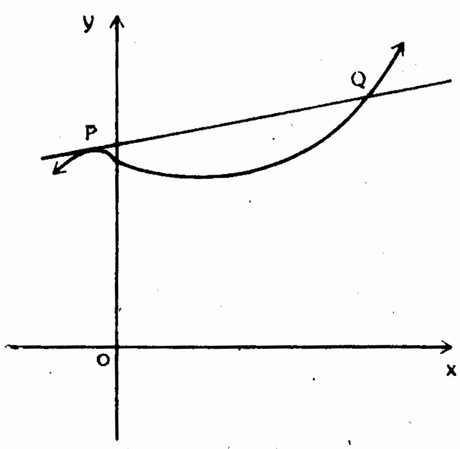
บทที่ 3
อนุพันธ์
(Derivative)

3.1 เส้นสัมผัส และอนุพันธ์ The tangent line and the derivative

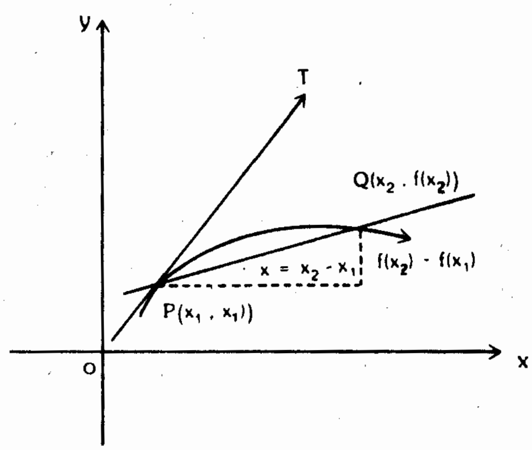
ปัญหาที่สำคัญส่วนใหญ่ในแคลคูลัส ขึ้นอยู่กับปัญหาของการหาเส้นสัมผัสของเส้นโค้ง ณ จุดที่กำหนดให้บนเส้นโค้งนั้น ถ้าเส้นโค้งเป็นวงกลม จากเรขาคณิตใน 2 มิติ กำหนดว่า เส้นสัมผัสที่จุด P บนวงกลม คือเส้นที่ตัดกับวงกลมที่จุด P เพียงจุดเดียว นิยามนี้ใช้ไม่ได้กับเส้นโค้งโดยทั่วไป เช่นในรูป 3.1.1 เส้นที่ต้องการให้เป็นเส้นสัมผัสกับเส้นโค้งที่จุด P ตัดเส้นโค้งนี้ที่จุด Q ด้วย

ในหัวข้อนี้ จะพิจารณาถึงนิยามที่เหมาะสมของเส้นสัมผัสกับกราฟของฟังก์ชันที่จุดบนกราฟ ให้ f เป็นฟังก์ชันซึ่งมีความต่อเนื่องที่ x_1 ต้องการหาความชันของเส้นสัมผัสกับกราฟของ f ที่ $P(x_1 , f(x_1))$ ให้ $Q(x_2 , f(x_2))$ เป็นจุดอีกจุดหนึ่งบนกราฟของ f นั่นคือ x_2 อยู่ใน I ด้วย เขียนเส้นผ่าน P และ Q เส้นตรงใด ๆ ที่ผ่านจุด 2 จุดบนเส้นโค้ง เรียกว่า เส้นตัดกราฟ (secant line) ดังนั้น เส้นที่ผ่าน P และ Q เป็นเส้นตัดกราฟ (ดูรูป 3.1.2)

ในรูป Q อยู่ทางขวามือของ P อย่างไรก็ตาม Q อาจจะอยู่ทางขวามือ หรือทางซ้ายมือของ P ก็ได้



รูป 3.1.1



รูป 3.1.2

แทนผลต่างในแนวแกน x ระหว่าง P และ Q ด้วย Δx ดังนั้น

$$\Delta x = x_2 - x_1$$

Δx อาจจะเป็นบวกหรือลบก็ได้

ความชันของเส้นตัดกราฟ PQ ถูกกำหนดโดย

$$m_{PQ} = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{\Delta x}$$

เมื่อกำหนดว่า เส้น PQ ไม่อยู่ในแนวดิ่ง

เพราะว่า $\quad x_2 = x_1 + \Delta x$

ดังนั้น

$$m_{PQ} = \frac{f(x_1 + \Delta x) - f(x_1)}{\Delta x}$$

ตอนนี้ ให้จุด P คงที่ และเคลื่อนจุด Q ตามเส้นโค้งไปทาง P นั่นคือ Q เข้าใกล้ P ซึ่งมีค่าเหมือนกับว่าให้ Δx เข้าใกล้ศูนย์ และเส้นตัดกราฟกลายเป็นจุด P

ถ้าเส้นตัดกราฟมีตำแหน่งลิมิต (limiting position) ซึ่งมีเส้นสัมผัสกราฟที่จุด P ดังนั้น ต้องให้ความชันของเส้นสัมผัสกราฟที่จุด P เป็นลิมิตของ m_{PQ} ในขณะที่ Δx เข้าใกล้ศูนย์ ถ้าลิมิตนี้หาค่าได้ แต่ถ้าหาลิมิตไม่ได้ นั่นคือ $\lim\limits_{\Delta x \to 0} m_{PQ} = +\infty$ หรือ $-\infty$ แล้ว ในขณะที่ Δx เข้าใกล้ศูนย์ เส้น PQ เข้าใกล้เส้นที่ผ่าน P ซึ่งขนานกับแกน y ในกรณีนี้เส้นสัมผัสกราฟที่ P จะต้องเป็นเส้น $x = x_1$

นิยาม 3.1.1 ถ้า f เป็นฟังก์ชันที่มีความต่อเนื่องที่ x_1 แล้ว เส้นสัมผัสกราฟของ f ที่จุด $P(x_1, f(x_1))$ คือ

(1) เส้นที่ผ่านจุด P ซึ่งมีความชัน $m(x_1)$ โดย

$$m(x_1) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_1 + \Delta x) - f(x_1)}{\Delta x} \qquad (3.1.1)$$

ถ้าลิมิตนี้หาค่าได้

(2) เส้น $x = x_1$ ถ้า

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_1 + \Delta x) - f(x_1)}{\Delta x} = +\infty \text{ หรือ } -\infty$$

ถ้าไม่เป็นไปตามข้อ 1 หรือ ข้อ 2 แล้ว กราฟ f ก็จะไม่มีเส้นสัมผัสที่จุด $P(x_1\ \ f(x_1))$

ตัวอย่างที่ 3.1.1 จงหาความชันของเส้นสัมผัสกับเส้นโค้ง $y = x^2 - 4x + 3$ ที่จุด (x_1, y_1)

วิธีทำ

$$f(x) = x^2 - 4x + 3$$

$$\therefore \quad f(x_1) = x_1^2 - 4x_1 + 3 \quad \text{และ}$$

$$f(x_1 + \Delta x) = (x_1 + \Delta x)^2 - 4(x_1 + \Delta x) + 3$$

ใช้สมการ (3.1.1) จะได้

$$m(x_1) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_1 + \Delta x) - f(x_1)}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{[(x_1 + \Delta x)^2 - 4(x_1 + \Delta x) + 3] - [x_1^2 - 4x_1 + 3]}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{x_1^2 + 2x_1 \Delta x + (\Delta x)^2 - 4x_1 - 4\Delta x + 3 - x_1^2 + 4x_1 - 3}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{2x_1 \Delta x + (\Delta x)^2 - 4\Delta x}{\Delta x}$$

เพราะว่า $\Delta x \neq 0$ สามารถหารเศษและส่วนด้วย Δx ได้

$$m(x_1) = \lim_{\Delta x \to 0} (2x_1 + \Delta x - 4)$$

หรือ

$$m(x_1) = 2x_1 - 4 \qquad (3.1.2)$$

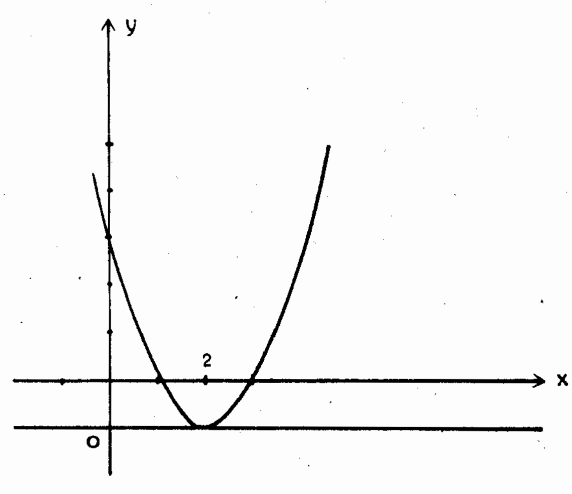
การเขียนกราฟของสมการในตัวอย่างที่ 3.1.1 กำหนดจุด และเขียนเซกเมนต์ของเส้นสัมผัสที่บางจุด ให้ x แปรค่า และหาค่า y ที่สมนัยกันจากสมการ จากนั้นใช้สมการ (3.1.2) หาค่า m ได้ผลในตาราง 3.1.1 และมีกราฟดังรูป 3.1.3 เป็นสิ่งสำคัญที่จะต้องหาจุดที่กราฟมีเส้นสัมผัสในแนวระดับ เพราะว่า เส้นในแนวระดับมีความชันเป็นศูนย์ จุดนี้หาได้โดยการให้ $m(x_1) = 0$

จะได้ว่า
$$2x_1 - 4 = 0$$
$$x_1 = 2$$

นั่นคือ ที่ $x = 2$ เส้นสัมผัสขนานกับแกน x (ดังรูป 3.1.3)

ตาราง 3.1.1

x	y	m
2	-1	0
1	0	-2
0	3	-4
-1	8	-6
3	0	2
4	3	4
5	8	6



รูป 3.1.3

ตัวอย่างที่ 3.1.2 จงหาสมการของเส้นสัมผัสกับเส้นโค้ง ของตัวอย่างที่ 3.1.1 ที่จุด (4, 3)

วิธีทำ เพราะว่า ความชันของเส้นสัมผัสที่จุดใด ๆ (x_1, y_1)

กำหนดโดย $m(x_1) = 2x_1 - 4$

ความชันของเส้นสัมผัสที่จุด (4, 3) คือ

$$m(4) = (2)(4) - 4$$
$$= 4$$

ดังนั้น สมการของเส้นที่ต้องการ คือ

$$y - 3 = 4(x - 4)$$
$$4x - y - 13 = 0$$

Ans

ในตัวอย่างที่ 3.1.1 เริ่มด้วยฟังก์ชัน f ซึ่งกำหนดโดย

$$f(x) = x^2 - 4x + 3$$

ได้สูตร

$$m(x_1) = 2x_1 - 4 \qquad (3.1.3)$$

ซึ่งให้ความชัน $m(x_1)$ ของเส้นสัมผัสกราฟของ f ที่จุด $(x_1, f(x_1))$

สมการ (3.1.3) กำหนดฟังก์ชันหนึ่งที่ได้มาจากฟังก์ชัน f ถ้ากำหนดสมการ (3.1.3) ด้วย f' (อ่านว่า f prime) แล้ว

$$f'(x) = 2x - 4$$

f' เรียกว่า อนุพันธ์ของ f

เพราะว่า สามารถนำอนุพันธ์ไปใช้ได้หลายอย่าง ดังนั้น อนุพันธ์ของฟังก์ชันจึงเป็นสิ่งสำคัญมาก

นิยาม 3.1.2 อนุพันธ์ของฟังก์ชัน f คือ ฟังก์ชันที่เขียนแทนด้วย f' ซึ่งค่า ณ จุด x ใด ๆ ในโดเมน (domain) ของ f ถูกกำหนดโดย

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} \qquad (3.1.4)$$

ถ้าลิมิตหาค่าได้

สัญลักษณ์อื่นซึ่งใช้แทน $f'(x)$ คือ $D_x f(x)$ ซึ่งอ่านว่า "อนุพันธ์ของฟังก์ชัน x เทียบกับ x"

ถ้า $y = f(x)$ แล้ว $f'(x)$ เป็นอนุพันธ์ของ y เทียบกับ x

สัญลักษณ์ y' ใช้แทนอนุพันธ์ของ y เทียบกับตัวแปรต้น (independent variable) ตัวหนึ่ง ถ้าตัวแปรต้นนั้นเป็นที่รู้จักกันดี

ถ้า x_1 เป็นค่าในโดเมนของ f แล้ว

$$f'(x_1) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_1 + \Delta x) - f(x_1)}{\Delta x} \qquad (3.1.5)$$

ถ้าลิมิตนี้หาค่าได้

เปรียบเทียบสูตร (3.1.1) และ (3.1.5) จะสังเกตเห็นว่าความชันของเส้นสัมผัสกราฟของ $y = f(x)$ ที่จุด $(x_1, f(x_1))$ คืออนุพันธ์ของ f ที่ x_1

ตัวอย่างที่ 3.1.3 ให้ $f(x) = 3x^2 + 12$ จงหาอนุพันธ์ของ f

วิธีทำ ถ้า x เป็นค่าใด ๆ ในโดเมนของ f จากสมการ (3.1.4)

$$\begin{aligned} f'(x) &= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{[3(x + \Delta x)^2 + 12] - (3x^2 + 12)}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{3x^2 + 6x\Delta x + 3(\Delta x)^2 + 12 - 3x^2 - 12}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{6x\Delta x + 3(\Delta x)^2}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x \to 0} (6x + 3\Delta x) \\ &= 6x \end{aligned}$$

นั่นคือ อนุพันธ์ของ f คือ ฟังก์ชัน f ที่กำหนดโดย $f'(x) = 6x$

โดเมนของ f' คือ เซ็ตของจำนวนจริง ซึ่งเหมือนกับโดเมนของ f

พิจารณาสูตร 3.1.5 ซึ่งมี

$$f'(x_1) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_1 + \Delta x) - f(x_1)}{\Delta x}$$

ในสูตรนี้ ถ้าให้ $x_1 + \Delta x = x$ (3.1.6)

แล้ว "$\Delta x \to 0$" มีความหมายเหมือนกับ "$x \to x_1$" (3.1.7)

โดยใช้สูตร (3.1.5) สมการ (3.1.6) และข้อความ (3.1.7) จะได้สูตรสำหรับหาอนุพันธ์ของ f ที่จุด x_1 เป็น

$$f'(x_1) = \lim_{x \to x_1} \frac{f(x) - f(x_1)}{x - x_1} \tag{3.1.8}$$

ถ้าลิมิตนี้หาค่าได้ สูตร (3.1.8) ใช้หา $f'(x_1)$ ได้เช่นเดียวกับสูตร (3.1.5)

ตัวอย่างที่ 3.1.4 สำหรับฟังก์ชัน f ของตัวอย่างที่ 3.1.3 จงหาอนุพันธ์ของ f ที่ 2 โดย

1. ใช้สูตร (3.1.5)
2. ใช้สูตร (3.1.8)
3. แทนค่า x ด้วย 2 ใน $f'(x)$ ของตัวอย่างที่ 3.1.3

วิธีทำ 1. ใช้สูตร (3.1.5) จะได้ว่า

$$f'(2) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(2 + \Delta x) - f(2)}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{[3(2 + \Delta x)^2 + 12] - [3(2)^2 + 12]}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{12 + 12\Delta x + 3(\Delta x)^2 + 12 - 12 - 12}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{12\Delta x + 3(\Delta x)^2}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} (12 + 3\Delta x)$$

$$= 12$$

2. ใช้สูตร (3.1.8) จะได้ว่า

$$f'(2) = \lim_{x \to 2} \frac{f(x) - f(2)}{x - 2}$$

$$= \lim_{x \to 2} \frac{(3x^2 + 12) - 24}{x - 2}$$

$$= \lim_{x \to 2} \frac{3x^2 - 12}{x - 2}$$

$$= 3 \lim_{x \to 2} \frac{(x - 2)(x + 2)}{x - 2}$$

$$= 3 \lim_{x \to 2} (x + 2)$$

$$= 12$$

3. เพราะว่า (จากตัวอย่างที่ 3.1.3)

$$f'(x) = 6x$$

$$\therefore \quad f'(2) = 12$$

Ans

ถ้าฟังก์ชัน f ถูกกำหนดโดย สมการ $y = f(x)$ จะได้

$$\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x)$$

ถ้าใช้สัญลักษณ์ $\frac{dy}{dx}$ แทน $f'(x)$ จะได้สูตร (3.1.4) คือ

$$\frac{dy}{dx} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

ตัวอย่างที่ 3.1.5 ให้ $y = \frac{2 + x}{3 - x}$ จงหา $\frac{dy}{dx}$

วิธีทำ

$$\frac{dy}{dx} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{(2 + x + \Delta x) / (3 - x - \Delta x) - (2 + x) / (3 - x)}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{(3 - x)(2 + x + \Delta x) - (2 + x)(3 - x - \Delta x)}{\Delta x (3 - x - \Delta x)(3 - x)}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{(6 + x - x^2 + 3\Delta x - x\Delta x) - (6 + x - x^2 - 2\Delta x - x\Delta x)}{\Delta x(3 - x - \Delta x)(3 - x)}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{5\Delta x}{\Delta x (3 - x - \Delta x)(3 - x)}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{5}{(3 - x - \Delta x)(3 - x)}$$

$$= \frac{5}{(3 - x)^2}$$ Ans

ตัวอย่างที่ 3.1.6 ให้ $f(x) = \sqrt{x - 3}$ จงหา $f'(x)$

วิธีทำ

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\sqrt{(x + \Delta x) - 3} - \sqrt{x - 3}}{\Delta x}$$

คูณเศษและส่วนด้วย $\left(\sqrt{(x + \Delta x) - 3} + \sqrt{x - 3}\right)$ จะได้

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{(\sqrt{x + \Delta x - 3} - \sqrt{x - 3})(\sqrt{x + \Delta x - 3} + \sqrt{x - 3})}{\Delta x(\sqrt{x + \Delta x - 3} + \sqrt{x - 3})}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{x + \Delta x - 3 - (x - 3)}{\Delta x(\sqrt{x + \Delta x - 3} + \sqrt{x - 3})}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta x}{\Delta x(\sqrt{x + \Delta x - 3} + \sqrt{x - 3})}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{1}{\sqrt{x + \Delta x - 3} + \sqrt{x - 3}}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{x - 3} + \sqrt{x - 3}}$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{x - 3}}$$ Ans

ตัวอย่างที่ 3.1.7 ให้ $f(x) = x^{2/3}$ จงหา $f'(x)$ และแสดงว่า $f'(0)$ หาค่าไม่ได้ แม้ว่า f จะต่อเนื่องที่ศูนย์ จงเขียนกราฟของ f ด้วย

วิธีทำ

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{(x + \Delta x)^{2/3} - x^{2/3}}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\left((x+\Delta x)^{2/3} - x^{2/3}\right)\left((x+\Delta x)^{4/3} + (x+\Delta x)^{2/3}x^{2/3} + x^{4/3}\right)}{\Delta x\left((x+\Delta x)^{4/3} + (x+\Delta x)^{2/3}x^{2/3} + x^{4/3}\right)}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{(x+\Delta x)^2 - x^2}{\Delta x\left((x+\Delta x)^{4/3} + (x+\Delta x)^{2/3}x^{2/3} + x^{4/3}\right)}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{x^2 + 2x(\Delta x) + (\Delta x)^2 - x^2}{\Delta x\left((x+\Delta x)^{4/3} + (x+\Delta x)^{2/3}x^{2/3} + x^{4/3}\right)}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{2x(\Delta x) + (\Delta x)^2}{\Delta x\left((x+\Delta x)^{4/3} + (x+\Delta x)^{2/3}x^{2/3} + x^{4/3}\right)}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{2x + \Delta x}{(x+\Delta x)^{4/3} + (x+\Delta x)^{2/3}x^{2/3} + x^{4/3}}$$

$$= \frac{2x}{x^{4/3} + x^{2/3}x^{2/3} + x^{4/3}}$$

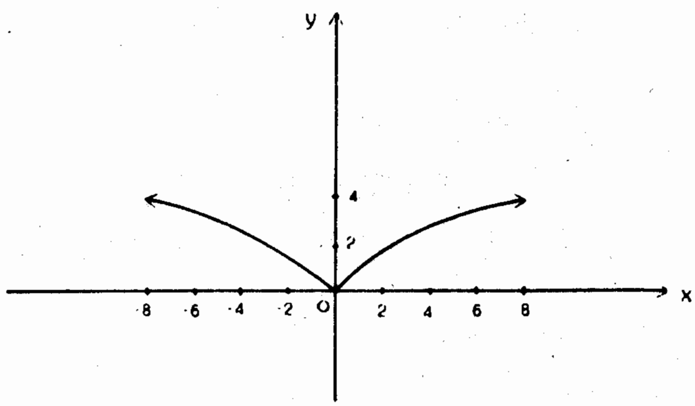
$$= \frac{2x}{3x^{4/3}}$$

$$= \frac{2}{3x^{1/3}}$$

จะสังเกตได้ว่า $f'(0)$ หาค่าไม่ได้ เพราะว่า $\frac{2}{3x^{1/3}}$ หาค่าไม่ได้ เมื่อ $x = 0$

แต่ฟังก์ชัน f ต่อเนื่องที่ 0 เพราะว่า

$$\lim_{x \to 0} f(x) = \lim_{x \to 0} x^{2/3} = 0 = f(0)$$



รูป 3.1.4

ตัวอย่างนี้แสดงให้เห็นชัดเจนได้โดยใช้สูตร (3.1.5) นั่นคือ หาค่า

$$\lim_{\Delta x \to 0^+} \frac{f(x_1 + \Delta x) - f(x_1)}{\Delta x} \quad \text{ที่ } x_1 = 0$$

ซึ่งได้ว่า เมื่อ $\Delta x \to 0$ ทางบวก

$$\lim_{\Delta x \to 0^+} \frac{f(0 + \Delta x) - f(0)}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0^+} \frac{(\Delta x)^{2/3} - 0}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0^+} \frac{1}{(\Delta x)^{1/3}}$$

$$= +\infty$$

หรือ เมื่อ $\Delta x \to 0$ ทางลบ

$$\lim_{\Delta x \to 0^-} \frac{f(0 + \Delta x) - f(0)}{\Delta x} = -\infty$$

จึงสรุปว่า เส้นสัมผัสกราฟของ f ที่จุดกำเนิด คือ แกน y (ดูรูป 3.1.4)

จากตัวอย่างนี้ แสดงว่า $f'(x)$ สามารถหาค่าได้สำหรับบางค่าของ x ในโดเมนของ f แต่หาค่าไม่ได้สำหรับบางค่า x ในโดเมนของ f ซึ่งมีนิยามดังต่อไปนี้

นิยาม 3.1.3 ฟังก์ชัน f กล่าวว่า มีอนุพันธ์ (differentiable) ที่ x_1 ถ้า $f'(x_1)$ สามารถหาค่าได้

จะเห็นว่าโดยใช้ นิยาม 3.1.3 ฟังก์ชันของตัวอย่างที่ 3.1.7 มีอนุพันธ์ที่ทุก ๆ จุด ยกเว้น 0

นิยาม 3.1.4 ฟังก์ชันใด ๆ จะกล่าวว่า หาอนุพันธ์ได้ ถ้ามีอนุพันธ์ที่ทุก ๆ จุด ในโดเมนของฟังก์ชันนั้น

จะเห็นได้ว่า ในตัวอย่างที่ 3.1.3 ฟังก์ชัน f ถูกกำหนดโดย $f(x) = 3x^2 + 12$ และโดเมนของ f คือ เซ็ตของจำนวนจริง เพราะว่า $f'(x) = 6x$ และ 6x หาค่าได้สำหรับทุก ๆ จำนวนจริง นั่นคือ f เป็นฟังก์ชันที่หาอนุพันธ์ได้

ในตัวอย่างต่อไป จะแสดงให้เห็นว่า ฟังก์ชันค่าสัมบูรณ์ (absolute value function) หาอนุพันธ์ไม่ได้ที่ 0 และกราฟของฟังก์ชันไม่มีเส้นสัมผัสที่จุดกำเนิด (จุดที่ $x = 0$)

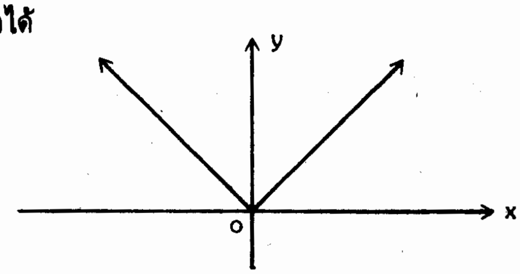
ตัวอย่าง 3.1.8 จงแสดงให้เห็นว่า $f(x) = |x|$ ไม่มีอนุพันธ์ที่จุดกำเนิด

วิธีทำ กราฟของฟังก์ชันนี้มีลักษณะดังรูป 3.1.5

จากสูตร (3.1.5)

$$f'(0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(0 + \Delta x) - f(0)}{\Delta x}$$

ถ้าลิมิตนี้หาค่าได้



รูป 3.1.5

เพราะว่า $f(0 + \Delta x) = |\Delta x|$

และ $f(0) = 0$

จะได้ว่า

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(0 + \Delta x) - f(0)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{|\Delta x|}{\Delta x}$$

เพราะว่า $|\Delta x| = \Delta x$ ถ้า $\Delta x > 0$

และ $|\Delta x| = -\Delta x$ ถ้า $\Delta x < 0$

ดังนั้น ต้องพิจารณาลิมิตข้างเดียว (one-side limit) ที่ 0 นั่นคือ

$$\begin{aligned} \lim_{\Delta x \to 0^+} \frac{|\Delta x|}{\Delta x} &= \lim_{\Delta x \to 0^+} \frac{\Delta x}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x \to 0^+} 1 \\ &= 1 \end{aligned}$$

และ

$$\begin{aligned} \lim_{\Delta x \to 0^-} \frac{|\Delta x|}{\Delta x} &= \lim_{\Delta x \to 0^-} \frac{-\Delta x}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x \to 0^-} -1 \\ &= -1 \end{aligned}$$

เพราะว่า $\lim_{\Delta x \to 0^+} \frac{|\Delta x|}{\Delta x} \neq \lim_{\Delta x \to 0^-} \frac{|\Delta x|}{\Delta x}$

แสดงว่าไม่มีลิมิตสองข้าง (two-side limit) ของ $\lim_{\Delta x \to 0} \frac{|\Delta x|}{\Delta x}$

ดังนั้น จึงกล่าวว่าหาอนุพันธ์ $f'(0)$ ไม่ได้ และ f ไม่มีอนุพันธ์ที่ 0

เพราะว่า $f'(0)$ หาค่าไม่ได้ และไม่เป็น $+\infty$ หรือ $-\infty$ ดังนั้น จึงไม่มีเส้นสัมผัสที่จุดกำเนิดสำหรับกราฟของฟังก์ชันค่าสัมบูรณ์

ในตัวอย่างต่อไป จะให้แนวทางที่แสดงให้เห็นถึงประโยชน์ของความชันของเส้นสัมผัสกราฟของฟังก์ชันที่ช่วยในการแก้ปัญหาทางธุรกิจ

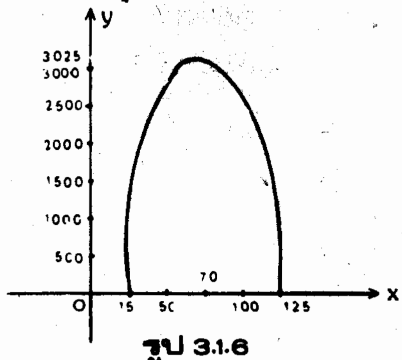
ตัวอย่างที่ 3.1.9 บริษัทผลิตถ้วยแก้วแห่งหนึ่ง สามารถผลิตถ้วยแก้วได้ในราคา 15 บาท ต่อถ้วย ประมาณว่า ถ้าขายถ้วยแก้วถ้วยละ x บาท จะขายถ้วยแก้วได้เป็นจำนวน $125-x$ ถ้วยต่อสัปดาห์ จงหาว่าถ้าบริษัทต้องการให้มีกำไรสูงสุดสำหรับการขายใน 1 สัปดาห์ บริษัทควรจะขายถ้วยแก้วถ้วยละเท่าใด ถ้ากำหนดฟังก์ชันกำไรต่อสัปดาห์เป็น

$$P(x) = (125-x)(x-15) \qquad (3.1.9)$$

หรือ

$$P(x) = -x^2 + 140x - 1875 \qquad (3.1.10)$$

วิธีทำ จากสมการ (3.1.9), $P(15) = 0$ และ $P(125) = 0$ และ $P(x) > 0$ เมื่อ x อยู่ในช่วง (15, 125) กราฟของ P แสดงในรูป 3.1.6



รูป 3.1.6

จากรูป 3.1.6 ปรากฏว่าถ้าจะให้ได้กำไรสูงสุด หรือ P(x) มีค่าสูงสุด ค่าสูงสุดนี้ต้องอยู่ในช่วง (15, 125) ซึ่งในบทต่อไป จะได้เห็นว่า ถ้าฟังก์ชัน Polynomial P มีค่าสูงสุดที่ x_1 บนช่วงเปิดแล้ว ความชัน $P'(x_1)$ ของเส้นสัมผัสต้องเท่ากับศูนย์ ตอนนี้หาค่า $P'(x)$ สำหรับฟังก์ชัน P ซึ่งกำหนดโดยสมการ (3.1.10)

ใช้สูตร (3.1.4)

$$
\begin{aligned}
P'(x) &= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{P(x + \Delta x) - P(x)}{\Delta x} \\
&= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{[-(x + \Delta x)^2 + 140(x + \Delta x) - 1875] - (-x^2 + 140x - 1875)}{\Delta x} \\
&= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{-x^2 - 2x\Delta x - (\Delta x)^2 + 140x + 140\Delta x - 1875 + x^2 - 140x + 1875}{\Delta x} \\
&= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{-2x\Delta x - (\Delta x)^2 + 140\Delta x}{\Delta x} \\
&= \lim_{\Delta x \to 0} (-2x - \Delta x + 140) \\
&= -2x + 140
\end{aligned}
$$

ในการหาค่า x สำหรับความชันของเส้นสัมผัสเท่ากับศูนย์

ให้ $P'(x) = 0$

$$
\begin{aligned}
\therefore \quad -2x + 140 &= 0 \\
-2x &= -140 \\
x &= 70
\end{aligned}
$$

ดังนั้น สรุปได้ว่า ถ้าต้องการขายถ้วยแก้ว ต่อสัปดาห์ให้ได้กำไรสูงสุด บริษัทผู้ผลิตควรขายในราคาถ้วยละ 70 บาท ซึ่งจะทำให้กำไรสูงสุด (คิดจากฟังก์ชันกำไร) คือ

$P(70) = 3025$ บาท

แบบฝึกหัด 3.1

จาก ข้อ 1 ถึง ข้อ 5 จงหาความชันของเส้นสัมผัสกับกราฟที่จุด (x_1, y_1) สร้างตาราง สำหรับค่า x, y และ m ที่จุดต่าง ๆ บนกราฟ เขียนเส้นกราฟ และเส้นที่มีความชันเป็นศูนย์

1. $y = 9 - x^2$
2. $y = x^2 - 6x + 9$
3. $y = 7 - 6x - x^2$
4. $y = x^3 - 3x$
5. $y = 4x^3 - 13x^2 + 4x - 3$

จาก ข้อ 6 ถึง ข้อ 10 จงหาสมการของเส้นสัมผัสกับเส้นโค้งที่กำหนดให้ ณ จุดที่กำหนดให้

6. $y = x^2 - 4x - 5$, $(-2, 7)$
7. $y = \frac{1}{8}x^3$, $(4, 8)$
8. $y = \sqrt{9 - 4x}$, $(-4, 5)$
9. $y = \frac{6}{x}$, $(3, 2)$
10. $y = \sqrt[3]{x}$, $(8, 2)$

จากข้อ 11 ถึง ข้อ 15 จงหา $f'(x)$ สำหรับฟังก์ชันที่กำหนดให้ โดยใช้สูตร (3.1.4)

11. $f(x) = 4x^2 + 5x + 3$
12. $f(x) = x^3$
13. $f(x) = \sqrt{x}$
14. $f(x) = \sqrt{3x + 5}$
15. $f(x) = \frac{1}{x + 1}$

จาก ข้อ 16 ถึง ข้อ 19 จงหา $f'(a)$ สำหรับค่า a ที่กำหนดให้ โดยใช้สูตร (3.1.5)

16. $f(x) = 1 - x^2$, $a = 3$
17. $f(x) = \frac{4}{5x}$, $a = 2$
18. $f(x) = \frac{2}{x^3}$, $a = 6$
19. $f(x) = \sqrt{x^2 - 9}$, $a = 5$

จาก ข้อ 20 ถึง ข้อ 24 จงหา $f'(a)$ สำหรับค่า a ที่กำหนดให้ โดยใช้สูตร (3.1.8)

20. $f(x) = 3x + 2$, $a = -3$

21. $f(x) = x^2 - x + 4$, $a = 4$

22. $f(x) = 2 - x^3$, $a = -2$

23. $f(x) = \sqrt{1 + 9x}$, $a = 7$

24. $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{2x + 3}}$, $a = 3$

จาก ข้อ 25 ถึง ข้อ 26 จงหา $\dfrac{dy}{dx}$

25 $y = x^2 + x^{-2}$

26. $y = \dfrac{1}{x^2} - x$

3.2 การหาอนุพันธ์ และความต่อเนื่อง Differentiability and Continuity

ฟังก์ชันของตัวอย่างที่ 3.1.7 และตัวอย่างที่ 3.1.8 ต่อเนื่องที่ศูนย์ แต่ไม่สามารถหาอนุพันธ์ได้ที่ศูนย์ นั่นคือ ฟังก์ชันที่ต่อเนื่องที่จุด ๆ หนึ่ง ไม่จำเป็นต้องหาอนุพันธ์ได้ที่จุดนั้น อย่างไรก็ตาม ฟังก์ชันที่หาอนุพันธ์ได้จะต้องเป็นฟังก์ชันต่อเนื่องด้วย ดังทฤษฎีที่ 3.2.1

ทฤษฎีที่ 3.2.1 ถ้า f เป็นฟังก์ชันซึ่งหาอนุพันธ์ได้ที่ x_1 แล้ว f จะต่อเนื่องที่ x_1 ด้วย

พิสูจน์ การที่จะพิสูจน์ว่า f ต่อเนื่องที่ x_1 เราต้องแสดงให้เห็นว่า f คล้องตามเงื่อนไข 3 ข้อ นั่นคือ

1. $f(x_1)$ หาค่าได้
2. $\lim\limits_{x \to x_1} f(x)$ หาค่าได้
3. $\lim\limits_{x \to x_1} f(x) = f(x_1)$

จากสมมุติฐาน f หาอนุพันธ์ได้ที่ x_1

นั่นคือ $f'(x_1)$ หาค่าได้

เพราะว่า จากสูตร (3.1.8)

$$f'(x_1) = \lim_{x \to x_1} \frac{f(x) - f(x_1)}{x - x_1} \tag{3.2.1}$$

สรุปว่า $f(x_1)$ ต้องหาค่าได้ ถ้าไม่เช่นนั้นแล้ว ลิมิตข้างบนนี้จะไม่มีความหมาย

นั่นคือ f คล้องตามเงื่อนไขข้อ 1

พิจารณา

$$\lim_{x \to x_1} [f(x) - f(x_1)]$$

จะเห็นว่า

$$\lim_{x \to x_1} [f(x) - f(x_1)] = \lim_{x \to x_1} \left[(x-x_1) \frac{f(x) - f(x_1)}{x - x_1}\right] \tag{3.2.2}$$

เพราะว่า $\lim\limits_{x \to x_1} (x - x_1) = 0$

และ $\lim\limits_{x \to x_1} \dfrac{f(x) - f(x_1)}{x - x_1} = f'(x_1)$

โดยใช้ทฤษฎีลิมิต ของผลคูณกับข้างขวาของสมการ (3.2.2) ได้

$$\begin{aligned}\lim_{x \to x_1} [f(x) - f(x_1)] &= \lim_{x \to x_1} (x-x_1) \lim_{x \to x_1} \frac{f(x) - f(x_1)}{x - x_1} \\ &= 0 \cdot f'(x_1)\end{aligned}$$

ดังนั้น

$$\lim_{x \to x_1} [f(x) - f(x_1)] = 0$$

และเนื่องจาก

$$\begin{aligned} \lim_{x \to x_1} f(x) &= \lim_{x \to x_1} [f(x) - f(x_1) + f(x_1)] \\ &= \lim_{x \to x_1} [f(x) - f(x_1)] + \lim_{x \to x_1} f(x_1) \\ &= 0 + f(x_1) \end{aligned}$$

ดังนั้น

$$\lim_{x \to x_1} f(x) = f(x_1) \qquad (3.2.3)$$

จากสมการ (3.2.3) สรุปได้ว่า f คล้องตามเงื่อนไขข้อ 2 กับ ข้อ 3

$\therefore$ f ต่อเนื่องที่ x_1

นิยาม 3.2.1 ถ้า f เป็นฟังก์ชัน ซึ่งกำหนดที่ x_1 แล้ว อนุพันธ์จากทางขวามือของ f ที่ x_1 ซึ่งเขียนแทนด้วย $f'_+(x_1)$ คือ

$$f'_+(x_1) = \lim_{\Delta x \to 0^+} \frac{f(x_1 + \Delta x) - f(x_1)}{\Delta x} \qquad (3.2.4)$$

หรือ

$$f'_+(x_1) = \lim_{x \to x_1^+} \frac{f(x) - f(x_1)}{x - x_1} \qquad (3.2.5)$$

ถ้าลิมิตนี้หาค่าได้

นิยาม 3.2.2 ถ้า f เป็นฟังก์ชันซึ่งกำหนดที่ x_1 แล้ว อนุพันธ์จากทางซ้ายมือของ f ที่ x_1 ซึ่งเขียนแทนด้วย $f'_-(x_1)$ คือ

$$f'_-(x_1) = \lim_{\Delta x \to 0^-} \frac{f(x_1 + \Delta x) - f(x_1)}{\Delta x} \qquad (3.2.6)$$

หรือ

$$f'_-(x_1) = \lim_{x \to x_1^-} \frac{f(x) - f(x_1)}{x - x_1} \qquad (3.2.7)$$

ถ้าลิมิตนี้หาค่าได้

ตัวอย่างที่ 3.2.1 ให้ f เป็นฟังก์ชันกำหนดโดย

$$f(x) = \begin{cases} 2x - 1 & \text{ถ้า } x < 3 \\ 8 - x & \text{ถ้า } 3 \le x \end{cases}$$

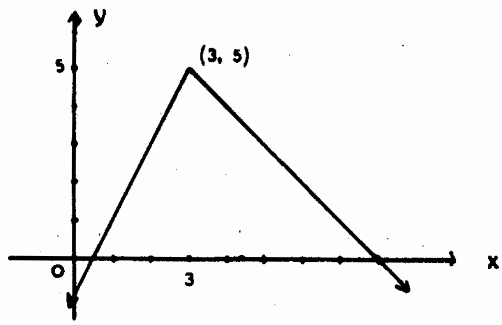
ก. จงเขียนกราฟของ f

ข. จงพิสูจน์ว่า f ต่อเนื่องที่ 3

ค. จงหา $f'_-(3)$ และ $f'_+(3)$

ง. f มีอนุพันธ์ที่ $x = 3$ หรือไม่

วิธีทำ ก.



ข. การพิสูจน์ว่า f ต่อเนื่องที่ 3 จะต้องตรวจสอบว่า f คล้องตามเงื่อนไข 3 ข้อ สำหรับความต่อเนื่องที่จุด ๆ หนึ่ง จะเห็นว่า

1. $f(3) = 5$

2. $$\lim_{x \to 3^-} f(x) = \lim_{x \to 3^-} (2x - 1)$$
$$= 5$$
$$\lim_{x \to 3^+} f(x) = \lim_{x \to 3^+} (8 - x)$$
$$= 5$$

ดังนั้น

$$\lim_{x \to 3} f(x) = 5$$

และได้

3. $$\lim_{x \to 3} f(x) = f(3)$$

เพราะว่า เงื่อนไข 1, 2, 3 เป็นจริงที่ $x = 3$

เพราะฉะนั้น f ต่อเนื่องที่ $x = 3$

ค. $$f'_-(3) = \lim_{\triangle x \to 0^-} \frac{f(3 + \triangle x) - f(3)}{\triangle x}$$
$$= \lim_{\triangle x \to 0^-} \frac{[2(3 + \triangle x) - 1] - 5}{\triangle x}$$
$$= \lim_{\triangle x \to 0^-} \frac{6 + 2\triangle x - 6}{\triangle x}$$
$$= \lim_{\triangle x \to 0^-} \frac{2\triangle x}{\triangle x}$$
$$= \lim_{\triangle x \to 0^-} 2$$
$$= 2$$

$$f'_+(3) = \lim_{\triangle x \to 0^+} \frac{f(3 + \triangle x) - f(3)}{\triangle x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0^+} \frac{[8 - (3 + \Delta x)] - 5}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0^+} \frac{8 - 3 - \Delta x - 5}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0^+} \frac{-\Delta x}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0^+} (-1)$$

$$= -1$$

ง. เพราะว่า

$$\lim_{\Delta x \to 0^-} \frac{f(3 + \Delta x) - f(3)}{\Delta x} \neq \lim_{\Delta x \to 0^+} \frac{f(3 + \Delta x) - f(3)}{\Delta x}$$

เราจึงสรุปว่า $\lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(3 + \Delta x) - f(3)}{\Delta x}$ หาค่าไม่ได้

นั่นคือ f ไม่มีอนุพันธ์ที่ $x = 3$

แต่หาอนุพันธ์จากทางซ้ายมือ และอนุพันธ์จากทางขวามือของ $x = 3$ ได้

ฟังก์ชันของตัวอย่างที่ 3.2.1 ทำให้เห็นได้ว่า สำหรับฟังก์ชันซึ่งต่อเนื่องที่จุด ๆ หนึ่ง อาจไม่มีอนุพันธ์ที่จุดนั้นได้ ในตัวอย่างประยุกต์ต่อไปนี้ จะแสดงให้เห็นถึงฟังก์ชันซึ่งต่อเนื่องที่จุด ๆ หนึ่ง แต่ไม่สามารถหาอนุพันธ์ได้ที่จุดนั้น

ตัวอย่างที่ 3.2.2 ถ้า x เป็นจำนวนที่นั่งในร้านกาแฟแห่งหนึ่ง $P(x)$ เป็นจำนวนเงิน ซึ่งได้กำไรในแต่ละวัน และ

$$P(x) = \begin{cases} 8x & \text{ถ้า } 40 \leq x \leq 80 \\ 11.20x - 0.04x^2 & \text{ถ้า } 80 < x \leq 280 \end{cases}$$

จงพิจารณาความต่อเนื่อง และอนุพันธ์ที่ $x = 80$

วิธีทำ

เพราะว่า $P(80) = 8(80)$

$= 640$

$$\lim_{x \to 80^-} P(x) = \lim_{x \to 80^-} 8x$$

$$= 640$$

และ $\lim_{x \to 80^+} P(x) = \lim_{x \to 80^+} (11.20x - 0.04x^2)$

$$= 640$$

เพราะว่า $\lim_{x \to 80^-} P(x) = \lim_{x \to 80^+} P(x)$

$$= 640$$

นั่นคือ ลิมิตทั้งสองข้างของ P เท่ากัน

และ $\lim_{x \to 80} P(x) = 640 = P(80)$

ดังนั้น P ต่อเนื่องที่ 80

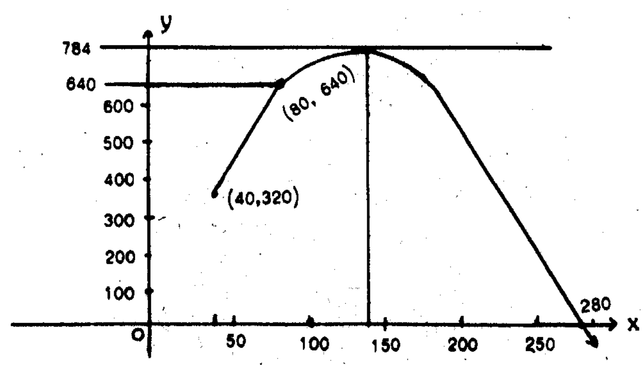
เนื่องจาก

$$
\begin{aligned}
P'_-(80) &= \lim_{\Delta x \to 0^-} \frac{P(80 + \Delta x) - P(80)}{\Delta x} \\
&= \lim_{\Delta x \to 0^-} \frac{[8(80 + \Delta x)] - 640}{\Delta x} \\
&= \lim_{\Delta x \to 0^-} \frac{640 + 8\Delta x - 640}{\Delta x} \\
&= \lim_{\Delta x \to 0^-} \frac{8\Delta x}{\Delta x} \\
&= \lim_{\Delta x \to 0^-} 8 \\
&= 8
\end{aligned}
$$

และ

$$
\begin{aligned}
P'_+(80) &= \lim_{\Delta x \to 0^+} \frac{P(80 + \Delta x) - P(80)}{\Delta x} \\
&= \lim_{\Delta x \to 0^+} \frac{[11.20(80 + \Delta x) - 0.04(80 + \Delta x)^2] - 640}{\Delta x} \\
&= \lim_{\Delta x \to 0^+} \frac{[896 + 11.20\Delta x - 256 - 6.40\Delta x - 0.04(\Delta x)^2] - 640}{\Delta x} \\
&= \lim_{\Delta x \to 0^+} \frac{4.80\Delta x - 0.04(\Delta x)^2}{\Delta x} \\
&= \lim_{\Delta x \to 0^+} (4.80 - 0.04\Delta x) \\
&= 4.80
\end{aligned}
$$

เพราะว่า $P'_-(80) \neq P'_+(80)$ ดังนั้น P ไม่มีอนุพันธ์ที่ x = 80 กราฟของ P มีรูปดังต่อไปนี้



แบบฝึกหัด 3.2

ในแบบฝึกหัด ข้อ 1 ถึง ข้อ 7

ก. จงพิสูจน์ว่า f ต่อเนื่องที่ x_1

ข. จงหา $f'_-(x_1)$ และ $f'_+(x_1)$

ค. จงหาอนุพันธ์ของ f ที่ $x = x_1$

1. $f(x) = \begin{cases} x + 2 & \text{ถ้า } x \leq -4 \\ -x - 6 & \text{ถ้า } x > -4 \end{cases}$

   $x_1 = -4$

2. $f(x) = |x - 3|, \quad x_1 = 3$

3. $f(x) = \begin{cases} -1 & \text{ถ้า } x < 0 \\ x - 1 & \text{ถ้า } x \geq 0 \end{cases}$

   $x_1 = 0$

4. $f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{ถ้า } x \leq 0 \\ -x^2 & \text{ถ้า } x > 0 \end{cases}$

   $x_1 = 0$

5. $f(x) = \begin{cases} \sqrt{1 - x} & \text{ถ้า } x < 1 \\ (1 - x)^2 & \text{ถ้า } x \geq 1 \end{cases}$

   $x_1 = 1$

6. $f(x) = \sqrt[3]{x + 1}, \quad x_1 = -1$

7. $f(x) = \begin{cases} 5 - 6x & \text{ถ้า } x \leq 3 \\ -4 - x^2 & \text{ถ้า } x > 3 \end{cases}$

   $x_1 = 3$

8. กำหนดให้ $f(x) = x^{3/2}$ จงพิสูจน์ว่า f ต่อเนื่องจากทางขวามือที่ 0 และจงพิสูจน์ว่า $f'_+(0)$ หาค่าได้

9. กำหนดให้ $f(x) = \sqrt{x - 4}$ จงพิสูจน์ว่า f ต่อเนื่องจากทางขวามือที่ 4 และจงพิสูจน์ว่า $f'_+(4)$ หาค่าไม่ได้

3.3 ทฤษฎีเกี่ยวกับการหาอนุพันธ์ของฟังก์ชันพีชคณิต
Some theorems on differentiation of algebraic functions

การกระทำเพื่อหาอนุพันธ์ของฟังก์ชัน เรียกว่า การหาอนุพันธ์ซึ่งสามารถหาได้โดยใช้นิยามของอนุพันธ์ในหัวข้อ 3.1 แต่วิธีการนี้ค่อนข้างยาว จึงนำบางทฤษฎีซึ่งทำให้สามารถหาอนุพันธ์ของฟังก์ชันได้ง่ายยิ่งขึ้นมาใช้ ทฤษฎีเหล่านี้พิสูจน์ด้วยการใช้นิยามของอนุพันธ์ หลังจากพิสูจน์แต่ละทฤษฎีแล้ว ก็จะมีสูตรสำหรับการหาอนุพันธ์ในแต่ละทฤษฎี

ทฤษฎีที่ 3.3.1. ถ้า c เป็นตัวคงที่ และ ถ้า $f(x) = c$ สำหรับทุก ๆ ค่า x แล้ว

$$f'(x) = 0$$

พิสูจน์

$$\begin{aligned}
f'(x) &= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} \\
&= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{c - c}{\Delta x} \\
&= \lim_{\Delta x \to 0} 0 \\
&= 0 \\
\frac{d}{dx}(c) &= 0
\end{aligned}$$

อนุพันธ์ของตัวคงที่มีค่าเท่ากับศูนย์

เช่น ถ้า $f(x) = 5$ แล้ว

$f'(x) = 0$

ทฤษฎีที่ 3.3.2 ถ้า n เป็นจำนวนจริงใด ๆ และ ถ้า $f(x) = x^n$ แล้ว $f'(x) = nx^{n-1}$

พิสูจน์

ถ้า $f(x) = x^n$ เมื่อ n เป็นจำนวนเต็มบวกใด ๆ แล้ว

$$\begin{aligned}
f'(x) &= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} \\
&= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{(x+\Delta x)^n - x^n}{\Delta x}
\end{aligned}$$

กระจาย $(x+\Delta x)^n$ โดยใช้ทฤษฎีบททวินาม (binomial theorem) จะได้

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{[x^n + nx^{n-1}\Delta x + \frac{n(n-1)}{2!} x^{n-2}(\Delta x)^2 + \dots + nx(\Delta x)^{n-1} + (\Delta x)^n] - x^n}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{nx^{n-1}\Delta x + \frac{n(n-1)}{2!} x^{n-2}(\Delta x)^2 + \ldots + nx(\Delta x)^{n-1} + (\Delta x)^n}{\Delta x}$$

เอา Δx หารทั้งเศษและส่วน ได้

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} [nx^{n-1} + \frac{n(n-1)}{2!} x^{n-2}(\Delta x) + \ldots + nx(\Delta x)^{n-2} + (\Delta x)^{n-1}]$$

ทุก ๆ เทอมยกเว้นเทอมแรกจะคูณด้วย Δx

นั่นคือ ทุก ๆ เทอมยกเว้นเทอมแรกจะเข้าใกล้ศูนย์ในขณะที่ Δx เข้าใกล้ศูนย์

ดังนั้น จึงได้

$$f'(x) = nx^{n-1}$$

นั่นคือ $\frac{d}{dx}(x^n) = nx^{n-1}$

ตัวอย่าง เช่น

ก. ถ้า $f(x) = x^8$ แล้ว

$$f'(x) = 8x^7$$

ข. ถ้า $f(x) = x$ แล้ว

$$f'(x) = 1 \times x^0$$

$$= 1 \times 1$$

$$= 1$$

ค. ถ้า $f(x) = \sqrt{x}$ แล้ว

$$f(x) = x^{1/2}$$

ดังนั้น จะได้ว่า

$$f'(x) = \frac{1}{2}x^{-1/2}$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

ทฤษฎีที่ 3.3.3 ถ้า f เป็นฟังก์ชัน c เป็นตัวคงที่ และ g เป็นฟังก์ชันซึ่งกำหนดโดย

$$g(x) = cf(x)$$

และ ถ้า $f'(x)$ หาค่าได้

แล้ว $g'(x) = cf'(x)$

พิสูจน์

เพราะว่า $g'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{g(x+\Delta x) - g(x)}{\Delta x}$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{cf(x+\Delta x) - cf(x)}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} c\left[\frac{f(x) + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}\right]$$

$$= \quad c \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

$$= \quad c \quad f'(x)$$

ดังนั้น $$\frac{d}{dx} [\, cf(x)\,] = c \frac{d}{dx} f(x)$$

กล่าวโดยสรุป อนุพันธ์ของตัวคงที่คูณกับฟังก์ชัน คือ ตัวคงที่คูณกับอนุพันธ์ของฟังก์ชัน ถ้าอนุพันธ์นั้นหาค่าได้

เมื่อรวมทฤษฎีที่ 3.3.2 และ ทฤษฎีที่ 3.3.3 เข้าด้วยกัน จะได้ว่า

ถ้า $f(x) = cx^n$ เมื่อ n เป็นจำนวนเต็มบวก และ c เป็นตัวคงที่ แล้ว

$$f'(x) = cnx^{n-1}$$

หรือ $$\frac{d}{dx} [cx^n] = cnx^{n-1}$$

ตัวอย่างเช่น

ก. ถ้า $f(x) = 5x^7$ แล้ว

$$f'(x) = 5 \times 7x^6$$

$$= 35x^6$$

ข. ถ้า $f(x) = 9x^{2/3}$ แล้ว

$$f'(x) = 9 \times \frac{2}{3} x^{-1/3}$$

$$= 6 \frac{1}{x^{1/3}}$$

$$= \frac{6}{\sqrt[3]{x}}$$

ทฤษฎีที่ 3.3.4 ถ้า f และ g เป็นฟังก์ชัน และ ถ้า h เป็นฟังก์ชันที่กำหนดโดย

$$h(x) = f(x) + g(x)$$

ถ้า $f'(x)$ และ $g'(x)$ หาค่าได้ แล้ว

$$h'(x) = f'(x) + g'(x)$$

พิสูจน์

เพราะว่า $$h'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{h(x + \Delta x) - h(x)}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{[f(x + \Delta x) + g(x + \Delta x)] - [f(x) + g(x)]}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{[f(x + \Delta x) - f(x)] + [g(x + \Delta x) - g(x)]}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} + \lim_{\Delta x \to 0} \frac{g(x + \Delta x) - g(x)}{\Delta x}$$

$$= \quad f'(x) + g'(x)$$

ดังนั้น $\dfrac{d}{dx}[f(x) + g(x)] = \dfrac{d}{dx}[f(x)] + \dfrac{d}{dx}[g(x)]$

กล่าวโดยสรุป อนุพันธ์ของผลบวกของ 2 ฟังก์ชัน คือ ผลบวกของอนุพันธ์ของ 2 ฟังก์ชันนั้น ถ้าอนุพันธ์ของ 2 ฟังก์ชันนั้นหาค่าได้

จากผลของทฤษฎีนี้ จะทำให้สามารถหาอนุพันธ์ของผลบวกของฟังก์ชันที่มีจำนวนที่นับได้ โดยใช้การอุปนัยทางคณิตศาสตร์ (mathematical induction) ซึ่งแสดงไว้ในทฤษฎีต่อไปนี้

ทฤษฎีที่ 3.3.5 อนุพันธ์ของผลบวกของฟังก์ชันที่มีจำนวนที่นับได้มีค่าเท่ากับ ผลบวกของอนุพันธ์ของฟังก์ชันเหล่านั้น ถ้าอนุพันธ์ของฟังก์ชันเหล่านั้นหาค่าได้

จากทฤษฎีนี้ จะสามารถหาอนุพันธ์ของฟังก์ชันพหุนามใด ๆ ได้โดยง่าย

ตัวอย่างที่ 3.3.1 ให้ $f(x) = 7x^4 - 2x^3 + 8x + 5$ จงหา $f'(x)$

วิธีทำ

$$f'(x) = \frac{d}{dx}(7x^4 - 2x^3 + 8x + 5)$$

$$= \frac{d}{dx}(7x^4) + \frac{d}{dx}(-2x^3) + \frac{d}{dx}(8x) + \frac{d}{dx}(5)$$

$$= 28x^3 - 6x^2 + 8$$

ทฤษฎีที่ 3.3.6 ถ้า f และ g เป็นฟังก์ชัน และถ้า h เป็นฟังก์ชันที่กำหนดโดย

$$h(x) = f(x)\,g(x)$$

และ $f'(x)$, $g'(x)$ หาค่าได้ แล้ว

$$h'(x) = f(x)\,g'(x) + g(x)\,f'(x)$$

พิสูจน์

$$h'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{h(x + \Delta x) - h(x)}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x)\,g(x + \Delta x) - f(x)\,g(x)}{\Delta x}$$

ลบและบวก $f(x + \Delta x)\,g(x)$ ในเทอมเศษ จะได้

$$h'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x)\,g(x+\Delta x) - f(x+\Delta x)\,g(x) + f(x+\Delta x)\,g(x) - f(x)\,g(x)}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0}\left[f(x + \Delta x)\,\frac{g(x + \Delta x) - g(x)}{\Delta x} + g(x)\,\frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}\right]$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0}\left[f(x + \Delta x)\left(\frac{g(x + \Delta x) - g(x)}{\Delta x}\right)\right]$$

$$+ \lim_{\Delta x \to 0} \left[g(x) \left(\frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} \right) \right]$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} f(x+\Delta x) \lim_{\Delta x \to 0} \frac{g(x+\Delta x) - g(x)}{\Delta x}$$

$$+ \lim_{\Delta x \to 0} g(x) \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

เพราะว่า f หาอนุพันธ์ได้ที่ x จากทฤษฎีที่ 3.2.1 f ต่อเนื่องที่ x ด้วย นั่นคือ

$$\lim_{\Delta x \to 0} f(x+\Delta x) = f(x) ,$$

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{g(x+\Delta x) - g(x)}{\Delta x} = g'(x) ,$$

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} = f'(x)$$

และ $\lim_{\Delta x \to 0} g(x) = g(x)$

ดังนั้น

$$h'(x) = f(x)\, g'(x) + g(x) f'(x)$$

$$\frac{d}{dx}\left[f(x)\, g(x)\right] = f(x) \frac{d}{dx}\left[g(x)\right] + g(x) \frac{d}{dx}\left[f(x)\right]$$

กล่าวโดยสรุป อนุพันธ์ของผลคูณของ 2 ฟังก์ชัน คือ ฟังก์ชันแรกคูณกับอนุพันธ์ของฟังก์ชันที่ 2 บวกกับ ฟังก์ชันที่ 2 คูณกับอนุพันธ์ของฟังก์ชันแรก ถ้าอนุพันธ์หาค่าได้

หรือ ดิฟผลคูณ = หน้าดิฟหลัง + หลังดิฟหน้า

ดิฟ หมายถึง การหาอนุพันธ์ ซึ่งย่อมาจาก differentiation

ตัวอย่างที่ 3.3.2 ให้ $h(x) = (2x^3 - 4x^2)(3x^5 + x^2)$ จงหา $h'(x)$

วิธีทำ

$$\begin{aligned} h'(x) &= (2x^3 - 4x^2)(15x^4 + 2x) + (3x^5 + x^2)(6x^2 - 8x) \\ &= (30x^7 - 60x^6 + 4x^4 - 8x^3) + (18x^7 - 24x^6 + 6x^4 - 8x^3) \\ &= 48x^7 - 84x^6 + 10x^4 - 16x^3 \end{aligned}$$

ในตัวอย่างที่ 3.3.2 ขอให้สังเกตว่า ถ้าคูณฟังก์ชันทั้ง 2 ก่อน แล้วจึงหาอนุพันธ์ ก็จะได้ผลเช่นเดียวกัน

ถ้าคูณฟังก์ชันทั้ง 2 ก่อน จะได้

$$h(x) = 6x^8 - 12x^7 + 2x^5 - 4x^4$$

ดังนั้น

$$h'(x) = 48x^7 - 84x^6 + 10x^4 - 16x^3$$

ทฤษฎีที่ 3.3.7 ถ้า f และ g เป็นฟังก์ชัน และ h เป็นฟังก์ชันที่ถูกกำหนดโดย

$$h(x) = \frac{f(x)}{g(x)} \text{ เมื่อ } g(x) \neq 0$$

ถ้า $f'(x)$ กับ $g'(x)$ หาค่าได้ แล้ว

$$h'(x) = \frac{g(x)\,f'(x) - f(x)\,g'(x)}{[g(x)]^2}$$

พิสูจน์

เพราะว่า

$$h'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{h(x+\Delta x) - h(x)}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\dfrac{f(x+\Delta x)}{g(x+\Delta x)} - \dfrac{f(x)}{g(x)}}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x)\,g(x) - f(x)\,g(x+\Delta x)}{\Delta x\,g(x)\,g(x+\Delta x)}$$

ลบและบวก $f(x)\,g(x)$ ในเทอมเศษ จะได้

$$h'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x)\,g(x) - f(x)\,g(x) - f(x)\,g(x+\Delta x) + f(x)\,g(x)}{\Delta x\,g(x)\,g(x+\Delta x)}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\left[g(x)\,\dfrac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}\right] - \left[f(x)\,\dfrac{g(x+\Delta x) - g(x)}{\Delta x}\right]}{g(x)\,g(x+\Delta x)}$$

$$= \frac{\lim\limits_{\Delta x \to 0} g(x) \cdot \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} - \lim\limits_{\Delta x \to 0} f(x) \cdot \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{g(x+\Delta x) - g(x)}{\Delta x}}{\lim\limits_{\Delta x \to 0} g(x) \cdot \lim\limits_{\Delta x \to 0} g(x+\Delta x)}$$

$$= \frac{g(x)\,f'(x) - f(x)\,g'(x)}{g(x)\,g(x)}$$

$$= \frac{g(x)\,f'(x) - f(x)\,g'(x)}{[g(x)]^2}$$

ดังนั้น

$$\frac{d}{dx}\left[\frac{f(x)}{g(x)}\right] = \left\{g(x)\,\frac{d}{dx}[f(x)] + f(x)\,\frac{d}{dx}[g(x)]\right\} \Big/ [g(x)]^2$$

กล่าวโดยสรุป อนุพันธ์ของผลหารของสองฟังก์ชัน คือ เศษส่วนที่มีส่วนเป็นตัวหารยกกำลังสอง และเศษเป็นตัวหารคูณกับอนุพันธ์ของตัวตั้ง ลบด้วย ตัวตั้งคูณกับอนุพันธ์ของตัวหาร ถ้าอนุพันธ์หาค่าได้

หรือ

$$\text{ดิฟเศษส่วน} = \frac{\text{ส่วนดิฟเศษ} - \text{เศษดิฟส่วน}}{\text{ส่วนยกกำลังสอง}}$$

ตัวอย่างที่ 3.3.3 ให้ $h(x) = \dfrac{2x^3 + 4}{x^2 - 4x + 1}$ จงหา $h'(x)$

วิธีทำ

$$h'(x) = \frac{(x^2 - 4x + 1)(6x^2) - (2x^3 + 4)(2x - 4)}{(x^2 - 4x + 1)^2}$$

$$= \frac{6x^4 - 24x^3 + 6x^2 - 4x^4 + 8x^3 - 8x + 16}{(x^2 - 4x + 1)^2}$$

$$= \frac{2x^4 - 16x^3 + 6x^2 - 8x + 16}{(x^2 - 4x + 1)^2}$$

โดยใช้ทฤษฎีที่ 3.3.7 กับ ทฤษฎีที่ 3.3.2 จะทำให้หาอนุพันธ์ของ $f(x)$ ในกรณีที่ x มีเลขยกกำลังเป็นจำนวนเต็มลบได้ ดังเช่น ถ้า $f(x) = x^{-n}$ เมื่อ $-n$ เป็นจำนวนเต็มลบ และ $x \neq 0$

เพราะว่า $-n$ เป็นจำนวนเต็มลบ ดังนั้น n ต้องเป็นจำนวนเต็มบวก

จะได้ $f(x) = \dfrac{1}{x^n}$

จากทฤษฎีที่ 3.3.7 ได้ว่า

$$f'(x) = \frac{x^n(0) - (1)nx^{n-1}}{(x^n)^2}$$

$$= \frac{-nx^{n-1}}{x^{2n}}$$

$$= -nx^{n-1-2n}$$

$$= -nx^{-n-1}$$

ตัวอย่างที่ 3.3.4 ให้ $f(x) = \dfrac{3}{x^5} + 4\sqrt[4]{x^3}$ จงหา $f'(x)$

วิธีทำ

$$f(x) = 3x^{-5} + 4x^{3/4}$$

$$f'(x) = 3(-5x^{-6}) + 4(\tfrac{3}{4}x^{-1/4})$$

$$= -15x^{-6} + 3x^{-1/4}$$

$$= -\frac{15}{x^6} + \frac{3}{\sqrt[4]{x}}$$

แบบฝึกหัด 3.3

จาก ข้อ 1 ถึง ข้อ 15 จงหาอนุพันธ์ของฟังก์ชันที่กำหนดให้ โดยใช้ทฤษฎีต่าง ๆ ที่อยู่ในหัวข้อนี้

1. $f(x) = x^3 - 3x^2 + 5x - 2$
2. $f(x) = \frac{1}{8}x^8 - x^4$
3. $F(t) = \frac{1}{4}t^4 - \frac{1}{2}t^2$
4. $V(r) = \frac{4}{3}\pi r^3$
5. $F(x) = x^2 + 3x + \frac{1}{x^2}$
6. $g(x) = \frac{3}{x^2} + \frac{5}{x^4}$
7. $f(x) = 4x^{1/2} + 5x^{-1/2}$
8. $g(t) = \sqrt[3]{t} + \sqrt[3]{\frac{1}{t}}$
9. $f(x) = (2x^4 - 1)(5x^3 + 6x)$
10. $H(x) = \frac{x}{x-1}$
11. $f(x) = \frac{x^2 + 2x + 1}{x^2 - 2x + 1}$
12. $g(x) = \frac{x^3 - 8}{x^3 + 8}$
13. $f(x) = \frac{\sqrt{x} - 1}{\sqrt{x} + 1}$
14. $f(u) = -5u + \frac{1}{\sqrt{u}} + \sqrt[3]{u^2}$
15. $f(x) = \frac{2x+1}{x+5}(3x - 1)$
16. จงหาสมการของเส้นสัมผัสกับเส้นโค้ง $y = x^{1/2} - 3x$ ที่จุด $(1, -2)$
17. จงหาสมการของเส้นสัมผัสกับเส้นโค้ง $y = \frac{8}{x^2 + 4}$ ที่จุด $(2, 1)$
18. ให้ $f(x) = x^2 - 2x - 1$
    a) จงหาจุดที่อยู่บนกราฟของ f ที่ซึ่งเส้นสัมผัสอยู่ในแนวระดับ
    b) เขียนกราฟของ f และแสดงเส้นสัมผัสในแนวระดับ
19. ให้ $f(x) = -x^2 + 6x - 4$
    a) จงหาจุดที่อยู่บนกราฟของ f ที่ซึ่งเส้นสัมผัสอยู่ในแนวระดับ

b) เขียนกราฟของ f และแสดงเส้นสัมผัสในแนวระดับ

20. ให้ $f(x) = x + 2 + \frac{4}{x}$

a) จงหาจุดทุกจุดบนกราฟของ f ซึ่งเส้นสัมผัสอยู่ในแนวระดับ

b) เขียนกราฟของ f และแสดงเส้นสัมผัสในแนวระดับ

3.4 ต้นทุนเพิ่ม ความยืดหยุ่นของราคา และรายได้เพิ่ม Marginal Cost, Clasticity of Cost and Marginal Revenne

ความแปรผันของปริมาณชนิดหนึ่ง เมื่อเทียบกับปริมาณอีกชนิดหนึ่ง ในทางเศรษฐศาสตร์อาจจะอธิบายได้โดยใช้แนวความคิด "เชิงเฉลี่ย" หรือ "เชิงเพิ่ม" สำหรับแนวความคิดเชิงเฉลี่ยนั้น แสดงความแปรผันของปริมาณบนพิสัย (range) ที่กำหนดให้ของค่าแห่งปริมาณชนิดที่สอง ส่วนแนวความคิดเชิงเพิ่มแสดงความเปลี่ยนแปลงโดยทันทีของปริมาณชนิดที่สอง เมื่อมีการเปลี่ยนไปเพียงเล็กน้อยในปริมาณชนิดที่สอง

ในการอธิบายจะให้ตัวอย่างทางเศรษฐศาสตร์พร้อมด้วยคำนิยามของต้นทุนเฉลี่ยและต้นทุนเพิ่ม ซึ่งแนวความคิดเหล่านี้เกี่ยวข้องกับเรื่องลิมิตและอนุพันธ์ในแคลคูลัสที่จะได้กล่าวถึงต่อไป

ถ้ากำหนดให้ต้นทุนในการผลิตสินค้า x หน่วย เป็น $C(x)$ บาท

ฟังก์ชัน C เรียกว่า ฟังก์ชันต้นทุนรวม (total cost function)

และ x ซึ่งแทนจำนวนหน่วยของสินค้าต้องเป็นจำนวนเต็มบวก แต่เพื่อประยุกต์ใช้ในแคลคูลัส จึงกำหนดให้ x เป็นจำนวนจริงบวกเพื่อให้สอดคล้องกับเงื่อนไขความต่อเนื่องของฟังก์ชัน C

ต้นทุนเฉลี่ยของการผลิตสินค้าแต่ละหน่วย หาได้จากการหารต้นทุนรวมด้วยจำนวนหน่วยที่ผลิต ดังนั้น

ถ้า $Q(x)$ เป็นค่าเฉลี่ย จะได้

$$Q(x) = \frac{C(x)}{x}$$

เรียก Q ว่าเป็นฟังก์ชันต้นทุนเฉลี่ย

ถ้าผลิตภัณฑ์ชนิดหนึ่งจำนวน x_1 หน่วย ถูกเปลี่ยนแปลงไปเป็นจำนวน $\triangle x$ แล้ว การเปลี่ยนแปลงในต้นทุนรวมจะกำหนดได้โดย $C(x_1 + \triangle x) - C(x_1)$ และการเปลี่ยนแปลงเฉลี่ยในต้นทุนรวมอันเนื่องจากการเปลี่ยนแปลงไปของจำนวนการผลิตกำหนดได้โดย

$$\frac{C(x_1 + \triangle x) - C(x_1)}{\triangle x} \qquad (3.4.1)$$

นักเศรษฐศาสตร์ใช้คำว่า "ต้นทุนเพิ่ม" (marginal cost) สำหรับค่าลิมิตของ (3.4.1) ที่หาได้เมื่อ $\triangle x$ เข้าใกล้ศูนย์ ค่าลิมิตนี้ก็คืออนุพันธ์ของ C ที่ x_1 ซึ่งจะให้นิยามได้ดังต่อไปนี้

นิยาม 3.4.1 ถ้า $C(x)$ เป็นจำนวนบาทของต้นทุนรวมการผลิตสินค้า x หน่วย แล้วต้นทุนเพิ่มเมื่อ $x = x_1$ กำหนดโดย $C'(x_1)$ ฟังก์ชัน C' เรียกว่าฟังก์ชันต้นทุนเพิ่ม และ $C'(x_1)$ หมายความถึงอัตราการเปลี่ยนแปลงของต้นทุนรวมเมื่อผลิตสินค้า x_1 หน่วย

ตัวอย่าง 3.4.1 ถ้า $C(x)$ เป็นจำนวนบาทในต้นทุนรวมของผลิตภัณฑ์ตุ๊กตา x ตัว และ $C(x) = 110 + 4x + 0.02x^2$

ก. ฟังก์ชันต้นทุนเพิ่ม คือ C' และ $C'(x) = 4 + 0.04x$

ข) ต้นทุนเพิ่มเมื่อ $x = 50$ ก็คือ $C'(50)$

$$C'(50) = 4 + 0.04\,(50) = 6$$

เพราะฉะนั้นอัตราการเปลี่ยนแปลงของต้นทุนรวมเมื่อทำตุ๊กตา 50 ตัว คือ 6 บาทต่อหนึ่งตัว

ค. จำนวนบาทของต้นทุนการผลิตจริงสำหรับตุ๊กตาตัวที่ 51 คือ $C(51) - C(50)$ และ

$$\begin{aligned} C(51) - C(50) &= [110 + 4(51) + 0.02(51)^2] \\ &\quad - [110 + 4(50) + 0.02(50)^2] \\ &= 366.02 - 360 \\ &= 6.02 \end{aligned}$$

จะเห็นได้ว่า คำตอบใน (ข) และ (ค) ต่างกัน 0.02 ความแตกต่างนี้เกิดขึ้นเนื่องจากต้นทุนเพิ่มเป็นอัตราการเปลี่ยนแปลงที่ตามมาทันทีของ $C(x)$ อันเนื่องจากการเปลี่ยนแปลงไปหนึ่งหน่วยของ x ดังนั้น $C'(50)$ เป็นค่าโดยประมาณของบาทในต้นทุนการผลิตตุ๊กตาตัวที่ 51

ควรสังเกตว่าในการคำนวณ $C'(50)$ ในตัวอย่าง ง่ายกว่าการคำนวณ $C(51) - C(50)$ ด้วยเหตุผลนี้นักเศรษฐศาสตร์มักจะประมาณค่าต้นทุนการผลิตหน่วยต่อไปด้วยฟังก์ชันต้นทุนเพิ่ม นั่นคือ $C'(k)$ บาท เป็นต้นทุนโดยประมาณของกาตรผลิตหน่วยที่ $k + 1$ หลังจาก k หน่วยแรกได้ผลิตขึ้นแล้ว

กราฟของฟังก์ชันต้นทุนรวม ฟังก์ชันต้นทุนเพิ่ม และฟังก์ชันต้นทุนเฉลี่ย เรียกว่าเส้นต้นทุนรวม (total cost curve หรือ TC) เส้นต้นทุนเพิ่ม (marginal cost curve หรือ MC) และเส้นต้นทุนเฉลี่ย (average cost curve หรือ AC) ตามลำดับ จะศึกษากราฟเหล่านี้ให้ละเอียดขึ้นในหัวข้อ 4.8 หลังจากประยุกต์อนุพันธ์เพื่อเขียนกราฟ

ตัวอย่าง 3.4.2 สมมุติว่า $C(x)$ บาท เป็นราคารวมของต้นทุนรวมในการผลิตสินค้า x หน่วย และ

$$C(x) = 2x^2 + x + 8$$

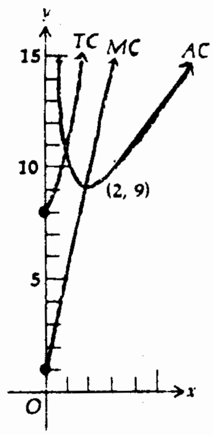
จงหาฟังก์ชันต่อไปนี้

ก. ต้นทุนเฉลี่ย

ข. ต้นทุนเพิ่ม

เขียนกราฟของเส้นต้นทุนรวม เส้นต้นทุนเพิ่ม และเส้นต้นทุนเฉลี่ยบนแกนชุดเดียวกัน

วิธีทำ กำหนดให้ $C(x) = 2x^2 + x + 8$



รูป 3.4.1

(a) ให้ $Q(x)$ เป็นจำนวนบาทในต้นทุนเฉลี่ย เมื่อ

$$Q(x) = \frac{C(x)}{x}$$

$$= \frac{2x^2 + x + 8}{x}$$

$$= 2x + 1 + \frac{8}{x}$$

(b) $C'(x)$ เป็นจำนวนบาทของต้นทุนเพิ่ม และ

$$C'(x) = \frac{d}{dx}(2x^2 + x + 8)$$

$$= 4x + 1$$

กราฟของฟังก์ชัน C, Q และ C' เขียนได้ดังรูป 3.4.1

ข้อสังเกต ในรูป 3.4.1 จุดต่ำสุดบนกราฟของ Q ปรากฏที่จุดตัด (2, 9) ของกราฟ Q และ C' นั่นคือราคาเฉลี่ยมีค่าน้อยที่สุดเมื่อคิดต้นทุนเฉลี่ยและต้นทุนเพิ่มเท่ากัน เรื่องนี้จะได้พิสูจน์ในบททั่ว ๆ ไป และศึกษาต่อไปในหัวข้อ 4.8

ตัวอย่าง 3.4.3 ในตัวอย่าง 3.4.1 เรามีฟังก์ชันต้นทุนรวม C ซึ่ง $C(x) = 110 + 4x + 0.02x^2$ เมื่อ $C(x)$ เป็นจำนวนบาทในการผลิตตุ๊กตา x ตัว ฟังก์ชันต้นทุนเฉลี่ย Q คือ

$$Q(x) = \frac{C(x)}{x}$$

$$= \frac{110}{x} + 4 + 0.02x$$

เพราะว่า

$$Q(50) = \frac{110}{50} + 4 + 0.02(50)$$

$$= 7.20$$

จึงได้ว่า เมื่อผลิตตุ๊กตา 50 ต้นทุนเฉลี่ยของการผลิตตุ๊กตาเป็น 7.20 บาท ในตัวอย่าง 3.4.1 เราได้ $C'(50) = 6$

ดังนั้นประมาณต้นทุนการผลิตตุ๊กตา 1 ตัว หลังจากผลิต 50 ตัวแล้ว เป็น 6 บาท ค่าอันนี้น้อยกว่าต้นทุนเฉลี่ยในการผลิตตุ๊กตา 50 ตัวแรก ถ้าเราคำนวณอัตราส่วน $C'(50) \,/\, Q(50)$ เราได้

$$\frac{C'(50)}{Q(50)} = \frac{6}{7.20} = \frac{5}{6}$$

อัตราส่วน $C'(x) \,/\, Q(x)$ การคำนวณในตัวอย่าง 3.4.3 สำหรับ $x = 5$ เรียกว่า ต้นทุน

ยืดหยุ่น (clasticity of cost) และใช้สัญลักษณ์เป็นอักษรกรีก κ อ่านว่า Kappa

นิยาม 3.4.2 ถ้า $C(x)$ เป็นจำนวนบาทของราคารวมในการผลิตสินค้า x ชิ้น และ $Q(x)$ บาท เป็นต้นทุนเฉลี่ยในการผลิตสินค้าแต่ละชิ้น แล้วต้นทุนยืดหยุ่นแทนได้ด้วยฟังก์ชัน κ ซึ่ง

$$\kappa(x) = \frac{C'(x)}{Q(x)}$$

ถ้าราคายืดหยุ่นน้อยกว่า 1 แล้วต้นทุนการผลิตต่อหน่วยต่อไปอาจน้อยกว่าต้นทุนเฉลี่ยของหน่วยที่ผลิตขึ้นแล้ว ดังเช่นในตัวอย่าง 3.4.3 ซึ่ง $\kappa(50) = \frac{5}{6}$ ถ้าต้นทุนยืดหยุ่นมากกว่า 1 แล้ว ต้นทุนเฉลี่ยแต่ละหน่วยจะเพิ่มเมื่อหน่วยต่อไปถูกผลิตขึ้น

ตัวอย่าง 3.4.4 สมมุติว่า $C(x)$ บาทเป็นต้นทุนรวมในการผลิตกรอบรูป x กรอบ และ

$$C(x) = 50 + 8x - \frac{x^2}{100}$$

จงหาต้นทุนเฉลี่ย ต้นทุนเพิ่ม และต้นทุนยืดหยุ่น เมื่อ $x = 60$ และให้ความหมายทางเศรษฐศาสตร์ของผลเหล่านี้ด้วย

วิธีทำ ถ้า Q เป็นฟังก์ชันต้นทุนเฉลี่ย แล้ว

$$\begin{aligned} Q(x) &= \frac{C(x)}{x} \\ &= \frac{50 + 8x - \frac{x^2}{100}}{x} \\ &= \frac{50}{x} + 8 - \frac{x}{100} \end{aligned}$$

ดังนั้น

$$\begin{aligned} Q(60) &= \frac{50}{60} + 8 - \frac{60}{100} \\ &= 0.83 + 8 - 0.60 \\ &= 8.23 \end{aligned}$$

เพราะฉะนั้น ต้นทุนเฉลี่ยในการผลิตแต่ละกรอบรูปสำหรับ 60 กรอบแรกเป็น 8.23 บาท ฟังก์ชันต้นทุนเพิ่ม C' และ

$$\begin{aligned} C'(x) &= \frac{d}{dx}\left(50 + 8x - \frac{x^2}{100}\right) \\ &= 8 - \frac{x}{50} \end{aligned}$$

ดังนั้น

$$\begin{aligned} C'(60) &= 8 - \frac{60}{50} \\ &= 8 - 1.20 \\ &= 6.80 \end{aligned}$$

เพราะฉะนั้นประมาณต้นทุนการผลิตกรอบรูปที่ 61 คือ 6.80 บาท ต้นทุนยืดหยุ่น เมื่อ $x = 60$ คือ $k(60)$ และ

$$K(60) = \frac{C'(60)}{Q(60)}$$
$$= \frac{6.80}{8.23}$$
$$= 0.83$$

เพราะฉะนั้น ต้นทุนการผลิตกรอบรูปที่ 61 ประมาณ 0.83 ของต้นทุนเฉลี่ยของ 60 กรอบรูปแรก

ในหัวข้อ 1.6 เรากล่าวว่าสมการอุปสงค์เป็นอันหนึ่งที่ให้ความสัมพันธ์ระหว่าง p และ x เมื่อ p บาทเป็นราคาของสินค้าแต่ละหน่วยในจำนวนสินค้า x หน่วยที่ต้องการ ถ้าแก้สมการอุปสงค์หา p จะได้ฟังก์ชันราคา f ซึ่งกำหนดด้วย

$$p = f(x)$$

โดย x เป็นจำนวนจริงบวกและ f เป็นฟังก์ชันต่อเนื่อง

อีกฟังก์ชันหนึ่งที่สำคัญทางเศรษฐศาสตร์ก็คือฟังก์ชันรายได้รวม (total remenue function) และใช้สัญลักษณ์ R โดย

$$R(x) = px$$

เนื่องจาก p และ x เป็นจำนวนบวกภายใต้เงื่อนไขปกติ ดังนั้น $R(x)$ เป็นจำนวนบวกด้วย เมื่อ $x \neq 0$ จากสมการข้างบนเราได้

$$\frac{R(x)}{x} = p$$

แสดงว่ารายได้ต่อหน่วย (รายได้เฉลี่ย) และราคาต่อหน่วยเท่ากัน

นิยาม 3.4.3 ถ้า $R(x)$ เป็นรายได้รวมเมื่อมีอุปสงค์ในสินค้า x หน่วย แล้วรายได้เพิ่ม (marginal revenue) ที่ $x = x_1$ คือ $R'(x_1)$ ฟังก์ชัน R' เรียกว่า ฟังก์ชันรายได้เพิ่ม

$R'(x_1)$ อาจเป็นบวกหรือลบหรืออาจเป็นศูนย์แล้วอาจอธิบายว่าเป็นอัตราการเปลี่ยนของรายได้รวม เมื่อสินค้าที่ต้องการมีจำนวน x_1 หน่วย เช่นเดียวกับที่ $C'(k)$ เป็นต้นทุนโดยประมาณของผลิตภัณฑ์หน่วยที่ $K + 1$ หลังจากผลิตแล้ว k หน่วย $R'(k)$ เป็นรายได้โดยประมาณจากการขายสินค้าหน่วยที่ $k + 1$ หลังจากได้ขายสินค้าไปแล้ว k หน่วย

ตัวอย่าง 3.4.5 สมมุติว่า $R(x)$ บาท เป็นรายได้รวมที่ได้รับจากการขายโต๊ะ x ตัว และ

$$R(x) = 300x - \frac{x^2}{2}$$

ก) ฟังก์ชันรายได้เพิ่ม คือ R' และ

$$R'(x) = 300 - x$$

ข) รายได้เพิ่มเมื่อ $x = 4$ ก็คือ $R'(40)$ และ

$$R'(40) = 300 - 40$$
$$= 260$$

ดังนั้นอัตราเปลี่ยนแปลงของรายได้รวมเมื่อขายโต๊ะ 40 ตัว เป็น 260 บาทต่อตัว

ค) จำนวนบาทในการขายโต๊ะตัวที่ 41 ไปจริง ๆ คือ

$R(41) - R(40)$ และ

$$R(41) - R(40) = [300(41) - \frac{(41)^2}{2}] - [300(40) - \frac{(40)^2}{2}]$$
$$= [12,300 - 840.50] - [12,000 - 800]$$
$$= 11,459.50 - 11,200$$
$$= 259.50$$

ดังนั้น ในการขายโต๊ะตัวที่ 41 ไปจริงได้เงิน 259.50 บาท ใน ข) เราได้ $R'(40) = 260$ และ 260 บาทเป็นประมาณของรายได้ที่จะได้รับจากการขายโต๊ะตัวที่ 41

กราฟของฟังก์ชันรายได้รวมและรายได้เพิ่มเรียกว่าเส้นรายได้รวม (total revenue curve หรือ TR) และเส้นรายได้เพิ่ม (marginal revenue curve หรือ MR) ตามลำดับ

ตัวอย่าง 3.4.6 สมการอุปสงค์สำหรับสินค้าชนิดหนึ่งเป็น $5x + 3p = 15$ จงหาฟังก์ชันรายได้รวมและฟังก์ชันรายได้เพิ่ม พร้อมทั้งเขียนกราฟของเส้นอุปสงค์ เส้นรายได้รวม และรายได้เพิ่มบนแกนชุดเดียวกัน

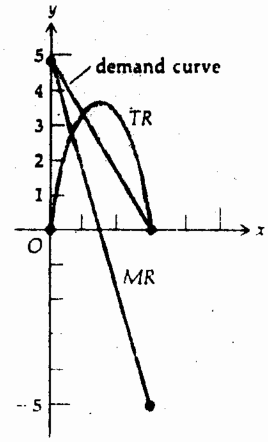
วิธีทำ แก้สมการอุปสงค์ หา p ได้

$$p = -\frac{5}{3}x + 5$$

เนื่องจาก p และ x เป็นจำนวนบวกที่มี $0 \leq x \leq 3$ ดังนั้น ถ้า R เป็นฟังก์ชันรายได้รวม และ R' เป็นฟังก์ชันรายได้เพิ่ม จะได้ว่า

$$R(x) = px$$
$$R(x) = -\frac{5}{3}x^2 + 5x \; ; \; x \in [0, 3]$$
$$R'(x) = \frac{d}{dx}\left(-\frac{5}{3}x^2 + 5x\right)$$
$$= -\frac{10}{3}x + 5 \; ; \; x \in [0, 3]$$

จึงเขียนกราฟของเส้นอุปสงค์ กราฟของ R และ R' ได้ (ดังรูป)



รูป 3.4.2

ข้อสังเกต จากรูปจะเห็นว่า เส้นรายได้เพิ่มตัดแกน x ที่จุด $(\frac{3}{2}, 0)$ ซึ่งที่ $x = \frac{3}{2}$ เป็นค่าที่มีรายได้รวมสูงสุด และเส้นอุปสงค์ตัดแกน x ที่จุด (3, 0) ซึ่งค่า x เป็น 2 เท่าของค่าแรก ในหัวข้อ 4.8 เราจะพิสูจน์ว่าถ้าสมการอุปสงค์เป็นเส้นตรง (และอุปสงค์ไม่คงที่) ความจริงอันนี้เป็นจริงในกรณีทั่ว ๆ ไปด้วย

แบบฝึกหัด 3.4

1) จำนวนบาทในต้นทุนรวมในการทำนาฬิกาข้อมือ x เรือน ของโรงงานแห่งหนึ่ง กำหนดโดย $C(x) = 1500 + 30x + x^2$ จงหา

ก) ฟังก์ชันต้นทุนเพิ่ม

ข) ต้นทุนเพิ่มเมื่อ $x = 40$ และ

ค) ต้นทุนจริงในการผลิตนาฬิกาเรือนที่ 41

2) ถ้า $C(x)$ บาท เป็นต้นทุนรวมในการผลิตกระดาษ x หน่วย น้ำหนัก และ $C(x) = 200 + \frac{50}{x} + \frac{x^2}{5}$ จงหา

ก) ฟังก์ชันต้นทุนเพิ่ม

ข) ต้นทุนเพิ่ม เมื่อ $x = 10$

ค) ต้นทุนจริงในการผลิตกระดาษหน่วยน้ำหนักที่ 11

3) ในการผลิตของเหลวโดยกรรมวิธีทางเคมีอันหนึ่ง และฟังก์ชันต้นทุนรวม C กำหนดโดย $C(x) = 6 + 4\sqrt{x}$ เมื่อ $C(x)$ บาท เป็นต้นทุนรวมของการผลิตของเหลวนั้น x แกลลอน จงหา

ก) ต้นทุนเฉลี่ย

ข) ต้นทุนเพิ่ม และ

ค) ต้นทุนยืดหยุ่น เมื่อ $x = 100$

และจงอธิบายความหมายทางเศรษฐศาสตร์จากผลลัพท์เหล่านี้ด้วย

4) จำนวนบาทในการผลิตสินค้า x หน่วย กำหนดโดย $C(x) = 40 + 3x + 9\sqrt{2\sqrt{x}}$ จงหา

ก) ต้นทุนเฉลี่ย

ข) ต้นทุนเพิ่ม และ

ค) ต้นทุนยืดหยุ่น เมื่อ $x = 50$

และจงอธิบายความหมายทางเศรษฐศาสตร์จากผลลัพท์เหล่านี้ด้วย

5) จำนวนบาทในการผลิตสินค้า x ชิ้น กำหนดโดย $C(x) = x^2 + 6x + 12$ จงหา

ก) ฟังก์ชันต้นทุนเฉลี่ย และ

ข) ฟังก์ชันต้นทุนเพิ่ม

จงเขียนกราฟต้นทุนรวม ต้นทุนเฉลี่ย และต้นทุนเพิ่มบนแกนชุดเดียวกัน จงสังเกตว่าต้นทุนเฉลี่ยและต้นทุนเพิ่มมีค่าเท่ากับเมื่อต้นทุนเฉลี่ยมีค่าน้อยที่สุดเท่าไร?

6) ทำเช่นเดียวกับข้อ 5 ถ้า $C(x) = 3x^2 + x + 3$

7) รายได้รวมที่ได้รับจากการขายโต๊ะเรียน x ตัว เป็น $R(x)$ บาท และ $R(x) = 200x - \frac{x}{5}$ จงหา

ก) ฟังก์ชันรายได้เพิ่ม

ข) รายได้เพิ่มเมื่อ $x = 30$

ค) รายได้จริงจากการขายโต๊ะเรียนตัวที่ 31

8) ถ้า $R(x)$ บาท เป็นรายได้รวมจากการขายโทรทัศน์ x เครื่อง และ $R(x) = 600x - \frac{x^3}{20}$

จงหา

ก) ฟังก์ชันรายได้เพิ่ม

ข) รายได้เพิ่มเมื่อ $x = 20$

ค) รายได้จริงจากการขายโทรทัศน์เครื่องที่ 21

9) ถ้าสมการอุปสงค์สำหรับสินค้าชนิดหนึ่งเป็น $3x + 4p = 12$

จงหา

ก) ฟังก์ชันรายได้รวม และ

ข) ฟังก์ชันรายได้เพิ่ม

เขียนกราฟของเส้นอุปสงค์ รายได้รวม และรายได้เพิ่ม บนแกนชุดเดียวกัน สังเกตว่าสมการอุปสงค์เป็นเส้นตรงและเส้นรายได้เพิ่มตัดแกน x ที่จุดซึ่งมีค่า x สำหรับรายได้รวมมากที่สุดและเส้นอุปสงค์ตัดแกน x ที่จุดซึ่งมีค่า x เป็น 2 เท่า

10) ฟังก์ชันรายได้รวม R สำหรับสินค้าชนิดหนึ่งกำหนดขึ้นโดย $R(x) = 3x - \frac{2}{3}x^2$

จงหา

ก) สมการอุปสงค์ และ

ข) ฟังก์ชันรายได้เพิ่ม

เขียนกราฟเส้นอุปสงค์ รายได้รวม และรายได้เพิ่ม บนแกนชุดเดียวกัน

3.5 อนุพันธ์กับอัตราการเปลี่ยนแปลง The derivative as a rate of change

ความคิดเกี่ยวกับเรื่องการแปรค่าเชิงเพิ่มในทางเศรษฐศาสตร์สอดคล้องกับความคิด ทั่ว ๆ ไปในเรื่องอัตราการแปรค่าทันทีทันใด (instantaneous rate of change) เช่น ถ้าต้นทุนรวมในการผลิตสินค้า x หน่วย กำหนดขึ้นโดย $C(x)$ บาท แล้วต้นทุนเพิ่มก็ถูกกำหนดขึ้นโดย $C'(x)$ ซึ่งเป็นอัตราการเปลี่ยนแปลงของ $C(x)$

เช่นเดียวกัน ถ้าปริมาณ y เป็นฟังก์ชันของปริมาณ x ก็สามารถแสดงอัตราการเปลี่ยนแปลงของ y เมื่อ x แปรค่าไป (the rate of change of y with respect x) การวิเคราะห์เกี่ยวกับเรื่องนี้ได้กระทำแล้วในหัวข้อ 3.4

ถ้าความสัมพันธ์ที่เป็นฟังก์ชันระหว่าง y และ x กำหนดขึ้นโดย $y = f(x)$

และถ้า x แปรค่าจากค่า x_1 ไปเป็น $x_1 + \Delta x$ เมื่อ y แปลค่าจาก $f(x_1)$ ไปเป็น $f(x_1+\Delta x)$ การเปลี่ยนไปใน y ซึ่งให้สัญลักษณ์ว่า Δy คือ $f(x_1 + \Delta x) - f(x_1)$ เมื่อ x แปรไป Δx อัตราการเปลี่ยนแปลงเฉลี่ยของ y เมื่อ x แปรค่าจาก x_1 เป็น $x_1 + \Delta x$ คือ

$$\frac{f(x_1 + \Delta x) - f(x_1)}{\Delta x} = \frac{\Delta y}{\Delta x} \tag{3.5.1}$$

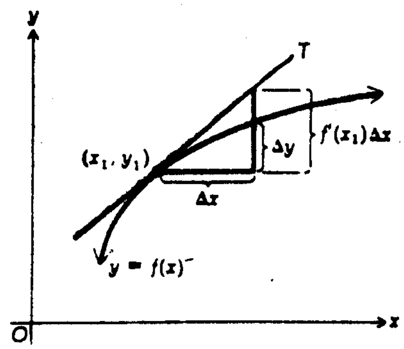
ถ้าลิมิตของผลหารนี้หาค่าได้ เมื่อ $\Delta x \to 0$ ลิมิตนี้คืออัตราการแปรค่าโดยทันทีของ y เมื่อ x แปรค่าไปที่ x_1 จึงได้นิยามต่อไปนี้

นิยาม 3.5.1 ถ้า $y = f(x)$ แล้ว อัตราการแปรค่าโดยทันทีของ y เมื่อ x แปรค่าไปที่ x_1 คือ $f'(x_1)$ อนุพันธ์ของ y เทียบกับ x เมื่อ x แปรค่าไปที่ x_1

อัตราการแปรโดยทันทีของ y เมื่อ x แปรค่าไป อาจแปลความว่าเป็นการแปรค่าใน y ที่เกิดจากการที่ x แปรค่าไปหนึ่งหน่วย เมื่ออัตราการเปลี่ยนแปลงนั้นคงที่ ซึ่งในการแสดงด้วยรูปทางเรขาคณิต ให้ $f'(x_1)$ เป็นอัตราการแปรค่าโดยทันทีของ y เมื่อ x แปรค่าไปที่ x_1 ถ้าเราคูณ $f'(x_1)$ ด้วย Δx (การแปรค่าใน x) การเปลี่ยนแปลงจะเกิดขึ้นใน y ถ้าจุด (x, y) ถูกเคลื่อนไปตามเส้นสัมผัสที่จุด (x_1, y_1) ของกราฟของ $y = f(x)$ อัตราการแปรค่าเฉลี่ยของ y เมื่อ x แปรค่าไป ถูกกำหนดขึ้นโดยเศษส่วนในสมการ (3.5.1) และถ้าคูณโดย x เราได้

$$\frac{y}{x} \cdot x = \Delta y$$

ซึ่งเป็นการแปรค่าไปจริง ๆ ใน y อันเกิดจากการที่ x เปลี่ยนไป x ขณะที่จุด (x, y) เคลื่อนที่ไปตามกราฟ



รูป 3.5.1

ตัวอย่าง 3.5.1 ให้ V เป็นปริมาตรของลูกบาศก์ซึ่งมีขอบยาว e นิ้ว จงหาอัตราการเปลี่ยนแปลงเฉลี่ยของปริมาตรเทียบกับ e เมื่อ e แปรค่าจาก

ก) 3.00 ไปเป็น 3.20

ข) 3.00 ไปเป็น 3.10

ค) 3.00 ไปเป็น 3.01

ง) อะไรเป็นอัตราการแปรค่าโดยทันทีของปริมาตร เมื่อ $e = 3$

วิธีทำ เพราะว่าสูตรในการหาปริมาตรของลูกบาศก์คือ $V = e^3$ ให้ f เป็นฟังก์ชันกำหนดโดย $f(e) = e^3$ แล้วอัตราการแปรค่าเฉลี่ย V เมื่อ e แปรค่าไปจาก e_1 ไปเป็น $e_1 + \Delta e$ คือ

$$\frac{f(e_1 + \Delta e) - f(e_1)}{\Delta e}$$

ก) $e_1 = 3, \ \Delta e = 0.2$ และ $\frac{f(3.2)^5 - f(3)}{0.2} = \frac{(3.2)^3 - 3^3}{0.2} = \frac{5.77}{0.2} = 28.8$

ข) $e_1 = 3, \ \Delta e = 0.1$ และ $\frac{f(3.1) - f(3)}{0.1} = \frac{(3.1)^3 - 3^3}{0.1} = \frac{2.79}{0.1} = 27.9$

ค) $e_1 = 3, \ \Delta e = 0.01$ และ $\frac{f(3.01) - f(3)}{0.01} = \frac{(3.01)^3 - 3^3}{0.01} = \frac{0.271}{0.01} = 27.1$

ในข้อ ก) จะพบว่าเมื่อความยาวของขอบของลูกบาศก์ 1 เปลี่ยนจาก 3.00 นิ้ว ไปเป็น 3.20 นิ้ว ปริมาตรเปลี่ยนแปลงไป 5.77 ลูกบาศก์นิ้ว และอัตราการเปลี่ยนแปลงเฉลี่ยเป็น 28.8 ลูกบาศก์นิ้ว สำหรับในข้อ ข) และ ค) การแปรความหมายมีลักษณะเช่นเดียวกันกับข้อ ก)

ง) อัตราการแปรค่าโดยทันทีของ V เมื่อ e เท่ากับ 3 คือ $f'(3)$

$$f'(e) = 3e^2$$

ดังนั้น

$$f'(3) = 27$$

เพราะฉะนั้น ถ้าความยาวของขอบของลูกบาศก์เป็น 3 นิ้ว อัตราการแปรค่าโดยทันที ของปริมาตรจะเป็น 27 ลูกบาศก์นิ้ว เมื่อมีการเปลี่ยนแปลงของขอบ

ตัวอย่าง 3.5.2 บริษัทแห่งหนึ่งประมาณว่า ถ้าใช้เงินในการโฆษณาเป็นจำนวน 1000x บาท จะขายสินค้าได้ y ชิ้น โดยที่

$$y = 5 + 400x - 2x^2$$

ก) จงหาอัตราการเปลี่ยนแปลงเฉลี่ยของ y เมื่องบประมาณการโฆษณาเพิ่มจาก 10,000 บาท เป็น 11,000 บาท

ข) จงหาอัตราการแปรค่า (เพิ่ม) ของ y เมื่องบประมาณโฆษณาเป็น 10,000 บาท

วิธีทำ ให้ f เป็นฟังก์ชันที่กำหนดขึ้นโดย

$$f(x) = 5 + 400x - 2x^2$$

แล้วอัตราการแปรค่าเฉลี่ยของ y เมื่อ x แปรค่าไป เมื่อ x แปรค่าจาก x_1 ไปเป็น $x_1 + \Delta x$ คือ

$$\frac{f(x_1 + \Delta x) - f(x_1)}{\Delta x} \tag{3.5.2}$$

ก) เราประสงค์ที่จะหาอัตราการแปรค่าเฉลี่ยของ y เมื่อ x แปรค่าไป x แปรค่าจาก 10 เป็น 10 + 1 ดังนั้นเราใช้อัตราส่วน (3.5.2) ซึ่ง $x_1 = 10$ และ $\Delta x = 1$ จึงได้

$$\begin{aligned}
\frac{f(10+1) - f(10)}{1} &= \frac{f(11) - f(10)}{1} \\
&= [5 + 400(11) - 2(11)^2] - [5 + 400(10) - 2(10)^2] \\
&= 4163 - 3805 \\
&= 358
\end{aligned}$$

เพราะฉะนั้นเมื่องบประมาณโฆษณาเพิ่มจาก 10,000 บาท เป็น 11,000 บาท อัตราการเปลี่ยนแปลงเฉลี่ยของจำนวนหน่วยที่ขายจะเป็น 358 ชิ้นต่อการเพิ่มงบประมาณการโฆษณา 1000 บาท

ข) อัตราการแปรค่าโดยทันทีของ y เมื่อ x แปรค่าไปที่ 10 คือ $f'(10)$

$$f'(x) = 400 - 4x$$

เพราะฉะนั้น

$$f'(10) = 360$$

ดังนั้นเมื่องบประมาณโฆษณาเป็น 10,000 บาท อัตราการแปรค่าทันทีของจำนวนหน่วยที่ขายได้จะเป็น 360 ชิ้นต่อ 1,000 บาท ในการเพิ่มงบประมาณ

ตัวอย่าง 3.5.3 ค่าจ้างประจำปีของบริษัทแห่งหนึ่ง เมื่อ t ปี หลังจากวันที่ 1 มกราคม 2519

เป็นเงิน p ล้านบาท และ $p = \frac{2}{5}t^2 + 2t + 10$ จงหา

ก) อัตราที่ค่าจ้างสูงขึ้น ณ วันที่ 1 มกราคม 2521

ข) อัตราที่ค่าจ้างสูงขึ้น ณ วันที่ 1 มกราคม 2525

วิธีทำ

ก) ณ วันที่ 1 มกราคม 2521 $t = 2$ ดังนั้น หา $\frac{dp}{dt}$ เมื่อ $t = 2$

$$\frac{dp}{dt} = \frac{4}{5}t + 2, \qquad \frac{dp}{dt}\Big]_{t=2} = \frac{8}{5} + 2 = 3.6$$

เพราะฉะนั้น ณ วันที่ 1 มกราคม 2521 ค่าจ้างสูงขึ้นในอัตรา 3.6 ล้านบาทต่อปี

ข) ณ วันที่ 1 มกราคม 2525, $t = 6$ และ

$$\frac{dp}{dt}\Big]_{t=6} = \frac{24}{5} + 2 = 6.8$$

เพราะฉะนั้น ณ วันที่ 1 มกราคม 2525 อัตราค่าจ้างสูงขึ้นในอัตรา 6.8 ล้านบาทต่อปี

ผลจากตัวอย่าง 3.5.3 มีความหมายเพียงการเปรียบเทียบกับค่าจริง ๆ ของบริษัท ตัวอย่าง ถ้า ณ วันที่ 1 มกราคม 2520 พบว่าค่าจ้างบริษัทแห่งนั้นสำหรับปี 2519 คือ 2 ล้านบาท แล้วอัตราสูงขึ้น ณ วันที่ 1 มกราคม 2521 คือ 3.4 ล้านบาทต่อปี ถือว่าดีที่สุด อย่างไรก็ตาม ถ้าค่าจ้างในปี 2521 เป็น 300 ล้านบาทแล้ว อัตราการจ้างสูงขึ้นในวันที่ 1 มกราคม 2521 ถือว่าไม่ดี การวัดซึ่งใช้เปรียบเทียบอัตราการเปลี่ยนแปลงกับจำนวนของปริมาณที่กำลังถูกเปลี่ยนแปลงไป เรียกว่าอัตราสัมพันธ์ (relative rate)

นิยาม 3.5.2 ถ้า $y = f(x)$ อัตราสัมพันธ์ของการแปรค่าของ y เมื่อ x แปรค่าไป ณ x_1 คือ $f'(x_1) / f(x_1)$ หรือ $\frac{dy}{dx} / y$ ซึ่งหาค่าที่ $x = x_1$ ถ้าอัตราสัมพัทธ์คูณด้วย 100 ก็จะได้อัตราเปอร์เซ็นต์ของการแปรค่า

ตัวอย่าง 3.5.4 จงหาอัตราสัมพัทธ์ของความเติบโตของค่าจ้างประจำปี ณ วันที่ 1 มกราคม 2521 และวันที่ 1 มกราคม 2525 สำหรับบริษัทในตัวอย่างของหัวข้อ 3.5

วิธีทำ

ก) เมื่อ $t = 2$, $p = \frac{2}{5}(4) + 2(2) + 10 = 15.6$ ดังนั้น ณ วันที่ 1 มกราคม 2521 อัตราสัมพัทธ์ของความเติบโตของค่าจ้างของบริษัทคือ

$$\frac{dp}{dt} / p\Big]_{t=2} = \frac{3.6}{15.6} = 0.231 = 23.1 \text{ เปอร์เซ็นต์}$$

ข) เมื่อ $t = 6$, $p = \frac{2}{5}(36) + 2(6) + 10 = 36.4$

เพราะฉะนั้น ณ วันที่ 1 มกราคม 2525 อัตราสัมพัทธ์ของความเติบโตของค่าจ้างของบริษัท เป็น

$$\frac{dp}{dt}/p\Big]_{t=6} = \frac{6.8}{36.4} = 0.187 = 18.7 \text{ เปอร์เซ็นต์}$$

พึงสังเกตว่าอัตราความเติบโต 6.8 ล้านบาท ณ วันที่ 1 มกราคม 2525 มากกว่า 3.6 ล้านบาท ณ วันที่ 1 มกราคม 2521 อย่างไรก็ดี อัตราความเติบโตสัมพัทธ์ 18.7 เปอร์เซ็นต์สำหรับวันที่ 1 มกราคม 2525 น้อยกว่าอัตราความเติบโตสัมพัทธ์ 23.1 เปอร์เซ็นต์ สำหรับวันที่ 1 มกราคม 2521

แบบฝึกหัด 3.5

1) ถ้า A ตารางนิ้ว เป็นพื้นที่ของสี่เหลี่ยมจัตุรัส และ s นิ้ว เป็นความยาวของด้านของสี่เหลี่ยมจัตุรัสนั้น จงหาอัตราการแปรค่าเฉลี่ยของ A เมื่อ s แปรค่าไปจาก

   ก) 4.00 ไปเป็น 4.60

   ข) 4.00 ไปเป็น 4.30

   ค. 4.00 ไปเป็น 4.10

   ง) อัตราการแปรค่าของ A เมื่อ s แปรค่าไป เมื่อ $A = 400$ มีค่าเท่าไร?

2) สมมุติว่าทรงกระบอก ซึ่งมีความสูงคงที่ 10.00 นิ้ว ถ้าปริมาตร V ลูกบาศก์ เป็นปริมาตรของทรงกระบอก และ r นิ้ว เป็นรัศมีของกระบอก

   จงหาอัตราการแปรค่าเฉลี่ยของ V เมื่อ r แปรค่าจาก

   ก) 5.00 ไปเป็น 5.40

   ข) 5.00 ไปเป็น 5.10

   ค) 5.00 ไปเป็น 5.01

   ง) จงหาอัตราการแปรค่าของ V เมื่อ r แปรค่า ที่ $r = 500$

   หมายเหตุ ปริมาตรของทรงกระบอก $V = \pi r^2h$ เมื่อ h เป็นความสูงของทรงกระบอก

3) ถ้า r เป็นส่วนกลับของ n จงหาอัตราการแปรค่าเฉลี่ย r เมื่อ n แปรค่า และอัตราสัมพัทธ์การแปรค่าของ r เมื่อ n แปรค่าที่ n มีค่าเป็น

   ก) 4

   ข) 10

4) ให้ s เป็นรากที่สองของจำนวน x จงหาอัตราการแปรค่า s เมื่อ x แปรค่าไปและอัตราสัมพัทธ์การแปรค่าของ s เมื่อ x มีค่าแปรไปที่ x มีค่าเป็น

   ก) 9

   ข) 4

5) ถ้าน้ำไหลออกจากสระว่ายน้ำ และ V แกลลอน เป็นปริมาตรของน้ำในสระ t นาทีเป็นเวลาหลังจากเริ่มเปิดน้ำให้ไหล เมื่อ $V = 250(40 - t)^2$ จงหา

ก) อัตราเฉลี่ยเมื่อน้ำไหลไปได้ 5 นาที

ข) น้ำไหลออกได้เร็วเท่าไร เมื่อเวลา 5 นาที หลังจากเริ่มเปิดน้ำให้ไหลออก

6) สมการอุปทานสำหรับดินสอดำชนิดหนึ่ง เป็น $x = 3p^2 + 2p$ เมื่อ p บาท เป็นราคาของดินสอดำหนึ่งแท่ง เมื่อดินสอดำ $1000x$ แท่ง ที่ผลิตออกสู่ตลาด

ก) จงหาอัตราการแปรค่าเฉลี่ยของอุปทาน เมื่อราคาแปรค่าไปโดยเพิ่มจาก 2 บาท เป็น 2.20 บาท

ข) จงหาอัตราการแปรค่าของอุปทาน เมื่อราคาแปรค่าไปที่ราคาเป็น 2 บาท

7) สมการของอุปสงค์สำหรับเครื่องประดับฝังเพชรชนิดหนึ่ง เป็น $x = 100 - 3p - 2p^2$ เมื่อ p บาท เป็นราคาต่อหนึ่งชิ้น และเมื่อ x เป็นชิ้นที่มีอุปสงค์

ก) จงหาอัตราการแปรค่าของอุปสงค์ เมื่อราคาแปรค่าไปที่ราคาเพิ่มจาก 100 บาท เป็น 110 บาท

ข) จงหาอัตราการแปรค่าของอุปสงค์ เมื่อราคาแปรค่าไปที่ราคาเป็น 100 บาท

8) ประมาณว่าคนงานในโรงงานซึ่งผลิตกรอบรูปสามารถทาสีกรอบรูป y กรอบ ในเวลา x ชั่วโมง หลังจากเริ่มทำงาน 8.00 น. ในตอนเช้า และ $y = 3x + 8x^2 - x^3 : 0 < x \leq 4$

ก) จงหาอัตราที่คนงานกำลังทาสีเมื่อเวลา 10.00 น. ในตอนเช้า

ข) จงหาจำนวนกรอบรูปซึ่งคนงานทาสีได้ ในเวลา 10.00-11.00 น. ในตอนเช้า

9) สมมุติว่า จำนวนประชากรของเมืองแห่งหนึ่ง เมื่อเวลา t ปี หลังจากวันที่ 1 มกราคม 2518 เป็น $40t^2 + 200t + 10,000$

ก. จงหาอัตราที่ประชากรเพิ่ม ณ วันที่ 1 มกราคม 2527

ข) จงหาอัตราที่ประชากรเพิ่ม ณ วันที่ 1 มกราคม 2533

ค) จงหาอัตราสัมพัทธ์ของการเพิ่มของประชากร ณ วันที่ 1 มกราคม 2527

ง) จงหาอัตราสัมพัทธ์ของการเพิ่มของประชากร ณ วันที่ 1 มกราคม 2533

10) กำไรจากการค้าของร้านค้าแห่งหนึ่ง เป็น $100y$ บาท เมื่อ x บาท เป็นรายจ่ายในแต่ละวันในการโฆษณา และ

$y = 2500 + 36x - 0.2x^2$ จงใช้อนุพันธ์หาว่าถ้าผลกำไรเพิ่มเนื่องจากการเพิ่มการโฆษณาเพื่อการโฆษณาแต่ละวันเป็น

ก) 60 บาท

ข) 300 บาท

3.6 อนุพันธ์ของฟังก์ชันประกอบ The derivative of a composite function

สมมุติว่า y เป็นฟังก์ชันของ u และ u เป็นฟังก์ชันของ x ตัวอย่างเช่น

$$y = f(u) = u^5 \qquad (3.6.1)$$

และ

$$u = g(x) = 2x^3 - 5x^2 + 4 \qquad (3.6.2)$$

สมการ (3.6.1) และ (3.6.2) กำหนด y ว่าเป็นฟังก์ชันหนึ่งของตัวแปร x เนื่องจากถ้าเราแทนค่า u ใน (1) โดยค่าทางขวามือของ (3.6.2) เราได้

$$y = h(x) = f(g(x)) = (2x^3 - 5x^2 + 4)^5 \qquad (3.6.3)$$

โดย h เป็นฟังก์ชันประกอบ

ทฤษฎีบทที่ 3.6.1 ถ้า y เป็นฟังก์ชันของ u กำหนดโดย $y = f(u)$ และหาค่ากฎลูกโซ่ (chain rule) dy/du ได้ และถ้า u เป็นฟังก์ชันของ x กำหนดโดย $u = g(x)$ และหาค่า du/dx ได้ และ y เป็นฟังก์ชันของ x และหาค่า dy/du ได้ และกำหนดโดย

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx}$$

ตัวอย่าง 3.6.1 ใช้กฎลูกโซ่กับฟังก์ชันที่กำหนดขึ้นโดยสมการ (3.6.3) ดังนั้นเราได้

$$y = (2x^3 - 5x^2 + 4)^5$$

เราประสงค์ที่จะหา dy/dx พิจารณาฟังก์ชัน y ของ u เมื่อ u เป็นฟังก์ชันของ x จึงได้

$$y = u^5 \text{ เมื่อ } u = 2x^3 - 5x^2 + 5$$

เพราะฉะนั้น จากกฎลูกโซ่

$$\begin{aligned}\frac{dy}{dx} &= \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx} \\ &= 5u^4 (6x^2 - 10x) \\ &= 5(2x^3 - 5x^2 + 4)^4 (6x^2 - 10x)\end{aligned}$$

การพิสูจน์กฎลูกโซ่ยุ่งยากซับซ้อนเราจะไม่พิสูจน์ในที่นี้ (การพิสูจน์จะพบใน Leithold, The Calculus with Analytic Geometry)) อย่างไรก็ดีต่อไปนี้เป็นข้ออ้างที่เป็นจริงสำหรับบางฟังก์ชัน

สมมุติว่า x แปรค่าไป Δx, โดย $\Delta x \neq 0$ ทำให้เกิดการแปรใน u ไป Δu นั่นคือ

$$u + \Delta u = g(x + \Delta x)$$

และเพราะว่า $u = g(x)$,

$$\triangle u = g(x + \triangle x) - g(x)$$

แต่เนื่องจาก $y = f(u)$, $\triangle u$ เป็นเหตุให้ y เปลี่ยนไป $\triangle y$ ดังนั้น

$$\frac{\triangle y}{\triangle x} = \frac{\triangle y}{\triangle x} \cdot \frac{\triangle u}{\triangle x} \quad \text{ถ้า } \triangle u \neq 0 \qquad (3.6.4)$$

เพราะฉะนั้น

$$\lim_{\triangle x \to 0} \frac{\triangle y}{\triangle x} = \lim_{\triangle x \to 0} \frac{\triangle y}{\triangle u} \cdot \lim_{\triangle x \to 0} \frac{\triangle u}{\triangle x} \quad \text{ถ้า } \triangle u \neq 0 \qquad (3.6.5)$$

เนื่องจาก $u = g(x)$ และ g สามารถหาอนุพันธ์ได้ แล้ว g ต่อเนื่องด้วย ดังนั้น เมื่อ $\triangle x \to 0$, $\triangle u \to 0$ ดังนั้น ในค่าลิมิตค่าแรกทางขวามือของสมการ (3.6.4) เราแทน $\triangle x \to 0$ ด้วย $\triangle u \to 0$ จึงได้

$$\lim_{\triangle x \to 0} \frac{\triangle y}{\triangle x} = \lim_{\triangle u \to 0} \frac{\triangle y}{\triangle u} \cdot \lim_{\triangle x \to 0} \frac{\triangle u}{\triangle x} \quad \text{ถ้า } \triangle u \neq 0$$

เพราะฉะนั้น $\quad \dfrac{dy}{dx} = \dfrac{dy}{du} \cdot \dfrac{du}{dx}$

การพิสูจน์เป็นไปไม่ได้ เมื่อ $\triangle u = 0$ เนื่องจาก $\triangle u$ ขึ้นอยู่กับค่า $\triangle x$ ดูที่สมการ (3.6.4) จะพบว่าเป็นไปไม่ได้เมื่อ $\triangle u = 0$ สำหรับบางค่าของ $\triangle x$

ทฤษฎีบท 2 ในหัวข้อ 3.3 กล่าวว่า ถ้า n เป็นจำนวนจริงใด ๆ และถ้า $f(x) = x^n$ แล้ว $f'(x) = nx^{n-1}$ และจากทฤษฎีบทดังกล่าวกับกฎลูกโซ่จะได้ทฤษฎีบทต่อไปนี้

ทฤษฎีบทที่ 3.6.2 ถ้า f และ g เป็นฟังก์ชันซึ่ง $f(x) = [g(x)]^n$ เมื่อ n เป็นจำนวนจริงใด ๆ และถ้า $g'(x)$ มีค่าแล้ว $f'(x) = n[g(x)]^{n-1} g'(x)$ (The chain rule for power)

ตัวอย่าง 3.6.2 ให้ $f(x) = \dfrac{1}{4x^3 + 5x^2 - 7x + 8}$ จงหา $f'(x)$

วิธีทำ เขียนใหม่ว่า $f(x) = (4x^3 + 5x^2 - 7x + 8)^{-1}$

โดยใช้กฎลูกโซ่ของฟังก์ชันยกกำลัง จึงได้

$$f'(x) = -1(4x^3 + 5x^2 - 7x + 8)^{-2}(12x^2 + 10x - 7)$$

$$= \frac{-12x^2 - 10x + 7}{(4x^3 + 5x^2 - 7x + 8)^2}$$

ตัวอย่าง 3.6.3 ให้ $h(x) = \sqrt{2x^3 - 4x + 5}$ จงหา $h'(x)$

วิธีทำ

$$h(x) = (2x^3 - 4x + 5)^{1/2}$$

โดยใช้กฎลูกโซ่สำหรับฟังก์ชันยกกำลัง จึงได้

$$h'(x) = \tfrac{1}{2}(2x^3 - 4x + 5)^{-1/2}(6x^2 - 4)$$

$$= \frac{3x^2 - 2}{\sqrt{2x^3 - 4x + 5}}$$

ตัวอย่าง 3.6.4 ให้ $f(x) = \left(\dfrac{2x+1}{3x-1}\right)^4$ จงหา $f'(x)$

วิธีทำ โดยการใช้กฎลูกโซ่สำหรับฟังก์ชันยกกำลัง เราได้

$$f'(x) = 4\left(\frac{2x+1}{3x-1}\right)^3 \frac{(3x-1)(2)-(2x+1)(3)}{(3x-1)^2}$$

$$= \frac{4(2x+1)^3(-5)}{(3x-1)^5}$$

$$= -\frac{20(2x+1)^3}{(3x-1)^5}$$

ตัวอย่าง 3.6.5 ให้ $f(x) = (3x^2+2)^2(x^2-5x)^3$ จงหา $f'(x)$

วิธีทำ พิจารณา f เป็นผลคูณของสองฟังก์ชัน g และ h เมื่อ

$$g(x) = (3x^2+2)^2 \text{ และ } h(x) = (x^2-5x)^3$$

โดยใช้ทฤษฎีบท 6 ของหัวข้อ 3.3 สำหรับอนุพันธ์ของผลคูณของสองฟังก์ชัน จึงได้

$$f'(x) = g(x)h'(x) + h(x)g'(x)$$

เราหา $h'(x)$ และ $g'(x)$ โดยกฎลูกโซ่จึงได้

$$f'(x) = (3x^2+2)^2\left[3(x^2-5x)^2(2x-5)\right] + (x^2-5x)^3\left[2(3x^2+2)(6x)\right]$$

$$= 3(3x^2+2)(x^2-5x)^2\left[(3x^2+2)(2x-5)+4x(x^2-5x)\right]$$

$$= 3(3x^2+2)(x^2-5x)^2\left[6x^3-15x^2+4x-10+4x^3-20x^2\right]$$

$$= 3(3x^2+2)(x^2-5x)^2(10x^3-35x^2+4x-10)$$

ตัวอย่าง 3.6.6 ให้ $g(x) = \dfrac{x^3}{\sqrt[3]{3x^2-1}}$ จงหา $g'(x)$

วิธีทำ เขียนฟังก์ชันเสียใหม่ในรูปของผลคูณของฟังก์ชัน จึงได้

$$g(x) = x^3(3x^2-1)^{-1/3}$$

ใช้ทฤษฎีบท 3.3.6 และ 3.6.2 ได้

$$g'(x) = 3x^2(3x^2-1)^{-1/3} - \frac{1}{3}(3x^2-1)^{-4/3}(6x)(x^3)$$

$$= x^2(3x^2-1)^{-4/3}\left[3(3x^2-1)-2x^2\right]$$

$$= \frac{x^2(7x^2-3)}{(3x^2-1)^{4/3}}$$

แบบฝึกหัด 3.6

สำหรับข้อ 1-34 หาอนุพันธ์ของฟังก์ชันที่กำหนดให้

1) $f(x) = (x^2 + 4x - 5)^3$

2) $f(x) = (10 - 5x)^4$

3) $f(x) = (3x + 5)^{2/3}$

4) $g(x) = (x^2 + 4)^{-2}$

5) $f(t) = (2t^4 - 7t^3 + 2t - 1)^2$

6) $h(r) = (2r^4 + 8r^2 + 1)^5$

7) $f(s) = \sqrt{2 - 3s^2}$

8) $f(x) = 4x^{1/2} + 5x^{-1/2}$

9) $g(x) = 3x^{2/3} - 6x^{1/3} + x^{-1/3}$

10) $g(x) = \sqrt[3]{(3x^2 + 5x - 1)^2}$

11) $F(x) = \sqrt[3]{2x^3 - 5x^2 + x}$

12) $H(z) = (z^3 - 3z^2 + 1)^{-3}$

13) $f(y) = \left(\dfrac{y - 7}{y + 2}\right)^2$

14) $g(t) = \left(\dfrac{2t^2 + 1}{3t^3 + 1}\right)^2$

15) $g(x) = \sqrt{\dfrac{2x - 5}{3x + 1}}$

16) $h(t) = \dfrac{\sqrt{t - 1}}{\sqrt{t + 1}}$

17) $h(u) = (3u^2 + 5)^3 (3u - 1)^2$

18) $f(x) = (4x^2 + 7)^2 (2x^3 + 1)^4$

19) $g(x) = (2x - 5)^{-1} (4x + 3)^{-2}$

20) $f(x) = (x^2 - 4x^{-2})^2 (x^2 + 1)^{-1}$

21) $f(r) = (r^2 + 1)^3 (2r + 5)^2$

22) $h(x) = \left(\dfrac{x + 4}{2x^2 - 5x + 6}\right)^3$

23) $g(y) = (y^2 + 3)^{1/3} (y^3 - 1)^{1/2}$

24) $g(x) = (2x - 9)^2 (x^3 + 4x - 5)^3$

25) $f(z) = \dfrac{(z^2 - 5)^3}{(z^2 + 4)^2}$

26) $F(x) = \dfrac{(5x - 8)^{-2}}{(x^2 + 3)^{-3}}$

27) $G(x) = \dfrac{(4x - 1)^3 (x^2 + 2)^4}{(3x^2 + 5)^2}$

28) $G(x) = \dfrac{4x + 6}{\sqrt{x^2 + 3x + 4}}$

29) $F(x) = \dfrac{\sqrt[4]{x^2 - 1}}{x}$

30) $f(y) = (y + 3)^3(5y + 1)^2(3y^2 - 4)$

31) $h(x) = \dfrac{\sqrt{x - 1}}{\sqrt[3]{x + 1}}$

32) $f(x) = \sqrt{x^2 - 5}\ \sqrt[3]{x^2 + 3}$

33) $f(x) = \sqrt{9 + \sqrt{9 - x}}$

34) $g(x) = \sqrt[4]{\dfrac{y^3 + 1}{y^3 - 1}}$

35) จงหาสมการของเส้นสัมผัสที่สัมผัสเส้น $y = \sqrt{x^2 + 9}$ ที่จุด (4, 5)

36) จงหาสมการของเส้นสัมผัสที่สัมผัสเส้น $y = \dfrac{(x^2 - 4)^2}{(3x - 5)^2}$ ที่จุด $(1, \frac{9}{4})$

37) จงหาความชันของเส้นสัมผัสที่สัมผัสเส้น $y = (6 - 2x)^{1/3}$ ของแต่ละจุดต่อไปนี้ : (-1, 2), $(1, \sqrt[3]{4})$, (3, 0), $(5, -\sqrt[3]{4})$, (7, -2) จงเขียนกราฟและส่วนของเส้นตรงที่จุดที่กำหนดให้นั้น

38) จงหาสมการของเส้นสัมผัสที่สัมผัสเส้น $y = \dfrac{1}{\sqrt[3]{7x - 6}}$ และมีความชัน $\frac{12}{7}$

39) ให้ $C(x)$ บาท เป็นต้นทุนรวมในการผลิตสินค้าชนิดหนึ่ง $10x$ หน่วย และ $C(x) = 20 + 4x + \sqrt{3x^2 + 4}$ จงหา

ก) ฟังก์ชันต้นทุนเพิ่ม และ

ข) ต้นทุนเพิ่มเมื่อทำหน่วยที่ 20 ขึ้นแล้ว

40) สมการอุปสงค์สำหรับสินค้าชนิดหนึ่งเป็น $p^2 + 4x^2 + 8x - 140 = 0$ เมื่อ p บาท เป็นราคาต่อหนึ่งหน่วย เมื่ออุปสงค์เป็น 100x หน่วย จงหารายได้เพิ่มเมื่ออุปสงค์เป็น 300 หน่วย

41) บริษัทให้เช่าทรัพย์สินแห่งหนึ่ง ให้เช่าบ้านเดือนละ p บาท เมื่อให้เช่าบ้าน x หลัง และ $p = 15\sqrt{300 - 2x}$ จงหาว่าต้องให้เช่าบ้านกี่หลัง จึงมีรายได้เพิ่มเป็นศูนย์

42) จงหาฟังก์ชันรายได้เพิ่มของสินค้าชนิดหนึ่งซึ่งสมการอุปทานเป็น $px = 5\sqrt{10x + 1}$ เมื่อ x อยู่ในช่วง $[1, 8]$

สำหรับข้อ 43-46 จงหาอนุพันธ์ของฟังก์ชันที่กำหนดให้

43) $f(x) = |x^2 - 4|$

44) $f(x) = x\,|x|$

45) $g(x) = |x^3|$

46) $h(x) = \sqrt[3]{x + x}$

หมายเหตุ $|a| = \sqrt{a^2}$

3.7 อนุพันธ์ของอิมพลิสิตฟังก์ชัน และอัตราสัมพัทธ์ Implicit Differentiation and Related Rates

ถ้า $f = \{(x, y) \mid y = 3x^2 + 5x + 1\}$ (3.7.1)

แล้วสมการ $y = 3x^2 + 5x + 1$ กำหนดฟังก์ชัน f โดยชัดเจน

แต่อาจมีฟังก์ชันซึ่งไม่ได้กำหนดไว้โดยชัดเจน เช่น สมการ

$$x^6 - 2x = 3y^6 + y^5 - y^2 \tag{3.7.2}$$

จะไม่สามารถแก้สมการหาค่า y ในเทอมของ x ได้ แต่ถึงอย่างไรก็ตามจะมีหนึ่งฟังก์ชันหรือมากกว่า ของ f ที่มีลักษณะว่า ถ้า $y = f(x)$ แล้ว สมการ 3.7.2 เป็นจริง นั่นคือ

$$x^6 - 2x = 3[f(x)]^6 + [f(x)]^5 - [f(x)]^2$$

สำหรับทุก ๆ ค่า x ที่เป็นโดเมนของฟังก์ชัน f

ในกรณีเช่นนี้เรียกว่าฟังก์ชัน f ถูกกำหนดโดยปริยายด้วยสมการ (3.7.2) ที่กำหนดให้ด้วยการตั้งข้อสันนิษฐานว่าสมการ (3.7.2) กำหนด y ให้เป็นฟังก์ชันของ x ที่หาอนุพันธ์ได้ จึงใช้วิธีการหาอนุพันธ์ y เทียบกับ x ที่เรียกว่าการหาอนุพันธ์เชิงปริยาย (Inplicit differentiation) ซึ่งใช้กฎต่าง ๆ เกี่ยวกับการหาอนุพันธ์ต่าง ๆ ที่กล่าวมาแล้ว

จาก $x^6 - 2x = 3y^6 + y^5 - y^2$ (3.7.3)

ถ้าให้ $F(x) = x^6 - 2x$ (3.7.4)

$G(y) = 3y^6 + y^5 - y^2$ (3.7.5)

กำหนดให้ y เป็นฟังก์ชันของ x เช่น

$$y = f(x)$$

จะเขียนสมการ (3) ได้เป็น

$$F(x) = G(y) = G[f(x)] \tag{3.7.6}$$

สมการ (3.7.6) เป็นจริงทุก ๆ ค่า x ในโดเมนของ f ซึ่ง $G[f(x)]$ หาค่าได้ ดังนั้น สำหรับทุก ๆ ค่า x ที่หาอนุพันธ์ของ f ได้จะมี

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dx}(x^6 - 2x) &= \frac{d}{dx}(3y^6 + y^5 - y^2) \\
6x^5 - 2 &= 18y^5\frac{dy}{dx} + 5y^4\frac{dy}{dx} - 2y\frac{dy}{dx} \\
6x^5 - 2 &= (18y^5 + 5y^4 - 2y)\frac{dy}{dx} \\
\frac{6x^5 - 2}{18y^5 + 5y^4 - 2y} &= \frac{dy}{dx}
\end{aligned}$$

ตัวอย่าง 3.7.1 กำหนดให้ $3x^4y^2 - 7xy^3 = 4 - 8y$ จงหา $\frac{dy}{dx}$

วิธีทำ โดยถือว่า y เป็นฟังก์ชันของ x

$$\frac{d}{dx}(3x^4y^2 - 7xy^3) = \frac{d}{dx}(4 - 8y)$$

$$\frac{d}{dx}(3x^4y^2) - \frac{d}{dx}(7xy^3) = \frac{d}{dx}(4) - \frac{d}{dx}(8y)$$

$$3(x^4\frac{d}{dx}(y^2) + y^2\frac{d}{dx}(x^4)) - 7(x\frac{d}{dx}(y^3) + y^3 \quad) = 0 - 8\frac{dy}{dx}$$

$$3(2x^4y\frac{dy}{dx} + 4x^3y^2) - 7(3xy^2\frac{dy}{dx} + y^3) = -8\frac{dy}{dx}$$

$$6x^4y\frac{dy}{dx} - 21xy^2\frac{dy}{dx} + 8\frac{dy}{dx} + 12x^3y^2 - 7y^3 = 0$$

$$(6x^4y - 21xy^2 + 8)\frac{dy}{dx} = -12x^3y^2 + 7y^3$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{7y^3 - 12x^3y^2}{6x^4y - 21xy^2 + 8}$$

ตัวอย่าง 3.7.2 กำหนดให้ $(x + y)^2 - (x - y)^2 = x^4 + y^4$ จงหา $\frac{dy}{dx}$

วิธีทำ โดยถือ y เป็นฟังก์ชันของ x

$$\frac{d}{dx}[(x + y)^2 - (x - y)^2] = \frac{d}{dx}(x^4 + y^4)$$

$$\frac{d}{dx}(x + y)^2 - \frac{d}{dx}(x - y)^2 = \frac{d}{dx}(x^4) + \frac{d}{dx}(y^4)$$

$$2(x + y)\frac{d}{dx}(x + y) - 2(x - y)\frac{d}{dx}(x - y) = 4x^3 + 4y^3\frac{dy}{dx}$$

$$2(x + y)(1 + \frac{dy}{dx}) - 2(x - y)(1 - \frac{dy}{dx}) = 4x^3 + 4y^3\frac{dy}{dx}$$

$$2(x + y) - 2(x - y) + 2(x + y)\frac{dy}{dx} + 2(x - y)\frac{dy}{dx} = 4x^3 + 4y^3\frac{dy}{dx}$$

$$2x + 2y - 2x + 2y + (2x + 2y + 2x - 2y)\frac{dy}{dx} = 4x^3 + 4y^3\frac{dy}{dx}$$

$$4y + 4x\frac{dy}{dx} - 4y^3\frac{dy}{dx} = 4x^3$$

$$(4x - 4y^3)\frac{dy}{dx} = 4x^3 - 4y$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{4x^3 - 4y}{4x - 4y^3}$$

$$= \frac{x^3 - y}{x - y^3}$$

ตัวอย่าง 3.7.3 จงหาสมการของเส้นสัมผัสที่สัมผัสกับเส้นโค้ง (curve) $x^3 + y^3 = 9$ ณ จุด (1, 2)

วิธีทำ หา $\frac{dy}{dx}$

$$\frac{d}{dx}(x^3 + y^3) = \frac{d}{dx}(g)$$

$$3x^2 + 3y^2\frac{dy}{dx} = 0$$

$$x^2 + y^2\frac{dy}{dx} = 0$$

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{x^2}{y^2}$$

ณ จุด (1, 2), $$\frac{dy}{dx} = -\frac{(1)^2}{(2)^2}$$

$$= -\frac{1}{4}$$

$\therefore$ $-\frac{1}{4}$ เป็นความชันของเส้นสัมผัส ณ จุด (1, 2)

จากสมการเส้นตรงคือ

$$y - y_1 = m(x - x_1) \quad \text{เมื่อ } m \text{ เป็นความชัน} \tag{3.7.7}$$

เมื่อ $x_1 = 1$, $y_1 = 2$ และ $m = -\frac{1}{4}$ แทนค่าในสมการ (3.7.7)

$$y - 2 = -\frac{1}{4}(x - 1) \quad \text{เป็นสมการเส้นสัมผัส}$$

มีปัญหาเป็นจำนวนมากที่เกี่ยวข้องกับอัตราการเปลี่ยนแปลงของสองตัวแปร หรือมากกว่า เมื่อเทียบกับเวลา ซึ่งไม่จำเป็นที่จะกำหนดตัวแปรให้เป็นฟังก์ชันของเวลาโดยตรง

ตัวอย่าง สมมุติให้ F เป็นฟังก์ชันของสองตัวแปรคือ x และ y ซึ่ง $x = f(t)$ และ $y = g(t)$ โดย t เป็นเวลามีหน่วยเป็นวินาทีแล้ว

$$F(x, y) = F\big(f(t), g(t)\big) = F(t)$$

ถ้าอัตราการเปลี่ยนแปลงของ x เทียบกับเวลา t คือ $\frac{dx}{dt}$

และอัตราการเปลี่ยนแปลงของ y เทียบกับเวลา t คือ $\frac{dy}{dt}$

แล้วอนุพันธ์เชิงปริยายเทียบกับเวลา t จะหาได้ตามตัวอย่างต่อไปนี้

ตัวอย่าง 3.7.4 บันไดยาว 25 ฟุต วางพิงกำแพง ถ้าโคนบันไดเลื่อนห่างจากกำแพงด้วยความเร็ว 3 ฟุต/วินาที จงหาความเร็วที่ปลายบันไดเลื่อนต่ำลง เมื่อโคนบันไดอยู่ห่างจากกำแพง 15 ฟุต

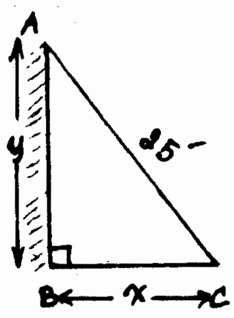
วิธีทำ ให้ t เป็นเวลามีหน่วยเป็นวินาที

x ระยะทางจากกำแพงถึงโคนบันได ณ t วินาที

y เป็นระยะทางจากพื้นดินถึงปลายบันได ณ t วินาที

โจทย์กำหนดว่า $\frac{dx}{dt} = 3$ ฟุต/วินาที ต้องการหา $\frac{dy}{dy} = ?$

จากสามเหลี่ยมมุมฉาก ABC



$$AB^2 + BC^2 = AC^2$$

$$y^2 + x^2 = 25^2 \tag{3.7.8}$$

$$\frac{d}{dt}(y^2 + x^2) = \frac{d}{dt}(25)^2$$

$$2y\frac{dy}{dt} + 2x\frac{dx}{dt} = 0$$

$$2y\frac{dy}{dt} = -2x\frac{dx}{dt}$$

$$\frac{dy}{dt} = \frac{x}{y}\frac{dx}{dt}$$

$$= -3\frac{x}{y} \qquad \left(\frac{dx}{dt} = 3\right) \qquad (3.7.9)$$

จากสมการ (3.7.8) ถ้า $x = 15$ แล้ว $y = 20$

แทนค่า $x = 15,\ y = 20$ ใน (3.7.9)

$$\frac{dy}{dt} = \frac{-3\,(15)}{20}$$

$$= -\frac{45}{20}$$

$$= -\frac{9}{4}$$

$$= -2\tfrac{1}{4}$$

นั่นคือบันไดเลื่อนต่ำลงด้วยความเร็ว $2\frac{1}{4}$ ฟุต/วินาที ขณะที่โคนบันไดห่างจากกำแพง 15 ฟุต

หมายเหตุ $\frac{dy}{dt}$ มีเครื่องหมายเป็นลบเพราะว่าความสูงของ y จะลดต่ำลงขณะเมื่อ t มีค่าเพิ่มขึ้น

ตัวอย่าง 3.7.5 สมมุติในตลาดแห่งหนึ่ง

ให้ p เป็นราคาของส้มเข่งหนึ่งมีหน่วยเป็นบาท

x เป็นจำนวนเข่งส้มที่ส่งตลาดประจำวันมีหน่วยเป็นพัน

และปริมาณส้มที่ส่งตลาดอยู่ในรูปสมการ

$$Px - 20p - 3x + 105 = 0 \qquad (3.7.10)$$

ถ้าจำนวนการส่งส้มสู่ตลาดลดลงด้วยอัตรา 250 เข่งต่อวัน

จงหาอัตราการเปลี่ยนแปลงของราคาเมื่อการส่งส้มสู่ตลาดประจำวันเท่ากับ 5000 เข่ง

วิธีทำ ให้ t เป็นเวลาที่ผ่านไปตั้งแต่การส่งส้มเริ่มลดลง มีหน่วยเป็นวัน

ดังนั้น p และ x เป็นฟังก์ชันของ t

เนื่องจากการส่งส้มสู่ตลาดลดลง 250 เข่งต่อวัน, $\frac{dx}{dt} = \frac{-250}{1000} = -\frac{1}{4}$

ต้องการหา $\frac{dp}{dt}$ เมื่อ $x = 5$

จากสมการ 3.7.10 หาอนุพันธ์เทียบกับเวลา t ได้

$$\frac{d}{dt}(Px - 20p - 3x + 105) = \frac{d}{dt}(0)$$

$$\frac{d}{dt}(Px) - 20\frac{dP}{dt} - 3\frac{dx}{dt} + \frac{d}{dt}(105) = 0$$

$$P\frac{dx}{dt} + x\frac{dP}{dt} - 20\frac{dP}{dt} - 3\frac{dx}{dt} + 0 = 0$$

$$(P - 3)\frac{dx}{dt} + (x - 20)\frac{dP}{dt} = 0$$

$$\frac{dP}{dt} = -\frac{(P - 3)}{(x - 20)}\frac{dx}{dt} \qquad (3.7.11)$$

จากสมการ (3.7.10) เมื่อ $x = 5$ แล้ว $p = 6$

แทนค่า $\frac{dx}{dt} = -\frac{1}{4}$, $p = 6$ และ $x = 5$ ใน (3.7.11)

$$\frac{dp}{dt} = -\frac{(6 - 3)}{(5 - 20)} \cdot \left(-\frac{1}{4}\right)$$

$$= -\frac{3}{15} \cdot \frac{1}{4}$$

$$= -\frac{1}{20}$$

ดังนั้น ราคาส้มแต่ละเข่งลดลงด้วยอัตรา 5 สตางค์ต่อวัน เมื่อการส่งส้มประจำวันเป็น 5,000 เข่ง

แบบฝึกหัด

ข้อ 1-8 จงหา $\frac{dy}{dx}$ โดยวิธีหาอนุพันธ์เชิงปริยาย (Implicit differenttiation)

1. $x^2 + y^2 = 16$
2. $2x^3y + 3xy^3 = 5$
3. $x^2 = \frac{x + 2y}{x - 2y}$
4. $\frac{x}{y} - 4y = x$
5. $y + \sqrt{xy} = 3x^3$
6. $(x + y)^2 - (x - y)^2 = x^3 + y^3$
7. $\frac{y}{x - y} = 2 + x^2$

8. $\sqrt{y} + \sqrt[3]{y} + \sqrt[4]{y} = x$

ข้อ 9-12 จงพิจารณา y ซึ่งเป็นตัวแปรอิสระ และหา $\frac{dx}{dy}$

9. $x^4 + y^4 = 12x^2y$

10. $y = 2x^3 - 5x$

11. $x^3y + 2y^4 - x^4 = 0$

12. $y\sqrt{x} - x\sqrt{y} = 9$

13. จงหาสมการของเส้นสัมผัสของเส้นโค้ง $16x^4 + y^4 = 32$ ณ ที่จุด (1, 2)

14. จงหาอัตราการเปลี่ยนแปลงของ y เทียบกับ x ที่จุด (3, 2) ถ้า $7y^2 - xy^3 = 4$

15. ลูกหิมะทรงกลมเส้นผ่าศูนย์กลาง 6 ฟุต เมื่อถูกความร้อนจะละลายด้วยอัตรา $\frac{1}{4}$ ฟุต^3/นาที จงหาอัตราการเปลี่ยนแปลงของรัศมีเมื่อรัศมีเป็น 2 ฟุต (ปริมาตรทรงกลมดัน $V = \frac{4}{3}\pi r^3$)

16. โรงงานแห่งหนึ่งผลิตสินค้า 50 หน่วยต่อสัปดาห์ ในการผลิตนี้อัตราการผลิตจะเพิ่มขึ้น 2 หน่วยต่อสัปดาห์ ($\frac{dx}{dt} = 2$)

ถ้า C เป็นต้นทุนการผลิตสินค้ามีหน่วยเป็นบาท

และ $C = 0.08x^3 - x^2 + 10x + 48$

จงหาอัตราที่ต้นทุนการผลิตเพิ่มขึ้นขณะนั้น ($\frac{dc}{dt}$)

17. สมมุติให้ใช้คนงาน y คน ผลิตสินค้า x หน่วย และให้ $x = 4y^2$ ถ้าในปีนี้ผลิตสินค้า 250,000 หน่วย และอัตราการผลิตเพิ่มขึ้น 18,000 หน่วย/ปี

จงหาอัตราของจำนวนคนงานที่จะเพิ่มขึ้นขณะนั้น (หา $\frac{dy}{dt}$)