บทที่ 2
ลิมิตและความต่อเนื่อง
(Limits and Continuity)

2.1 ลิมิตของฟังก์ชัน

พิจารณาฟังก์ชัน f ซึ่งนิยามโดยสมการ

$$f(x) = \frac{(2x+3)(x-1)}{(x-1)} \tag{2.1.1}$$

f หาค่าได้สำหรับทุกค่าของ x ยกเว้นที่ $x = 1$ แต่ถ้า $x \neq 1$ เศษและส่วนสามารถหารด้วย $(x-1)$ จะได้

$$f(x) = 2x + 3 \ ; \ x \neq 1$$

เราจะแสดงว่าค่าของฟังก์ชัน $f(x)$ เมื่อ x เข้าใกล้ 1 แต่ไม่เท่ากับ 1 ขั้นแรกให้ x มีค่าเป็น 0, 0.25, 0.75, 0.90, 0.99, 0.999, 0.9999, ... และต่อไปเรื่อย ๆ เราแทนค่าของ x เข้าใกล้ 1 แต่มีค่าน้อยกว่า 1 ดูจากตาราง 2.1.1

x	0	0.25	0.5	0.75	0.9	0.99	0.999	0.9999	0.99999
$f(x) = 2x + 3$ $(x \neq 1)$	3	3.5	4	4.5	4.8	4.98	4.998	4.9998	4.99998

ตาราง 2.1.1

ต่อไปให้ x มีค่าเป็น 2, 1.75, 1.5, 1.25, 1.1, 1.01, 1.001, 1.0001, 1.00001 ดูจากตาราง 2.1.2

x	2	1.75	1.5	1.25	1.1	1.01	1.001	1.0001	1.00001
$f(x) = 2x + 3$ $(x \neq 1)$	7	6.5	6.0	5.5	5.2	5.02	5.002	5.0002	5.00002

ตาราง 2.1.2

ดูจากตารางทั้งสอง เราพบว่า เมื่อ x มีค่าเข้าใกล้ 1 มาก ๆ $f(x)$ จะเข้าใกล้ 5 และ

เมื่อค่าของ x ยิ่งเข้าใกล้ 1 มากเท่าใด ค่าของ f(x) ก็จะเข้าใกล้ 5 มากขึ้นเท่านั้น จากตาราง 2.1.1 เมื่อ $x = 0.9$ $f(x) = 4.8$ เมื่อ $x = 0.1$ ซึ่งน้อยกว่า 1 f(x) เป็น 0.2 ซึ่งน้อยกว่า 5 เมื่อ $x = 0.9999$ $f(x) = 0.49998$ นั่นคือ เมื่อ x น้อยกว่า 1 อยู่ 0.0001 f(x) น้อยกว่า 5 อยู่ 0.0002

ตาราง 2.1.2 แสดงว่า เมื่อ $x = 1.1$ $f(x) = 5.2$ นั่นคือ เมื่อ x มากกว่า 1 อยู่ 0.1 f(x) มากกว่า 5 อยู่ 0.2 เมื่อ $x = 1.001$ $f(x) = 5.002$ หมายความว่า เมื่อ x มากกว่า 1 อยู่ 0.001 f(x) มีค่ามากกว่า 5 อยู่ 0.002

ดังนั้น จากตารางทั้งสอง เราพบว่า เมื่อ x แตกต่างจาก 1 เป็น ± 0.001 (นั่นคือ $x = 0.999$ หรือ $x = 1.001$ f(x) แตกต่างจาก 5 อยู่ ± 0.002 ซึ่ง $f(x) = 4.998$ หรือ $f(x) = 5.002$) และเมื่อ x แตกต่างจาก 1 เป็น ± 0.0001 f(x) แตกต่างจาก 5 เป็น 0.0002

โดยอีกวิธีหนึ่ง เราเริ่มพิจารณาค่าของ f(x) ก่อน จากตารางทั้งสองเราพบว่า $|f(x) - 5| = 0.2$ เมื่อ $|x - 1| = 0.1$ นั่นคือ $|f(x) - 5| < 0.2$ เมื่อไรก็ตามที่ $0 < |x - 1| < 0.1$

ข้อสังเกต เรากำหนดเงื่อนไขให้ $0 < |x - 1|$ เพราะว่าเราต้องการหาค่า f(x) เมื่อ x เข้าใกล้ 1 เท่านั้น $(x \neq 1)$

ต่อไป $|f(x) - 5| = 0.002$ เมื่อ $|x - 1| = 0.001$ และ $|f(x) - 5| < 0.002$ เมื่อไรก็ตามที่ $0 < |x - 1| < 0.001$

โดยวิธีเดียวกัน $|f(x) - 5| = 0.0002$ เมื่อ $|x - 1| = 0.0001$ และ $|f(x) - 5| < 0.0002$ เมื่อไรก็ตามที่ $0 < |x - 1| < 0.0001$

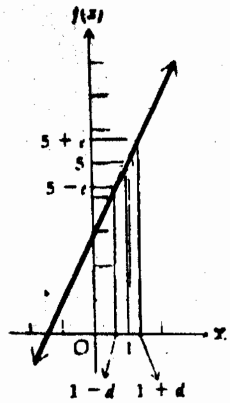
เราสามารถทำเช่นนี้ต่อไปและทำให้ค่าของ f(x) เข้าใกล้ 5 เท่าใดก็ได้ โดยที่ค่าของ x อยู่ใกล้ 1 แต่ไม่เท่ากับ 1 หรือพูดอีกอย่างได้ว่า เราสามารถทำค่าสัมบูรณ์ของผลต่างระหว่าง f(x) กับ 5 เล็กเท่ากับที่เราพอใจได้ โดยทำค่าสัมบูรณ์ผลต่างระหว่าง x กับ 1 ให้เล็กเพียงพอ แต่ไม่เท่ากับ ศูนย์ นั่นคือ $|f(x) - 5|$ สามารถทำให้เล็กเท่าที่เราพอใจได้ โดยทำ $|x - 1|$ เล็กอย่างเพียงพอ แต่ $|x - 1| > 0$ การทำแบบนี้เป็นการมุ่งอธิบายลิมิตของฟังก์ชันแบบทั่วไป

นิยาม 2.1.1 : ให้ f เป็นฟังก์ชันซึ่งหาค่าได้สำหรับทุก ๆ จำนวนจริงในช่วงเปิด I (a อยู่ในช่วงเปิด I) อาจจะยกเว้นที่ a ลิมิตของฟังก์ชัน f(x) เมื่อ x เข้าใกล้ a เป็น L สามารถเขียนเป็น

$$\lim_{x \to a} f(x) = L$$

$|f(x) - L|$ สามารถทำให้เล็กเท่าที่เราพอใจได้ โดยเลือก $|x - a|$ เล็กอย่างเพียงพอ แต่ $|x - a| > 0$

ในอีกนัยหนึ่ง ค่าฟังก์ชัน f(x) เข้าใกล้ลิมิต L เมื่อ x เข้าใกล้ a ถ้าค่าสัมบูรณ์ของผลต่างระหว่าง f(x) กับ L สามารถทำให้มีค่าเท่าที่เราพอใจ โดยทำให้ x มีค่าเข้าใกล้ a อย่างเพียงพอ แต่ไม่เท่ากับ a



รูป 2.1.1

จากนิยามข้างต้น สำหรับฟังก์ชันนิยามโดยสมการ (2.1.1) แสดงในรูป 2.1.1 จากรูปเราพบว่าฟังก์ชัน f(x) บนแกนตั้ง จะอยู่ระหว่าง $5 - e$ และ $5 + e$ (นั่นคือ f(x) จะอยู่ภายใน e หน่วยของ 5) เมื่อไรก็ตาม x ซึ่งอยู่บนแกนนอนอยู่ระหว่าง $1 - d$ และ $1 + d$ (นั่นคือเมื่อไรก็ตาม x อยู่ภายใน d หน่วย ของ 1) หรือพูดอีกอย่างว่า f(x) บนแกนตั้ง สามารถจำกัดอยู่ระหว่าง $5 - e$ และ $5 + e$ โดยจำกัดว่า x อยู่บนแกนนอนอยู่ระหว่าง $1 - d$ และ $1 + d$

จะเห็นได้ว่าในนิยามข้างต้นไม่มีการอ้างถึงค่าของฟังก์ชัน เมื่อ $x = a$ นั่นคือไม่มีความจำเป็นว่าฟังก์ชันหาค่าได้เมื่อ $x = a$ เพื่อว่า $\lim_{x \to a} f(x)$ หาค่าได้ ดังตัวอย่าง

$$\lim_{x \to 1} \frac{(2x + 3)(x - 1)}{(x - 1)} = 5$$

แต่ $\frac{(2x + 3)(x - 1)}{(x - 1)}$ หาค่าไม่ได้ เมื่อ $x = 1$

เพื่อที่จะหาลิมิตของฟังก์ชันได้โดยวิธีตรงไปตรงมา เราจึงต้องการทฤษฎีหลายทฤษฎี การพิสูจน์ของแต่ละทฤษฎีอาศัยนิยามข้างต้นเป็นพื้นฐาน แต่จะไม่พิสูจน์ในหนังสือเล่มนี้ สำหรับทฤษฎีที่ยาก หากผู้อ่านสนใจให้อ่านได้จากหนังสือของ Leithold : The Calculus with Analytic Geometry

ทฤษฎีบทที่ 2.1.1 ถ้า m และ b เป็นตัวคงค่าใด ๆ

$$\lim_{x \to a} (mx + b) = ma + b$$

ตัวอย่าง การใช้ทฤษฎีบทที่ 2.1.1

$$\lim_{x \to 2} (3x + 5) = 3(2) + 5 = 11$$

ทฤษฎีบทที่ 2.1.2 ถ้า c เป็นค่าคงที่ ดังนั้น สำหรับจำนวน a ใด ๆ

$$\lim_{x \to a} c = c$$

พิสูจน์ทฤษฎีบทที่ 2.1.2 ได้จากทฤษฎีบทที่ 2.1.1 โดยให้ $m = 0$ และ $b = c$

ทฤษฎีบทที่ 2.1.3

$$\lim_{x \to a} x = a$$

พิสูจน์ทฤษฎี 2.1.3 ได้จากทฤษฎีบทที่ 2.1.1 โดยสมมุติให้ $m = 1$ และ $b = 0$

ตัวอย่าง การใช้ทฤษฎีบทที่ 2.1.2

$$\lim_{x \to 5} 7 = 7$$

และการใช้ทฤษฎีบทที่ 2.1.3

$$\lim_{x \to -6} x = -6$$

ทฤษฎีบทที่ 2.1.4 ถ้า

$\lim_{x \to a} f(x) = L$ และ $\lim_{x \to a} g(x) = M$ ดังนั้น

$$\lim_{x \to a} [f(x) \pm g(x)] = L \pm M$$

ทฤษฎีบทที่ 2.1.5 ถ้า

$\lim_{x \to a} f_1(x) = L_1$, $\lim_{x \to a} f_2(x) = L_2$, ...

.... $\lim_{x \to a} f_n(x) = L_n$ ดังนั้น

$$\lim_{x \to a} [f_1(x) \pm f_2(x) \pm f_3(x) \pm \dots\dots \pm f_n(x)] = L_1 \pm L_2 \pm \dots \pm L_n$$

ทฤษฎีบทนี้พิสูจน์ได้ โดยการประยุกต์ทฤษฎีบทที่ 2.1.4 และการอนุมาน

ทฤษฎีบทที่ 2.1.6 ถ้า

$\lim_{x \to a} f(x) = L$ และ $\lim_{x \to a} g(x) = M$ ดังนั้น

$$\lim_{x \to a} f(x) \cdot g(x) = L \cdot M$$

ตัวอย่าง จากทฤษฎีบทที่ 2.1.3 $\lim_{x \to 3} x = 3$ และ จากทฤษฎีบทที่ 2.1.1 $\lim_{x \to 3} (2x+1)$ $= 7$ ดังนั้น จากทฤษฎีบทที่ 2.1.6 จะได้

$$\lim_{x \to 3} x(2x + 1) = \lim_{x \to 3} x \cdot \lim_{x \to 3} (2x + 1)$$

$$= 3 \cdot 7$$
$$= 21$$

ทฤษฎีบทที่ 2.1.6 สามารถขยายเป็นจำนวนฟังก์ชันที่นับได้ถ้วน โดยประยุกต์จากการอนุมาน

ทฤษฎีบทที่ 2.1.7 ถ้า

$$\lim_{x \to a} f_1(x) = L_1 \qquad \lim_{x \to a} f_2(x) = L_2 ,$$

$\ldots\ldots\ldots\ldots, \lim_{x \to a} f_n(x) = L_n$ ดังนั้น

$$\lim_{x \to a} [f_1(x) + f_2(x) + \ldots\ldots\ldots + f_n(x)] = L_1 \cdot L_2 \cdot L_3 \ldots\ldots\ldots L_n$$

ทฤษฎีบทที่ 2.1.8 ถ้า

$\lim_{x \to a} f(x) = L$ และ n เป็นค่าเต็มบวกใด ๆ ดังนั้น

$$\lim_{x \to a} [f(x)]^n = L^n$$

การพิสูจน์ได้จากทฤษฎีบทที่ 2.1.7 โดยให้

$$f(x) = f_1(x) = f_2(x) = f_3(x) = \ldots\ldots\ldots\ldots = f_n(x)$$

และ $L = L_1 = L_2 = L_3 = \ldots\ldots\ldots\ldots = L_n$

ตัวอย่าง จากทฤษฎีบทที่ 2.1.1

$\lim_{x \to -2} (5x + 7) = -3$ ดังนั้น

จากทฤษฎีบทที่ 2.1.8 จะได้ว่า

$$\begin{aligned} \lim_{x \to -2} (5x + 7)^4 &= [\lim_{x \to -2} (5x + 7)]^4 \\ &= (-3)^4 \\ &= 81 \end{aligned}$$

ทฤษฎีบทที่ 2.1.9 ถ้า

$\lim_{x \to a} f(x) = L$ และ $\lim_{x \to a} g(x) = M$ และ $M \neq 0$ ดังนั้น

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{L}{M}$$

ตัวอย่าง จากทฤษฎีบทที่ 2.1.3 $\lim_{x \to 4} x = 4$ และจากทฤษฎีบทที่ 2.1.1 $\lim_{x \to 4} (-7x + 1) = -27$ ดังนั้น จากทฤษฎีบทที่ 2.1.9

$$\lim_{x \to 4} \frac{x}{(-7x + 1)} = \frac{\lim_{x \to 4} x}{\lim_{x \to 4} (-7x + 1)} = \frac{4}{-27} = \frac{-4}{27}$$

ทฤษฎีบทที่ 2.1.10 ถ้า

$$\lim_{x \to a} f(x) = L \quad \text{ดังนั้น}$$

$$\lim_{x \to a} \sqrt[n]{f(x)} = \sqrt[n]{L}$$

ถ้า $L > 0$ และ n เป็นจำนวนเต็มบวกใด ๆ หรือถ้า $L \le 0$ และ n เป็นจำนวนคี่

ตัวอย่างเช่น

$$\lim_{x \to 4} \sqrt[3]{\frac{x}{-7x+1}} = \sqrt[3]{\lim_{x \to 4} \frac{x}{-7x+1}} = \sqrt[3]{\frac{-4}{27}}$$

$$= \sqrt[3]{\frac{4}{3}}$$

จากตัวอย่างข้างต้นที่แสดงมาทั้งหมด เป็นการนำเอาทฤษฎีบทเกี่ยวกับลิมิตไปใช้ประโยชน์ต่อไป

ตัวอย่าง 2.1.1 จงหา $\lim_{x \to 3} (x^2 + 7x - 5)$ ให้บอกทฤษฎีบทที่ใช้ด้วย

วิธีทำ

$$\begin{aligned}
\lim_{x \to 3} (x^2 + 7x - 5) &= \lim_{x \to 3} x^2 + \lim_{x \to 3} 7x - \lim_{x \to 3} 5 && \text{ท.บ. 2.1.5} \\
&= \lim_{x \to 3} x \cdot \lim_{x \to 3} x + \lim_{x \to 3} 7 \cdot \lim_{x \to 3} x - \lim_{x \to 3} 5 && \text{ท.บ. 2.1.6} \\
&= 3 \cdot 3 + 7 \cdot 3 - 5 && \text{ท.บ. 2.1.3 และ ท.บ. 2.1.2} \\
&= 9 + 21 - 5 \\
&= 25
\end{aligned}$$

ข้อสังเกต เราสามารถหาค่าลิมิตโดยใช้ประโยชน์จากทฤษฎีลิมิตโดยตรงได้ และสำหรับฟังก์ชัน f ซึ่งนิยามโดย $f(x) = x^2 + 7x - 5$ พบว่า $f(3) = 3^2 + 7 \cdot 3 - 5 = 25$ ซึ่งมีค่าเท่ากับ $\lim_{x \to 3} (x^2 + 7x - 5)$ แต่ไม่เป็นจริงเสมอไปว่า $\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$ ในตัวอย่างนี้ $\lim_{x \to 3} f(x) = f(3)$ เพราะว่าฟังก์ชัน f มีความต่อเนื่องที่จุด $x = 3$ ซึ่งจะกล่าวถึงความหมายของฟังก์ชันต่อเนื่องในหัวข้อ 2.5

ตัวอย่าง 2.1.2 จงหา $\lim_{x \to 2} \sqrt{\frac{x^3 + 2x + 3}{x^2 + 5}}$ พร้อมทั้งบอกทฤษฎีลิมิตที่ใช้ด้วย

วิธีทำ

$$\lim_{x \to 2} \sqrt{\frac{x^3 + 2x + 3}{x^2 + 5}} = \sqrt{\lim_{x \to 2} \frac{x^3 + 2x + 3}{x^2 + 5}} \qquad \text{(ท.บ. 2.1.10)}$$

$$\sqrt{\frac{\lim_{x \to 2} (x^3 + 2x + 3)}{\lim_{x \to 2} (x^2 + 5)}} \qquad \text{(ท.บ. 2.1.9)}$$

$$= \sqrt{\frac{\lim_{x \to 2} x^3 + \lim_{x \to 2} 2x + \lim_{x \to 2} 3}{\lim_{x \to 2} x^2 + \lim_{x \to 2} 5}} \qquad \text{(ท.บ. 2.1.5)}$$

$$= \sqrt{\frac{\left(\lim_{x \to 2} x\right)^3 + \lim_{x \to 2} 2 \cdot \lim_{x \to 2} x + \lim_{x \to 2} 3}{\left(\lim_{x \to 2} x\right)^2 + \lim_{x \to 2} 5}}$$

$$= \sqrt{\frac{2^3 + 2 \cdot 2 + 3}{2^2 + 5}} \qquad \text{(ท.บ. 2.1.6 และ ท.บ. 2.1.8)}$$

(ท.บ. 2.1.3 และ ท.บ. 2.1.2)

$$= \sqrt{\frac{8 + 4 + 3}{4 + 5}}$$

$$= \frac{\sqrt{15}}{3}$$

ตัวอย่าง 2.1.3 จงหา $\lim_{x \to 3} \frac{x^3 - 27}{x - 3}$ พร้อมบอกทฤษฎีบทที่ใช้

วิธีทำ ตัวอย่างนี้มีปัญหายุ่งยากมากเพราะว่าทฤษฎีบทที่ 2.1.9 ไม่สามารถจะนำไปใช้กับผลหาร $(x^3 - 27) / (x - 3)$ ได้เพราะว่า $\lim_{x \to 3} (x - 3) = 0$ แต่อย่างไรก็ตาม ถ้าเอาเศษมาแยกแฟคเตอร์ จะได้ว่า

$$\frac{x^3 - 27}{x - 3} = \frac{(x - 3)(x^2 + 3x + 9)}{(x - 3)}$$

$$= (x^2 + 3x + 9) \quad \text{ถ้า } x \neq 3$$

เพราะว่า ถ้า $x \neq 3$ เราสามารถหารเศษและส่วนด้วย $x - 3$ ได้

เมื่อหาค่า $\lim_{x \to 3} \left[\frac{x^3 - 27}{x - 3} \right]$ ให้พิจารณาค่าของ x เมื่อ x เข้าใกล้ 3 แต่ไม่เท่ากับ 3

$$\lim_{x \to 3} \frac{x^3 - 27}{x - 3} = \lim_{x \to 3} \frac{(x - 3)(x^2 + 3x + 9)}{(x - 3)}$$

$$= \lim_{x \to 3} (x^2 + 3x + 9)$$

หารเศษและส่วนด้วย $(x - 3)$ เพราะว่า $x \neq 3$

$$= \lim_{x \to 3} x^2 + \lim_{x \to 3} (3x + 9) \qquad \text{(ท.บ. 2.1.4)}$$

$$= \left(\lim_{x \to 3} x\right)^2 + 18 \qquad \text{(ท.บ. 2.1.8 และ ท.บ. 2.1.1)}$$

(ท.บ. 2.1.3)

$$= (3)^2 + 18$$

$$= 27$$

ข้อสังเกต $\frac{x^3 - 27}{x - 3}$ ไม่สามารถหาค่าได้ เมื่อ $x = 3$ แต่

$\lim_{x \to 3} \left[\frac{x^3 - 27}{x - 3}\right]$ หาค่าได้และมีค่าเป็น 27

ตัวอย่าง 2.1.4 กำหนดว่า f เป็นฟังก์ชันซึ่งนิยามโดย

$$f(x) = \begin{cases} x - 3 & \text{ถ้า } x \neq 4 \\ 5 & \text{ถ้า } x = 4 \end{cases}$$

จงหา $\lim_{x \to 4} f(x)$

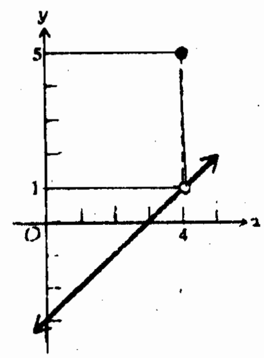
วิธีทำ เมื่อหาค่า $\lim_{x \to 4} f(x)$ ให้พิจารณาค่าของ x ที่เข้าใกล้ 4 แต่ไม่เท่ากับ 4 ดังนั้นจะได้

$$\lim_{x \to 4} f(x) = \lim_{x \to 4} (x - 3) = 1$$

จากตัวอย่างนี้ $\lim_{x \to 4} f(x) = 1$

แต่ $f(4) = 5$

ตัวอย่าง 2.1.4 นี้ เป็นตัวอย่างอันหนึ่งของฟังก์ชันซึ่งไม่ต่อเนื่องที่ $x = 4$ ในทางเรขาคณิตมีความหมายว่า กราฟของฟังก์ชันมีการขาดตอนที่จุด $x = 4$ (ดูรูป 2.1.2) กราฟของฟังก์ชันประกอบด้วยจุดโดดเดี่ยว (4, 5) และเส้นตรงซึ่งมีสมการเป็น $y = x - 3$ ยกเว้นจุด (4, 1)



รูป 2.1.2

ตัวอย่าง จงหา $\lim_{x \to 4} \frac{\sqrt{x} - 2}{x - 4}$

วิธีทำ เหมือนในตัวอย่างที่ผ่านมา ทฤษฎีบทที่ 2.1.9 ไม่สามารถประยุกต์ใช้กับผลหารของ $\frac{\sqrt{x} - 2}{x - 4}$ เพราะว่า $\lim_{x \to 4} (x - 4) = 0$ เพื่อทำให้ผลหารง่ายขึ้น คูณทั้งเศษและส่วนด้วย $\sqrt{x} + 2$ จะได้

$$\frac{\sqrt{x} - 2}{x - 4} = \frac{\sqrt{x} - 2}{x - 4} \cdot \frac{\sqrt{x} + 2}{\sqrt{x} + 2} = \frac{x - 4}{(x - 4)(\sqrt{x} + 2)}$$

เพราะว่าเรากำลังหาค่าลิมิตเมื่อ x เข้าใกล้ 4 เราจึงพิจารณาค่าของ x เมื่อ x เข้าใกล้ 4

แต่ไม่เท่ากับ 4 ดังนั้นเราจึงสามารถหารทั้งเศษและส่วนด้วย x - 4 ได้ เพราะฉะนั้น

$$\frac{\sqrt{x}-2}{x-4} = \frac{1}{\sqrt{x}+2}$$ คำตอบจะได้เป็น

$$\lim_{x \to 4} \frac{\sqrt{x}-2}{x-4} \quad \lim_{x \to 4} \frac{1}{\sqrt{x}+2}$$

$$= \frac{\lim_{x \to 4} 1}{\lim_{x \to 4} (\sqrt{x}+2)}$$ (ท.บ. 2.1.9)

$$= \frac{1}{\lim_{x \to 4} \sqrt{x} + \lim_{x \to 4} 2}$$ (ท.บ. 2.1.2 และ ท.บ. 2.1.4)

$$= \frac{1}{\sqrt{\lim_{x \to 4} x} + 2}$$ (ท.บ. 2.1.10 และ ท.บ. 2.1.2)

$$= \frac{1}{\sqrt{4}+2}$$ (ท.บ. 2.1.3)

$$= \frac{1}{4}$$

แบบฝึกหัดที่ 2.1

จากแบบฝึกหัดข้อ 1 ถึง 21 จงหาค่าของลิมิต (ถ้าหาค่าได้) พร้อมทั้งบอกทฤษฎีบทที่ใช้

1. $\lim_{x \to 2} (x^2 + 2x - 1)$

2. $\lim_{y \to -1} (y^3 - 2y^2 + 3y - 4)$

3. $\lim_{t \to 2} \frac{t^2 - 5}{2t^3 + 6}$

4. $\lim_{x \to -1} \frac{2x + 1}{x^2 - 3x + 4}$

5. $\lim_{x \to 2} \frac{x - 2}{x^2 - 4}$

6. $\lim_{x \to -5} \frac{x^2 - 25}{x + 5}$

7. $\lim_{y \to -2} \frac{y^3 + 8}{y + 2}$

8. $\lim_{s \to 1} \frac{s^3 - 1}{s - 1}$

9. $\lim_{x \to -3} \frac{x^2 + 5x + 6}{x^2 - x - 12}$

10. $\lim_{x \to 4} \frac{3x^2 - 17x + 20}{4x^2 - 25x + 36}$

11. $\lim_{r \to 1} \sqrt{\frac{8r + 1}{r + 3}}$

12. $\lim_{x \to 2} \sqrt{\frac{x^2 + 3x + 4}{x^3 + 1}}$

13. $\lim_{y \to -3} \sqrt{\frac{y^2 - 9}{2y^2 + 7y + 3}}$

14. $\lim_{t \to 3/2} \sqrt{\frac{8t^3 - 27}{4t^2 - 9}}$

15. $\lim_{x \to 9} \frac{3 - \sqrt{x}}{9 - x}$

16. $\lim_{t \to 0} \frac{2 - \sqrt{4 - t}}{t}$

17. $\lim_{x \to 0} \frac{\sqrt{x + 2} - \sqrt{2}}{x}$

18. $\lim_{x \to 1} \frac{\sqrt[3]{x} - 1}{x - 1}$

19. $\lim_{h \to 0} \frac{\sqrt[3]{h + 1} - 1}{h}$

20. $\lim_{x \to -2} \frac{x^3 - x^2 - x + 10}{x^2 + 3x + 2}$

21. $\lim_{x \to 3} \frac{2x^3 - 5x^2 - 2x - 3}{4x^3 - 13x^2 + 4x - 3}$

22. ถ้า $f(x) = x^2 + 5x - 3$ จงแสดงว่า $\lim_{x \to 2} f(x) = f(2)$

23. ถ้า $F(x) = 2x^3 + 7x - 1$ จงแสดงว่า $\lim_{x \to -1} F(x) = F(-1)$

24. ถ้า $g(x) = \frac{x^2 - 16}{x - 4}$ จงแสดงว่า
$\lim_{x \to 4} g(x) = 8$ แต่ $g(4)$ อธิบายไม่ได้

25. ถ้า $h(x) = \frac{\sqrt{x + 9} - 3}{x}$ จงแสดงว่า
$\lim_{x \to 0} h(x) = \frac{1}{6}$ แต่ $h(0)$ อธิบายไม่ได้

26. กำหนดให้ f เป็นฟังก์ชันนิยามเป็น

$$f(x) = \begin{cases} 2x - 1 & ; x \neq 2 \\ 1 & ; x = 2 \end{cases}$$

26.1 จงหา $\lim_{x \to 2} f(x)$ และจงแสดงว่า $\lim_{x \to 2} f(x) \neq f(2)$

26.2 เขียนกราฟของฟังก์ชัน f

27. กำหนดให้ f เป็นฟังก์ชันนิยามเป็น

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - 9 & ; x \neq -3 \\ 4 & ; x = -3 \end{cases}$$

2.7.1 จงหา $\lim_{x \to -3} f(x)$ และจงแสดงว่า $\lim_{x \to -3} f(x) \neq f(-3)$

27.2 เขียนกราฟของฟังก์ชัน f

2.2 ลิมิตข้างเดียว One-side limits

เมื่อพิจารณา $\lim_{x \to a} f(x)$ มันมีความเกี่ยวข้องกับค่าของ x ในช่วงเปิด ซึ่งรวม a แต่ $x \neq a$ นั่นคือค่าของ x จะเข้าใกล้ a และ x จะมีค่ามากกว่าหรือน้อยกว่า a อย่างไรก็ตาม ตัวอย่างเช่น ถ้ามีฟังก์ชัน f ซึ่ง $f(x) = \sqrt{x-4}$ เพราะว่า f (x) ไม่สามารถหาค่าได้ ถ้า $x < 4$ ฟังก์ชัน f ไม่สามารถหาค่าได้บนช่วงเปิดใด ๆ ซึ่งรวม 4 ดังนั้น เราไม่สามารถพิจารณา $\sqrt{x-4}$ อย่างไรก็ตาม ถ้า x ถูกกำหนดให้มีค่ามากกว่า 4 ค่าของ $\sqrt{x-4}$ สามารถทำให้เข้าใกล้ศูนย์เท่าที่พอใจได้ โดยให้ค่า x เข้าใกล้ 4 อย่างเพียงพอ แต่มากกว่า 4 ในกรณีเช่นนี้เราให้ x เข้าใกล้ 4 จากทางขวา และพิจารณา "ลิมิตข้างเดียวจากทางขวา" หรือ "ลิมิตขวามือ" (right-hand limit) ซึ่งมีนิยามดังนี้

นิยาม 2.2.1 : ให้ f เป็นฟังก์ชัน ซึ่งหาค่าได้สำหรับทุก ๆ จำนวนจริงในช่วงเปิด (a, c) ดังนั้น ลิมิตของ f(x) เมื่อ x เข้าใกล้ a จากทางขวา คือ L เขียนเป็น

$$\lim_{x \to a^+} f(x) = L$$

ถ้า $|f(x) - L|$ สามารถทำให้เล็กเท่าที่เราพอใจ โดยทำให้ $x - a$ เล็กอย่างเพียงพอ แต่ $x - a > 0$

ข้อสังเกต ในการแถลงนิยาม ไม่มีค่าสัมบูรณ์ ล้อม $x - a$ เพราะว่า $x - a > 0$

ตามนิยาม จะได้

$$\lim_{x \to 4^+} \sqrt{x-4} = 0$$

พิจารณาลิมิตของฟังก์ชันเมื่อตัวแปรอิสระ x ถูกกำหนดให้มีค่าน้อยกว่า a นั่นคือ x เข้าใกล้ a ทางซ้ายมือ เรียกลิมิตนี้ว่า "ลิมิตข้างเดียวจากทางซ้าย" หรือลิมิตซ้ายมือ (left-hand limit)

นิยาม 2.2.2 ให้ f เป็นฟังก์ชันซึ่งทุก ๆ จำนวนจริงในช่วงเปิด (d, a) ดังนั้น ลิมิตของ f(x) เมื่อ x เข้าใกล้ a จากซ้ายเป็น L เขียนเป็น

$$\lim_{x \to a^-} f(x) = L$$

ถ้า $|f(x) - L|$ สามารถทำให้เล็กเท่าที่พอใจ โดยทำให้ $a - x$ เล็กอย่างเพียงพอ และ $a - x > 0$

จากนิยาม กล่าวว่า $a - x > 0$ เพราะว่า $a > x$ เมื่อ x เข้าใกล้ a ทางซ้ายมือ

สำหรับ $\lim_{x \to a} f(x)$ นั้นเราอาจจะกล่าวว่าเป็นลิมิต 2 ข้าง (two-side limits) เพื่อให้แตกต่างจาก ลิมิตทางซ้าย และทางขวา

ทฤษฎีบทที่ 2.1.1 - 2.1.10 ที่กำหนดให้ในหัวข้อ 2.1 ยังคงเป็นจริง เมื่อแทน "$x \to a$"

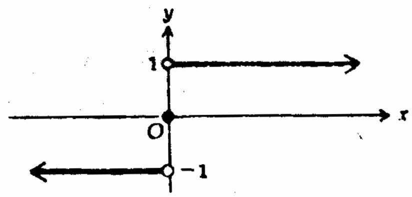
ด้วย "$x \to a^+$" หรือ "$x \to a^-$"

ตัวอย่าง 2.2.1 ให้ f นิยามโดย

$$f(x) = \begin{cases} -1 & \text{ถ้า } x < 0 \\ 0 & \text{ถ้า } x = 0 \\ 1 & \text{ถ้า } 0 < x \end{cases}$$

1. จงเขียนกราฟของ f
2. จงหาค่า $\lim\limits_{x \to 0^-} f(x)$ ถ้าหาค่าได้
3. จงหาค่า $\lim\limits_{x \to 0^+} f(x)$ ถ้าหาค่าได้

วิธีทำ 1. เขียนกราฟของ f แสดงในรูป 2.2.1



รูป 2.2.1

2. $\lim\limits_{x \to 0^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 0^-} (-1) = -1$

3. $\lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 0^+} (1) = 1$

$$\lim_{x \to 0^-} f(x) \neq \lim_{x \to 0^+} f(x)$$

เพราะว่าลิมิตทางซ้ายมือและลิมิตทางขวามือไม่เท่ากัน เราจึงสามารถพูดได้ว่า ลิมิต 2 ข้าง $\lim\limits_{x \to 0} f(x)$ หาค่าไม่ได้

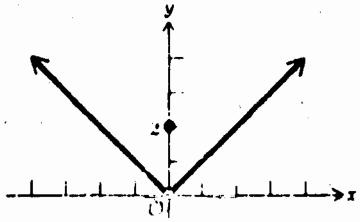
ทฤษฎี 2.2.1 $\lim\limits_{x \to a} f(x)$ หาค่าได้ และมีค่าเท่ากับ L ก็ต่อเมื่อ $\lim\limits_{x \to a^-} f(x)$ และ $\lim\limits_{x \to a^+} f(x)$ หาค่าได้ และลิมิตทั้งสองต่างมีค่าเท่ากับ L

ตัวอย่าง 2.2.2 ให้ g นิยาม โดย

$$g(x) = \begin{cases} |x| & \text{ถ้า } x \neq 0 \\ 2 & \text{ถ้า } x = 0 \end{cases}$$

1. ให้เขียนกราฟของ g
2. จงหาค่าของ $\lim\limits_{x \to 0} g(x)$ ถ้าหาค่าได้

วิธีทำ 1. กราฟของ g แสดงตามรูป 2.2.2



รูป 2.2.2

$$\lim_{x \to 0^-} g(x) = \lim_{x \to 0^-} (-x) = 0$$

$$\lim_{x \to 0^+} g(x) = \lim_{x \to 0^+} (x) = 0$$

ดังนั้น โดยทฤษฎี $\lim_{x \to 0} g(x)$ หาค่าได้และมีค่าเท่ากับศูนย์

ข้อสังเกต $g(0) = 2$ ไม่มีผลต่อ $\lim_{x \to 0} g(x)$

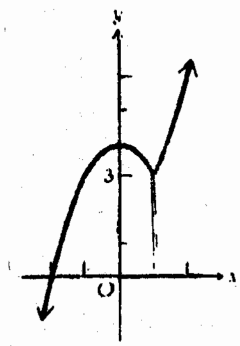
ตัวอย่าง 2.2.3 ให้ h นิยามโดย

$$h(x) = \begin{cases} 4 - x^2 & \text{ถ้า } x \le 1 \\ 2 + x^2 & \text{ถ้า } 1 < x \end{cases}$$

1. จงเขียนกราฟของ h
2. จงหาค่าของ $\lim_{x \to 1^-} h(x)$, $\lim_{x \to 1^+} h(x)$, $\lim_{x \to 1} h(x)$ ถ้าหาค่าได้

วิธีทำ

1. กราฟของ h แสดงตามรูป 2.2.3



รูป 2.2.3

2. $$\lim_{x \to 1^-} h(x) = \lim_{x \to 1^-} (4 - x^2) = 3$$

$$\lim_{x \to 1^+} h(x) = \lim_{x \to 1^+} (2 + x^2) = 3$$

ดังนั้น โดยทฤษฎี $\lim_{x \to 1} h(x)$ หาค่าได้และมีค่าเท่ากับ 3 สังเกตว่า $h(1) =$

ตัวอย่าง 2.2.4 ให้ f นิยาม โดย

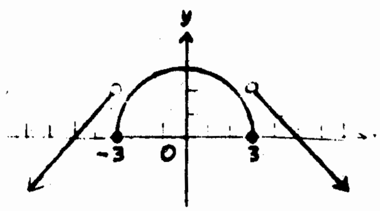
$$f(x) = \begin{cases} x + 5 & \text{ถ้า } x < -3 \\ \sqrt{9 - x^2} & \text{ถ้า } -3 \le x \le 3 \\ 5 - x & \text{ถ้า } 3 < x \end{cases}$$

1. จงเขียนกราฟของ f

2. จงหาค่าของ $\lim_{x \to -3^-} f(x)$, $\lim_{x \to -3^+} f(x)$, $\lim_{x \to 3^-} f(x)$, $\lim_{x \to 3^+} f(x)$ ถ้าหาค่าได้

วิธีทำ

1. กราฟของ f แสดงตามรูป 2.2.4



รูป 2.2.4

2.

$$\lim_{x \to -3^-} f(x) = \lim_{x \to -3^-} (x + 5) = 2$$

$$\lim_{x \to -3^+} f(x) = \lim_{x \to -3^+} \sqrt{9 - x^2} = 0$$

$$\lim_{x \to 3^-} f(x) = \lim_{x \to 3^-} \sqrt{9 - x^2} = 0$$

$$\lim_{x \to 3^+} f(x) = \lim_{x \to 3^+} (5 - x) = 2$$

แบบฝึกหัด 2.2

จากแบบฝึกหัดข้อ 1 ถึง 7 ให้เขียนกราฟของฟังก์ชันที่กำหนดให้ และหาค่าของลิมิต ถ้าหาค่าได้ ถ้าลิมิตหาค่าไม่ได้ ให้บอกเหตุผล

1. $$f(x) = \begin{cases} 2 & \text{ถ้า } x < 1 \\ -1 & \text{ถ้า } x = 1 \\ -3 & \text{ถ้า } x > 1 \end{cases}$$

1.1 $\lim\limits_{x \to 1^+} f(x)$

1.2 $\lim\limits_{x \to 1^-} f(x)$

1.3 $\lim\limits_{x \to 1} f(x)$

2. $$g(x) = \begin{cases} 4 - x & \text{ถ้า } x \leq 4 \\ x - 6 & \text{ถ้า } 4 < x \end{cases}$$

2.1 $\lim\limits_{x \to 4^+} g(x)$

2.2 $\lim\limits_{x \to 4^-} g(x)$

2.3 $\lim\limits_{x \to 4} g(x)$

3. $$h(x) = \begin{cases} 2x + 1 & \text{ถ้า } x < 3 \\ 10 - x & \text{ถ้า } 3 \leq x \end{cases}$$

3.1 $\lim\limits_{x \to 3^+} h(x)$

3.2 $\lim\limits_{x \to 3^-} h(x)$

3.3 $\lim\limits_{x \to 3} h(x)$

4. $$f(r) = \begin{cases} 2r + 3 & \text{ถ้า } r < 1 \\ 2 & \text{ถ้า } r = 1 \\ 7 - 2r & \text{ถ้า } 1 < r \end{cases}$$

4.1 $\lim\limits_{r \to 1^+} f(r)$

4.2 $\lim\limits_{r \to 1^-} f(r)$

4.3 $\lim\limits_{r \to 1} f(r)$

5. $F(x) = |x - 5|$

5.1 $\lim\limits_{x \to 5^+} F(x)$

5.2 $\lim\limits_{x \to 5^-} F(x)$

5.3 $\lim\limits_{x \to 5} F(x)$

6. $f(x) = \dfrac{|x|}{x}$

6.1 $\lim\limits_{x \to 0^+} f(x)$

6.2 $\lim\limits_{x \to 0^-} f(x)$

6.3 $\lim\limits_{x \to 0} f(x)$

7.
$$f(x) = \begin{cases} 2 & \text{ถ้า } x < -2 \\ \sqrt{4 - x^2} & \text{ถ้า } -2 \le x \le 2 \\ -2 & \text{ถ้า } 2 \quad x \end{cases}$$

7.1 $\lim\limits_{x \to -2^-} f(x)$

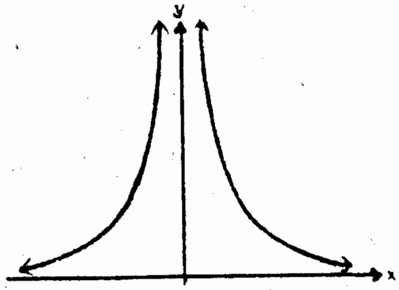
7.2 $\lim\limits_{x \to -2^+} f(x)$

7.3 $\lim\limits_{x \to 2^-} f(x)$

7.4 $\lim\limits_{x \to 2^+} f(x)$

2.3 ลิมิตอนันต์
Infinite Limits

พิจารณาฟังก์ชัน $f(x) = \frac{1}{x^2}$ ซึ่งกราฟของฟังก์ชันนี้ก็คือเส้นโค้งดังรูป 2.3.1



รูป 2.3.1

เรามาพิจารณาค่าของฟังก์ชัน f เมื่อ x เข้าใกล้ 0 โดยให้ x เข้าใกล้ 0 จากทางขวา (หรือทางค่าบวก) ก็จะได้ค่าของ f(x) สำหรับบางค่าของ x ที่กำหนดให้ ดังตาราง 2.3.1

x	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{100}$	$\frac{1}{100,000}$	....
$f(x) = \frac{1}{x^2}$	1	4	9	100	10,000	10,000,000,000	....

ตาราง 2.3.1

จากค่าในตาราง 2.3.1 จะเห็นว่า เมื่อให้ x มีค่าเข้าใกล้ 0 มากขึ้น โดยที่ x ยังคงมีค่ามากกว่า 0 อยู่ ค่าของ f(x) นั้นจะมีค่าเพิ่มขึ้นโดยไม่มีขอบเขตจำกัด หรืออาจกล่าวได้ว่า เราสามารถจะทำให้ f(x) มีค่ามากกว่าจำนวนบวกใด ๆ ที่กำหนดมาให้ (นั่นคือ เราสามารถทำให้ f(x) มีค่ามากเท่าไรก็ได้ตามต้องการ) โดยการให้ x มีค่าเข้าใกล้ 0 อย่างเพียงพอโดยที่ x ยังมีค่ามากกว่า 0 อยู่ และจะใช้สัญลักษณ์ $\lim_{x \to 0} f(x) = +\infty$ เขียนแทนความหมายที่ว่าฟังก์ชัน $f(x) = \frac{1}{x^2}$ มีค่าเพิ่มขึ้นโดยไม่มีขอบเขตจำกัดขณะที่ x มีค่าเข้าใกล้ 0 จากทางขวา (โดย x มีค่ามากกว่า 0 เสมอ)

ในทำนองเดียวกัน

ถ้า ให้ x เข้าใกล้ 0 จากทางซ้าย (หรือทางค่าลบ) โดย x มีค่าน้อยกว่าศูนย์เสมอ จะได้ค่าของ f(x) สำหรับบางค่าของ x ที่กำหนดให้ ดังตาราง 2.3.2

x	-1	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{3}$	$-\frac{1}{10}$	$-\frac{1}{100}$	$-\frac{1}{100,000}$	....
$f(x) = \frac{1}{x^2}$	1	4	9	100	10,000	10,000,000,000	....

ตาราง 2.3.2

จากค่าในตาราง 2.3.2 จะเห็นว่า เมื่อให้ x มีค่าเข้าใกล้ 0 มากยิ่งขึ้น โดยที่ x ยังคงมีค่าน้อยกว่า 0 อยู่ คือ x มีค่าเข้าใกล้ 0 จากทางซ้าย ค่าของ f(x) จะมีค่าเพิ่มขึ้นโดยไม่มีขอบเขตจำกัด ซึ่งเขียนแทนด้วยสัญลักษณ์ $\lim\limits_{x \to 0^-} \frac{1}{x^2} = +\infty$

ดังนั้น จะพบว่า ขณะที่ x เข้าใกล้ 0 ทั้งจากทางซ้ายและจากทางขวา ค่าของ f(x) จะเพิ่มขึ้นโดยไม่มีขอบเขตจำกัดทั้งนั้น ซึ่งจะเขียนแทนด้วยสัญลักษณ์ $\lim\limits_{x \to 0} \frac{1}{x^2} = +\infty$

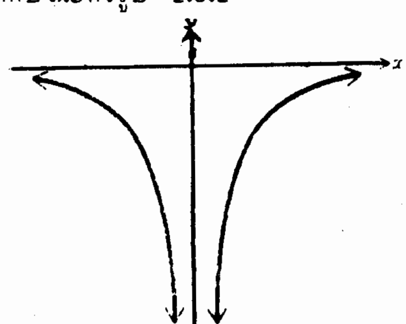
จากสิ่งที่กล่าวมาแล้ว อาจกำหนดเป็นนิยามได้ดังนี้

นิยาม 2.3.1 ให้ f เป็นฟังก์ชันที่หาค่าได้สำหรับทุก ๆ จำนวนจริงในบางช่วงปิด I ที่มี a อยู่ด้วย (ยกเว้นที่จุด a ซึ่งอาจจะมีหรือไม่ก็ได้) จะกล่าวว่า f(x) มีค่าเพิ่มขึ้น โดยไม่มีขอบเขตจำกัดขณะที่ x ย่างเข้าสู่ a (ซึ่งเขียนแทนด้วย $\lim\limits_{x \to a} f(x) = +\infty$) ถ้าสามารถทำให้ f(x) มีค่ามากกว่าจำนวนบวกใด ๆ ที่กำหนดมาให้ โดยการทำให้ $|x - a|$ มีค่าเล็กมากพอ และ $|x - a| > 0$ ด้วย

นั่นคือ อาจกล่าวได้ว่า ค่าของฟังก์ชัน f(x) จะมีค่าเพิ่มขึ้นโดยไม่มีขอบเขตจำกัด ขณะที่ x ย่างเข้าสู่ a ถ้าสามารถทำให้ f(x) มีค่าใหญ่พอตามที่เราต้องการได้โดยการให้ x มีค่าเข้าใกล้ a อย่างเพียงพอ แต่ต้องไม่เท่ากับ a

ข้อสังเกต พึงระลึกเสมอว่า $+\infty$ ไม่ใช่จำนวนจริง ดังนั้น การที่เราเขียน $\lim\limits_{x \to a} f(x) = +\infty$ กับ $\lim\limits_{x \to a} f(x) = L$ เมื่อ L เป็นจำนวนจริง ย่อมไม่เหมือนกันคือ $\lim\limits_{x \to a} f(x) = +\infty$ ซึ่งเราอ่านว่า ลิมิตของ f(x) ขณะที่ x ย่างเข้าสู่ a มีค่าเป็นบวกอนันต์ ในกรณีเช่นนี้เราเรียกว่า "ลิมิตหาค่าไม่ได้" (does not exist) หรือไม่มีลิมิต

ในทำนองเดียวกันกับที่กล่าวมาแล้ว ถ้าพิจารณาฟังก์ชัน $g(x) = \frac{-1}{x^2}$ (ซึ่งเป็นนิเสธของฟังก์ชัน $f(x) = \frac{1}{x^2}$) ขณะที่ x ย่างเข้าสู่ 0 ทั้งจากทางซ้ายและจากทางขวา ก็จะพบว่า g(x) มีค่าลดลง โดยไม่มีขอบเขตจำกัด ซึ่งเขียนแทนด้วยสัญลักษณ์ $\lim\limits_{x \to 0} \frac{-1}{x^2} = -\infty$ โดยกราฟของฟังก์ชัน g(x) นี้ จะมีลักษณะดังรูป 2.3.2



รูป 2.3.2

โดยอาจกล่าวเป็นนิยามได้ดังนี้

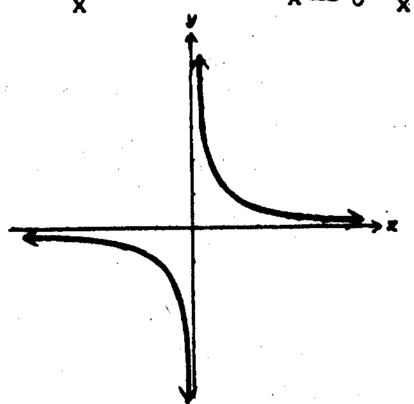
นิยาม 2.3.2 ให้ f เป็นฟังก์ชันที่มีค่าสำหรับทุก ๆ จำนวนจริงในบางช่วงเปิด I ที่มี a อยู่ด้วย (ยกเว้นจุด a อาจจะหาค่าได้หรือไม่ก็ได้) จะกล่าวว่า f(x) มีค่าลดลงโดยไม่มีขอบเขตจำกัด ขณะที่ x ย่างเข้าสู่ a ซึ่งเขียนแทนด้วย $\lim\limits_{x \to a} f(x) = -\infty$ ถ้าเราสามารถทำให้ f(x) มีค่าน้อย

กว่าจำนวนลบใด ๆ ที่กำหนดมาให้ โดยการทำให้ $|x - a|$ มีค่าเล็กมากพอ และ $|x - a| > 0$ ด้วย

จาก $\lim_{x \to a} f(x) = -\infty$ อ่านว่า "ลิมิตของ f(x)" ขณะที่ x ย่างเข้าสู่ a มีค่าเป็นลบอนันต์ ซึ่งในกรณีนี้ เราก็เรียกว่า ลิมิตหาค่าไม่ได้ หรือไม่มีลิมิตด้วย นอกจากนี้ยังอาจพิจารณาลิมิตข้างเดียวที่เป็นอนันต์ นั่นคือ ลิมิตอาจอยู่ในรูปใดรูปหนึ่ง ดังต่อไปนี้คือ $\lim_{x \to a^+} f(x) = +\infty$ หรือ $\lim_{x \to a^+} f(x) = -\infty$ หรือ $\lim_{x \to a^-} f(x) = +\infty$ หรือ $\lim_{x \to a^-} f(x) = -\infty$ ก็ได้ โดยเราจะกล่าวว่า $\lim_{x \to a^+} f(x) = +\infty$ ถ้า f มีค่าสำหรับทุก ๆ จำนวนจริงในบางช่วงเปิด (a, c) โดยเราสามารถทำให้ f(x) มีค่ามากกว่าจำนวนบวกที่กำหนดมาให้ได้โดยการทำให้ x - a มีค่าเล็กอย่างเพียงพอ โดยที่ $x - a > 0$

สำหรับนิยามของ $\lim_{x \to a^+} f(x) = -\infty$, $\lim_{x \to a^-} f(x) = +\infty$ และ $\lim_{x \to a^-} f(x) = -\infty$ ก็สามารถกล่าวได้ ในทำนองคล้ายคลึงกัน

พิจารณาฟังก์ชัน $h(x) = \frac{1}{x}$ เราจะพบว่า $\lim_{x \to 0^+} \frac{1}{x} = +\infty$ และ $\lim_{x \to 0^-} \frac{1}{x} = -\infty$ ดังภาพในรูป 2.3.3



รูป 2.3.3

นั่นคือ สำหรับฟังก์ชัน $h(x) = \frac{1}{x}$ ขณะที่ x ย่างเข้าสู่ 0 จากทางขวา ค่าของ h(x) จะมีค่าเพิ่มขึ้น โดยไม่มีขอบเขตจำกัด และขณะที่ x ย่างเข้าสู่ 0 จากทางซ้าย h(x) ก็จะมีค่าลดลง โดยไม่มีขอบเขตจำกัดเช่นกัน

จากสิ่งที่กล่าวถึงมาแล้ว อาจนำมากล่าวในรูปทฤษฎีบทได้ ดังต่อไปนี้

ทฤษฎีบท 2.3.1 ถ้า r เป็นจำนวนเต็มบวกใด ๆ แล้ว จะได้ว่า

1. $$\lim_{x \to 0^+} \frac{1}{x^r} = +\infty$$

$$\lim_{x \to 0^-} \frac{1}{x^r} = \begin{cases} -\infty & \text{ถ้า } r \text{ เป็นจำนวนคี่} \\ +\infty & \text{ถ้า } r \text{ เป็นจำนวนคู่} \end{cases}$$

ตัวอย่าง 2.3.1 จาก ท.บ. 2.3.1 จึงกล่าวได้ว่า

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{1}{x^5} = +\infty$$

2. $\lim_{x \to 0^+} \frac{1}{x^8} = +\infty$

3. $\lim_{x \to 0^-} \frac{1}{x^5} = -\infty$

4. $\lim_{x \to 0^-} \frac{1}{x^8} = +\infty$

ทฤษฎีบท 2.3.2 สำหรับจำนวนจริง a ใด ๆ ถ้า $\lim_{x \to a} f(x) = 0$ และ $\lim_{x \to a} g(x) = c$ เมื่อ c เป็นค่าคงที่ซึ่งไม่เท่ากับ 0 แล้วจะได้ว่า

1. ถ้า $c > 0$ และ $f(x) \to 0$ ทางค่าบวกของ f(x) แล้ว $\lim_{x \to a} \frac{g(x)}{f(x)} = +\infty$
2. ถ้า $c > 0$ และ $f(x) \to 0$ ทางค่าลบของ f(x) แล้ว $\lim_{x \to a} \frac{g(x)}{f(x)} = -\infty$
3. ถ้า $c < 0$ และ $f(x) \to 0$ ทางค่าบวกของ f(x) แล้ว $\lim_{x \to a} \frac{g(x)}{f(x)} = -\infty$
4. ถ้า $c < 0$ และ $f(x) \to 0$ ทางค่าลบของ f(x) แล้ว $\lim_{x \to a} \frac{g(x)}{f(x)} = +\infty$

หมายเหตุ ถ้าเราแทน $x \to a$ ด้วย $x \to a^+$ หรือ $x \to a^-$ ทฤษฎีบท 2.3.2 ก็ยังคงเป็นจริง

ตัวอย่าง 2.3.2 จงหาค่าของ

(1) $\lim_{x \to 3^+} \frac{x+2}{x-3}$

(2) $\lim_{x \to 3^-} \frac{x+2}{x-3}$

(3) $\lim_{x \to 3^+} \frac{2-x}{x-3}$

(4) $\lim_{x \to 3^-} \frac{2-x}{x-3}$

วิธีทำ

(1) จาก $\lim_{x \to 3^+} \frac{x+2}{x-3}$

จะพบว่า $\lim_{x \to 3^+} x + 2 = 5 > 0$

และ $\lim_{x \to 3^+} x - 3 = 0$ เมื่อ $x - 3$ เข้าใกล้ 0 ทางค่าบวก

ดังนั้น จาก ท.บ. 2.3.2 ข้อ 1 จึงได้ว่า

$$\lim_{x \to 3^+} \frac{x+2}{x-3} = +\infty$$

(2) จาก $\lim_{x \to 3^-} \frac{x+2}{x-3}$

จะพบว่า $\lim_{x \to 3^-} x + 2 = 5 > 0$

และ $\lim_{x \to 3^-} x - 3 = 0$ เมื่อ $x - 3$ เข้าใกล้ 0 ทางค่าลบ

ดังนั้น จาก ท.บ. 2.3.2 ข้อ 2 จึงได้ว่า

$$\lim_{x \to 3^-} \frac{x+2}{x-3} = -\infty$$

(3) จาก $\lim_{x \to 3^+} \frac{2-x}{x-3}$

จะพบว่า $\lim_{x \to 3^+} 2 - x = -1 < 0$

และ $\lim_{x \to 3^+} x - 3 = 0$ เมื่อ $x - 3$ เข้าใกล้ 0 ทางค่าบวก

ดังนั้น จาก ท.บ. 2.3.2 ข้อ 3 จึงได้ว่า

$$\lim_{x \to 3^+} \frac{2-x}{x-3} = -\infty$$

(4) จาก $\lim_{x \to 3^+} \frac{2-x}{x-3}$

จะพบว่า $\lim_{x \to 3^-} 2 - x = -1 < 0$

และ $\lim_{x \to 3^-} x - 3 = 0$ เมื่อ $x - 3$ เข้าใกล้ 0 ทางค่าลบ

ดังนั้น จาก ท.บ. 2.3.2 ข้อ 4 จึงได้ว่า

$$\lim_{x \to 3^-} \frac{2-x}{x-3} = +\infty$$

ตัวอย่าง 2.3.3 จงหาค่าของ $\lim_{x \to 3^+} \frac{\sqrt{x^2-9}}{x-3}$

วิธีทำ จาก $\lim_{x \to 3^+} \frac{\sqrt{x^2-9}}{x-3}$

เพราะว่า $x \to 3^+$ เพราะฉะนั้น $x - 3 > 0$

ดังนั้น $x - 3 = \sqrt{(x-3)^2}$

$$\therefore \lim_{x \to 3^+} \frac{\sqrt{x^2-9}}{x-3} = \lim_{x \to 3^+} \frac{\sqrt{(x-3)(x+3)}}{\sqrt{(x-3)^2}}$$

$$= \lim_{x \to 3^+} \frac{(\sqrt{x-3})(\sqrt{x+3})}{(\sqrt{x-3})(\sqrt{x-3})}$$

$$= \lim_{x \to 3^+} \frac{\sqrt{x+3}}{\sqrt{x-3}}$$

จะพบว่า $\lim\limits_{x \to 3^+} \sqrt{x+3} = \sqrt{6} \quad 0$

และ $\lim\limits_{x \to 3^+} \sqrt{x-3} = 0$ เมื่อ $x - 3$ เข้าใกล้ 0 ทางค่าบวก

จาก ท.บ. 2.3.2 ข้อ 1 ได้ว่า

$$\lim_{x \to 3^+} \frac{\sqrt{x^2-9}}{x-3} = +\infty$$

ทฤษฎีบท 2.3.3

1. ถ้า $\lim\limits_{x \to a} f(x) = +\infty$ และ $\lim\limits_{x \to a} g(x) = c$ เมื่อ c เป็นค่าคงที่ใด ๆ แล้วจะได้ว่า

$$\lim_{x \to a} \left[f(x) + g(x) \right] = +\infty$$

2. ถ้า $\lim\limits_{x \to a} f(x) = -\infty$ และ $\lim\limits_{x \to a} g(x) = c$ เมื่อ c เป็นค่าคงที่ใด ๆ แล้วจะได้ว่า

$$\lim_{x \to a} \left[f(x) + g(x) \right] = -\infty$$

หมายเหตุ ถ้าเราแทน $x \to a$ ด้วย $x \to a^+$ หรือ $x \to a^-$ ท.บ. 2.3.3 ก็ยังคงเป็นจริง

ตัวอย่าง 2.3.4 จงหาค่า $\lim\limits_{x \to 3^+} \left[\frac{1}{x-3} + \frac{1}{x+2} \right]$

วิธีทำ เพราะว่า $\lim\limits_{x \to 3^+} \frac{1}{x-3} = +\infty$

และ $\lim\limits_{x \to 3^+} \frac{1}{x+2} = \frac{1}{5}$

จาก ท.บ. 2.3.4 ได้ว่า

$$\lim_{x \to 3^+} \left[\frac{1}{x-3} + \frac{1}{x+2} \right] = +\infty$$

ทฤษฎีบท 2.3.4

ถ้า $\lim\limits_{x \to a} f(x) = +\infty$ และ $\lim\limits_{x \to a} g(x) = c$ เมื่อ c เป็นค่าคงที่ใด ๆ ที่ไม่เท่ากับ 0 แล้วจะได้ว่า

(1) ถ้า $c > 0$ แล้ว $\lim\limits_{x \to a} (f(x) \cdot g(x)) = +\infty$

(2) ถ้า $c < 0$ แล้ว $\lim\limits_{x \to a} (f(x) \cdot g(x)) = -\infty$

หมายเหตุ ถ้าเราแทน $x \to a$ ด้วย $x \to a^+$ หรือ $x \to a^-$ ท.บ. 2.3.4 ก็ยังคงเป็นจริง

ตัวอย่าง 2.3.5 จงหาค่า $\lim\limits_{x \to 3} \left[\frac{4}{(x-3)^2} \cdot \frac{x+5}{x-5} \right]$

วิธีทำ

เพราะว่า $\lim\limits_{x \to 3} \dfrac{4}{(x-3)^2} = +\infty$

และ $\lim\limits_{x \to 3} \dfrac{x+5}{x-5} = -4$

จาก ท.บ. 2.3.4 ข้อ 2 จะได้ว่า

$$\lim_{x \to 3} \left[\frac{4}{(x-3)^2} \quad \frac{x+5}{x-5} \right] = -\infty$$

ทฤษฎีบท 2.3.5

ถ้า $\lim\limits_{x \to a} f(x) = -\infty$ และ $\lim\limits_{x \to a} g(x) = c$ เมื่อ c เป็นค่าคงที่ที่ไม่เท่ากับ 0 แล้วจะได้ว่า

(1) ถ้า $c > 0$ แล้ว $\lim\limits_{x \to a} (f(x)\,g(x)) = -\infty$

(2) ถ้า $c < 0$ แล้ว $\lim\limits_{x \to a} (f(x)\,g(x)) = +\infty$

หมายเหตุ ถ้าเราแทน $x \to a$ ด้วย $x \to a^+$ หรือ $x \to a$ ท.บ. 2.3.5 ก็ยังคงเป็นจริง

ตัวอย่าง 2.3.6 จงหาค่า $\lim\limits_{x \to 3^-} \left[\dfrac{x+2}{x-3} \cdot \dfrac{x+5}{x-5} \right]$

วิธีทำ

เพราะว่า $\lim\limits_{x \to 3^-} \dfrac{x+2}{x-3} = -\infty$

และ $\lim\limits_{x \to 3^-} \dfrac{x+5}{x-5} = -4$

จาก ท.บ. 2.3.5 จะได้ว่า

$$\lim_{x \to 3^-} \left[\frac{x+2}{x-3} \cdot \frac{x+5}{x-5} \right] = +\infty$$

นิยาม 2.3.3 เราจะเรียกเส้น $x = a$ ว่าเป็นเส้นอะซิมโทสแนวดิ่ง (vertical asymptote) ของกราฟของฟังก์ชัน f ใด ๆ ถ้าสอดคล้องกับข้อความต่อไปนี้อย่างน้อยหนึ่งข้อ คือ

(1) $\lim\limits_{x \to a^+} f(x) = +\infty$

(2) $\lim\limits_{x \to a^+} f(x) = -\infty$

(3) $\lim\limits_{x \to a^-} f(x) = +\infty$

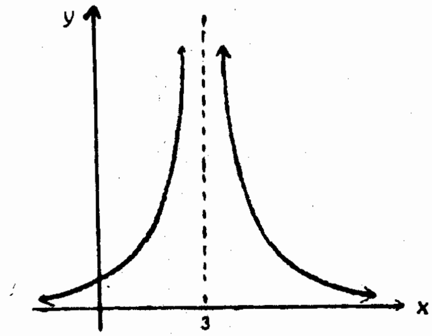
(4) $\lim\limits_{x \to a^-} f(x) = -\infty$

ตัวอย่าง 2.3.7 จงหาเส้น อะซิมโทสแนวดิ่งของกราฟของฟังก์ชัน $f(x) = \dfrac{1}{(x-3)^2}$ พร้อมทั้งวาดภาพแสดงด้วย

วิธีทำ

เพราะว่า $\lim_{x \to 3^+} \frac{1}{(x-3)^2} = +\infty$ และ $\lim_{x \to 3^-} \frac{1}{(x-3)^2} = +\infty$

จากนิยาม 2.3.3 จึงได้ว่า เส้น $x = 3$ เป็นเส้นอะซิมโทสแนวดิ่งของกราฟของ f ซึ่งสามารถแสดงได้ดังรูป 2.3.4



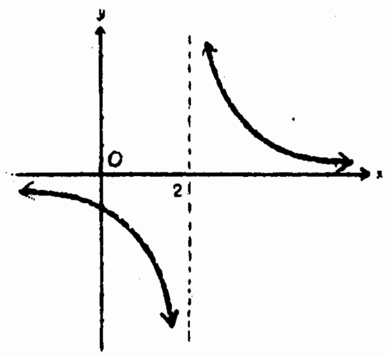
รูป 2.3.4

ตัวอย่าง 2.3.7 จงหาเส้น อะซิมโทสแนวดิ่งของกราฟของฟังก์ชัน $f(x) = \frac{-2}{x-2}$ พร้อมทั้งวาดภาพแสดงด้วย

วิธีทำ

เพราะว่า $\lim_{x \to 2^+} \frac{-2}{x-2} = -\infty$ และ $\lim_{x \to 2^-} \frac{-2}{x-2} = +\infty$

จากนิยาม 2.3.3 จึงได้ว่า เส้น $x = 2$ เป็นเส้นอะซิมโทสแนวดิ่งของกราฟ f ที่ต้องการ ซึ่งสามารถเขียนแสดงได้ดังรูป 2.3.5



รูป 2.3.5

แบบฝึกหัด 2.3.1

1) $\lim_{x \to 6^+} \frac{6}{x-6}$

2) $\lim_{x \to 6^-} \frac{6}{x-6}$

3) $\lim_{x \to 6} \frac{6}{(x-6)}$

4) $\lim_{x \to 4^-} \frac{2x+3}{4-x}$

5) $\lim_{x \to 4^+} \frac{2x+3}{4-x}$

6) $\lim_{x \to 4} \frac{2x+3}{(x-4)^2}$

7) $\lim_{x \to 4^+} \frac{2x-3}{x+4}$

8) $\lim_{x \to -4^-} \frac{2x-3}{x+4}$

9) $\lim_{x \to 3^+} \frac{x+3}{x^2-9}$

10) $\lim_{x \to 3^-} \frac{x+3}{x^2-9}$

11) $\lim_{x \to 0^+} \frac{\sqrt{1+x^2}}{x}$

12) $\lim_{x \to 0^-} \frac{\sqrt{1+x^2}}{x}$

13) $\lim_{x \to 0} \frac{\sqrt{1+x^2}}{x^2}$

14) $\lim_{x \to 3^+} \frac{\sqrt{x^2-4}}{x-3}$

15) $\lim_{x \to 0^+} \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x^2}\right)$

16) $\lim_{x \to 0^-} \frac{4-5x^3}{3x^2+2x^3}$

จงหาเส้น อะซิมโทสแนวดิ่ง ของกราฟของฟังก์ชันต่อไปนี้ พร้อมทั้งวาดภาพมาด้วย

17) $f(x) = \frac{1}{x^2}$

18) $f(x) = -\frac{1}{x^2}$

19) $f(x) = \frac{3}{x-5}$

20) $f(x) = \frac{4}{x-2}$

21) $f(x) = \frac{-5}{x+1}$

22) $f(x) = \frac{-6}{x-3}$

23) $f(x) = x^2 + 12x + 32$

24) $f(x) = x^2 + 6x - 27$

2.4 ลิมิตที่อนันต์ Limits at Infinity

ถ้าเราพิจารณาค่าของฟังก์ชัน f ที่กำหนดโดยสมการ

$$f(x) = \frac{x^2}{x^2+1}$$

โดยพิจารณาจากตารางแสดงค่าของ x และ f(x) ตามตาราง 2.4.1

x	0	1	2	3	4	10	100	10000
$f(x) = \frac{x^2}{x^2+1}$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{4}{5}$	$\frac{9}{10}$	$\frac{16}{17}$	$\frac{100}{101}$	$\frac{10000}{10001}$	$\frac{100000000}{100000001}$

ตาราง 2.4.1

จากการพิจารณาจะพบว่า เมื่อ x มีค่าเพิ่มขึ้นเรื่อย ๆ ค่าของฟังก์ชัน f(x) ก็จะเพิ่มขึ้นเรื่อย ๆ แต่อย่างไรก็ตาม ค่าของ f(x) ก็ยังคงน้อยกว่า 1 เสมอ หรือผลต่างระหว่าง 1 กับ f(x) จะน้อยลงทุกที เช่น

เมื่อ $x = 1$ ผลต่างระหว่าง 1 กับ $f(x) = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$

$x = 3$ ผลต่างระหว่าง 1 กับ $f(x) = 1 - \frac{9}{10} = \frac{1}{10}$

$x = 10$ ผลต่างระหว่าง 1 กับ $f(x) = 1 - \frac{100}{101} = \frac{1}{101}$

....

$x = 100$ ผลต่างระหว่าง 1 กับ $f(x) = 1 - \frac{10000}{10001} = \frac{1}{10001}$

ฯลฯ

นั่นคือ เราสามารถทำให้ค่าของ f(x) เข้าใกล้ 1 มากเท่าไรก็ได้ตามที่ต้องการ โดยการกำหนดให้ x มีค่ามากพอ หรือกล่าวอีกนัยหนึ่งก็คือ เราสามารถทำให้ ผลต่างระหว่าง 1 กับ f(x) มีค่าน้อยเท่าไรก็ได้ตามที่เราต้องการ โดยการกำหนดค่า x ให้มากกว่าค่าบวกที่ใหญ่พอ

เมื่อตัวแปรอิสระมีค่าเพิ่มขึ้น โดยไม่มีขอบเขตจำกัด ทางค่าบวก ในลักษณะเช่นนี้ จะกล่าวว่า "x มีค่าเข้าใกล้ค่าอนันต์ทางด้านบวก" เขียนแทนด้วย "$x \to +\infty$" จากตัวอย่างที่กล่าวข้างบนนี้ จึงจะกล่าวได้ว่า

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{x^2}{x^2+1} = 1$$

โดยทั่ว ๆ ไป จะกล่าวในรูปนิยาม ดังนี้

นิยาม 2.4.1 ให้ f เป็นฟังก์ชันซึ่งหาค่าได้สำหรับทุก ๆ จำนวนจริงในช่วงปิด $(a, +\infty)$ แล้วจะกล่าวว่า L เป็นค่าลิมิตของ $f(x)$ เมื่อ x มีค่าเพิ่มขึ้นโดยไม่มีขอบเขตจำกัด ซึ่งเขียนแทนด้วย $\lim_{x \to +\infty} f(x) = L$ (อ่านว่า ค่าลิมิตของ $f(x)$ ขณะที่ x เข้าสู่ $+\infty$ คือ L) ถ้า $|f(x) - L|$ สามารถทำให้มีค่าน้อยเท่าไรก็ได้ตามที่ต้องการ โดยการกำหนด x มากกว่าค่าบวกที่ใหญ่พอ

ถ้ากลับมาพิจารณาฟังก์ชันเดิม คือ $f(x) = \frac{x^2}{x^2+1}$ แต่ให้ x มีค่าเป็น 0, -1, -2, -3, -4, -10, -100, -1000, ...นั่นคือให้ x มีค่าลดลง โดยไม่มีขอบเขตจำกัด ดังตารางแสดงค่าของ x กับ $f(x)$ ในตาราง 2.4.2

x	0	-1	-2	-3	-4	-10	-100	-1000
$f(x) = \frac{x^2}{x^2+1}$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{4}{5}$	$\frac{9}{10}$	$\frac{16}{17}$	$\frac{100}{101}$	$\frac{10000}{10001}$	$\frac{100000000}{100000001}$

ตาราง 2.4.2

จากตาราง 2.4.2 จะเห็นว่า ขณะที่ x มีค่าลดลงอย่างไม่มีขอบเขตจำกัด ค่าของ $f(x) = \frac{x^2}{x^2+1}$ ก็จะมีค่าเข้าใกล้ 1 (เช่นเดียวกันกับ เมื่อ x มีค่าเพิ่มขึ้นอย่างไม่มีขอบเขตจำกัดที่ได้พิจารณามาแล้ว) ซึ่งอาจกล่าวได้ว่า เราสามารถทำให้ค่าของ $|f(x) - 1|$ มีค่าน้อยเท่าไรก็ได้ตามที่เราต้องการ โดยการกำหนดค่า x ให้น้อยกว่า ค่าลบ ที่มีค่าสัมบูรณ์ที่ใหญ่พอ

เมื่อตัวแปรอิสระมีค่าลดลงโดยไม่มีขอบเขตจำกัด เช่นนี้ จะกล่าวว่า "x มีค่าเข้าใกล้ค่าอนันต์ทางด้านลบ" เขียนแทนด้วย "$x \to -\infty$" จากตัวอย่างที่กล่าวมาแล้วนั้น จึงได้ว่า

$$\lim_{x \to -\infty} \frac{x^2}{x^2+1} = 1$$

โดยทั่ว ๆ ไป จะกล่าวไว้ในรูปนิยาม ดังนี้

นิยาม 2.4.2 ให้ f เป็นฟังก์ชันซึ่งหาค่าได้สำหรับทุก ๆ จำนวนจริงในช่วงเปิด $(-\infty, a)$ แล้วจะกล่าวว่า L เป็นค่าลิมิตของ $f(x)$ เมื่อ x มีค่าลดลงโดยไม่มีขอบเขตจำกัด ซึ่งเขียนแทนด้วย $\lim_{x \to -\infty} f(x) = L$ (อ่านว่าค่าลิมิตของ $f(x)$ ขณะที่ x เข้าสู่ $-\infty$ คือ L) ถ้า $|f(x) - L|$ สามารถทำให้มีค่าน้อยเท่าไรก็ได้ตามที่ต้องการ โดยกำหนดค่า x ให้น้อยกว่าค่าลบ ที่มีค่าสัมบูรณ์ที่ใหญ่พอ

หมายเหตุ ถ้าแทน "$x \to a$" ด้วย "$x \to +\infty$" หรือ "$x \to -\infty$" ลงในทฤษฎีบทที่ 2.2.2, 2.2.4, 2.2.5, 2.2.6, 2.2.7, 2.2.8, 2.2.9, 2.2.10, 2.3.1, 2.3.2 แล้วทฤษฎีบทต่าง ๆ ดังกล่าวก็ยังคงเป็นจริงอยู่

ทฤษฎีบท 2.4.1 ถ้า r เป็นเลขจำนวนเต็มบวกใด ๆ แล้ว

(1) $\lim_{x \to +\infty} \frac{1}{x^r} = 0$

(2) $\lim_{x \to -\infty} \frac{1}{x^r} = 0$

ตัวอย่าง 2.4.1 จงหาค่าของ $\lim_{x \to +\infty} \frac{5x - 4}{3x + 7}$

วิธีทำ หารทั้งเศษและส่วนด้วย x จะได้

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{5x - 4}{3x + 7} = \lim_{x \to +\infty} \frac{5 - \frac{4}{x}}{3 + \frac{7}{x}}$$

$$= \frac{\lim_{x \to +\infty} (5 - \frac{4}{x})}{\lim_{x \to +\infty} (3 + \frac{7}{x})}$$

$$= \frac{\lim_{x \to +\infty} 5 - \lim_{x \to +\infty} \frac{4}{x}}{\lim_{x \to +\infty} 3 + \lim_{x \to +\infty} \frac{7}{x}}$$

$$= \frac{\lim_{x \to +\infty} 5 - \left(\lim_{x \to +\infty} 4\right)\left(\lim_{x \to +\infty} \frac{1}{x}\right)}{\lim_{x \to +\infty} 3 + \left(\lim_{x \to +\infty} 7\right)\left(\lim_{x \to +\infty} \frac{1}{x}\right)}$$

$$= \frac{5 - (4)(0)}{3 + (7)(0)}$$

$$= \frac{5}{3}$$

ตัวอย่าง 2.4.2 จงหาค่าของ $\lim_{x \to -\infty} \frac{2x^2 + 1}{x^3 - 5}$

วิธีทำ เอา x^3 หารทั้งเศษและส่วน จะได้

$$\lim_{x \to -\infty} \frac{2x^2 + 1}{x^3 - 5} = \lim_{x \to -\infty} \frac{\frac{2}{x} + \frac{1}{x^3}}{1 - \frac{5}{x^3}}$$

$$= \frac{0 + 0}{1 - 0}$$

$$= 0$$

ข้อสังเกต จะเห็นว่าก่อนที่จะใช้ทฤษฎีบทนั้น จะต้องหารทั้งเศษและส่วนด้วย x ที่มีกำลังสูงที่สุด ในระหว่างเศษกับส่วน

นิยาม 2.4.3

(1) $\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$ ถ้าฟังก์ชัน f หาค่าได้ ช่วงเปิด $(a, +\infty)$ โดยสามารถทำให้ $f(x)$ มีค่ามากกว่าค่าบวกใด ๆ ที่กำหนดมาให้ได้ โดยการกำหนดค่า x ให้มากกว่าค่าบวกที่ใหญ่พอ

สำหรับนิยามต่อไปนี้ ให้นักศึกษาเขียนเอง คือ

(2) $\lim_{x \to -\infty} f(x) = +\infty$

(3) $\lim_{x \to +\infty} f(x) = -\infty$

(4) $\lim_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$

ตัวอย่าง 2.4.3 จงหาค่าของ $\lim_{x \to +\infty} \frac{x^3 + 1}{x - 2}$

วิธีทำ หารทั้งเศษและส่วนด้วย x^3 จะได้

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{x^3 + 1}{x - 2} = \lim_{x \to +\infty} \frac{1 + \frac{1}{x^3}}{\frac{1}{x^2} - \frac{2}{x^3}}$$

นั่นคือ

$$\lim_{x \to +\infty} \left(1 + \frac{1}{x^3}\right) = 1 + 0 = 1$$

และ $$\lim_{x \to +\infty} \left(\frac{1}{x^2} - \frac{2}{x^3}\right) = 0 + 0 = 0$$

เพราะฉะนั้น ลิมิตของเศษส่วน ซึ่งลิมิตของเศษเป็น 1 และลิมิตของส่วนเป็น 0 เมื่อส่วนเข้าใกล้ 0 ทางค่าบวก โดย ท.บ. 2.3.3 (1) จึงได้ว่า

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{x^3 + 1}{x - 2} = +\infty$$

ตัวอย่าง 2.4.4 จงหาค่า $\lim_{x \to +\infty} \frac{1 - x^3}{x - 2}$

วิธีทำ หารทั้งเศษและส่วนด้วย x^3 จะได้

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{1 - x^3}{x - 2} = \frac{\lim_{x \to +\infty} \left(\frac{1}{x^3} - 1\right)}{\lim_{x \to +\infty} \left(\frac{1}{x^2} - \frac{2}{x^3}\right)}$$

$$\because \lim_{x \to +\infty} \left(\frac{1}{x^3} - 1\right) = 0 - 1 = -1$$

และ $$\lim_{x \to +\infty} \left(\frac{1}{x^2} - \frac{2}{x^3}\right) = 0 - 0 = 0$$

เพราะฉะนั้น โดย ท.บ. 2.3.2 (3) จึงได้ว่า

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{1 - x^3}{x - 2} = -\infty$$

นิยาม 2.4.4 เส้น $y = b$ จะเป็นเส้น อะซิมโทสแนวนอน (horizontal asymptote) ของกราฟของฟังก์ชัน f ถ้าสอดคล้องกับข้อความต่อไปนี้ อย่างน้อยหนึ่งข้อ คือ

(1) $\lim_{x \to +\infty} f(x) = b$

(2) $\lim_{x \to -\infty} f(x) = b$

ตัวอย่าง 2.4.5 จงหาเส้น อะซิมโทสแนวดิ่ง และ อะซิมโทสแนวนอน ของกราฟของฟังก์ชัน f ถ้า $f(x) = \frac{8x - 2x^2}{x^2 - 9}$

วิธีทำ

$$\because \quad f(x) = \frac{8x - 2x^2}{x^2 - 9}$$

$$\therefore \quad \lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} \frac{8x - 2x^2}{x^2 - 9}$$

$$= \lim_{x \to +\infty} \frac{\frac{8}{x} - 2}{1 - \frac{9}{x^2}}$$

$$= \frac{0 - 2}{1 - 0}$$

$\therefore \quad \lim_{x \to +\infty} f(x) = -2$ .... (1)

และ $\lim_{x \to -\infty} f(x) = -2$ ด้วย .... (2)

อนึ่ง เมื่อแยกแฟคเตอร์ทั้งเศษและส่วนจะได้

$$f(x) = \frac{2x(4 - x)}{(x - 3)(x + 3)}$$

เราจะต้องพิจารณาค่าลิมิตต่อไปนี้ คือ

(1) $\lim_{x \to 3^+} f(x)$

(2) $\lim_{x \to 3^-} f(x)$

(3) $\lim_{x \to -3^+} f(x)$

(4) $\lim_{x \to -3^-} f(x)$

(1) พิจารณา $\lim_{x \to 3^+} f(x) = \lim_{x \to 3^+} \frac{2x(4 - x)}{(x - 3)(x + 3)}$

$$\because \quad \lim_{x \to 3^+} 2x(4 - x) = 6 > 0$$

และ $\lim_{x \to 3^+} (x - 3)(x + 3) = 0$ เมื่อ $(x - 3)(x + 3)$ เข้าใกล้ 0 ทางค่าบวก

โดย ท.บ. 2.3.2 (1) จึงได้ว่า

$$\lim_{x \to 3^+} f(x) = \lim_{x \to 3^+} \frac{2x(4-x)}{(x-3)(x+3)} = +\infty \quad \cdots\cdots\cdots\cdots(3)$$

(2) พิจารณา $\lim_{x \to 3^-} f(x) = \lim_{x \to 3^-} \frac{2x(4-x)}{(x-3)(x+3)}$

$\because \lim_{x \to 3^-} 2x(4-x) = 6 > 0$

และ $\lim_{x \to 3^-} (x-3)(x+3) = 0$ เมื่อ $(x-3)(x+3)$ เข้าใกล้ 0 ทางค่าลบ

โดย ท.บ. 2.3.2 (2) จะได้ว่า

$$\lim_{x \to 3^-} f(x) = \lim_{x \to 3^-} \frac{2x(4-x)}{(x-3)(x+3)} = -\infty \quad \cdots\cdots\cdots\cdots(4)$$

(3) พิจารณา $\lim_{x \to -3^+} f(x) = \lim_{x \to -3^+} \frac{2x(4-x)}{(x-3)(x+3)}$

$\because \lim_{x \to -3^+} 2x(4-x) = -42 < 0$

และ $\lim_{x \to -3^+} (x-3)(x+3) = 0$ เมื่อ $(x-3)(x+3)$ เข้าใกล้ 0 ทางค่าลบ

โดย ท.บ. 2.3.2 (4) จะได้ว่า

$$\therefore \lim_{x \to -3^+} f(x) = \lim_{x \to -3^+} \frac{2x(4-x)}{(x-3)(x+3)} = +\infty \quad \cdots\cdots\cdots\cdots(5)$$

(4) พิจารณา $\lim_{x \to -3^-} f(x) = \lim_{x \to -3^-} \frac{2x(4-x)}{(x-3)(x+3)}$

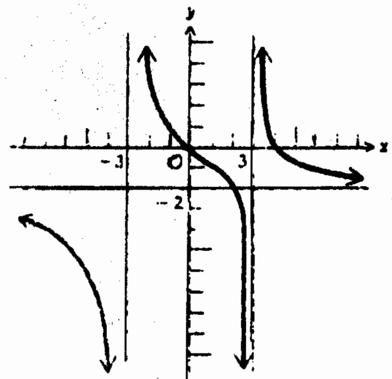
$\because \lim_{x \to -3^-} 2x(4-x) = -42 < 0$

และ $\lim_{x \to -3^-} (x-3)(x+3) = 0$ เมื่อ $(x-3)(x+3)$ เข้าใกล้ 0 ทางค่าบวก

โดย ท.บ. 2.3.2 (3) จะได้ว่า

$$\lim_{x \to -3^-} f(x) = \lim_{x \to -3^-} \frac{2x(4-x)}{(x-3)(x+3)} = -\infty \quad \cdots\cdots\cdots\cdots(6)$$

จาก (1), (2) และนิยาม 2.4.4 จึงกล่าวได้ว่า
เส้น $y = -2$ เป็นเส้นอะซิมโทสแนวนอนของกราฟของ f
จาก (3), (4), (5), (6) และนิยาม 2.3.3 จึงกล่าวได้ว่า
เส้น $x = 3$ และเส้น $x = -3$ เป็นเส้นอะซิมโทสแนวดิ่งของกราฟของ f
เมื่อวาดกราฟแล้วจะได้ดังรูป 2.4.1



รูป 2.4.1

แบบฝึกหัด 2.4.1

จงหาค่าของลิมิตดังต่อไปนี้

1) $\lim_{x \to +\infty} \frac{1}{x^2}$

2) $\lim_{x \to -\infty} \frac{5}{x^3}$

3) $\lim_{x \to +\infty} \frac{3x + 2}{4x - 3}$

4) $\lim_{x \to -\infty} \frac{4x - 2}{2x + 1}$

5) $\lim_{x \to -\infty} \frac{6x^3 - 5}{2x^3 + 8}$

6) $\lim_{x \to +\infty} \frac{7x^2 - 2x + 1}{3x^2 + 5x + 5}$

7) $\lim_{x \to +\infty} \frac{x + 4}{3x^2 - 7}$

8) $\lim_{x \to +\infty} \frac{x^3 - 2x^2 + 3}{3x^3 + x - 1}$

9) $\lim_{x \to -\infty} \frac{2x^3 + x^2 - 8}{6x^3 + 3x + 2}$

10) $\lim_{y \to +\infty} \frac{2y^3 - 4}{5y + 3}$

11) $\lim_{x \to -\infty} \frac{6x^3 - 15x + 8}{9x^2 - 4}$

12) $\lim_{x \to -\infty} (2x + \frac{4}{x^2})$

13) $\lim_{x \to +\infty} (\frac{4}{x^2} - 9x)$

14) $\lim_{x \to +\infty} (\sqrt{x^2 + 1} - x)$

15) $\lim_{x \to +\infty} \frac{\sqrt{x^2 + 8}}{x + 8}$

16) $\lim_{x \to -\infty} \frac{\sqrt{x^2 + 8}}{x + 8}$

จงหาเส้นอะซิมโทสแนวดิ่ง และเส้นอะซิมโทสแนวนอน ของกราฟของฟังก์ชัน ต่อไปนี้ พร้อมทั้งวาดภาพด้วย

17) $f(x) = \frac{3x + 2}{x - 4}$

18) $f(x) = \frac{2 - 3x}{x + 4}$

19) $g(x) = 3 - \frac{1}{x}$

20) $h(x) = x + \frac{1}{x}$

21) $F(x) = \frac{4}{\sqrt{x^2 - 9}}$

22) $G(x) = \frac{8x^2}{x^2 - 16}$

23) $g(x) = \frac{x^2}{1 - x^2}$

24) แท็งค์น้ำใบหนึ่งด้านบนเปิดโล่งและด้านล่าง (ฐาน) เป็นรูปสี่เหลี่ยมจัตุรัส โดยมีปริมาตร 125 ลูกบาศก์ฟุต ถ้าแผ่นสังกะสีที่ใช้ทำฐานตารางฟุตละ 10 บาท และที่ใช้ทำด้านข้างตารางฟุตละ 15 บาท ให้ x ฟุต เป็นความยาวของด้านของจัตุรัสของฐานและ $C(x)$ เป็นราคารวมของสังกะสีที่ใช้ทั้งหมด

24.1) จงเขียนสมการ $C(x)$ พร้อมทั้งกำหนดโดเมนของฟังก์ชัน C

24.2) จงหา $\lim_{x \to 0^+} C(x)$ และ $\lim_{x \to +\infty} C(x)$

24.3) จงเขียนกราฟของ C

2.5 ความต่อเนื่องของฟังก์ชัน

นิยาม 2.5.1 เราจะเรียกฟังก์ชัน f ว่ามีความต่อเนื่องที่ a ก็ต่อเมื่อเงื่อนไขทั้งสามข้อนี้ต้องเป็นจริง

(1) f(a) มีค่า

(2) $\lim_{x \to a} f(x)$ สามารถหาค่าได้ และ

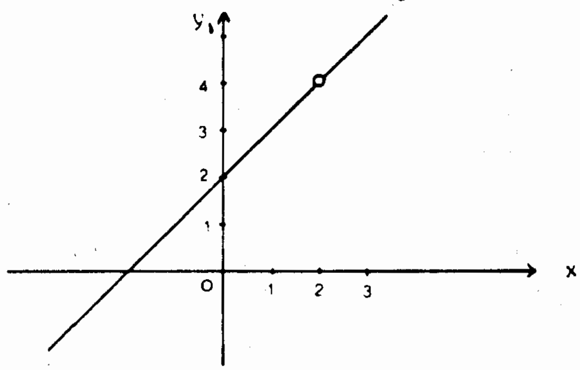
(3) $\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$

ถ้าฟังก์ชัน f ขาดคุณสมบัติข้อใดข้อหนึ่ง (หรือหลายข้อ) ในสามข้อดังกล่าวแล้วจะกล่าวได้ว่า "f ไม่มีความต่อเนื่องที่ a"

ตัวอย่าง 2.5.1 ให้ฟังก์ชัน f คือ

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{(x^2 - 4)}{(x - 2)} & \text{ถ้า } x \neq 2 \\ 2 & \text{ถ้า } x = 2 \end{cases}$$

เราสามารถเขียนกราฟได้ ดังรูป 2.5.1



รูป 2.5.1

จากรูป 2.5.1 จะพบว่า กราฟขาดตอนหรือมีช่องโหว่ที่จุด $x = 2$

ดังนั้นถ้าพิจารณาตามนิยาม 2.5.1 จะพบว่า

(1) $f(2) = 2$ $\therefore$ เงื่อนไขที่ (1) เป็นจริง

(2) $\lim_{x \to 2} f(x) = 4$ $\therefore$ เงื่อนไขที่ (2) เป็นจริง

(3) $\lim_{x \to 2} f(x) = 4$ แต่ $f(2) = 2$ จึงได้ว่า $\lim_{x \to 2} f(x) \neq f(2)$

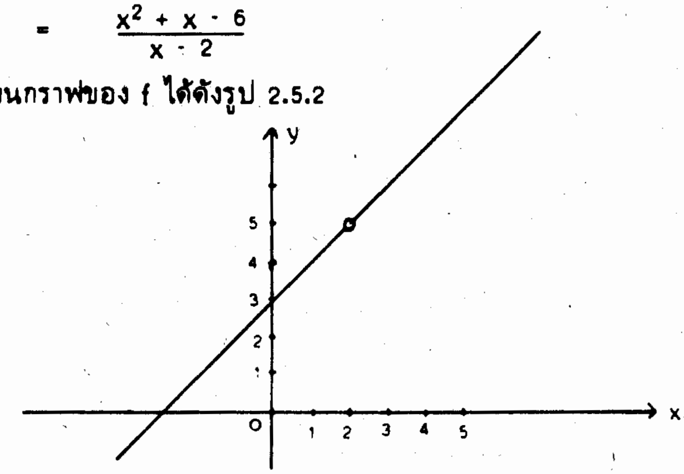
นั่นแสดงว่าเงื่อนไขที่ (3) ไม่จริง จึงกล่าวได้ว่า f(x) ไม่มีความต่อเนื่องที่ 2

ข้อสังเกต ในตัวอย่างนี้ ถ้ากำหนดให้ $f(2) = 4$ จะได้ว่า f มีความต่อเนื่องที่ 2

ตัวอย่าง 2.5.2 ให้ฟังก์ชัน f คือ

$$f(x) = \frac{x^2 + x - 6}{x - 2}$$

เราสามารถเขียนกราฟของ f ได้ดังรูป 2.5.2



รูป 2.5.2

จะพบว่ากราฟขาดตอนที่จุด $x = 2$

ถ้าพิจารณาตามนิยาม 2.5.1 จะพบว่า

ไม่สามารถหาค่า f(2) ได้ เพราะฉะนั้นเงื่อนไขที่ (1) ไม่เป็นจริง

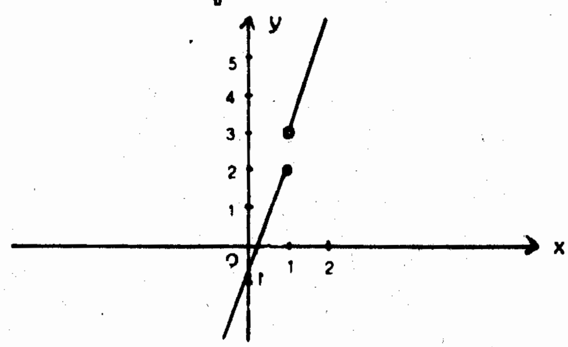
นั่นคือ ฟังก์ชัน f ไม่มีความต่อเนื่องที่ 2

ข้อสังเกต คุณสมบัติข้อที่ 2 เป็นจริง คือ $\lim_{x \to 2} \frac{x^2 + x - 6}{x - 2}$ สามารถหาค่าได้ โดยมีค่าเท่ากับ 5

ตัวอย่าง 2.5.3 ให้ฟังก์ชัน f คือ

$$f(x) = \begin{cases} 3x - 1 & \text{ถ้า } x \leq 1 \\ 3x & \text{ถ้า } x > 1 \end{cases}$$

เราสามารถเขียนกราฟ ของ f ได้ดังรูป 2.5.3



รูป 2.5.3

จะเห็นว่ากราฟขาดตอนที่จุด $x = 1$

ถ้าพิจารณาตามนิยาม 2.5.1 จะพบว่า

(1) $f(1) = 2$ เพราะฉะนั้นเงื่อนไขที่ (1) เป็นจริง

(2) $\lim_{x \to 1^+} f(x) = \lim_{x \to 1^+} (3x) = 3$

และ $\lim_{x \to 1^-} f(x) = \lim_{x \to 1^-} (3x - 1) = 2$

$\because \lim_{x \to 1^+} f(x) \neq \lim_{x \to 1^-} f(x)$

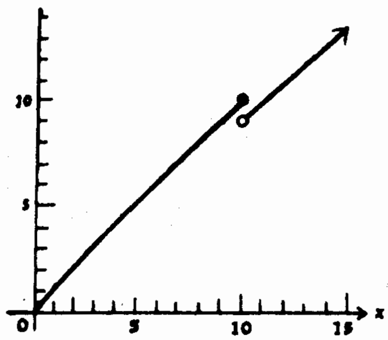
$\therefore$ ไม่มี $\lim_{x \to 1} f(x)$ แสดงว่าเงื่อนไขที่ (2) ไม่เป็นจริง

ดังนั้น ฟังก์ชัน f นี้ จึงไม่มีความต่อเนื่องที่ 1

ตัวอย่าง 2.5.4 ผู้ขายส่งขายผลิตผลโดยชั่งน้ำหนักเป็นกิโลกรัม (หรือเศษส่วนของกิโลกรัม) โดยถ้าผู้ซื้อ ซื้อไม่มากกว่า 10 กิโลกรัม จะขายกิโลกรัมละ 1 บาท แต่ถ้าซื้อมากกว่า 10 กิโลกรัม จะขายในราคากิโลกรัมละ 0.90 บาท ดังนั้น ถ้าให้ x เป็นจำนวนกิโลกรัมของผลิตผลที่ถูกซื้อ และ $f(x)$ เป็นราคาของผลิตผลทั้งหมดที่ถูกซื้อ จึงเขียนได้ว่า

$$f(x) = \begin{cases} x & \text{ถ้า } 0 \leq x \leq 10 \\ 0.9x & \text{ถ้า } 10 < x \end{cases}$$

เราสามารถเขียนกราฟของ f ได้ดังรูป 2.5.4



รูป 2.5.4

จะเห็นว่ากราฟของ f ขาดตอนที่จุด $x = 10$

ถ้าเราพิจารณาตามนิยาม 2.5.1 จะพบว่า

(1) $f(10) = 10$ เพราะฉะนั้นเงื่อนไขที่ (1) เป็นจริง

(2) $\lim_{x \to 10^-} f(x) = 10$ และ $\lim_{x \to 10^+} f(x) = 0.9$

ดังนั้น $\lim_{x \to 10} f(x)$ จึงไม่มี (does not exist)

เพราะฉะนั้นเงื่อนไขที่ (2) จึงไม่เป็นจริง

นั่นแสดงว่า f ไม่มีความต่อเนื่องที่ 10

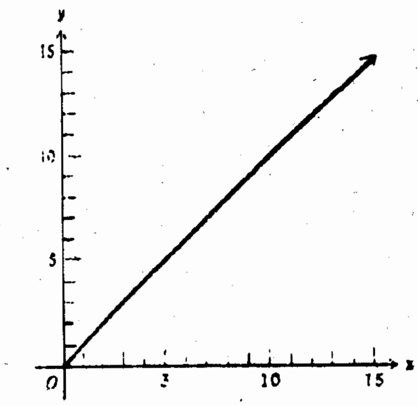
จะสังเกตเห็นว่า เนื่องจากความไม่ต่อเนื่องของ f จึงได้ว่า ผู้ซื้อจะได้เปรียบ ถ้าซื้อสินค้าจำนวนมาก โดยจะได้สินค้าในราคาที่ถูกกว่า เช่น จะไม่เป็นการฉลาดเลยถ้าจะซื้อสินค้าจำนวน 9.5 กิโลกรัม แต่ถ้าซื้อจำนวน 10.5 กิโลกรัม จะเป็นการฉลาดกว่า เพราะว่าราคาสินค้าจำนวน 9.5 กิโลกรัม ราคา 9.5 บาท แต่สินค้าจำนวน 10.5 กิโลกรัม ราคาเพียง 9.45 บาท เท่านั้น เป็นต้น

ตัวอย่าง 2.5.5 ผู้ขายส่ง ขายผลิตผลเป็นกิโลกรัม (หรือเศษส่วนของกิโลกรัม) โดยคิดมูลค่า 1 บาท ต่อ 1 กิโลกรัม สำหรับผู้ที่ซื้อจำนวน 10 กิโลกรัม หรือน้อยกว่านั้น แต่ถ้าซื้อมากกว่า 10 กิโลกรัม ผู้ขายจะคิดมูลค่า 10 บาท รวมกับอีก 0.9 บาท สำหรับแต่ละกิโลกรัมที่เกินกว่า 10 (กิโลกรัม)

ดังนั้น ถ้า x เป็นจำนวนกิโลกรัมของผลิตผลที่ถูกซื้อและ f(x) บาท เป็นจำนวนราคาทั้งหมด แล้วจะได้ว่า

$$f(x) = \begin{cases} x & \text{ถ้า } 0 \le x \le 10 \\ 10 + 0.9(x - 10) = 0.9x + 1 & \text{ถ้า } 10 < x \end{cases}$$

เราสามารถเขียนกราฟของ f ได้ดังรูป 2.5.5



รูป 2.5.5

จะเห็นว่า กราฟไม่มีการขาดตอน

ถ้าพิจารณาตามนิยาม 2.5.1 จะได้ว่า

(1) $f(10) = 10$ เงื่อนไขที่ (1) เป็นจริง

(2) $\lim_{x \to 10^-} f(x) = \lim_{x \to 10^+} x = 10$

และ $\lim_{x \to 10^+} f(x) = \lim_{x \to 10^-} (0.9x + 1) = 10$

ดังนั้น $\lim_{x \to 10} f(x)$ จึงมีค่า

เพราะฉะนั้นเงื่อนไขข้อที่ (2) เป็นจริง

(3) $\lim_{x \to 10} f(x) = f(10) = 10$

เพราะฉะนั้นเงื่อนไขข้อที่ (3) เป็นจริง

นั่นแสดงว่าฟังก์ชัน f มีความต่อเนื่องที่ 10

แบบฝึกหัด 2.5.1

จงเขียนกราฟของฟังก์ชันต่อไปนี้ และพิจารณาว่ามันขาดตอนที่ไหนหรือไม่ ตลอดจนแสดงด้วยว่าฟังก์ชันนั้น ๆ ต่อเนื่องหรือไม่ ต่อเนื่องที่จุดไหน เพราะเหตุใด

1. $f(x) = \begin{cases} \dfrac{6}{x-2} & \text{ถ้า } x \neq 2 \\ 3 & \text{ถ้า } x = 2 \end{cases}$

2. $f(x) = \begin{cases} \dfrac{2}{x+5} & \text{ถ้า } x \neq -5 \\ 0 & \text{ถ้า } x = -5 \end{cases}$

3. $f(x) = \dfrac{x^2 - 2x - 8}{x - 4}$

4. $g(x) = \dfrac{x^4 - 81}{x^2 - 9}$

5. $F(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2 + x - 2}{x + 2} & \text{ถ้า } x \neq -2 \\ 1 \ \text{ถ้า } x = -2 \end{cases}$

6. $h(x) = \dfrac{(x - 2)(x^2 - 3x + 12)}{x^2 - 8x + 12}$

7. $f(x) = \dfrac{x + 3}{x^2 + x - 6}$

8. $f(x) = \dfrac{x^2 - 9}{x^4 - 81}$

9. $g(x) = \begin{cases} -3 & \text{ถ้า } x < 0 \\ 0 & \text{ถ้า } x = 0 \\ x^2 + 1 & \text{ถ้า } 0 < x \end{cases}$

10. $H(x) = \begin{cases} 2 + x & \text{ถ้า } x \leq -2 \\ 3 - x & \text{ถ้า } -2 < x \leq 2 \\ 4x - 1 & \text{ถ้า } 2 < x \end{cases}$

11. $f(x) = 3x + 11$

12. $G(x) = \dfrac{|x - 4|}{x - 4}$

13. $F(x) = \begin{cases} |x - 6| & \text{ถ้า } x \neq 5 \\ 3 & \text{ถ้า } x = 5 \end{cases}$

14. $h(x) = \begin{cases} 2x + 3 & \text{ถ้า } x \leq 1 \\ 8 - 3x & \text{ถ้า } 1 < x < 2 \\ 5x + 4 & \text{ถ้า } 2 \leq x \end{cases}$

15. $f(t) = \begin{cases} t^2 - 4 & \text{ถ้า } t \leq 2 \\ 0 & \text{ถ้า } t > 2 \end{cases}$

16. ค่าขนส่งสิ่งของชนิดหนึ่ง เป็นดังนี้

$$C(x) = \begin{cases} 0.80x & \text{ถ้า } 0 < x \leq 50 \\ 0.70x & \text{ถ้า } 50 < x \leq 200 \\ 0.65x & \text{ถ้า } 200 < x \end{cases}$$

เมื่อ x เป็นน้ำหนัก (กิโลกรัม) และ $C(x)$ เป็นค่าขนส่งสิ่งของทั้งหมด (บาท) จงเขียนกราฟของ C และหาว่า C ไม่ต่อเนื่องที่ไหน พร้อมทั้งแสดงด้วยว่าที่ไม่ต่อเนื่องนั้น เพราะว่าขาดคุณสมบัติข้อใด

2.6 ทฤษฎีบทของความต่อเนื่องและความต่อเนื่องบนช่วง

ทฤษฎีบท 2.6.1 ถ้า f และ g เป็นฟังก์ชัน ซึ่งต่อเนื่องกันที่จุด a แล้ว

(1) $f + g$ ย่อมต่อเนื่องที่จุด a

(2) $f - g$ " " a

(3) $f \cdot g$ " " a

(4) f/g " " a (เมื่อ $g(a) \neq 0$)

พิสูจน์

(1) เพราะว่า f และ g มีความต่อเนื่องที่ a จึงได้ว่า

$$\lim_{x \to a} f(x) = f(a) \quad \text{และ} \quad \lim_{x \to a} g(x) = g(a)$$

เพราะฉะนั้น โดย ท.บ. 2.1.4 จึงได้ว่า

$$\lim_{x \to a} [f(x) + g(x)] = f(a) + g(a)$$

นั่นแสดงว่า $f + g$ มีความต่อเนื่องกันที่ a

(2), (3), (4) ให้นักศึกษาพิสูจน์เองเป็นแบบฝึกหัด

ทฤษฎีบท 2.6.2 ฟังก์ชันโพลิโนเมียล ย่อมมีความต่อเนื่องที่ทุก ๆ จุด

พิสูจน์

พิจารณาฟังก์ชันโพลิโนเมียล f ซึ่งกำหนดโดย

$f(x) = b_0x^n + b_1x^{n-1} + b_2x^{n-2} + \dots\dots\dots + b_{n-1}x + b_n$ โดย $b_0 \neq 0$ เมื่อ n เป็นจำนวนเต็มที่ไม่เป็นจำนวนเต็มลบ และ $b_0, b_1, b_2, \dots\dots\dots, b_n$ เป็นจำนวนจริง ถ้า a เป็นจุดใด ๆ แล้วเราจะได้ว่า

$$\begin{aligned}\lim_{x \to a} f(x) &= b_0 \lim_{x \to a} x^n + b_1 \lim_{x \to a} x^{n-1} + \dots\dots + b_{n-1} \lim_{x \to a} x + \lim_{x \to a} b_n \\ &= b_0 a^n + b_1 a^{n-1} + b_2 a^{n-2} + \dots\dots + b_{n-1} a + b_n \quad (\text{โดย. ท.บ. } 2.1.5) \\ &= f(a)\end{aligned}$$

นั่นคือ $\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$

แสดงว่าฟังก์ชันโพลิโนเมียล มีความต่อเนื่องที่ทุก ๆ จุด

ทฤษฎีบท 2.6.3 ฟังก์ชันตักยะ มีความต่อเนื่องที่ทุก ๆ จุดในโดเมน

พิสูจน์ ถ้า f เป็นฟังก์ชันตักยะ มันจะสามารถเขียนอยู่ในรูปเศษส่วนของฟังก์ชันโพลิโนเมียลได้ สมมุติเป็น

$$f(x) \qquad \frac{g(x)}{h(x)}$$

เมื่อ g และ h เป็นฟังก์ชันโพลิโนเมียล และโดเมนของ f ประกอบด้วยทุก ๆ จำนวน

ยกเว้น จำนวนซึ่งทำให้ $h(x) = 0$

ถ้า a เป็นจำนวนใด ๆ ในโดเมนของ f แล้ว $h(a) \neq 0$ และโดย ท.บ. 2.1.9 จะได้ว่า

$$\lim_{x \to a} f(x) = \frac{\lim_{x \to a} g(x)}{\lim_{x \to a} h(x)}$$

เพราะว่า g และ h เป็นฟังก์ชันโพลิโนเมียล . โดย ท.บ. 2.6.2 จะได้ว่ามันมีความต่อเนื่องที่ a ด้วย

$$\therefore \quad \lim_{x \to a} f(x) = \frac{g(a)}{h(a)}$$

$$= f(a)$$

เราจึงกล่าวได้ว่า f มีความต่อเนื่องที่ทุก ๆ จุดในโดเมน

ตัวอย่าง 2.6.1 ถ้า $f(x) = x^3 - 3x^2 - 2x + 1$ แล้ว f เป็นฟังก์ชันโพลิโนเมียล ดังนั้น f จึงมีความต่อเนื่องที่ทุก ๆ จุด

ตัวอย่าง 2.6.2 ถ้า $g(x) = (x^3 - 3x^2 - 2x + 1)(x^2 - 9)$ แล้ว $g(x)$ เป็นผลคูณของฟังก์ชันโพลิโนเมียล ซึ่งยังคงเป็นโพลิโนเมียล จึงได้ว่า g ก็มีความต่อเนื่องที่ทุก ๆ จุด

ตัวอย่าง 2.6.3 ให้ $f(x) = \frac{x^2 + 1}{x^2 - 4}$ จงหาค่าของ x ทุก ๆ ค่าที่ทำให้ f มีความต่อเนื่อง

วิธีทำ โดเมนของ f คือ เซ็ตของจำนวนจริง x ทั้งหลาย ยกเว้นจำนวน $x = \pm 2$ เพราะทำให้ $x^2 - 4 = 0$ นั่นคือโดเมนของ f คือเซ็ตของจำนวนจริงทั้งหลาย ยกเว้น ± 2

ฟังก์ชัน f นี้เป็นฟังก์ชันตักยะ

โดย ท.บ. 2.6.3 กล่าวได้ว่า

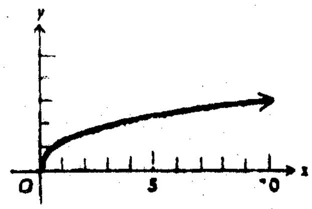
f มีความต่อเนื่องที่จำนวนจริงทั้งหลาย ยกเว้น 2 กับ -2

ทฤษฎีบท 2.6.4 ให้ $f(x) = \sqrt[n]{x}$ เมื่อ n เป็นจำนวนเต็มบวกใด ๆ แล้ว f จะมีความต่อเนื่องที่ a ถ้า

(1) a เป็นจำนวนบวกใด ๆ หรือ

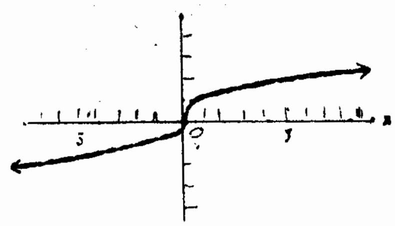
(2) a เป็นจำนวนลบหรือศูนย์ และ n เป็นเลขคี่

ตัวอย่าง 2.6.4 ถ้า $g(x) = \sqrt{x}$ โดย ท.บ. 2.6.4 (1) จะได้ว่า g มีความต่อเนื่องที่ทุก ๆ จำนวนบวก ดังรูป 2.6.1



รูป 2.6.1

ตัวอย่าง 2.6.5 ถ้า $h(x) = \sqrt[3]{x}$ โดย ท.บ. 2.6.4 (1) และ (2) จะได้ว่า h มีความต่อเนื่องที่ทุก ๆ จำนวนจริง ดังรูป 2.6.2



รูป 2.6.2

ทฤษฎีบท 2.6.5 ถ้าฟังก์ชัน g มีความต่อเนื่องที่ a และฟังก์ชัน f มีความต่อเนื่องที่ g(a) แล้ว ฟังก์ชันประกอบ (composite function) fog ย่อมมีความต่อเนื่องที่ a ด้วย

ตัวอย่าง 2.6.6 ถ้า $g(x) = 16 - x^2$ และ $f(x) = \sqrt{x}$ แล้ว ให้ h เป็นฟังก์ชันประกอบ fog

$$h(x) = (fog)(x) = \sqrt{16 - x^2}$$

เพราะว่า g เป็นฟังก์ชันโพลิโนเมียล ดังนั้น g มีความต่อเนื่องที่ทุก ๆ จุด ยิ่งกว่านั้น f ก็มีความต่อเนื่องที่ทุก ๆ จำนวนบวก (โดย ท.บ. 2.6.4)

ดังนั้น โดย ท.บ. 2.6.5 h จึงมีความต่อเนื่องที่ทุก ๆ จำนวน x ซึ่ง $g(x) > 0$

นั่นคือ เมื่อ $16 - x^2 > 0$

$$\therefore \quad x^2 < 16$$

$$\therefore \quad -4 < x < 4$$

ดังนั้นจึงได้ว่า h มีความต่อเนื่องที่ทุก ๆ จำนวนในช่วงเปิด (-4, 4)

นิยาม 2.6.1 สำหรับฟังก์ชัน f ใด ๆ เรากล่าวว่า f มีความต่อเนื่องบนช่วงเปิดก็ต่อเมื่อฟังกชัน f นั้น ๆ มีความต่อเนื่องที่ทุก ๆ จำนวนจริงในช่วงเปิดนั้น

ตัวอย่าง 2.6.7 ถ้า $f(x) = \dfrac{1}{x - 5}$ แล้ว จะเห็นว่า f มีความต่อเนื่องที่ทุก ๆ จำนวนจริง ยกเว้น 5 นั่นแสดงว่า f มีความต่อเนื่องบนช่วงเปิดทุก ๆ ช่วงที่ไม่มี 5 อยู่ด้วย

นิยาม 2.6.2 จะกล่าวว่า ฟังก์ชัน f มีความต่อเนื่องที่จุด a จากทางขวา ก็ต่อเมื่อมันสอดคล้องกับเงื่อนไขต่อไปนี้ทั้ง 3 ข้อ คือ

(1) $f(a)$ มีค่า

(2) $\lim\limits_{x \to a^+} f(x)$ สามารถหาค่าได้ และ

(3) $\lim\limits_{x \to a^+} f(x) = f(a)$

นิยาม 2.6.3 จะกล่าวว่าฟังก์ชัน f มีความต่อเนื่องที่จุด a จากทางซ้ายก็ต่อเมื่อมันสอดคล้องกับ

เงื่อนไขต่อไปนี้ทั้งสามข้อ คือ

(1) $f(a)$ มีค่า

(2) $\lim\limits_{x \to a^-} f(x)$ สามารถหาค่าได้ และ

(3) $\lim\limits_{x \to a^-} f(x) = f(a)$

นิยาม 2.6.4 สำหรับฟังก์ชัน f ใด ๆ ซึ่งในโดเมนมีช่วงปิด [a, b] รวมอยู่ด้วยแล้ว จะกล่าวว่า ฟังก์ชัน f นั้น ๆ มีค่าต่อเนื่องบน [a, b] ก็ต่อเมื่อ ฟังก์ชันนั้น ๆ มีความต่อเนื่องบนช่วงเปิด (a, b) อีกทั้งจะต้องมีความต่อเนื่องจากทางขวาที่ a และมีความต่อเนื่องจากทางซ้ายที่ b ด้วย

ตัวอย่าง 2.6.7 จงแสดงว่า ฟังก์ชัน h ซึ่ง $h(x) = \sqrt{16 - x^2}$ มีความต่อเนื่องบนช่วงเปิด [-4, 4]

วิธีทำ เนื่องจากฟังก์ชัน h มีความต่อเนื่องบนช่วงเปิด (-4, 4) และ

$$\lim_{x \to -4^+} \sqrt{16 - x^2} = 0 = h(-4)$$

และ $$\lim_{x \to 4^-} \sqrt{16 - x^2} = 0 + h(4)$$

ดังนั้น โดยนิยาม 2.6.4 จึงกล่าวได้ว่า

h มีความต่อเนื่องบนช่วงปิด [-4, 4]

นิยาม 2.6.5 สำหรับฟังก์ชัน f ใด ๆ ซึ่งในโดเมน มีช่วงครึ่งเปิดทางขวา [a, b) รวมอยู่ด้วยแล้ว จะกล่าวว่า ฟังก์ชัน f นั้น ๆ มีความต่อเนื่องบน [a, b) ก็ต่อเมื่อฟังก์ชัน f มีความต่อเนื่องบนช่วงเปิด (a, b) และมีความต่อเนื่องจากทางขวาที่ a ด้วย

นิยาม 2.6.6 สำหรับฟังก์ชัน f ใด ๆ ซึ่งในโดเมนมีช่วงครึ่งเปิดทางซ้าย (a, b] รวมอยู่ด้วยแล้ว จะกล่าวว่า ฟังก์ชัน f นั้น ๆ มีความต่อเนื่องบน (a, b] ก็ต่อเมื่อฟังก์ชัน f มีความต่อเนื่องบนช่วงเปิด (a, b) และมีความต่อเนื่องจากทางซ้ายที่ b ด้วย

ตัวอย่าง 2.6.8 กำหนดให้ $f(x) = \sqrt{\dfrac{2 - x}{3 + x}}$ จงพิจารณาว่า f มีความต่อเนื่องหรือไม่ต่อเนื่องบนช่วงต่อไปนี้คือ (-3, 2), [-3, 2], [-3, 2), (-3, 2]

วิธีทำ เราจะต้องหาโดเมนของ f

โดเมนของ f ก็คือเซ็ตของทุก ๆ จำนวน x ซึ่ง $\dfrac{2 - x}{3 + x}$ ไม่เป็นค่าลบ

นั่นคือ ค่า x ที่ทำให้เศษและส่วนมีเครื่องหมายเหมือนกัน จึงจะอยู่ในโดเมน ถ้าค่าของ x ค่าใดที่ทำให้เศษและส่วนมีเครื่องหมายตรงกันข้าม ค่า x นั้น ก็ไม่อยู่ในโดเมน พิจารณาตาราง 2.6.1

	$2 - x$	$3 + x$	$\dfrac{2 - x}{3 + x}$	$f(x)$
$x < -3$	+	-	-	ไม่มี
$x = -3$	5	0	ไม่นิยาม	ไม่มี
$-3 < x < 2$	+	+	+	+

$x = 2$	0	5	0	0
$2 < x$	-	+	-	ไม่มี

ตาราง 2.6.1

จึงได้ว่า โดเมนของ f ก็คือช่วงครึ่งเปิดทางซ้าย $(-3, 2]$ นั่นเอง

ฟังก์ชัน f มีความต่อเนื่องบนช่วงเปิด $(-3, 2)$ และมีความต่อเนื่องจากทางซ้ายที่ 2 ด้วย เพราะว่า $\lim\limits_{x \to 2^-} \sqrt{\frac{2 - x}{3 + x}} = 0 = f(2)$ แต่ f ไม่มีความต่อเนื่องจากทางขวาที่ -3 เพราะว่า $\lim\limits_{x \to -3^+} \sqrt{\frac{2 - x}{3 + x}} = +\infty$

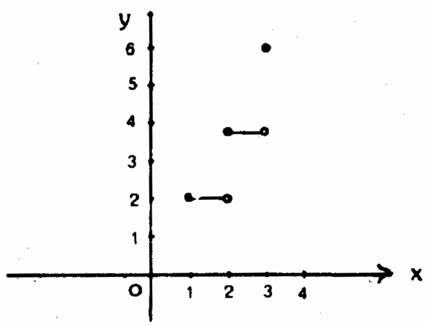
เราจึงกล่าวได้ว่า

f มีความต่อเนื่องบนช่วง $(-3, 2)$ และ $(-3, 2]$ แต่ไม่มีความต่อเนื่องบนช่วง $[-3, 2]$ และ $[-3, 2)$

ตัวอย่าง 2.6.9 จงพิจารณาความต่อเนื่องของฟังก์ชัน g เมื่อ

$$g(x) = \begin{cases} 2 & \text{ถ้า } 1 \le x < 2 \\ 4 & \text{ถ้า } 2 \le x < 3 \\ 6 & \text{ถ้า } x = 3 \end{cases}$$

วิธีทำ เราสามารถเขียนกราฟของ g ได้ดังรูป 2.6.1



รูป 2.6.1

สมมุติให้ u เป็นจำนวนใด ๆ ซึ่งอยู่ในช่วง $(1, 2)$ จะได้ว่า $g(u) = 2$ และ $\lim\limits_{x \to u} g(x) = 2$

ดังนั้น ถ้า $1 < u < 2$ แล้ว $\lim\limits_{x \to u} g(x) = g(u)$

จึงได้ว่า g มีความต่อเนื่องบนช่วง $(1, 2)$

$$\lim_{x \to 1^+} g(x) = \lim_{x \to 1^+} 2 = 2 = g(1)$$

เพราะฉะนั้น g มีความต่อเนื่องจากทางขวาที่ 1

แต่ $\lim_{x \to 2^-} g(x) = \lim_{x \to 2^-} 2 = 2$ และ $g(2) = 4$

เพราะฉะนั้น g ไม่มีความต่อเนื่องจากทางซ้ายที่ 2

จึงได้ว่า ฟังก์ชัน g มีความต่อเนื่องบนช่วงครึ่งเปิดทางขวา $[1, 2)$ ในทำนองเดียวกัน g ก็จะมีความต่อเนื่องที่ทุก ๆ u เมื่อ $2 < u < 3$ และ g จะมีความต่อเนื่องจากทางขวาที่ 2 ด้วย เพราะว่า $\lim_{x \to 2^+} g(x) = 4 = g(2)$ แต่ g จะไม่มีความต่อเนื่องจากทางซ้ายที่ 3 เพราะว่า $\lim_{x \to 3^-} g(x) = 4$ และ $g(3) = 6$

นั่นจึงได้ว่า g มีความต่อเนื่องบนช่วง $[2, 3)$ ด้วย

ตัวอย่าง 2.6.10 จงพิจารณาความต่อเนื่องของ f เมื่อ

$$f(x) = \begin{cases} 8x & \text{ถ้า } 40 \le x \le 80 \\ 11.20x - 0.04x^2 & \text{ถ้า } 80 < x \le 280 \end{cases}$$

วิธีทำ

ให้ x เป็นจำนวนจริงใด ๆ ในช่วง $[40, 80]$ เพราะว่า $8x$ และ $11.20x - 0.04x^2$ เป็นโพลิโนเมียล ดังนั้น f จึงมีความต่อเนื่องบนช่วง $[40, 80)$ และช่วง $(80, 280]$ จะมาพิจารณาต่อไปว่า f มีความต่อเนื่องที่ 80 ไหม?

$$\because \quad f(80) = 8(80) = 640$$

และ $$\lim_{x \to 80^-} f(x) = \lim_{x \to 80^-} 8x = 640$$

และ $$\lim_{x \to 80^+} f(x) = \lim_{x \to 80^+} (11.20x - 0.04x^2) = 640$$

เพราะว่า $$\lim_{x \to 80^-} f(x) = \lim_{x \to 80^+} f(x) = 640$$

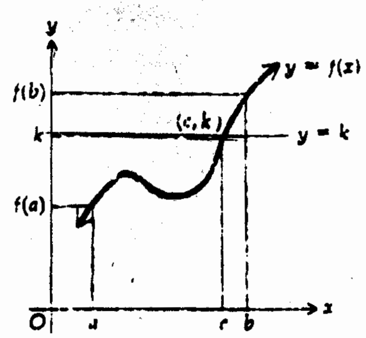
เราจึงกล่าวได้ว่า $$\lim_{x \to 80} f(x) = 640 = f(80)$$

ดังนั้น f จึงมีความต่อเนื่องที่ 80

นั่นคือ f มีความต่อเนื่องบนช่วงปิด $[40, 280]$

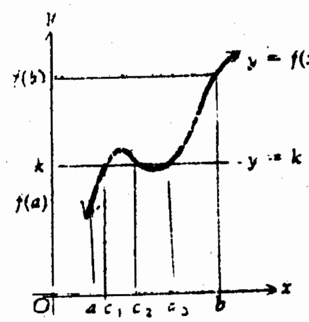
ทฤษฎีบท 2.6.6 (Intermediate-Value Theorem) ถ้าฟังก์ชัน f มีความต่อเนื่องบนช่วงปิด $[a, b]$ และถ้า $f(a) \neq f(b)$ แล้ว สำหรับจำนวน k ใด ๆ ที่อยู่ระหว่าง $f(a)$ และ $f(b)$ ย่อมมีจำนวน c ที่อยู่ระหว่าง a กับ b ซึ่ง $f(c) = k$

อนึ่ง ถ้าเราพิจารณาทฤษฎีบท 2.6.6 ในแง่เรขาคณิต จะพบว่า ถ้าจุด $(0, k)$ เป็นจุดใด ๆ บนแกน y ซึ่งอยู่ระหว่างจุด $(0, f(a))$ กับจุด $(0, f(b))$ ดังรูป 2.6.2 แล้ว



รูป 2.6.2

จะได้ว่า เส้นตรง $y = k$ จะต้องตัดกราฟ $f(x)$ อย่างแน่นอน ให้จุดตัดนั้นคือจุด (c, k) เมื่อ c อยู่ระหว่าง a กับ b ดังรูป 2.6.2 ดังนั้นจึงกล่าวได้ว่า $f(c) = k$ สำหรับบางค่าของ k อาจจะมีค่า c มากกว่าหนึ่งค่า ก็ได้ โดย ท.บ. 2.6.6 เพียงแต่กล่าวว่า จะต้องมี ค่าของ c อย่างน้อยหนึ่งค่า ไม่จำเป็นจะต้องมีค่า c เพียงค่าเดียวเท่านั้น นั่นแสดงว่าอาจมีค่า c หลายค่า ก็ได้ที่ทำให้ $f(c) = k$ ดังรูป 2.6.3 แสดงว่ามีค่า c ที่เป็นไปได้ถึง 3 ค่า (คือ c_1, c_2, c_3) สำหรับค่า k เพียงค่าเดียวเท่านั้น



รูป 2.6.3

ตัวอย่าง 2.6.11 กำหนดให้ $f(x) = x^2 + 3x - 6$ เมื่อ $-1 \leq x \leq 5$ จงแสดงว่า ท.บ. 2.6.6 เป็นจริง เมื่อ $k = 4$

วิธีทำ

$\because \quad f(-1) = -8$ และ $f(5) = 34$

จะหาค่า c ซึ่ง $f(c) = k = 4$

$\therefore \quad c^2 + 3c - 6 = 4$

$\therefore \quad c^2 + 3c - 10 = 0$

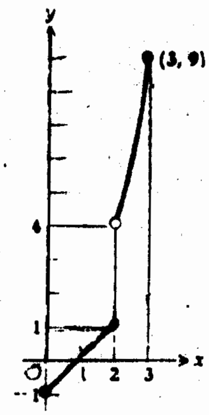
$\therefore \quad c = -5, 2$

เราไม่ใช้ค่า $c = -5$ เพราะจำนวนนี้อยู่นอกช่วง $[-1, 5]$ ดังนั้นจำนวน $c = 2$ เป็นจำนวนที่ต้องการ โดย 2 อยู่ในช่วง $[-1, 5]$ และ $f(2) = 4$

ตัวอย่าง 2.6.12 จงพิจารณาฟังก์ชัน f ซึ่ง

$$f(x) = \begin{cases} x - 1 & \text{ถ้า } 0 \le x \le 2 \\ x^2 & \text{ถ้า } 2 < x \le 3 \end{cases}$$

วิธีทำ เราสามารถเขียนกราฟของ f ได้ดังรูป 2.6.4



รูป 2.6.4

จะพบว่า กราฟขาดตอนที่ 2 ซึ่งอยู่ในช่วง $[0, 3]$

$f(0) = -1$ และ $f(3) = 9$ ถ้า k เป็นจำนวนใด ๆ ที่อยู่ระหว่าง 1 กับ 4 จะไม่มีค่า c ซึ่ง $f(c) = k$ เพราะว่าไม่มีค่าของฟังก์ชันที่อยู่ระหว่าง 1 กับ 4

แบบฝึกหัด 2.6.1

จงหาค่าของ x ซึ่งทำให้ฟังก์ชันต่อไปนี้มีความต่อเนื่อง

1) $f(x) = 9x^2 + 5x + 12$

2) $f(x) = x^4 (x + 6)^2$

3) $f(x) = \dfrac{x}{x - 5}$

4) $f(x) = \dfrac{x^3 - 12}{x^2 - 16}$

5) $f(x) = \dfrac{x^2 + 2x - 9}{(x+4)(x^2+4x-12)}$

6) $f(x) = \dfrac{|x|}{x}$

7) $f(x) = \dfrac{|x - 3|}{x - 3}$

8) $f(x) = x^2 (x^2 + x^{-1/2})^3$

จงพิจารณาว่าฟังก์ชันต่อไปนี้มีความต่อเนื่องบนช่วงที่กำหนดให้หรือไม่

9) $f(x) = \dfrac{4}{x + 9}$; $(3, 10)$, $[-16, 4]$, $(-\infty, 0)$, $(-9, +\infty)$, $[-9, -6)$

10) $f(x) = \dfrac{x^3 + 9}{x^2 - 9}$; $(0, 3]$, $(-3, 3)$, $(-\infty, -2]$, $(3, +\infty)$, $[-3, 3]$, $(-3, 3]$

11) $f(x) = \sqrt{16 - x^2}$; $(-4, 4)$, $[-4, 4]$, $[-4, 4)$, $(-4, 4]$, $(-\infty, -4]$, $(4 + \infty)$

12) $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{3 + 2x - x^2}}$; $(-1, 3)$, $[-1, 3]$, $[-1, 3)$, $(-1, 3]$

จงหาช่วงที่ทำให้ฟังก์ชันที่กำหนดให้ต่อไปนี้มีความต่อเนื่อง

13) $f(x) = \dfrac{1}{x^2 - 1}$

14) $g(y) = \sqrt{y^2 - y - 12}$

จากฟังก์ชัน f และ g ที่กำหนดให้ต่อไปนี้ จงหา fog และหาค่าของ x ที่ทำให้ fog มีความต่อเนื่อง

15) $f(x) = x^5 + 3$; $g(x) = \sqrt{x}$

16) $f(x) = \sqrt{x}$; $g(x) = \dfrac{1}{x^2 - 9}$

17) $f(x) = \dfrac{x + 2}{x - 2}$; $g(x) = \sqrt{x}$

จงหาค่าคงที่ c และ k ที่ทำให้ฟังก์ชันต่อไปนี้มีความต่อเนื่องบน $(-\infty , +\infty)$

18) $f(x) = \begin{cases} 5x + 2 & \text{ถ้า } x \le 5 \\ ku - 8 & \text{ถ้า } 5 < x \end{cases}$

19) $f(x) = \begin{cases} x & \text{ถ้า } x \le 1 \\ cu + k & \text{ถ้า } 1 < x < 4 \\ -2 & \text{ถ้า } 4 \le x. \end{cases}$

สำหรับฟังก์ชัน f บนช่วงปิด [a, b] และค่า k ที่กำหนดให้ต่อไปนี้ ถ้าสอดคล้องตาม ท.บ. 2.6.6 จงหาค่า c ซึ่ง f(c) = b แต่ถ้าไม่สอดคล้องกับ ท.บ. 2.6.6 จงให้เหตุผลพร้อมทั้งเขียนกราฟและ y = k ด้วย

20) $f(x) = 3x^2 + 2x - 1$; $[a, b] = [0, 2]$; $k = 7$

21) $f(x) = \sqrt{25 - x^2}$; $[a, b] = [-4, 3]$; $k = 4$

22) $f(x) = \dfrac{13}{2x - 9}$; $[a, b] = [-2, 5]$; $k = \frac{1}{2}$

23) $f(x) = \begin{cases} x^2 - 10 & \text{ถ้า } -2 \le x < 1 \\ 3x + 8 & \text{ถ้า } 1 \le x \le 3 \\ [a, b] = [-2, 3] ; k = -1 \end{cases}$

คำตอบแบบฝึกหัด 2.3.1

(1) $+\infty$	(2) $-\infty$	(3) $+\infty$	(4) $+\infty$	(5) $-\infty$
(6) $+\infty$	(7) $-\infty$	(8) $+\infty$	(9) $+\infty$	(10) $-\infty$
(11) $+\infty$	(12) $-\infty$	(13) $+\infty$	(14) $+\infty$	(15) $-\infty$
(16) $+\infty$	(17) $x = 0$	(18) $x = 0$	(19) $x = 5$	(20) $x = -2$
(21) $x = -1$	(22) $x = 3$	(23) $x=-4, x=-8$	(24) $x=3, x=-9$	

คำตอบแบบฝึกหัด 2.4.1

(1) 0	(2) 0	(3) $\frac{3}{4}$	(4) 2	(5) 3
(6) $\frac{7}{3}$	(7) 0	(8) $\frac{1}{3}$	(9) $\frac{1}{3}$	(10) $+\infty$
(11) $-\infty$	(12) $-\infty$	(13) $-\infty$	(14) 0	(15) 1

(16) 1 - 3 (17) $x = 4$; $y = 3$ (18) $x = -4$, $y = 3$

(19) $x = 0$, $y = 3$ (20) $x = 0$, $y = 1$

(21) $x = 3$, $x = -3$, $y = 0$ (22) $x = 4$, $x = -4$, $y = 8$

(23) $x = 1$, $x = -1$, $y = -1$ (24) (a) $C(x) = 10x^2 + \dfrac{2500}{x}$; $x \in (0, +\infty)$

(b) $+\infty$, $+\infty$

คำตอบแบบฝึกหัด 2.5.1

(1) 2, $\lim_{x \to 2} f(x)$ ไม่มี

(2) -5, $\lim_{x \to -5} f(x)$ ไม่มี

(3) 4, $f(4)$ ไม่มี

(4) 3, $g(3)$ ไม่มี

(5) 1, $\lim_{x \to 1} f(x) \neq f(1)$

(6) 2, $h(2)$ ไม่มี

(7) -3, 2, $f(-3)$ และ $f(2)$ ไม่มี

(8) 3, -3, $f(3)$ และ $f(-3)$ ไม่มี

(9) 0, $\lim_{x \to 0} g(x)$ ไม่มี

(10) -2, 2 $\lim_{x \to -2} H(x)$ และ $\lim_{x \to 2} H(x)$ ไม่มี

(11) ต่อเนื่องที่ทุก ๆ จุด

(12) 4, $G(4)$ ไม่มี

(13) 5, $\lim_{x \to 5} F(x) \neq F(5)$

(14) 2, $\lim_{x \to 2} h(x) \neq h(2)$

(15) ต่อเนื่องที่ทุก ๆ จุด

(16) ไม่ต่อเนื่องที่ 50 และ 200 เพราะว่า $\lim_{x \to 50} C(x)$ และ $\lim_{x \to 200} C(x)$ ไม่มี

คำตอบแบบฝึกหัด 2.6.1

(1) ทุกค่าของจำนวนจริง

(2) ทุกค่าของจำนวนจริง

(3) ทุกค่าของจำนวนจริง ยกเว้น 5

(4) ทุกค่าของจำนวนจริงยกเว้น 4 กับ -4

(5) ทุกค่าของจำนวนจริงยกเว้น 2, -4 และ -6

(6) ทุกค่าของจำนวนจริงยกเว้น 0

(7) ทุกค่าของจำนวนจริงยกเว้น 3

(8) ทุกค่าของจำนวนจริงในช่วง $(0, +\infty$

(9) ต่อเนื่อง, ไม่ต่อเนื่อง, ไม่ต่อเนื่อง, ต่อเนื่อง, ไม่ต่อเนื่อง

(10) ไม่ต่อเนื่อง, ต่อเนื่อง, ไม่ต่อเนื่อง, ต่อเนื่อง, ไม่ต่อเนื่อง, ไม่ต่อเนื่อง

(11) ต่อเนื่อง, ต่อเนื่อง, ต่อเนื่อง, ต่อเนื่อง, ไม่ต่อเนื่อง, ไม่ต่อเนื่อง

(12) ต่อเนื่อง, ไม่ต่อเนื่อง, ไม่ต่อเนื่อง, ไม่ต่อเนื่อง

(13) $(-\infty, -1)$, $(-1, 1)$, $(1, +\infty)$

(14) $(-\infty, -3)$, $[4, +\infty)$

(15) $\sqrt{x^5} + 3$; ต่อเนื่องที่ทุก ๆ ค่าของจำนวนจริงในช่วง $(0, +\infty)$

(16) $\frac{1}{\sqrt{x^2 - 9}}$, ต่อเนื่องที่ทุก ๆ ค่าของจำนวนจริงในช่วง $(-\infty, -3) \cup (3, +\infty)$

(17) $\frac{\sqrt{x} + 2}{\sqrt{x} - 2}$, ต่อเนื่องที่ทุก ๆ ค่าของจำนวนจริงในช่วง $(0, 4) \cup (4, +\infty)$

(18) $k = 7$

(19) $c = -3$ และ $k = 4$

(20) $c = \frac{4}{3}$

(21) $c = 3$

(22) f ไม่ต่อเนื่องที่ $x = \frac{9}{2}$

(23) f ไม่ต่อเนื่องที่ 1