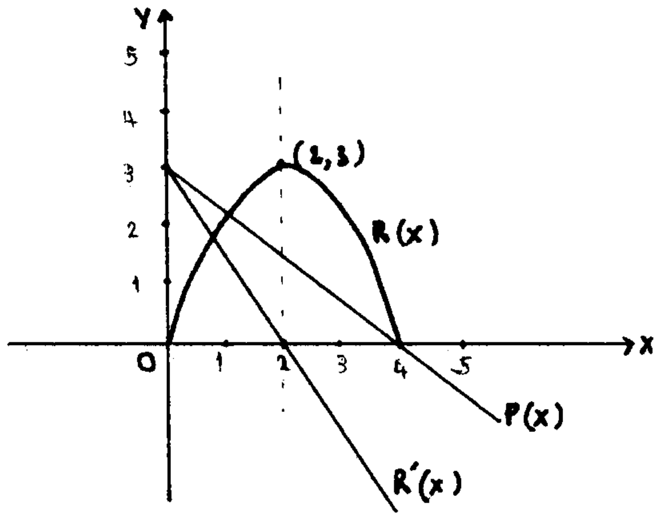
x	0	1	2	3	4	5
P(x)	3	2.25	1.5	0.75	0	−0.75
R(x)	0	2.25	3	2.25	0	−3.75
R′(x)	3	1.5	0	−1.5	−3	−4.5



10) ฟังก์ชันรายได้รวม R สำหรับสินค้าชนิดหนึ่งกำหนดขึ้นโดย $R(x) = 3x - \frac{2x^2}{3}$ จงหา

ก) สมการอุปสงค์

ข) ฟังก์ชันรายได้เพิ่ม

เขียนกราฟเส้นอุปสงค์ รายได้รวม และรายได้เพิ่ม บนแกนชุดเดียวกัน

วิธีทำ จาก $R(x) = 3x - \frac{2x^2}{3}$

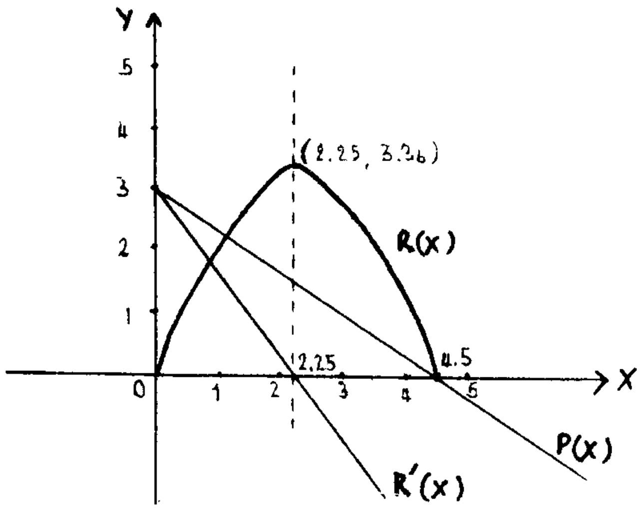
ก) สมการอุปสงค์คือ $p(x) = \frac{R(x)}{x}$

$= 3 - \frac{2x}{3}$

ข) ฟังก์ชันรายได้เพิ่มคือ $R'(x) = 3 - \frac{4x}{3}$

และกราฟของเส้นอุปสงค์ รายได้รวมและรายได้เพิ่มสามารถเขียนบนแกนชุดเดียวกันได้ดังรูป โดยอาศัยตารางต่อไปนี้

x	0	1	2	2.25	3	4	4.5	5
p(x)	3	2.34	1.68	1.51	1.02	.36	0	− 3
R(x)	0	2.34	3.36	3.40	3.06	1.44	0	−1.5
R′(x)	3	1.67	0.34	0	−0.99	−2.32	−2.98	−3.65



3.5 สรุปเรื่องอนุพันธ์กับอัตราการเปลี่ยนแปลง

(The derivative as a rate of change)

ความคิดเกี่ยวกับเรื่องการแปรค่าเชิงเพิ่มในทางเศรษฐศาสตร์สอดคล้องกับความคิดทั่ว ๆ ไปในเรื่องอัตราการแปรค่าทันทีทันใด (instantaneous rate of change) เช่น ถ้าต้นทุนรวมในการผลิตสินค้า x หน่วย กำหนดขึ้นโดย $C(x)$ บาท แล้วต้นทุนเพิ่มก็ถูกกำหนดขึ้นโดย $C'(x)$ ซึ่งเป็นอัตราการเปลี่ยนแปลงของ $C(x)$

เช่นเดียวกัน ถ้าปริมาณ y เป็นฟังก์ชันของปริมาณ x ก็สามารถแสดงอัตราการเปลี่ยนแปลงของ y เมื่อ x แปรค่าไป (the rate of change of y with respect x) การวิเคราะห์เกี่ยวกับเรื่องนี้ได้กระทำแล้วในหัวข้อ 3.4

ถ้าความสัมพันธ์ที่เป็นฟังก์ชันระหว่าง y และ x กำหนดขึ้นโดย $y = f(x)$

และถ้า x แปรค่าจากค่า x_1 ไปเป็น $x_1+\Delta x$ เมื่อ y แปรค่าจาก $f(x_1)$ ไปเป็น $f(x_1+\Delta x)$ การเปลี่ยนไปใน y ซึ่งให้สัญลักษณ์ว่า Δy คือ $f(x_1+\Delta x)-f(x_1)$ เมื่อ x แปรไป Δx อัตราการเปลี่ยนแปลงเฉลี่ยของ y เมื่อ x แปรค่าจาก x_1 เป็น $x_1+\Delta x$ คือ

$$\frac{f(x_1+\Delta x)-f(x_1)}{\Delta x} = \frac{\Delta y}{\Delta x} \qquad (3.5.1)$$

ถ้าลิมิตของผลหารนี้หาค่าได้ เมื่อ $\Delta x \to 0$ ลิมิตนี้คืออัตราการแปรค่าโดยทันทีของ y เมื่อ x แปรค่าไปที่ x_1 จึงได้นิยามต่อไปนี้

นิยาม 3.5.1 ถ้า $y = f(x)$ แล้ว อัตราการแปรค่าโดยทันทีของ y เมื่อ x แปรค่าไปที่ x_1 คือ $f'(x_1)$ อนุพันธ์ของ y เทียบกับ x เมื่อ x แปรค่าไปที่ x_1

อัตราการแปรโดยทันทีของ y เมื่อ x แปรค่าไป อาจแปลความว่าเป็นการแปรค่าใน y ที่เกิดจากการที่ x แปรค่าไปหนึ่งหน่วย เมื่ออัตราการเปลี่ยนแปลงนั้นคงที่

อัตราสัมพันธ์ (relative rate) คือการวัดซึ่งใช้เปรียบเทียบอัตราการเปลี่ยนแปลงกับจำนวนของปริมาณที่กำลังถูกเปลี่ยนแปลงไป

นิยาม 3.5.2 ถ้า $y = f(x)$ อัตราสัมพันธ์ของการแปรค่าของ y เมื่อ x แปรค่าไป ณ x_1 คือ $f'(x_1)/f(x_1)$ หรือ $\frac{dy}{dx}/y$ ซึ่งหาค่าที่ $x = x_1$ ถ้าอัตราสัมพัทธ์คูณด้วย 100 ก็จะได้อัตราเปอร์เซ็นต์ของการแปรค่า

เฉลยแบบฝึกหัด 3.5

1) ถ้า A ตารางนิ้ว เป็นพื้นที่ของสี่เหลี่ยมจัตุรัสและ 3 นิ้ว เป็นความยาวของด้านของสี่เหลี่ยมจัตุรัสนั้น จงหาอัตราการแปรค่าเฉลี่ยของ A เมื่อ S แปรค่าไปจาก

ก) 4.00 ไปเป็น 4.60

ข) 4.00 ไปเป็น 4.30

ค) 4.00 ไปเป็น 4.10

ง) อัตราการแปรค่าของ A เมื่อ S แปรค่าไป เมื่อ A = 400 มีค่าเท่าไร ?

วิธีทำ จาก $A = S^2 = f(S)$

และอัตราการแปรค่าเฉลี่ยคือ $\dfrac{f(S_1+\Delta S) - f(S_1)}{\Delta S}$

ก) ถ้า $S_1 = 4$ และ $\triangle S = 0.6$

$\therefore$ อัตราการแปรค่าเฉลี่ยของ A $= \dfrac{(4.6)^2 - 4^2}{0.6}$

$= \dfrac{21.16 - 16}{0.6}$

$= 8.6$

ข) เมื่อ $S_1 = 4$ และ $\triangle S = 0.3$

$\therefore$ อัตราการแปรค่าเฉลี่ยของ A $= \dfrac{(4.3)^2 - 4^2}{0.3}$

$= \dfrac{18.49 - 16}{0.3}$

$= 8.3$

ค) เมื่อ $S_1 = 4$ และ $\triangle S = 0.1$

$\therefore$ อัตราการแปรค่าเฉลี่ยของ A $= \dfrac{(4.1)^2 - 4^2}{0.1}$

$= \dfrac{16.81 - 16}{0.1}$

$= 8.1$

ง) เมื่อ $A = 400$

$\therefore \quad S^2 = 400$

$S = \sqrt{400}$

$= 20$

และจาก $f(S) = S^2$

$\therefore \quad f'(S) = 2S$

$\therefore \quad f'(20) = 40$

2) สมมุติว่าทรงกระบอกซึ่งมีความสูงคงที่ 10.00 นิ้ว ถ้าปริมาตร V ลูกบาศก์เป็นปริมาตรของทรงกระบอก และ r นิ้ว เป็นรัศมีของทรงกระบอก จงหาอัตราการแปรค่าเฉลี่ยของ V เมื่อ r แปรค่าจาก

ก) 5.00 ไปเป็น 5.40

ข) 5.00 ไปเป็น 5.10

ค) 5.00 ไปเป็น 5.01

ง) จงหาอัตราการแปรค่าของ V เมื่อ r แปรค่า ที่ r = 500

หมายเหตุ ปริมาตรของทรงกระบอก $V = \pi r^2 h$ เมื่อ h เป็นความสูงของทรงกระบอก

วิธีทำ จาก
$$\begin{aligned} V &= \pi r^2 h \\ &= 10\pi r^2 \\ &= f(r) \end{aligned}$$

และอัตราแปรค่าเฉลี่ยของ $V = \dfrac{f(r_1 + \Delta r) - f(r_1)}{\Delta r}$

ก) เมื่อ $r_1 = 5$ และ $\Delta r = 0.4$

∴ อัตราแปรค่าเฉลี่ยของ
$$\begin{aligned} V &= \frac{10\pi(5.4)^2 - 10\pi(5)^2}{0.4} \\ &= \frac{291.6\pi - 250\pi}{0.4} \\ &= 104\pi \end{aligned}$$

ข) เมื่อ $r_1 = 5$ และ $\Delta r = 0.1$

∴ อัตราแปรค่าเฉลี่ยของ
$$\begin{aligned} V &= \frac{10\pi(5.1)^2 - 10\pi(5)^2}{0.1} \\ &= \frac{260.1\pi - 250\pi}{0.1} \\ &= 101\pi \end{aligned}$$

ค) เมื่อ $r_1 = 5$ และ $\Delta r = 0.01$

∴ อัตราแปรค่าเฉลี่ยของ
$$\begin{aligned} V &= \frac{10\pi(5.01)^2 - 10\pi(5)^2}{0.01} \\ &= \frac{251\pi - 250\pi}{0.01} \\ &= 100\pi \end{aligned}$$

ง) อัตราแปรค่าของ V ที่ r = 500

จาก
$$\begin{aligned} f(r) &= 10\pi r^2 \\ \therefore f'(r) &= 20\pi r \\ \therefore f'(500) &= 20\pi(500) \\ &= 10000\pi \end{aligned}$$

3) ถ้า r เป็นส่วนกลับของ n จงหาอัตราการแปรค่าเฉลี่ย r เมื่อ n แปรค่า และอัตราสัมพัทธ์การแปรค่าของ r เมื่อ n แปรค่าที่ n มีค่าเป็น

ก) 4 ข) 10

วิธีทำ จาก

$$r = \frac{1}{n} = f(n)$$

$$\therefore f'(n) = -\frac{1}{n^2}$$

ก) $$f'(4) = -\frac{1}{4^2} = -\frac{1}{16}$$

และอัตราสัมพัทธ์การแปรค่าของ r เมื่อ n = 4 คือ $\frac{f'(4)}{f(4)} = -\frac{1}{4}$

ข) $$f'(10) = -\frac{1}{10^2} = -\frac{1}{100}$$

และอัตราสัมพัทธ์การแปรค่าของ r เมื่อ n = 10 คือ $\frac{f'(10)}{f(10)} = -\frac{1}{10}$

4) ให้ s เป็นรากที่สองของจำนวน x จงหาอัตราการแปรค่า S เมื่อ x แปรค่าไปและอัตราสัมพัทธ์การแปรค่าของ S เมื่อ x มีค่าแปรไปที่ x มีค่าเป็น

ก) 9 ข) 4

วิธีทำ จาก

$$S = \sqrt{x} = f(x)$$

$$\therefore f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

ก) $$f'(9) = \frac{1}{2\sqrt{9}} = \frac{1}{6}$$

และอัตราสัมพัทธ์การแปรค่าของ s เมื่อ x = 9 คือ $\frac{f'(9)}{f(9)} = \frac{1}{18}$

ข) $$f'(4) = \frac{1}{2\sqrt{4}} = \frac{1}{4}$$

และอัตราสัมพัทธ์การแปรค่าของ S เมื่อ x = 4 คือ $\frac{f'(4)}{f(4)} = \frac{1}{8}$

5) ถ้าน้ำไหลออกจากสระว่ายน้ำ และ V แกลลอนเป็นปริมาตรของน้ำในสระ t นาทีเป็นเวลาหลังจากเริ่มเปิดน้ำให้ไหล เมื่อ $V = 250(40-t)^2$ จงหา

ก) อัตราเฉลี่ยเมื่อน้ำไหลไปได้ 5 นาที

ข) น้ำไหลออกได้เร็วเท่าไร เมื่อเวลา 5 นาที หลังจากเริ่มเปิดน้ำให้ไหลออก

วิธีทำ จาก $V = 250(40-t)^2$

ก) เมื่อ $t = 0$ จะได้ $V = 250(40-0)^2$

$= 400,000$

และเมื่อ $t = 5$ จะได้ $V = 250(40-5)^2$

$= 306,250$

$\therefore$ อัตราเฉลี่ยเมื่อน้ำไหลออกไปได้ 5 นาที $= \dfrac{400,000 - 306,250}{5}$

$= 18750$ แกลลอน

ข) จาก $V = 250(40-t)^2$

$$\therefore \frac{dv}{dt} = -500(40-t)$$

เมื่อ $t = 5$ จะได้ $\dfrac{dv}{dt} = -500(40-5)$

$= -17500$

ดังนั้นเมื่อเวลา 5 นาทีหลังจากเริ่มเปิดน้ำให้ไหลออก น้ำจะไหลออกได้เร็ว 17500 แกลลอนต่อนาที

6) สมการอุปทานสำหรับดินสอดำชนิดหนึ่งเป็น $x = 3p^2 + 2p$ เมื่อ p บาท เป็นราคาของดินสอดำหนึ่งแท่ง เมื่อดินสอดำ x แท่ง ที่ผลิตออกสู่ตลาด

ก) จงหาอัตราการแปรค่าเฉลี่ยของอุปทาน เมื่อราคาแปรค่าไปโดยเพิ่มจาก 2 บาทเป็น 2.20 บาท

ข) จงหาอัตราการแปรค่าของอุปทาน เมื่อราคาแปรค่าไปที่ราคาเป็น 2 บาท

วิธีทำ จาก $x = 3p^2 + 2p$

$= f(p)$

ก) จากอัตราการแปรค่าเฉลี่ยของอุปทาน คือ $\dfrac{f(p_1 + \Delta p) - f(p_1)}{\Delta p}$

เมื่อ $p_1 = 2$, $\Delta p = 0.2$

$\therefore$ อัตราการแปรค่าเฉลี่ย $= \dfrac{3(2.2)^2 + 2(2.2) - (3(2)^2 + 2(2))}{0.2}$

$= \dfrac{14.52 + 4.4 - (12+4)}{0.2}$

$= 14.6$

ข) จาก

$$f(p) = 3p^2 + 2p$$
$$\therefore \quad f'(p) = 6p + 2$$
$$\therefore \quad f'(2) = 6(2) + 2$$
$$= 14$$

ดังนั้นอัตราการแปรค่าของอุปทาน เมื่อราคาแปรค่าไปที่ราคาเป็น 2 บาท คือ 14

7) สมการของอุปสงค์สำหรับเครื่องประดับฝังเพชรชนิดหนึ่งเป็น $x = 100 - 3p - 2p^2$ เมื่อ p บาทเป็นราคาต่อหนึ่งชิ้นและเมื่อ x เป็นชิ้นที่มีอุปสงค์

ก) จงหาอัตราการแปรค่าของอุปสงค์ เมื่อราคาแปรค่าไปที่ราคาเพิ่มจาก 100 บาท เป็น 110 บาท

ข) จงหาอัตราการแปรค่าของอุปสงค์ เมื่อราคาแปรค่าไปที่ราคาเป็น 100 บาท

ทิfini จาก $x = 100 - 3p - 2p^2$
$= f(p)$

n) ให้ $p_1 = 100$, $\Delta p = $ lo

$\therefore$ อัตราการแปรค่าเฉลี่ยของอุปสงค์คือ

$$\frac{f(p_1 + \Delta p) - f(p_1)}{\Delta p} = \frac{f(110) - f(100)}{10}$$
$$= \frac{100 - 3(110) - 2(110)^2 - (100 - 3(100) - 2(100)^2)}{10}$$
$$= \frac{100 - 330 - 24200 - 100 + 300 + 20000}{10}$$
$$= -423$$

ข) จาก

$$f(p) = 100 - 3p - 2p^2$$
$$\therefore \quad f'(p) = -3 - 4p$$
$$\therefore \quad f'(100) = -3 - 4(100)$$
$$= -403$$

8) ประมาณว่าคนงานในโรงงานซึ่งผลิตกรอบรูปสามารถทาสีกรอบรูป y กรอบ ในเวลา x ชั่วโมง หลังจากเริ่มทำงาน 8.00 น. ในตอนเช้า และ $y = 3x + 8x^2 - x^3$; $0 < x \leq 4$

ก) จงหาอัตราที่คนงานกำลังทาสีเมื่อเวลา 10.00 น. ในตอนเช้า

ข) จงหาจำนวนกรอบรูปซึ่งคนงานทาสีได้ในเวลา 10.00 - 11.00 U. ในตอนเช้า

วิธีทำ จาก $y = 3x + 8x^2 - x^3$ เมื่อ $0 < x \leq 4$

ก) $\frac{dy}{dx} = 3 + 16x - 3x^2$ เป็นอัตราที่คนงานทาสี x ชั่วโมง

ดังนั้นเมื่อเวลา 10.00 น. แสดงว่าทำงานไปได้ 2 ชั่วโมง

$\therefore$ $x = 2$ จะได้ $\frac{dy}{dx} = 3 + 16(2) - 3(2)^2$

$= 3 + 32 - 12$

$= 23$

ข) จาก $y = 3x + 8x^2 - x^3$

เมื่อเวลา 10.00 น. แสดงว่าทำงานไปแล้ว 2 ชั่วโมง

$\therefore$ เมื่อ $x = 2$ จะได้ $y = 3(2) + 8(2)^2 - (2)^3$

$= 6 + 32 - 8$

$= 30$

และเมื่อเวลา 11.00 น. แสดงว่าทำงานไปแล้ว 3 ชั่วโมง

$\therefore$ เมื่อ $x = 3$ จะได้ $y = 3(3) + 8(3)^2 - (3)^3$

$= 9 + 72 - 27$

$= 54$

ดังนั้นจำนวนกรอบรูปซึ่งทาสีได้ในช่วงเวลา 10.00 - 11.00 น.

คือ 54 − 30 = 24 กรอบ

9) สมมุติว่า จำนวนประชากรของเมืองแห่งหนึ่ง เมื่อเวลา t ปี หลังจากวันที่ 1 มกราคม 2518 เป็น $40t^2 + 200t + 10{,}000$

ก) จงหาอัตราที่ประชากรเพิ่ม ณ วันที่ 1 มกราคม 2527

ข) จงหาอัตราที่ประชากรเพิ่ม ณ วันที่ 1 มกราคม 2533

ค) จงหาอัตราสัมพัทธ์ของการเพิ่มของประชากร ณ วันที่ 1 มกราคม 2527

ง) จงหาอัตราสัมพัทธ์ของการเพิ่มของประชากร ณ วันที่ 1 มกราคม 2533

วิธีทำ ให้ p เป็นจำนวนประชากร เมื่อเวลา t ปี

ดังนั้นจากโจทย์กำหนดจะได้ว่า $p = 40t^2 + 200t + 10{,}000$

$\therefore \frac{dp}{dt}$ หรือ $p'(t) = 80t + 200$

ก) จากวันที่ 1 มกราคม 2518 ถึงวันที่ 1 มกราคม 2527 เป็นระยะเวลา 9 ปี

$\therefore p'(9) = 80(9) + 200$

$= 720 + 200$

$= 920$ คน

ดังนั้นอัตราที่ประชากรเพิ่ม ณ วันที่ 1 มกราคม 2507 คือ 920 คน

ข) จากวันที่ 1 มกราคม 2518 ถึงวันที่ 1 มกราคม 2533 เป็นระยะเวลา 15 ปี

$$\therefore p'(15) = 80(15) + 200$$
$$= 1200 + 200$$
$$= 1400 \text{ คน}$$

ดังนั้นอัตราที่ประชากรเพิ่ม ณ วันที่ 1 มกราคม 2533 คือ 1400 คน

ค) จากข้อ ก) ได้ $t = 9$

และ เมื่อ $t = 9$ จะได้ว่า $p = 40(9)^2 + 200(9) + 10,000$

$$= 15,040$$

ดังนั้นอัตราสัมพัทธ์ของการเพิ่มประชากร ณ วันที่ 1 มกราคม 2527

คือ $\frac{p'}{p}$ เมื่อ $t = 9$ หรือ $\frac{p'(9)}{p(9)} = \frac{920}{15040} = 0.0611$

ง) จากข้อ ข) ได้ $t = 15$

และเมื่อ $t = 15$ จะได้ $p = 40(15)^2 + 200(15) + 10,000$

$$= 22,000$$

ดังนั้นอัตราสัมพัทธ์ของการเพิ่มประชากร ณ วันที่ 1 มกราคม 2533

คือ $\frac{p'}{p}$ เมื่อ $t = 15$

หรือ $\frac{p'(15)}{p(15)} = \frac{1400}{22000} = 0.0636$

10) กำไรจากการค้าของร้านค้าแห่งหนึ่ง เป็น 100y บาท เมื่อ x บาท เป็นรายจ่ายในแต่ละวันในการโฆษณาและ $y = 2500 + 36x - 0.2x^2$ จงใช้อนุพันธ์หาว่าผลกำไรเพิ่มเนื่องจากการเพิ่มการโฆษณา เมื่อการโฆษณาแต่ละวันเป็น

ก) 60 บาท ข) 300 บาท

วิธีทำ จาก $y = 2500 + 36x - 0.2x^2 = f(x)$

$$\therefore \frac{dy}{dx} \text{ หรือ } f'(x) = 36 - 0.4x$$

ก) เมื่อ $x = 60$

$$\therefore f'(60) = 36 - 0.4(60)$$
$$= 36 - 24$$
$$= 12$$

ดังนั้นผลกำไรเพิ่มเนื่องจากการเพิ่มการโฆษณาแต่ละวันเป็น 60 บาท คือ 1200 บาท

ข) เมื่อ $x = 300$

$$\therefore\ f'(300) = 36 - 0.4(300)$$
$$= 36 - 120$$
$$= -84$$

ดังนั้นผลกำไรเพิ่มเนื่องจากการเพิ่มการโฆษณาแต่ละวันเป็น 300 บาท คือ − 8400 บาท

3.6 สรุปเรื่องอนุพันธ์ของฟังก์ชันประกอบ

(The derivative of a composite function)

สมมติว่า y เป็นฟังก์ชันของ u และ u เป็นฟังก์ชันของ x ตัวอย่างเช่น

$$y = f(u) = u^5 \quad (3.6.1)$$

และ $$u = g(x) = 2x^3 - 5x^2 + 4 \quad (3.6.2)$$

สมการ (3.6.1) และ (3.6.2) กำหนด y ว่าเป็นฟังก์ชันหนึ่งของตัวแปร x เนื่องจากถ้าเราแทนค่า u ใน (1) โดยค่าทางขวามือของ (3.6.2) เราได้

$$y = h(x) = f(g(x)) = (2x^3 - 5x^2 + 4)^5 \quad (3.6.3)$$

โดย h เป็นฟังก์ชันประกอบ

ทฤษฎีบทที่ 3.6.1 ถ้า y เป็นฟังก์ชันของ u กำหนดโดย $y = f(u)$ และหาค่ากฎลูกโซ่ (chain rule) $\frac{dy}{du}$ ได้ และถ้า u เป็นฟังก์ชันของ x กำหนดโดย $u = g(x)$ และหาค่า $\frac{du}{dx}$ ได้ และ y เป็นฟังก์ชันของ x และหาค่า $\frac{dy}{du}$ ได้ และกำหนดโดย

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du}\cdot\frac{du}{dx}$$

ทฤษฎีบท 2 ในหัวข้อ 3.3 กล่าวว่า ถ้า n เป็นจำนวนจริงใด ๆ และถ้า $f(x) = x^n$ แล้ว $f'(x) = nx^{n-1}$ และจากทฤษฎีบทดังกล่าวกับกฎลูกโซ่จะได้ทฤษฎีบทต่อไปนี้

ทฤษฎีบทที่ 3.6.2 ถ้า f และ g เป็นฟังก์ชันซึ่ง $f(x) = [g(x)]^n$ เมื่อ n เป็นจำนวนจริงใด ๆ และถ้า $g'(x)$ มีค่าแล้ว (The chain rule for power) $f'(x) = n[g(x)]^{n-1} g'(x)$

เฉลยแบบฝึกหัด 3.6

สำหรับข้อ 1—34 จงหาอนุพันธ์ของฟังก์ชันที่กำหนดให้

1) $f(x) = (x^2+4x-5)^3$

วิธีทำ

$$f'(x) = 3(x^2+4x-5)^2 \frac{d}{dx}(x^2+4x-5)$$
$$= 3(x^2+4x-5)^2(2x+4)$$

2) $f(x) = (10-5x)^4$

วิธีทำ

$$f'(x) = 4(10-5x)^3 \frac{d}{dx}(10-5x)$$
$$= -20(10-5x)^3$$

3) $f(x) = (3x+5)^{2/3}$

วิธีทำ

$$f'(x) = \frac{2}{3}(3x+5)^{-1/3} \frac{d}{dx}(3x+5)$$
$$= \frac{2}{\sqrt[3]{3x+5}}$$

4) $g(x) = (x^2+4)^{-2}$

วิธีทำ

$$f'(x) = -2(x^2+4)^{-3} \frac{d}{dx}(x^2+4)$$
$$= \frac{-4x}{(x^2+4)^3}$$

5) $f(t) = (2t^4-7t^3+2t-1)^2$

วิธีทำ

$$f'(t) = 2(2t^4-7t^3+2t-1)\frac{d}{dt}(2t^4-7t^3+2t-1)$$
$$= 2(2t^4-7t^3+2t-1)(8t^3-21t^2+2)$$

6) $h(r) = (2r^4 + 8r^2 + 1)^5$

วิธีทำ

$$h'(r) = 5(2r^4 + 8r^2 + 1)^4 \frac{d}{dr}(2r^4 + 8r^2 + 1)$$
$$= 5(2r^4 + 8r^2 + 1)^4 (8r^3 + 16r)$$

7) $f(s) = \sqrt{2 - 3s^2}$

วิธีทำ

$$f'(s) = \frac{1}{2}(2 - 3s^2)^{-1/2} \frac{d}{ds}(2 - 3s^2)$$
$$= \frac{-3s}{\sqrt{2 - 3s^2}}$$

8) $f(x) = 4x^{1/2} + 5x^{-1/2}$

วิธีทำ

$$f'(x) = 2x^{-1/2} - \frac{5}{2}x^{-3/2}$$
$$= \frac{2}{\sqrt{x}} - \frac{5}{2x\sqrt{x}}$$

9) $g(x) = 3x^{2/3} - 6x^{1/3} + x^{-1/3}$

วิธีทำ

$$g'(x) = 3(\frac{2}{3}x^{-1/3}) - 6(\frac{1}{3}x^{-2/3}) - \frac{1}{3}x^{-4/3}$$
$$= 2x^{-1/3} - 2x^{-2/3} - \frac{1}{3}x^{-4/3}$$

10) $g(x) = \sqrt[3]{(3x^2 + 5x - 1)^2}$

วิธีทำ

$$g'(x) = \frac{2}{3}(3x^2 + 5x - 1)^{-1/3} \frac{d}{dx}(3x^2 + 5x - 1)$$
$$= \frac{2(3x + 5)}{3\sqrt[3]{(3x^2 + 5x - 1)}}$$

11) $F(x) = \sqrt[3]{2x^3 - 5x^2 + x}$

วิธีทำ

$$F'(x) = \frac{1}{3}(2x^3 - 5x^2 + x)^{-2/3} \frac{d}{dx}(2x^3 - 5x^2 + x)$$
$$= \frac{6x^2 - 10x + 1}{3\sqrt[3]{(2x^3 - 5x^2 + x)^2}}$$

12) $H(z) = (z^3 - 3z^2 + 1)^3$

วิธีทำ

$$H'(z) = 3(z^3 - 3z^2 + 1)^2 \frac{d}{dz}(z^3 - 3z^2 + 1)$$

$$= 3(z^3 - 3z^2 + 1)^2 (3z^2 - 6z)$$

13) $f(y) = (\frac{y-7}{y+2})^2$

วิธีทำ

$$f'(y) = 2(\frac{y-7}{y+2}) \frac{d}{dy} \frac{(y-7)}{(y+2)}$$

$$= 2(\frac{y-7}{y+2}) \frac{((y+2)\frac{d}{dy}(y-7) - (y-7)\frac{d}{dy}(y+2))}{(y+2)^2}$$

$$= 2(\frac{y-7}{y+2}) (\frac{(y+2) - (y-7)}{(y+2)^2})$$

$$= 18 \frac{(y-7)}{(y+2)^3}$$

14) $g(t) = (\frac{2t^2+1}{3t^3+1})^2$

วิธีทำ

$$g'(t) = 2(\frac{2t^2+1}{3t^3+1}) \frac{d}{dt} (\frac{2t^2+1}{3t^3+1})$$

$$= 2(\frac{2t^2+1}{3t^3+1}) (\frac{(3t^3+1)(4t+0) - (2t^2+1)(9t^2+0)}{(3t^3+1)^2})$$

$$= 2(\frac{2t^2+1}{3t^3+1}) (\frac{12t^4 + 4t - 18t^4 - 9t^2}{(3t^3+1)^2})$$

$$= \frac{2(2t^2+1)(4t - 9t^2 - 6t^4)}{(3t^3+1)^3}$$

15) $g(x) = \sqrt{\frac{(2x-5)}{(3x+1)}}$

วิธีทำ

$$g'(x) = \frac{1}{2}(\frac{2x-5}{3x+1})^{-½} \frac{d}{dx} \frac{2x-5}{3x+1}$$

$$= \frac{1}{2}(\frac{2x-5}{3x+1}) (\frac{(3x+1)(2-0) - (2x-5)(3+0)}{(3x+1)^2})$$

$$= \frac{17(2x-5)}{2(3x+1)^3}$$

16) $h(t) = \frac{\sqrt{t-1}}{\sqrt{t+1}}$

วิธีทำ

$$h'(t) = (\sqrt{t+1}) \frac{\frac{d}{dt}(t-1)^{½} - (\sqrt{t-1})\frac{d}{dt}(t+1)^{½}}{(\sqrt{t+1})^2}$$

$$= \frac{(\sqrt{t+1})(\frac{1}{2}(t-1)^{-½}) - (\sqrt{t-1})(\frac{1}{2}(t+1)^{-½}}{(t+1)}$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{(t+1)(t-1)}} - \frac{\sqrt{t-1}}{2(t+1)(\sqrt{t+1})}$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{t^2-1}} - \frac{\sqrt{t-1}}{2\sqrt{(t+1)^3}}$$

17) $h(u) = (3u^2+5)^3 (3u-1)^2$

วิธีทำ

$$h'(u) = (3u^2+5)^3 \frac{d}{du}(3u-1)^2 + (3u-1)^2 \frac{d}{du}(3u^2+5)^3$$

$$= 2(3u^2+5)^3 (3u-1) \frac{d}{du}(3u-1) + 3(3u-1)^2 (3u^2+5)^2 \frac{d}{du}(3u^2+5)$$

$$= 6(3u-1)(3u^2+5)^3 + 18u(3u-1)^2(3u^2+5)^2$$

18) $f(x) = (4x^2+7)^2 (2x^3+1)^4$

วิธีทำ

$$f'(x) = (4x^2+7)^2\, 4(2x^3+1)^3 \frac{d}{dx}(2x^3+1) + (2x^3+1)^4\, 2(4x^2+7) \frac{d}{dx}(4x^2+7)$$

$$= 24x^2(4x^2+7)^2(2x^3+1)^3 + 16x(2x^3+1)^4(4x^2+7)$$

19) $g(x) = (2x-5)^{-1}(4x+3)^{-2}$

วิธีทำ

$$g'(x) = (2x-5)^{-1}\frac{d}{dx}(4x+3)^{-2} + (4x+3)^{-2}\frac{d}{dx}(2x-5)^{-1}$$

$$= (2x-5)^{-1}(-2)(4x+3)^{-3}\frac{d}{dx}(4x+3) + (4x+3)^{-2}(-1)(2x-5)^{-2}\frac{d}{dx}(2x-5)$$

$$= -8(2x-5)^{-1}(4x+3)^{-3} - 2(2x-5)^{-2}(4x+3)^{-2}$$

20) $f(x) = (x^2-4x^{-2})^2(x^2+1)^{-1}$

วิธีทำ

$$f'(x) = (x^2-4x^{-2})^2\frac{d}{dx}(x^2+1)^{-1} + (x^2+1)^{-1}\frac{d}{dx}(x^2-4x^{-2})^2$$

$$= (x^2-4x^{-2})^2(-1)(x^2+1)^{-2}(2x) + (x^2+1)^{-1}(2)(x^2-4x^{-2})(2x+8x^{-3})$$

$$= 2(x^2+1)^{-1}(x^2-4x^{-2})(2x+8x^{-3}) - 2x(x^2+1)^{-2}(x^2-4x^{-2})^2$$

21) $f(r) = (r^2+1)^3(2r+5)^2$

วิธีทำ

$$f'(r) = (r^2+1)^3\frac{d}{dr}(2r+5)^2 + (2r+5)^2\frac{d}{dr}(r^2+1)^3$$

$$= (r^2+1)^3(2)(2r+5)\frac{d}{dr}(2r+5) + (2r+5)^2(3)(r^2+1)^2\frac{d}{dr}(r^2+1)$$

$$= 4(2r+5)(r^2+1)^3 + 6r(2r+5)^2(r^2+1)^2$$

22) $h(x) = \left(\frac{x+4}{2x^2-5x+6}\right)^3$

วิธีทำ

$$h'(x) = 3\left(\frac{x+4}{2x^2-5x+6}\right)^2 \left(\frac{(2x^2-5x+6)\frac{d}{dx}(x+4) - (x+4)\frac{d}{dx}(2x^2-5x+6)}{(2x^2-5x+6)^2}\right)$$

$$= 3\left(\frac{x+4}{2x^2-5x+6}\right)^2 \left(\frac{2x^2-5x+6 - (4x^2+11x-20)}{(2x^2-5x+6)^2}\right)$$

$$= \frac{3(x+4)^2(26-16x-2x^2)}{(2x^4-5x+6)^4}$$

23) $g(y) = (y^2+3)^{1/3}(y^3-1)^{1/2}$

วิธีทำ

$$g'(y) = (y^2+3)^{1/3}\left(\frac{1}{2}(y^3-1)^{-1/2}(3y^2-0)\right) + (y^3-1)^{1/2}\left(\frac{1}{3}(y^2+3)^{-2/3}(2y+0)\right)$$

$$= \frac{3}{2}y^2(y^2+3)^{1/3}(y^3-1)^{-1/2} + \frac{2}{3}y(y^3-1)^{1/2}(y^2+3)^{-2/3}$$

24) $g(x) = (2x-9)^2(x^3+4x-5)^3$

วิธีทำ

$$g'(x) = (2x-9)^2(3(x^3+4x-5)^2(3x^2+4)) + (x^3+4x-5)^3(2(2x-9)(2-0))$$

$$= 3(2x-9)^2(3x^2+4)(x^3+4x-5)^2 + 4(2x-9)(x^3+4x-5)^3$$

25) $f(z) = \frac{(z^2-5)^3}{(z^2+4)^2}$

วิธีทำ

$$f'(z) = (z^2+4)^2(3(z^2-5)^2(2z)) - (z^2-5)^3(2(z^2+4)(2z))$$

$$= 6z(z^2+4)^2(z^2-5)^2 - 4z(z^2+4)(z^2-5)^3$$

26) $F(x) = \frac{(5x-8)^{-2}}{(x^2+3)^{-3}}$

วิธีทำ จาก

$$F(x) = \frac{(5x-8)^{-2}}{(x^2+3)^{-3}} = \frac{(x^2+3)^3}{(5x-8)^2}$$

$$\therefore F'(x) = \frac{(5x-8)^2(3(x^2+3)^2(2x+0)) - (x^2+3)^3(2(5x-8)(5-0))}{(5x-8)^4}$$

$$= \frac{6x(5x-8)^2(x^2+3)^2 - 10(5x-8)(x^2+3)^3}{(5x-8)^4}$$

27) $G(x) = \frac{(4x-1)^3(x^2+2)^4}{(3x^2+5)^2}$

วิธีทำ

$$G'(x) = \frac{(3x^2+5)^2 \frac{d}{dx}((4x-1)^3(x^2+2)^4) - (4x-1)^3(x^2+2)^4 \frac{d}{dx}(3x^2+5)^2}{(3x^2+5)^4}$$

$$= \frac{(3x^2+5)^2((4x-1)^3(4(x^2+2)^3(2x)) + (x^2+2)^4(3(4x-1)^2(4))) - (4x-1)^3(x^2+2)^4(2(3x^2+5)(6x))}{(3x^2+5)^4}$$

$$= \frac{(3x^2+5)^2(8x(4x-1)^3(x^2+2)^3 + 12(x^2+2)^4(4x-1)^2) - 12x(4x-1)^3(x^2+2)^4(3x^2+5)}{(3x^2+5)^4}$$

28) $G(x) = \dfrac{4x+6}{\sqrt{x^2+3x+4}}$

วิธีทำ

$$G'(x) = \frac{(\sqrt{x^2+3x+4})(4+0) - (4x+6)(\frac{1}{2}(x^2+3x+4)^{-1/2}(2x+3+0))}{(\sqrt{x^2+3x+4})^2}$$

$$= \frac{4\sqrt{x^2+3x+4} - \frac{1}{2}(8x^2+24x+18)(x^2+3x+4)^{-1/2}}{x^2+3x+4}$$

29) $F(x) = \dfrac{\sqrt{x^2-1}}{x}$

วิธีทำ

$$F'(x) = \frac{x(\frac{1}{2}(x^2-1)^{-1/2}(2x-0)) - \sqrt{x^2-1}(1)}{x^2}$$

$$= \frac{x^2(x^2-1)^{-1/2} - (x^2-1)^{1/2}}{x^2}$$

30) $f(y) = (y+3)^3(5y+1)^2(3y^2-4)$

วิธีทำ

$$f(y) = (y+3)^3(25y^2+10y+1)(3y^2-4)$$

$$= (y+3)^3(75y^4+30y^3-97y^2-40y-4)$$

$$\therefore f'(y) = (y+3)^3(300y^3+90y^2-194y-40) + 3(75y^4+30y^3-97y^2-40y-4)(y+3)^2$$

31) $h(x) = \dfrac{\sqrt{x-1}}{\sqrt[3]{x+1}}$

วิธีทำ

$$h'(x) = \frac{(x+1)^{1/3}(\frac{1}{2}(x-1)^{-1/2}) - (x-1)^{1/2}(\frac{1}{3}(x+1)^{-2/3})}{((x+1)^{1/3})^2}$$

$$= \frac{\frac{1}{2}(x+1)^{1/3}(x-1)^{-1/2} - \frac{1}{3}(x+1)^{-2/3}(x-1)^{1/2}}{(x+1)^{2/3}}$$

32) $f(x) = (\sqrt{x^2-5})(\sqrt[3]{x^2+3})$

วิธีทำ

$$f'(x) = (x^2-5)^{1/2}\left(\frac{1}{3}(x^2+3)^{-2/3}(2x+0)\right) + (x^2+3)^{1/3}\left(\frac{1}{2}(x^2-5)^{-1/2}(2x-0)\right)$$

$$= \frac{2}{3}x(x^2-5)^{1/2}(x^2+3)^{-2/3} + x(x^2-5)^{-1/2}(x^2+3)^{1/3}$$

33) $f(x) = \sqrt{9+\sqrt{9-x}}$

วิธีทำ

$$f(x) = (9+(9-x)^{1/2})^{1/2}$$

$$f'(x) = \frac{1}{2}(9+(9-x)^{1/2})^{-1/2}\frac{d}{dx}(9+(9-x)^{1/2})$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{9+\sqrt{9-x}}}\left(0+\frac{1}{2}(9-x)^{-1/2}(0-1)\right)$$

$$= \frac{-1}{4\sqrt{9-x}\sqrt{9+\sqrt{9-x}}}$$

34) $g(x) = \sqrt[4]{\frac{y^3+1}{y^3-1}}$

วิธีทำ

$$g'(x) = \frac{1}{4}\left(\frac{y^3+1}{y^3-1}\right)^{-3/4}\frac{d}{dx}\frac{(y^3+1)}{(y^3-1)}$$

$$= \frac{1}{4}\left(\frac{y^3+1}{y^3-1}\right)^{-3/4}\left(\frac{(y^3-1)(3y^2)-(y^3+1)(3y^2)}{(y^3-1)^2}\right)$$

$$= -\frac{1}{2}\left(\frac{y^3+1}{y^3-1}\right)^{-3/4}\frac{(3y^2)}{(y^3-1)^2}$$

35) จงหาสมการของเส้นสัมผัสที่สัมผัสเส้น $y = \sqrt{x^2+9}$ ที่จุด (4,5)

วิธีทำ

$$y' = \frac{1}{2}(x^2+9)^{-1/2}(2x)$$

$$= \frac{x}{\sqrt{x^2+9}}$$

ที่ $x = 4$ จะได้ $y' = \frac{4}{\sqrt{16+9}} = \frac{4}{5}$

ดังนั้นสมการของเส้นสัมผัสที่สัมผัสเส้น $y = \sqrt{x^2+9}$ ที่จุด (4, 5)

คือ $y-5 = \frac{4}{5}(x-4)$ หรือ $y = \frac{4}{5}x+\frac{9}{5}$

36) จงหาสมการของเส้นสัมผัสที่สัมผัสเส้น $y = \frac{(x^2-4)^2}{(3x-5)^2}$ ที่จุด $(1, \frac{9}{4})$

วิธีทำ จาก

$$y = \frac{(x^2-4)^2}{(3x-5)^2}$$

$$\therefore y' = \frac{(3x-5)^2(2(x^2-4)(2x)) - (x^2-4)^2(2(3x-5)(3))}{(3x-5)^4}$$

$$= \frac{4x(3x-5)^2(x^2-4) - 6(3x-5)(x^2-4)^2}{(3x-5)^4}$$

ที่ $x = 1$ จะได้ $y' = \frac{4(3-5)^2(1-4) - 6(3-5)(1-4)^2}{(3-5)^4}$

$$= \frac{-48+108}{16}$$

$$= \frac{15}{4}$$

ดังนั้นสมการของเส้นสัมผัสที่สัมผัสเส้น $y = \frac{(x^2-4)^2}{(3x-5)^2}$ ที่จุด $(1, \frac{9}{4})$

คือ $y - \frac{9}{4} = \frac{15}{4}(x-1)$ หรือ $y = \frac{15}{4}x - \frac{3}{2}$

37) จงหาความชันของเส้นสัมผัสที่สัมผัสเส้น $y = (6-2x)^{1/3}$ ของแต่ละจุดต่อไปนี้ : $(-1, 2)$, $(1, \sqrt[3]{4})$, $(3, 0)$, $(5, -\sqrt[3]{4})$, $(7, -2)$

วิธีทำ จาก

$$y = (6-2x)^{1/3}$$

$$\therefore y' = \frac{1}{3}(6-2x)^{-2/3}(-2)$$

$$= \frac{-2}{3\sqrt[3]{(6-2x)^2}}$$

ที่ $x = -1$ จะได้ $y' = \frac{-2}{3\sqrt[3]{8^2}} = -\frac{1}{6}$

ที่ $x = 1$ จะได้ $y' = \frac{-2}{3\sqrt[3]{4^2}} = \frac{-1}{3\sqrt[3]{2}}$

ที่ $x = 3$ จะได้ $y' = \frac{-2}{3\sqrt[3]{0}}$ = หาค่าไม่ได้

ที่ $x = 5$ จะได้ $y' = \frac{-2}{3\sqrt[3]{(-4)^2}} = \frac{-1}{3\sqrt[3]{2}}$

ที่ $x = 7$ จะได้ $y' = \frac{-2}{3\sqrt[3]{(-8)^2}} = -\frac{1}{6}$

ดังนั้นความชันของเส้นสัมผัส ที่สัมผัสเส้น $y = (6-2x)^{1/3}$ ของจุด $(-1, 2)$ คือ $-\frac{1}{6}$ ของจุด $(1, \sqrt[3]{4})$ คือ $\frac{-1}{3\sqrt[3]{2}}$ ของจุด $(3, 0)$ คือหาค่าไม่ได้, ของจุด $(5, -\sqrt[3]{4})$ คือ $\frac{-1}{3\sqrt[3]{2}}$ และของจุด $(7, -2)$ คือ $-\frac{1}{6}$

38) จงหาสมการของเส้นสัมผัสที่สัมผัสเส้น $y = \frac{1}{\sqrt[3]{7x-6}}$ และมีความชัน $\frac{12}{7}$

วิธีทำ จาก

$$y = \frac{1}{\sqrt[3]{7x-6}} = (7x-6)^{-1/3}$$

$$\therefore y' = -\frac{1}{3}(7x-6)^{-4/3}(7)$$

$$= -\frac{7}{3}(7x-6)^{-4/3}$$

ให้ $\frac{-7}{3\sqrt[3]{(7x-6)^4}} = \frac{12}{7}$

$$\sqrt[3]{(7x-6)^4} = -\frac{49}{36}$$

$$(7x-6)^4 \quad \frac{-117649}{46656}$$

$$= -2.5$$

ซึ่งเป็นไปไม่ได้ เพราะค่าของ $(7x-6)^4$ จะต้องเป็นบวกเสมอ

ดังนั้นจึงไม่มีเส้นสัมผัสที่สัมผัสเส้น $y = \frac{1}{\sqrt[3]{7x-6}}$ และ มีความชันเป็น $\frac{12}{7}$

39) ให้ C(x) บาทเป็นต้นทุนรวมในการผลิตสินค้าชนิดหนึ่ง 10 หน่วย และ

$$C(x) = 20 + 4x + \sqrt{3x^2+4}$$

ก) ฟังก์ชันต้นทุนเพิ่ม

ข) ต้นทุนเพิ่มเมื่อทำหน่วยที่ 20 แล้ว

วิธีทำ จาก $C(x) = 20 + 4x + \sqrt{3x^2+4}$

ก) ฟังก์ชันต้นทุนเพิ่มคือ $C'(x) = 4 + \frac{1}{2}(3x^2+4)^{-1/2}(6x)$

$$= 4 + \frac{3x}{\sqrt{3x^2+4}}$$

ข) ต้นทุนเพิ่มเมื่อทำหน่วยที่ 20 แล้ว คือ

$$C'(2) = 4 + \frac{6}{\sqrt{16}}$$

$$= 4 + \frac{3}{2}$$

$$= 5\frac{1}{2}$$

40) สมการอุปสงค์สำหรับสินค้าชนิดหนึ่งเป็น $p^2 + 4x^2 + 8x - 140 = 0$ เมื่อ p บาทเป็นราคาต่อหนึ่งหน่วย เมื่ออุปสงค์เป็น 100x หน่วย จงหารายได้เพิ่มเมื่ออุปสงค์เป็น 300 หนวย

วิธีทำ จาก $p^2 + 4x^2 + 8x - 140 = 0$

$$p^2 = 140 - 8x - 4x^2$$

$$\therefore p = \sqrt{140 - 8x - 4x^2}$$

จากรายได้รวมหรือ $R(x) = px$

$$= x\sqrt{140 - 8x - 4x^2}$$

$$= \sqrt{140x^2 - 8x^3 - 4x^4}$$

และรายได้เพิ่มคือ $R'(x) = \frac{1}{2}(140x^2 - 8x^3 - 4x^4)^{-\frac{1}{2}}(280x - 24x^2 - 16x^3)$

ดังนั้นรายได้เพิ่มเมื่อเพิ่มอุปสงค์เป็น 300 หน่วยคือ

$$R'(3) = \frac{(840 - 216 - 432)}{2\sqrt{1260-216-324}}$$

$$= \frac{192}{2(26.83)}$$

$$= 3.57 \text{ บาท}$$

41) บริษัทให้เช่าทรัพย์สินแห่งหนึ่งให้เช่าบ้านเดือนละ p บาท เมื่อให้เช่าบ้าน x หลัง และ $p = 15\sqrt{300 - 2x}$ จงหาว่าต้องให้เช่าบ้านกี่หลังจึงมีรายได้เพิ่มเป็นศูนย์

วิธีทำ จาก $p = 15\sqrt{300 - 2x}$

$$= 15(300 - 2x)^{\frac{1}{2}}$$

และรายได้รวมคือ $R(x) = px$

$$= 15x\sqrt{300 - 2x}$$

$$= 15\sqrt{300x^2 - 2x^3}$$

และรายได้เพิ่มคือ $R'(x) = 15\left(\frac{1}{2}(300x^2 - 2x^3)^{-\frac{1}{2}}\right)(600x - 6x^2)$

$$= \frac{15(600x - 6x^2)}{2\sqrt{300x^2 - 2x^3}}$$

ให้รายได้เพิ่มเป็นศูนย์ หรือ $R'(x) = 0$

$$\therefore \frac{15(600x - 6x^2)}{2\sqrt{300x^2 - 2x^3}} = 0$$

$$\therefore 600x - 6x^2 = 0$$

$$\therefore x = 100$$

ดังนั้นต้องให้เช่าบ้าน 100 หลัง รายได้เพิ่มจึงจะเป็นศูนย์

42) จงหาฟังก์ชันรายได้เพิ่มของสินค้าชนิดหนึ่งซึ่งสมการอุปทานเป็น $px = 5\sqrt{10x+1}$ เมื่อ x อยู่ในช่วง [1, 8]

วิธีทำ จาก $px = 5\sqrt{10x+1} = R(x)$

$$\therefore \quad R'(x) = 5(\frac{1}{2}(10x+1)^{-1/2})(10)$$

$$= \frac{25}{\sqrt{10x+1}}$$

เมื่อ $x = 1$ จะได้ $R'(1) = \frac{25}{\sqrt{11}}$

$$= 7.55$$

เมื่อ $x = 8$ จะได้ $R'(8) = \frac{25}{\sqrt{81}}$

$$= 2.77$$

ดังนั้นรายได้เพิ่มจะอยู่ในช่วง [2.77, 7.55]

สำหรับข้อ 43–46 จงหาอนุพันธ์ของฟังก์ชันที่กำหนดให้ (ให้ $|a| = \sqrt{a^2}$)

43) $f(x) = |x^2-4|$

วิธีทำ จาก $f(x) = |x^2-4|$ จะได้ว่า

$$f(x) = \begin{cases} x^2-4 & \text{เมื่อ } x > 2 \text{ และ } x < -2 \\ 0 & \text{เมื่อ } x = 2 \text{ และ } -2 \\ 4-x^2 & \text{เมื่อ } x < 2 \text{ และ } x > -2 \end{cases}$$

$$\therefore f'(x) = \begin{cases} 2x & \text{เมื่อ } -2 > x > 2 \\ 0 & \text{เมื่อ } x = 2 \text{ และ } -2 \\ -2x & \text{เมื่อ } -2 < x < 2 \end{cases}$$

หรืออาจเขียนได้ว่า $f'(x) = 2x\left(\frac{x^2-4}{|x^2-4|}\right)$

44) $f(x) = x|x|$

วิธีทำ จาก $f(x) = x|x|$ จะได้ว่า

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{เมื่อ } x > 0 \\ 0 & \text{เมื่อ } x = 0 \\ -x^2 & \text{เมื่อ } x < 0 \end{cases}$$

$$\therefore\ f'(x) = \begin{cases} 2x & \text{เมื่อ } x > 0 \\ 0 & \text{เมื่อ } x = 0 \\ -2x & \text{เมื่อ } x < 0 \end{cases}$$

หรือเขียนได้ว่า $f'(x) = 2|x|$

45) $g(x) = |x^3|$

วิธีทำ จาก $g(x) = |x^3|$ จะได้ว่า

$$g(x) = \begin{cases} x^3 & \text{เมื่อ } x > 0 \\ 0 & \text{เมื่อ } x = 0 \\ -x^3 & \text{เมื่อ } x < 0 \end{cases}$$

$$\therefore\ g'(x) = \begin{cases} 3x^2 & \text{เมื่อ } x > 0 \\ 0 & \text{เมื่อ } x = 0 \\ -3x^2 & \text{เมื่อ } x < 0 \end{cases}$$

หรือเขียนได้ว่า $g'(x) = 3x|x|$

46) $h(x) = \sqrt[3]{x+x}$

วิธีทำ จาก $h(x) = \sqrt[3]{x+x}$

$$= \sqrt[3]{2x}$$

$$\therefore\ h'(x) = \frac{1}{3}(2x)^{-2/3}(2)$$

$$= \frac{2}{3\sqrt[3]{4x^2}}$$

3.7 สรุปเรื่องอนุพันธ์ของอิมพลิสิตฟังก์ชันและอัตราสัมพัทธ์

(Implicit differentiation and related rates)

$$\text{ถ้า} \quad f = \{(x, y) | y = 3x^2+5x+1\} \tag{3.7.1}$$

แล้วสมการ $y = 3x^2+5x+1$ กำหนดฟังก์ชัน f โดยชัดเจน แต่บางฟังก์ชันอาจไม่ได้กำหนดไว้โดยชัดเจน เช่น สมการ

$$x^6-2x = 3y^6+y^5-y^2 \tag{3.7.2}$$

ซึ่งไม่สามารถแก้สมการหาค่า y ในเทอมของ x ได้

แต่อย่างไรก็ตามจะมีหนึ่งฟังก์ชันหรือมากกว่าของฟังก์ชัน f ที่มีลักษณะว่า

ถ้า $y = f(x)$ แล้วสมการ (3.7.2) เป็นจริง

นั่นคือ $x^6-2x = 3[f(x)]^6+[f(x)]^5-[f(x)]^2$

สำหรับทุก ๆ ค่า x ที่เป็นโดเมนต์ของฟังก์ชัน f

ในกรณีเช่นนี้เรียกว่าฟังก์ชัน f ถูกกำหนดโดยปริยายด้วยสมการ (3.7.2) ที่กำหนดให้ด้วยการตั้งข้อสันนิษฐานว่าสมการ (3.7.2) กำหนด $y = f(x)$ ที่หาอนุพันธ์ได้ จึงใช้วิธีการหาอนุพันธ์ y เทียบกับ x ที่เรียกว่า การหาอนุพันธ์เชิงปริยาย ซึ่งใช้กฎต่าง ๆ เกี่ยวกับการหาอนุพันธ์ต่าง ๆ ที่กล่าวมาแล้ว

$$\text{จาก} \quad x^6-2x = 3y^6+y^5-y^2 \tag{3.7.3}$$

$$\text{ให้} \quad F(x) = x^6-2x \tag{3.7.4}$$

$$G(y) = 3y^6+y^5-y^2 \tag{3.7.5}$$

กำหนดให้ y เป็นฟังก์ชันของ x เช่น

$$y = f(x)$$

จะเขียนสมการ (3.7.3) ได้เป็น

$$\begin{aligned} F(x) &= G(y) \\ &= G[f(x)] \end{aligned} \tag{3.7.6}$$

สมการ (3.7.6) เป็นจริงทุก ๆ ค่า x ในโดเมนต์ของ f ซึ่ง $G[f(x)]$ หาค่าได้

ดังนั้น สำหรับทุก ๆ ค่า x ที่หาอนุพันธ์ของ f ได้จะมี

$$\frac{d}{dx}(x^6 - 2x) = \frac{d}{dx}(3y^6 + y^5 - y^2)$$

$$6x^5 - 2 = 18y^5\frac{dy}{dx} + 5y^4\frac{dy}{dx} - 2y\frac{dy}{dx}$$

$$6x^5 - 2 = (18y^5 + 5y^4 - 2y)\frac{dy}{dx}$$

$$\frac{6x^5 - 2}{18y^5 + 5y^4 - 2y} = \frac{dy}{dx}$$

แบบฝึกหัด 3.7

ข้อ 1—8 จงหา $\frac{dy}{dx}$ โดยวิธีหาอนุพันธ์เชิงปริยาย (Implicit differentiation)

1. $x^2+y^2 = 16$

วิธีทำ โดยถือว่า y เป็นฟังก์ชันของ x

$$\frac{d}{dx}(x^2+y^2) = \frac{d}{dx}(16)$$

$$\frac{d}{dx}(x^2) + \frac{d}{dx}(y^2) = 0$$

$$2x + 2Y\frac{dy}{dx} = 0$$

$$x + y\frac{dy}{dx} = 0$$

$$y\frac{dy}{dx} = -x$$

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{x}{y}$$ <u>ตอบ</u>

2. $2x^3y+3xy^3 = 5$

วิธีทำ โดยถือว่า y เป็นฟังก์ชันของ x

$$\frac{d}{dx}(2x^3y+3xy^3) = \frac{d}{dx}(5)$$

$$\frac{d}{dx}(2x^3y) + \frac{d}{dx}(3xy^3) = 0$$

$$2\frac{d}{dx}(x^3y) + 3\frac{d}{dx}(xy^3) = 0$$

$$2\frac{d}{dx}(x^3y) + 3\frac{d(xy^3)}{dx} = 0$$

$$2(x^3\frac{dy}{dx} + y\frac{dx^3}{dx}) + 3(x\frac{dy^3}{dx} + y^3\frac{dx}{dx}) = 0$$

$$2(x^3\frac{dy}{dx} + 3yx^2) + 3(3xy^2\frac{dy}{dx} + y^3) = 0$$

$$(2x^3\frac{dy}{dx} + 9xy^2\frac{dy}{dx}) + (6yx^2 + 3y^3) = 0$$

$$(2x^3 + 9xy^2)\frac{dy}{dx} = -6yx^2 - 3y^3$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-6yx^2 - 3y^3}{2x^3 + 9xy^2}$$

<u>ตอบ</u>

3. $$x^2 = \frac{x + 2y}{x - 2y}$$

วิธีทำ โดยถือว่า y เป็นฟังก์ชันของ x

$$x^2(x - 2y) = x + 2y$$

$$x^3 - 2x^2y = x + 2y$$

$$\frac{d}{dx}(x^3 - 2x^2y) = \frac{d}{dx}(x + 2y)$$

$$\frac{d}{dx}(x^3) - 2\frac{d}{dx}(x^2y) = \frac{d}{dx}(x) + 2\frac{dy}{dx}$$

$$3x^2 - 2(x^2\frac{dy}{dx} + y\frac{d}{dx}(x^2)) = 1 + 2\frac{dy}{dx}$$

$$3x^2 - 2x^2\frac{dy}{dx} - 4yx = 1 + 2\frac{dy}{dx}$$

$$-2x^2\frac{dy}{dx} - 2\frac{dy}{dx} = 1 + 4yx - 3x^2$$

$$(-2x^2 - 2)\frac{dy}{dx} = 1 + 4yx - 3x^2$$

$$\frac{dy}{dx} - \frac{1 + 4yx - 3x^2}{-2x^2 - 2}$$

$$= \frac{1 + 4yx - 3x^2}{-2 - 2x^2}$$

<u>ตอบ</u>

หมายเหตุ ถ้าเป็นเศษส่วนจะต้องทำส่วนให้หายไปก่อน เพื่อสะดวกต่อการหาค่า

4. $\frac{x}{y} - 4y = x$

วิธีทำ โดยถือ y เป็นฟังก์ชันของ x

$$\frac{x}{y} - 4y = x$$

$$\frac{x - 4y^2}{y} = x$$

$$x - 4y^2 = xy$$

$$\frac{d}{dx}(x - 4y^2) = \frac{d}{dx}(xy)$$

$$\frac{d}{dx}(x) - 4\frac{d}{dx}(y^2) = x\frac{dy}{dx} + y\frac{d}{dx}(x)$$

$$1 - 4(2)\,y\frac{dy}{dx} = x\frac{dy}{dx} + y$$

$$1 - 8y\frac{dy}{dx} = x\frac{dy}{dx} + y$$

$$-8y\frac{dy}{dx} - x\frac{dy}{dx} = y - 1$$

$$8y\frac{dy}{dx} + x\frac{dy}{dx} = 1 - y \qquad \text{เอาลบคูณตลอด}$$

$$(8y + x)\frac{dy}{dx} = 1 - y$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1 - y}{8y + x}$$ **ตอบ**

5. $y + \sqrt{xy} = 3x^3$

วิธีทำ โดยถือ y เป็นฟังก์ชันของ x

$$y + (xy)^{\frac{1}{2}} = 3x^3$$

$$\frac{d}{dx}(y + (xy)^{\frac{1}{2}}] = \frac{d}{dx}(3x^3)$$

$$\frac{d}{dx}y + \frac{d}{dx}(xy)^{\frac{1}{2}} = 3\cdot\frac{d}{dx}(x^3)$$

$$\frac{dy}{dx} + \frac{1}{2}x(xy)^{-\frac{1}{2}}\frac{d}{dx}(xy) = 9x^2$$

$$\frac{dy}{dx} + \frac{1}{2}(xy)^{-\frac{1}{2}}\left(x\frac{dy}{dx} + y\frac{dx}{dx}\right) = 9x^2$$

$$\frac{dy}{dx} + \frac{1}{2}(xy)^{-\frac{1}{2}}\left(x\frac{dy}{dx} + y\right) = 9x^2$$

$$\frac{dy}{dx} + \frac{1}{2}x(xy)^{-\frac{1}{2}}\frac{dy}{dx} + \frac{1}{2}y(xy)^{-\frac{1}{2}} = 9x^2$$

$$\left(1 + \frac{1}{2}x(xy)^{-\frac{1}{2}}\right]\frac{dy}{dx} = 9x^2 - \frac{1}{2}y(xy)^{-\frac{1}{2}}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{9x^2 - \frac{1}{2}y(xy)^{-\frac{1}{2}}}{1 + \frac{1}{2}x(xy)^{-\frac{1}{2}}}$$ <u>ตอบ</u>

6. $(x + y)^2 - (x - y)^2 = x^3 + y^3$

วิธีทำ โดยถือ y เป็นฟังก์ชันของ x

$$\frac{d}{dx}\left[(x + y)^2 - (x - y)^2\right] = \frac{d}{dx}(x^3 + y^3)$$

$$\frac{d}{dx}(x + y)^2 - \frac{d}{dx}(x - y)^2 = \frac{d}{dx}(x^3) + \frac{dy^3}{dx})$$

$$2(x + y)\frac{d}{dx}(x + Y) - 2(x - y)\frac{d}{dx}(x - y) = 3x^2 + 3y^2\frac{dy}{dx}$$

$$2(x + y)\left(1 + \frac{dy}{dx}\right) - 2(x - y)\left(1 - \frac{dy}{dx}\right) = 3x^2 + 3y^2\frac{dy}{dx}$$

$$2(x + y) + 2(x + y)\frac{dy}{dx} - 2(x - y) + 2(x - y)\frac{dy}{dx} = 3x^2 + 3y^2\frac{dy}{dx}$$

$$2(x + y)\frac{dy}{dx} + 2(x - y)\frac{dy}{dx} - 3y^2\frac{dy}{dx} = 3x^2 - 2(x + y) + 2(x - y)$$

$$\left(2(x + y) + 2(x - y) - 3y^2\right)\frac{dy}{dx} = 3x^2 - 2(x + y) + 2(x - y)$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{3x^2 - 2(x + y) + 2(x - y)}{-3y^2 + 2(x + y) + 2(x - y)}$$ <u>ตอบ</u>

7. $\frac{y}{x-y} = 2 + x^2$

วิธีทำ โดยถือ y เป็นฟังก์ชันของ x

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{y}{x-y}\right) = \frac{d}{dx}(2 + x^2)$$

$$\frac{(x-y)\frac{dy}{dx} - y\frac{d}{dx}(x-y)}{(x-y)^2} = \frac{d}{dx}(2) + \frac{d}{dx}(x^2)$$

$$\frac{(x-y)\frac{dy}{dx} - y\left(1 - \frac{dy}{dx}\right)}{(x-y)^2} = 0 + 2x$$

$$(x-y)\frac{dy}{dx} - y + y\frac{dy}{dx} = 2x(x-y)^2$$

$$(x-y)\frac{dy}{dx} + y\frac{dy}{dx} = 2x(x-y)^2 + y$$

$$(x - y + y)\frac{dy}{dx} = 2x(x-y)^2 + y$$

$$x\frac{dy}{dx} = 2x(x-y)^2 + y$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{2x(x-y)^2 + y}{x}$$

$$= 2(x-y)^2 + \frac{y}{x}$$ **ตอบ**

8. $\sqrt{y} + \sqrt[3]{y} + \sqrt[4]{y} = x$

วิธีทำ โดยถือ y เป็นฟังก์ชันของ x

$$y^{\frac{1}{2}} + y^{\frac{1}{3}} + y^{\frac{1}{4}} = x$$

$$\frac{d}{dx}\left(y^{\frac{1}{2}} + y^{\frac{1}{3}} + y^{\frac{1}{4}}\right) = \frac{d}{dx}(x)$$

$$\frac{dy^{\frac{1}{2}}}{dx} + \frac{dy^{\frac{1}{3}}}{dx} + \frac{dy^{\frac{1}{4}}}{dx} = 1$$

$$\frac{1}{2}y^{-\frac{1}{2}}\frac{dy}{dx} + \frac{1}{3}y^{-\frac{2}{3}}\frac{dy}{dx} + \frac{1}{4}y^{-\frac{3}{4}}\frac{dy}{dx} = 1$$

$$\left(\frac{1}{2}y^{-\frac{1}{2}} + \frac{1}{3}y^{-\frac{2}{3}} + \frac{1}{4}y^{-\frac{3}{4}}\right)\frac{dy}{dx} = 1$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\left(\frac{1}{2}y^{-\frac{1}{2}} + \frac{1}{3}y^{-\frac{2}{3}} + \frac{1}{4}y^{-\frac{3}{4}}\right)}$$ **ตอบ**

9. จงหา $\frac{dx}{dy}$

$$x^4 + y^4 = 12x^2y$$

วิธีทำ โดยถือว่า x เป็นฟังก์ชันของ y

$$\frac{d}{dy}(x^4 + y^4) = \frac{d}{dy}(12x^2y)$$

$$\frac{d}{dy}(x^4) + \frac{d}{dy}(y^4) = 12\frac{d}{dy}(x^2y)$$

$$4x^3\frac{dx}{dy} + 4y^3\frac{dy}{dy} = 12\left(x^2\frac{dy}{dy} + y\frac{dx^2}{dy}\right)$$

$$4x^3\frac{dx}{dy} + 4y^3 = 12\left(x^2 + 2xy\frac{dx}{dy}\right)$$

$$4x^3\frac{dx}{dy} + 4y^3 = 12x^2 + 24xy\frac{dx}{dy}$$

$$x^3\frac{dx}{dy} + y^3 = 3x^2 + 6xy\frac{dx}{dy}$$

$$x^3\frac{dx}{dy} - 6xy\frac{dx}{dy} = 3x^2 - y^3$$

$$(x^3 - 6xy)\frac{dx}{dy} = 3x^2 - y^3$$

$$\frac{dx}{dy} = \frac{3x^2 - y^3}{x^3 - 6xy}$$ **ตอบ**

10. จงหาค่า $\frac{dx}{dy}$

$$y = 2x^3 - 5x$$

วิธีทำ โดยถือว่า x เป็นฟังก์ชันของ y

$$\frac{d}{dy}(y) = \frac{d}{dy}(2x^3 - 5x)$$

$$1 = \frac{d}{dy}(2x^3) - \frac{d}{dy}(5x)$$

$$1 = 6x^2\frac{dx}{dy} - 5\frac{dx}{dy}$$

$$1 = (6x^2 - 5)\frac{dx}{dy}$$

$$\frac{1}{2x^2 - 5} = \frac{dx}{dy}$$ **<u>ตอบ</u>**

11. จงหาค่า $\frac{dx}{dy}$

วิธีทำ โดยถือว่า x เป็นฟังก์ชันของ y

$$x^3y + 2y^4 - x^4 = 0$$

$$\frac{d}{dy}(x^3y + 2y^4 - x^4) = \frac{d}{dy}(0)$$

$$\frac{d}{dy}(x^3y) + \frac{d}{dy}(2y^4) - \frac{d}{dy}(x^4) = 0$$

$$\left(x^3\frac{dy}{dy} + y\frac{dx^3}{dy}\right) + 8y^3\frac{dy}{dy} - 4x^3\frac{dx}{dy} = 0$$

$$\left(x^3 + 3x^2y\frac{dx}{dy}\right) + 8y^3 - 4x^3\frac{dx}{dy} = 0$$

$$3x^2y\frac{dx}{dy} - 4x^3\frac{dx}{dy} + x^3 + 8y^3 = 0$$

$$(3x^2y - 4x^3)\frac{dx}{dy} = -x^3 - 8y^3$$

$$\frac{dx}{dy} = \frac{-x^3 - 8y^3}{3x^2y - 4x^3}$$ **<u>ตอบ</u>**

12. จงหาค่า $\frac{dx}{dy}$

$$y\sqrt{x} - x\sqrt{y} = 9$$

วิธีทำ โดยถือว่า x เป็นฟังก์ชันของ y

$$\frac{d}{dy}(y\sqrt{x} - x\sqrt{y}) = \frac{d}{dy}(9)$$

$$\frac{d}{dy}(yx^{\frac{1}{2}} - xy^{\frac{1}{2}}) = 0$$

$$\frac{d}{dy}(yx^{\frac{1}{2}}) - \frac{d}{dy}(xy^{\frac{1}{2}}) = 0$$

$$\left(y\frac{dx^{\frac{1}{2}}}{dy} + x^{\frac{1}{2}}\frac{dy}{dy}\right) - \left(x\frac{dy^{\frac{1}{2}}}{dy} + y^{\frac{1}{2}}\frac{dx}{dy}\right) = 0$$

$$\left(\frac{1}{2}yx^{-\frac{1}{2}}\frac{dx}{dy} + x^{\frac{1}{2}}\right) - \left(\frac{1}{2}xy^{-\frac{1}{2}} + y^{\frac{1}{2}}\frac{dx}{dy}\right) = 0$$

$$\frac{1}{2}yx^{-\frac{1}{2}}\frac{dx}{dy} - y^{\frac{1}{2}}\frac{dx}{dy} = \frac{1}{2}xy^{-\frac{1}{2}} - x^{\frac{1}{2}}$$

$$\left(\frac{1}{2}yx^{-\frac{1}{2}} - y^{\frac{1}{2}}\right)\frac{dx}{dy} = \frac{1}{2}xy^{-\frac{1}{2}} - x^{\frac{1}{2}}$$

$$\frac{dx}{dy} = \frac{\frac{1}{2}xy^{-\frac{1}{2}} - x^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}yx^{-\frac{1}{2}} - y^{\frac{1}{2}}}$$ **ตอบ**

13. จงหาสมการเส้นสัมผัสที่สัมผัสกับเส้นโค้ง $16x^4+y^4 = 32$ ณ ที่จุด (1,2)

วิธีทำ จากสมการเส้นตรง

$y-y_1 = m(x-x_1)$ เมื่อ m เป็นความชัน ณ จุดสัมผัส (1)

หา $\frac{dy}{dx}$ จากสมการ $16x^4 + y^4 = 32$

$$\frac{d}{dx}(16x^4 + y^4) = \frac{d}{dx}(32)$$

$$16\frac{d}{dx}(x^4) + \frac{d}{dx}(y^4) = 0$$

$$64x^3 + 4y^3\frac{dy}{dx} = 0$$

$$4y^3\frac{dy}{dx} = -64x^3$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-16x^3}{y^3}$$

ณ จุด (1,2) ; $\frac{dy}{dx} = \frac{-16(1^3)}{2^3}$

$$= \frac{-16}{8}$$

$= -2 = m$ ซึ่งเป็นความชันของเส้นสัมผัส ณ จุด (1,2)

จากสมการ (1) $y - y_1 = m(x - x_1)$

$y - 2 = -2(x - 1)$ เมื่อ $x_1 = 1,\ y_1 = 2$

$y - 2 = -2x + 2$

$y = -2x + 4$ เป็นสมการเส้นสัมผัส **ตอบ**

14. จงหาอัตราเปลี่ยนแปลงของ y เทียบกับ x ที่จุด (3,2) ของเส้นโค้ง $7y^2 - xy^3 = 4$

วิธีทำ หา $\frac{dy}{dx}$

$$\frac{d}{dx}(7y^2 - xy^3) = \frac{d}{dx}(4)$$

$$7\frac{d}{dx}(y^2) - \frac{d}{dx}(xy^3) = 0$$

$$14y\frac{dy}{dx} - \left(x\frac{d}{dx}(y^3) + y^3\frac{dx}{dx}\right) = 0$$

$$14y\frac{dy}{dx} - \left(3xy^2\frac{dy}{dx} + y^3\right) = 0$$

$$14y\frac{dy}{dx} - 3xy^2\frac{dy}{dx} - y^3 = 0$$

$$(14y - 3xy^2)\frac{dy}{dx} - y^3 = 0$$

$$(14y - 3xy^2)\frac{dy}{dx} = y^3$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y^3}{14y - 3xy^2}$$

$$= \frac{y^2}{14 - 3xy} \qquad (1)$$

สมการ (1) เป็นอันตราเปลี่ยนแปลงของ y เทียบกับ x

ถ้าแทน $x = 3,\ y = 2$ ในสมการ (1) จะได้

$$\frac{dy}{dx} = \frac{2^2}{14 - 3(3)(2)}$$

$$= \frac{4}{14 - 18}$$

$$= \frac{4}{-4}$$

$$= -1$$

เป็นอัตราเปลี่ยนแปลงของ y เทียบกับ x ที่จุด (3,2) **ตอบ**

15. ลูกหิมะทรงกลมเส้นผ่าศูนย์กลาง 6 ฟุต เมื่อถูกความร้อนจะละลายด้วยอัตรา $\frac{1}{4}$ ฟ^3/นาที จงหาอัตราการเปลี่ยนแปลงของรัศมีเมื่อรัศมีเป็น 2 ฟุต (ปริมาตรทรงกลมตัน $v = \frac{4}{3}\pi r^3$)

วิธีทำ จากโจทย์ ปริมาตรทรงกลมตัน $v = \frac{4}{3}\pi r^3$

เมื่อ r เป็นรัศมี, และ $\frac{dv}{dt} = \frac{1}{4}$

ต้องการหา $\frac{dr}{dt}$ เมื่อ r เปลี่ยนแปลง = 3-2 = 1 ฟุต

หา $\frac{dv}{dt}$ จากสูตรปริมาตรทรงกลมตัน

$$\frac{dv}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\frac{4\pi}{3} r^3\right)$$

$$= \frac{4\pi}{3}\frac{d}{dt}(r^3)$$

$$= \frac{4\pi}{3} \cdot 3r^2\frac{dr}{dt} \qquad (1)$$

แทนค่า $\frac{dv}{dt} = \frac{1}{4}$, $r = 1$ ฟุต ในสมการ (1)

$$\frac{1}{4} = \frac{4}{3}\pi \cdot 3(1^2)\frac{dr}{dt}$$

$$\frac{1}{4} = 4\pi \cdot \frac{dr}{dt}$$

$$\frac{1}{4} = 4\pi\frac{dr}{dt}$$

$$\frac{1}{16\pi} = \frac{dr}{dt}$$

เพราะฉะนั้นอัตราการเปลี่ยนแปลงของรัศมี $= \frac{1}{16\pi}$ ฟุต/นาที **ตอบ**

16. โรงงานแห่งหนึ่งผลิตสินค้า 50 หน่วยต่อสัปดาห์ ในการผลิตนี้ อัตราการผลิตจะเพิ่มขึ้น 2 หน่วยต่อสัปดาห์ $\left(\frac{dx}{dt} = 2\right)$

ถ้า C เป็นต้นทุนการผลิตสินค้า มีหน่วยเป็นบาท

และ $C = 0.08x^3 - x^2 + 10x + 48$

จงหาอัตราที่ต้นทุนการผลิตเพิ่มขึ้นขณะนั้น

วิธีทำ ให้ t เป็นระยะเวลาการผลิตสินค้าต่อสัปดาห์

C และ x เป็นฟังก์ชันของ t

$$\frac{dC}{dt} = \frac{d}{dt}(0.08x^3) - \frac{d}{dt}(x^2) + \frac{d}{dt}(10x) + \frac{d}{dt}(48)$$

$$= .24x^2\frac{dx}{dt} - 2x\frac{dx}{dt} + 10\frac{dx}{dt} \qquad (1)$$

แทนค่า $x = 50,\ \frac{dx}{dt} = 2$ ในสมการ (1)

เพราะฉะนั้น $$\frac{dC}{dt} = .24\,(50)^2 x2 - 2(50)\ x2 + 10x2$$

$$= .48\,(2500) - 200 + 20$$

$$= 1200 - 200 + 20$$

$$= 1020$$

เพราะฉะนั้นต้นทุนการผลิตจะเพิ่มขึ้น = 1020 บาท ต่อสัปดาห์ **ตอบ**

17. สมมุติให้ใช้คนงาน y คน ผลิตสินค้า x หน่วย และให้ $x = 4y^2$ ถ้าในปีนี้ผลิตสินค้า 250,000 หน่วย และอัตราการผลิตเพิ่มขึ้น 18,000 หน่วย/ปี

จงหาอัตราของจำนวนคนงานที่จะเพิ่มขึ้นขณะนั้น (หา $\frac{dy}{dt}$)

วิธีทำ ให้ t เป็นระยะเวลาในการผลิตสินค้า มีหน่วยเป็นปี x และ y เป็นฟังก์ชันของ t

และ $\frac{dx}{dt} = 18{,}000$ หน่วย/ปี

ต้องการหา $\frac{dy}{dt}$

จากสมการ $x = 4y^2$ หาอนุพันธ์เทียบกับ t

$$\frac{dx}{dt} = \frac{d}{dt}(4y^2)$$

$$\frac{dx}{dt} = 8y\frac{dy}{dt} \qquad (1)$$

จากสมการ $x = 4y^2$ ถ้า $x = 250{,}000$ แล้ว $y = 250$

แทนค่า ในสมการ (1) จะได้

$$18{,}000 = 8(250)\frac{dy}{dt}$$

$$18{,}000 = 2{,}000\frac{dy}{dt}$$

$$\frac{18{,}000}{2{,}000} = \frac{dy}{dt}$$

$$9 = \frac{dy}{dt}$$

เพราะฉะนั้นอัตราของจำนวนคนงานที่จะเพิ่มขึ้นเท่ากับ 9 คน/ปี

ตอบ