุนรวมของการผลิตของเหลวนั้น x แกลลอน จงหา

ก) ต้นทุนเฉลี่ย

ข) ต้นทุนเพิ่ม

ค) ต้นทุนยืดหยุ่นเมื่อ $x = 100$

วิธีทำ จาก $C(x) = 6+\sqrt[4]{x}$

ก) ต้นทุนเฉลี่ยคือ $Q(x) = \frac{C(x)}{x}$

$$= \frac{6+\sqrt[4]{x}}{x}$$

ข) ต้นทุนเพิ่มคือ $C'(x) = \frac{1}{4}x^{-3/4}$

$$= \frac{1}{4\sqrt[4]{x^3}}$$

ค) ต้นทุนยืดหยุ่นคือ $K(x) = \frac{C'(x)}{Q(x)}$

$$\frac{x}{(4x^{3/4})(6x^{1/4})}$$

$\therefore$ ต้นทุนยืดหยุ่นเมื่อ $x = 100$ คือ $K(100) = (\frac{1}{4\sqrt[4]{100^3}})(\frac{100}{6+\sqrt[4]{100}})$

$= 0.09$ บาท

4) จำนวนบาทในการผลิตสินค้า x หน่วย กำหนดโดย $C(x) = 40+3x+9\sqrt{2x}$ จงหา

ก) ต้นทุนเฉลี่ย

ข) ต้นทุนเพิ่ม

ค) ต้นทุนยืดหยุ่นเมื่อ $x = 50$

วิธีทำ จาก $C(x) = 40+3x+9\sqrt{2x}$

ก) ต้นทุนเฉลี่ยคือ $Q(x) = \frac{C(x)}{x}$

$= \frac{40 + 3x + -}{x}$

ข) ต้นทุนเพิ่มคือ $C'(x) = 3+\frac{9}{\sqrt{2x}}$

ค) ต้นทุนยืดหยุ่น คือ $K(x) = \frac{C'(x)}{Q(x)}$

$= (3+\frac{9}{\sqrt{2x}})(\frac{x}{40+3x+9\sqrt{2x}})$

ดังนั้นต้นทุนยืดหยุ่นเมื่อ $x = 50$ คือ $K(50) = (3+\frac{9}{\sqrt{2(50)}})(\frac{50}{40+3(50)+9\sqrt{2(50)}})$

$= 0.7$ บาท

5) จำนวนบาทในการผลิตสินค้า x ชิ้น กำหนดโดย $C(x) = x^2+6x+12$ จงหา

ก) ฟังก์ชันต้นทุนเฉลี่ย

ข) ฟังก์ชันต้นทุนเพิ่ม

จงเขียนกราฟต้นทุนรวม ต้นทุนเฉลี่ย และต้นทุนเพิ่มบนแกนชุดเดียวกัน

จงสังเกตว่าต้นทุนเฉลี่ยและต้นทุนเพิ่มมีค่าเท่ากันเมื่อต้นทุนเฉลี่ยมีค่าน้อยที่สุดเท่าไร

วิธีทำ จาก $C(x) = x^2+6x+12$

ก) ฟังก์ชันต้นทุนเฉลี่ยคือ $Q(x) = \frac{C(x)}{x}$

$= \frac{x^2+6x+12}{x}$

ข) ฟังก์ชันต้นทุนเพิ่มคือ $C'(x) = 2x+6$

ถ้าต้นทุนเฉลี่ยคือ $Q(x)$ = ต้นทุนเพิ่มคือ $C'(x)$

$$\therefore \quad \frac{x^2 + 6x + 12}{x} = 2x + 6$$

$$x^2 + 6x + 12 = 2x^2 + 6x$$

$$\therefore \quad x^2 = 12$$

$$\therefore \quad x = 2\sqrt{3}$$

$$= 3.46$$

และ $$Q(3.46) = \frac{(3.46)^2 + 6(3.46) + 12}{3.46}$$

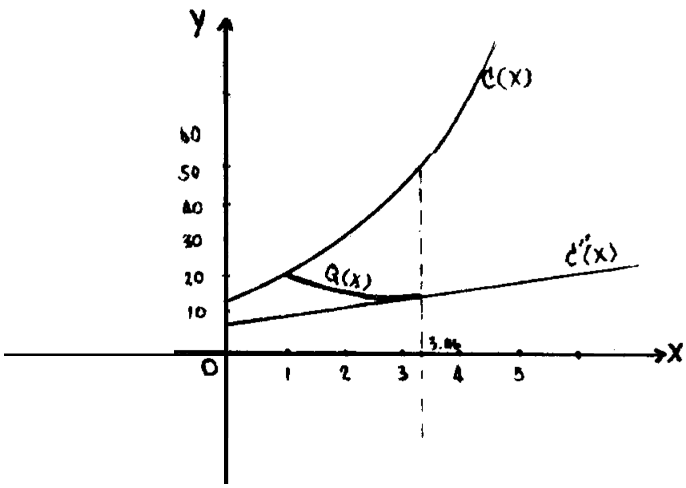
$$= 12.9$$

แสดงว่าต้นทุนเฉลี่ยและต้นทุนเพิ่มมีค่าเท่ากันเมื่อต้นทุนเฉลี่ยมีค่าเท่ากับ 12.9

และกราฟของต้นทุนรวม ต้นทุนเฉลี่ยและต้นทุนเพิ่มสามารถเขียนบนแกนชุดเดียวกันได้

โดยอาศัยตารางต่อไปนี้

x	0	1	2	3	3.46	4	5	6
C(x)	12	19	26	39	44.73	52	67	a4
Q(x)	–	19	14	13	12.9	13	13.5	14
C'(x)	6	8	10	12	12.9	14	16	18



6) ทำเช่นเดียวกับข้อ **5)** ถ้า $C(x) = 3x^2+x+3$

วิธีทำ จาก $C(x) = 3x^2+x+3$

ก) ฟังก์ชันต้นทุนเฉลี่ยคือ $Q(x) = \frac{C(x)}{x}$

$$\frac{3x^2+x+3}{x}$$

ข) ฟังก์ชันต้นทุนเพิ่มคือ $C'(x) = 6x+1$

ถ้าต้นทุนเฉลียเท่ากับต้นทุนเพิม คือ

$$Q(x) = C'(x)$$

$$\frac{3x^2+x+3}{x} = 6x+1$$

$$3x^2+x+3 = 6x^2+x$$

$$x^2 = 1$$

$$\therefore \quad x \quad 1$$

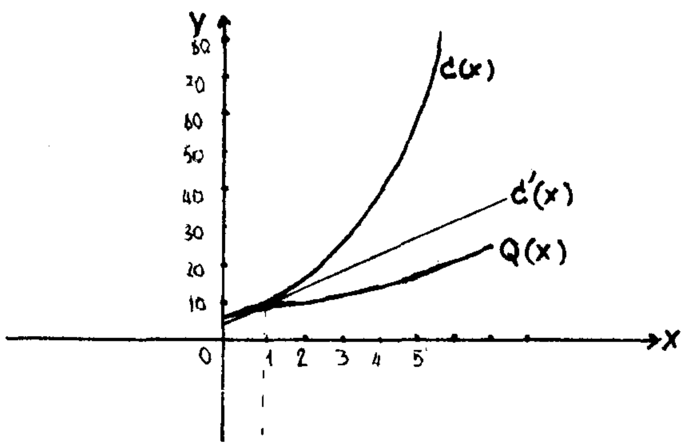
และ $$Q(1) = \frac{3(1)^2+1+3}{1}$$

$$= 7$$

แสดงว่าต้นทุนเฉลี่ยและต้นทุนเพิ่มมีค่าเท่ากันเมื่อต้นทุนแเลี่ยมีค่าเท่ากับ 7

และกราฟของต้นทุนรวม ต้นทุนเฉลีย และต้นทุนเพิมสามารถเขียนบนแกนชุดเดียวกันได้ โดยอาศัยตารางต่อไปนี้

x	0	1	2	3	4	5
C(x)	3	7	17	33	55	83
Q(x)	–	7	8.5	11	13.7	16.6
C′(x)	1	7	13	19	25	31



7) รายได้รวมที่ได้รับจากการขายโต๊ะเรียน x ตัว เป็น $R(x)$ บาท และ $R(x) = 200x - \frac{x^2}{3}$

จงหา

ก) ฟังก์ชันรายได้เพิ่ม

ข) รายได้เพิ่มเมื่อ $x = 30$

ค) รายได้จริงจากการขายโต๊ะเรียนตัวที่ 31

วิธีทำ จาก $R(x) = 200x - \frac{x^2}{3}$

ก) ฟังก์ชันรายได้เพิ่มคือ $R'(x) = 200 - \frac{2x}{3}$

ข) รายได้เพิ่มเมื่อ $x = 30$ คือ $R'(30) = 200 - \frac{2(30)}{3}$

$= 180$ บาท

ค) $\because R(30) = 200(30) - \frac{(30)^2}{3}$

$= 5700$ บาท

$\because R(31) = 200(31) - \frac{(31)^2}{3}$

$= 5879.67$

ดังนั้นรายได้จริงจากการขายโต๊ะเรียนตัวที่ 31 คือ $R(31) - R(30)$

ซึ่ง $R(31) - R(30) = 5879.67 - 5700$

$= 179.67$ บาท

8) ถ้า $R(x)$ บาท เป็นรายได้รวมจากการขายโทรทัศน์ x เครื่อง และ $R(x) = 600x - \frac{x^3}{20}$

จงหา

ก) ฟังก์ชันรายได้เพิ่ม

ข) รายได้เพิ่มเมื่อ $x = 20$

ค) รายได้จริงจากการขายโทรทัศน์เครื่องที่ 21

วิธีทำ จาก $R(x) = 600x - \frac{x^3}{20}$

ก) ฟังกชันรายได้เพิ่มคือ $R'(x) = 600 - \frac{3x^2}{20}$

ข) รายได้เพิ่มเมื่อ $x = 20$ คือ $R'(20) = 600 - \frac{3(20)^2}{20}$

$= 540$ บาท

ค) จาก $R(x) = 600x - \frac{x^3}{20}$

$\because$ $R(21) = 600(21) - \frac{(21)^3}{20}$

$= 12136.95$

และ $R(20) = 600(20) - \frac{(20)^3}{20}$

$= 11600$

ดังนั้นรายได้จริงจากการขายโทรทัศน์เครื่องที่ 21 คือ $R(21) - R(20)$

ซึ่ง $R(21) - R(20) = 12136.95 - 11600 = 536.95$ บาท

9) ถ้าสมการอุปสงค์สำหรับสินค้าชนิดหนึ่งเป็น $3x + 4p = 12$ จงหา

ก) ฟังก์ชันรายได้รวม

ข) ฟังก์ชันรายได้เพิ่ม

เขียนกราฟของเส้นอุปสงค์ รายได้รวม และรายได้เพิ่มบนแกนชุดเดียวกัน สังเกตว่าสมการอุปสงค์เป็นเส้นตรงและเส้นรายได้เพิ่มตัดแกน x ที่จุดซึ่งมีค่า x สำหรับรายได้รวมมากที่สุดและเส้นอุปสงค์ตัดแกน x ที่จุดซึ่งมีค่า x เป็น 2 เท่า

วิธีทำ จาก $3x + 4p = 12$

$\therefore$ $p = \frac{12 - 3x}{4}$

$= 3 - \frac{3x}{4}$

ก) ฟังก์ชันรายได้รวมคือ $R(x) = Px$

$= (3 - \frac{3x}{4})x$

$= 3x - \frac{3x^2}{4}$

ข) ฟังก์ชันรายได้เพิ่มคือ $R'(x) = 3 - \frac{3x}{2}$

และกราฟของเส้นอุปสงค์ รายได้รวมและรายได้เพิ่ม สามารถเขียนบนแกนชุดเดียวกันได้ดังรูป โดยอาศัยตารางต่อไปนี้