บทที่ 1
เซต จำนวนจริง กราฟ และฟังก์ชัน
Sets, Real Numbers, Graphs, and Functions

1.1 เซต Sets

เรามักพบเรื่องเซตในคณิตศาสตร์เกือบทุกแขนง คำว่า "เซต" นั้นเป็นคำที่ใช้แทนคำว่า หมู่ พวก หรือกลุ่มของสิ่งของ เช่น เซตของนักเรียนหญิงที่ใส่เสื้อแดง หมายถึงกลุ่มของนักเรียนหญิงที่ใส่เสื้อสีแดง หรือ เซตของคนไทยในสหรัฐอเมริกา หมายถึงพวกคนไทยที่อยู่ในอเมริกาทั้งหมด สำหรับในวิชาแคลคูลัส เซตที่กล่าวถึงเสมอ คือเซตของจำนวนจริง เพื่อให้สะดวกเราจะเรียกชื่อเซตโดยใช้อักษร โรมันตัวพิมพ์ใหญ่ เช่น A, B, C,... และสิ่งของหรือตัวเลขที่ประกอบกันขึ้นเป็นเซตจะเรียกว่าสมาชิก (element) ของเซตนั้น และมักเขียนแทนด้วยอักษรโรมันตัวพิมพ์เล็ก เช่น a, b, c,... เป็นต้น ถ้า x เป็นสมาชิกของเซต A เราจะเขียนแทนด้วย $x \in A$ ซึ่งอ่านว่า x เป็นสมาชิกของเซต A หรือ x อยู่ใน A ถ้า x ไม่เป็นสมาชิกของเซต A เราจะเขียนแทนด้วย $x \notin A$ ซึ่งอ่านว่า x ไม่เป็นสมาชิกของเซต A หรือ x ไม่อยู่ใน A ถ้าเซต A มีสมาชิกจำนวนจำกัด คือสามารถบอกได้ว่าเซต A มีสมาชิกเป็นจำนวนเท่าใด ในกรณีนี้เราจะกล่าวว่าเซต A เป็นเซตจำกัด (finite set) และถ้าเซต A มีจำนวนสมาชิกไม่จำกัด คือมีมากจนไม่สามารถบอกได้ว่ามีสมาชิกเป็นจำนวนเท่าใด ในกรณีนี้เราจะกล่าวว่าเซต A เป็นเซตอนันต์ (intinite set)

ในการเขียนเพื่อบอกหรืออธิบายว่าเซตนั้น ๆ ประกอบด้วยสมาชิกอะไรบ้าง เรามีวิธีเขียนได้ 2 แบบ คือ

1. **เขียนแบบแจกแจง** วิธีนี้จะต้องแจกแจงสมาชิกทุกตัวในเซตว่ามีอะไรบ้าง โดยเขียนสมาชิกแต่ละตัวไว้ภายในวงเล็บปีกกา และมีเครื่องหมายจุลภาคคั่นระหว่างสมาชิกแต่ละตัว เช่น

$$A = \{\text{นายแดง, นายดำ, นายขาว}\}$$
$$B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$$

ในกรณีที่เซตนั้นมีสมาชิกเป็นจำนวนมาก เราอาจละสมาชิกบางตัวไว้ในฐานที่เข้าใจได้ เช่น ในเซต B เราอาจเขียนใหม่ได้เป็น

$$B = \{1, 2, \ldots, 10\}$$

ถ้าเซตนั้นเป็นเซตอนันต์ เราไม่สามารถจะเขียนแจกแจงสมาชิกทุกตัวได้ เราจำเป็นจะต้องละสมาชิกบางตัวไว้ในฐานที่เข้าใจ เช่น N เป็นเซตของจำนวนเต็มบวก เราเขียนแบบแจกแจงได้ดังนี้

$$N = \{1, 2, 3, \dots\}$$

2. **เขียนแบบบรรยายลักษณะ** สมาชิกของเซตบางเซตมีลักษณะเหมือนกัน เช่น เป็นเลขคู่เหมือนกัน หรือเป็นจำนวนเต็มบวกเหมือนกัน ในกรณีนี้เราจะเขียนบรรยายคุณสมบัติหรือกฎเกณฑ์ของสมาชิกในเซตนั้น เช่น

$$A = \{ x \text{ ซึ่ง } x \text{ เป็นจำนวนเต็มบวกน้อยกว่า } 11 \}$$

ในที่นี้จะเรียก x ว่าตัวแปร ใช้แทนสมาชิกใด ๆ ของเซต A หรืออาจเขียนว่า

$$A = \{ x \mid x \text{ เป็นจำนวนเต็มบวกน้อยกว่า } 11 \}$$

เครื่องหมาย | ใช้แทนคำว่า "ซึ่ง" ถ้าให้ N แทนเซตของจำนวนเต็มบวก
ดังนั้นเราอาจเขียนเซต A ใหม่ ได้ดังนี้

$$A = \{ x \mid x \in N \text{ และ } x < 11 \}$$

เซตซึ่งไม่มีสมาชิกเลย จะเรียกว่าเซตว่าง (empty set) และจะเขียนแทนด้วย ϕ ซึ่งอ่านว่า "ฟี (phi)" หรือแทนด้วย $\{ \ \}$ เช่น $\{ x \mid x \in N \text{ และ } 2x + 1 = 0 \}$ จะเห็นว่าเซตนี้เป็นเซตว่าง นั่นคือไม่มีสมาชิก เพราะไม่มีจำนวนเต็มที่สอดคล้องกับสมการ $2x + 1 = 0$

สำหรับหนังสือเล่มนี้ จะใช้สัญลักษณ์

R แทนเซตของจำนวนจริง

Q แทนเซตของจำนวนตักยะ

I แทนเซตของจำนวนเต็ม

N แทนเซตของจำนวนเต็มบวกหรือจำนวนธรรมชาติ

นิยาม 1.1.1 : เราจะกล่าวว่าเซต A เป็นสับเซต (subset) ของเซต B หรือเขียนว่า $A \subseteq B$ ก็ต่อเมื่อสมาชิกทุกตัวของ A เป็นสมาชิกของ B และถ้า A เป็นสับเซตของ B โดยที่มีสมาชิกบางตัวของ B ไม่อยู่ใน A เราจะกล่าวว่า A เป็นสับเซตเฉพาะ (proper subset) ของ B และจะเขียนแทนด้วย $A \subset B$

ถ้า N เป็นเซตของจำนวนเต็มบวก

และ M เป็นเซตของจำนวนเต็มบวกซึ่งน้อยกว่า 11

ดังนั้น $M \subset N$ เพราะสมาชิกทุกตัวของ M เป็นสมาชิกของ N และมีสมาชิกบางตัวของ N ไม่อยู่ใน M เช่น 13, 27 เป็นต้น

จากนิยามจะเห็นว่าเซตทุกเซตเป็นสับเซตของตัวเอง นั่นคือ $A \subseteq A$ เมื่อ A เป็น

เซตใด ๆ แต่ A จะไม่เป็นสับเซตเฉพาะของตัวเอง สำหรับเซตว่างนั้น นักคณิตศาสตร์ได้ตกลงกันว่าเซตว่างเป็นสับเซตของทุก ๆ เซต

นิยาม 1.1.2 : เซต A จะเท่ากับเซต B ก็ต่อเมื่อ $A \subseteq B$ และ $B \subseteq A$ ถ้าเซต A เท่ากับเซต B เราจะเขียนแทนด้วย $A = B$

จากนิยามจะเห็นว่า $A = B$ ก็ต่อเมื่อสมาชิกทุกตัวของ A เป็นสมาชิกของเซต B และสมาชิกทุกตัวของ B เป็นสมาชิกของ A นั่นคือ A และ B จะต้องมีสมาชิกเหมือนกันนั่นเอง

นิยาม 1.1.3 : ถ้า A และ B เป็นเซตใด ๆ ยูเนียน (union) ของเซต A และ B ซึ่งจะเขียนแทนด้วย $A \cup B$ คือเซตของสมาชิกที่อยู่ใน A หรือ B หรือทั้ง A และ B นั่นคือ

$$A \cup B = \{ x \mid x \in A \text{ หรือ } x \in B \}$$

ตัวอย่าง 1.1.1 ให้

$$A = \{1, 3, 5, 7, 9, 11, 13, 15\}$$
$$B = \{2, 4, 5, 8, 13\}$$
$$C = \{3, 7, 11\}$$

จะได้

$$A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 5, 7, 8, 9, 11, 13, 15\}$$
$$A \cup C = \{1, 3, 5, 7, 9, 11, 13, 15\} = A$$
$$A \cup A = \{1, 3, 5, 7, 9, 11, 13, 15\} = A$$

ข้อสังเกต ถ้า C เป็นสับเซตของ A แล้ว $A \cup C = A$

นิยาม 1.1.4 : ถ้า A และ B เป็นเซตใด ๆ อินเตอร์เซคชัน (intersection) ของ A และ B ซึ่งจะเขียนแทนด้วย $A \cap B$ คือเซตของสมาชิกซึ่งอยู่ใน A และ B นั่นคือ

$$A \cap B = \{ x \mid x \in A \text{ และ } x \in B \}$$

ตัวอย่าง 1.1.2 จากตัวอย่าง 1.1.1 จะได้

$$A \cap B = \{5, 13\}$$

$B \cap C = \phi$ เพราะ B และ C ไม่มีสมาชิกร่วมกันเลย

$$A \cap C = \{3, 7, 11\} = C$$
$$A \cap A = \{1, 3, 5, 7, 9, 11, 13, 15\} = A$$

ข้อสังเกต ถ้า C เป็นสับเซตของ A แล้ว $A \cap C = C$

นิยาม 1.1.5 : ถ้า U คือเซตซึ่งเรากำลังพิจารณา และ A เป็นสับเซตของ U คอมพลีเมนท์ (complement) ของ A ซึ่งจะเขียนแทนด้วย A' คือเซตของสมาชิกซึ่งอยู่ใน U แต่ไม่อยู่ใน A นั่นคือ

$$A' = \{ x \mid x \in U \text{ และ } x \notin A \}$$

โดยปกติเรามักละ $x \in U$ ไว้ในฐานที่เข้าใจในกรณีที่ไม่ทำให้เกิดความสับสน ดังนั้น

เราอาจเขียน A' ใหม่ได้ดังนี้

$$A' = \{ x \mid x \notin A \}$$

ตัวอย่าง 1.1.3 ให้

$$U = \{ 1, 2, \ldots, 10 \}$$
$$A = \{ 1, 2, 5, 7, 8, 9 \}$$
$$B = \{ 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 \}$$

ดังนั้น $A' = \{ 3, 4, 6, 10 \}$

และ $B' = \{ 9, 10 \}$

ตัวอย่าง 1.1.4 ให้ N คือเซตของจำนวนเต็มบวก และ

$$A = \{ x \mid x \text{ เป็นจำนวนเต็มคู่} \}$$

ดังนั้น $A' = \{ x \mid x \text{ เป็นจำนวนเต็มคี่} \}$

ข้อสังเกต จากตัวอย่าง 1.1.3 จะพบว่า $(A')' = A$

นิยาม 1.1.6 : ถ้า A และ B คือเซตใด ๆ ผลต่างของ A และ B ซึ่งจะเขียนแทนด้วย A-B คือเซตของสมาชิกซึ่งอยู่ใน A แต่ไม่อยู่ใน B นั่นคือ

$$A\text{-}B = \{ x \mid x \in A \text{ และ } x \notin B \}$$

ตัวอย่าง 1.1.5 ให้

$$A = \{ 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 \}$$
$$B = \{ 2, 4, 6, 8 \}$$

ดังนั้น $A\text{-}B = \{ 1, 3, 5, 7 \}$

ข้อสังเกต ผลต่างของ U และ A คือคอมพลีเมนท์ของ A นั่นเอง หรือกล่าวว่า

$$A' = U - A$$

แบบฝึกหัด 1.1

1. ให้ $A = \{1,2,3,4,5,6\}$ จงพิจารณาว่าข้อความต่อไปนี้ผิดหรือถูก

1.1 $2 \in A$ | 1.2 $\{2\} \in A$

1.3 $-2 \notin A$ | 1.4 $A \subset A$

1.5 $\phi \subset A$ | 1.6 $\{2, 4, 6\} \subset A$

1.7 $A = \{3,5,1,2,6,4\}$

1.8 $A = \{n \in I \mid n$ น้อยกว่า $7\}$

1.9 $A = \{n \mid n$ น้อยกว่า $7\}$

1.10 $\{x \mid x \in I$ และ $3x^2 + 5x - 2 = 0\} \subset A$

1.11 $\{x \mid x \in I$ และ $x^2 = 5\} \subset A$

2. ให้ $U = \{1,2,\ldots,10\}$ และ $A = \{1,2,3,4,5\}$, $B = \{1,2,3,7,8\}$, $C = \{2,4,5,6\}$ จงหา

2.1 $A \cap B$ | 2.2 $A \cup B$ | 2.3 $B \cap C$

2.4 $A \cup C$ | 2.5 A' | 2.6 $A-C$

2.7 $(A \cup B)'$ | 2.8 $A' \cap B'$ | 2.9 $(A \cap B)'$

2.10 $A' \cup B'$

3. ให้ $A = \{1,2,3,5,8,9\}$ จงแจกแจงสมาชิกของเซตต่อไปนี้

3.1 $\{x \mid x$ เป็นเลขคี่$\}$

3.2 $\{x \mid x$ เป็นเลขคู่$\}$

3.3 $\{x \mid x$ มากกว่า $4\}$

1.2 ระบบจำนวนจริง System of Real Numbers

เนื่องจากวิชาแคลคูลัสเป็นวิชาซึ่งเกี่ยวข้องกับเซตของจำนวนจริงเป็นส่วนใหญ่ ดังนั้น เราจึงควรรู้จักและศึกษาเกี่ยวกับคุณสมบัติของจำนวนจริงเสียก่อน ในการให้คำนิยามเกี่ยวกับเซตของจำนวนจริงนั้น เรามีวิธีนิยามได้หลายวิธี ตำราบางเล่มอาจจะเริ่มต้นด้วยเซตของจำนวนเต็มบวก หรือ จำนวนธรรมชาติ $N = \{1,2,3,\ldots\}$ แล้วจึงให้คำนิยามของจำนวนจริงในรูปของจำนวนธรรมชาติ แต่ในที่นี้เราจะเริ่มต้นด้วยการให้ เซตของจำนวนจริงซึ่งจะแทนด้วย R เป็นเซตของสมาชิกใด ๆ ซึ่งเราจะไม่นิยามว่าสมาชิกใน R คืออะไร และกำหนดการกระทำ (operation) สองอย่าง ซึ่งจะเรียกว่า การบวก "+" และการคูณ "." เซต R และการกระทำทั้งสองนี้จะต้องสอดคล้องกับคุณสมบัติต่อไปนี้

1. สำหรับทุก ๆ $x, y \in R$ ผลบวกของ x และ y ซึ่งจะเขียนแทนด้วย $x + y$ จะมีผลลัพท์เพียงหนึ่งผลลัพธ์เท่านั้น (unique) และ $x + y \in R$ (คุณสมบัติปิดภายใต้การบวก)

2. สำหรับทุก ๆ $x, y \in R$ จะได้ $x + y = y + x$ (คุณสมบัติของการสลับที่ภายใต้การบวก)

3. สำหรับทุก ๆ $x, y, z \in R$ จะได้ $x + (y + z) = (x + y) + z$ (คุณสมบัติของการจัดหมู่ภายใต้การบวก)

4. จะต้องมีสมาชิก $o \in R$ ซึ่งทำให้ $x + o = x$ สำหรับทุก ๆ $x \in R$ (จะเรียก o ว่าเอกลักษณ์สำหรับการบวก)

5. สำหรับทุก ๆ $x \in R$ จะต้องมีสมาชิก $-x \in R$ ซึ่งทำให้ $x + (-x) = o$ (จะเรียก $-x$ ว่าอินเวอร์สสำหรับการบวกของ x)

6. สำหรับทุก ๆ $x, y \in R$ ผลคูณของ x และ y ซึ่งจะเขียนแทนด้วย $x \cdot y$ หรือ xy จะมีเพียงหนึ่งผลลัพธ์เท่านั้น และ $xy \in R$ (คุณสมบัติปิดภายใต้การคูณ)

7. สำหรับทุก ๆ $x, y \in R$ จะได้ $xy = yx$ (คุณสมบัติของการสลับที่ภายใต้การคูณ)

8. สำหรับทุก ๆ $x, y, z \in R$ จะได้ $x(yz) = (xy)z$ (คุณสมบัติของการจัดหมู่ภายใต้การคูณ)

9. จะต้องมีสมาชิก $1 \in R$ โดยที่ $1 \neq 0$ และทำให้ $1x = x$ สำหรับทุก ๆ $x \in R$ (จะเรียก 1 ว่าเอกลักษณ์สำหรับการคูณ)

10. สำหรับทุก ๆ $x \in R$ จะต้องมีสมาชิก $x^{-1} \in R$ ซึ่งทำให้ $xx^{-1} = 1$ (จะเรียก

x^{-1} ว่าอินเวอร์สสำหรับการคูณของ x)

11. สำหรับทุก ๆ $x, y, z \in R$ จะได้ $x(y + z) = xy + xz$ (คุณสมบัติของการกระจาย)

เซตใด ๆ ก็ตามประกอบกับการบวกและการคูณซึ่งสอดคล้องกับคุณสมบัติทั้ง 11 ข้อข้างต้นนี้ จะเรียกว่า ฟีลด์ (field) ดังนั้นเซตของจำนวนจริง R ประกอบกับการบวกและการคูณ ซึ่งเป็นการกระทำบนเซต R เป็นฟีลด์

ข้อสังเกต จากคุณสมบัติของจำนวนจริงทั้ง 11 ข้อข้างบนนี้ จะเห็นว่าข้อ 1-5 เป็นคุณสมบัติเกี่ยวกับการบวก สำหรับข้อ 6-10 เป็นคุณสมบัติเกี่ยวกับการคูณ ส่วนข้อ 11 เป็นคุณสมบัติเกี่ยวกับการคูณและการบวกผสมกัน จะเห็นว่าเรามีเฉพาะการบวกและการคูณเท่านั้น ส่วนการลบและการหารเราจะนิยามในรูปของการบวกและการคูณตามลำดับ นั่นคือ $a - b = a + (-b)$ และ $a \cdot b = \frac{a}{b} = a \cdot b^{-1}$

คุณสมบัติของ R อีก 4 ข้อต่อไปนี้ช่วยให้เราสามารถจัดลำดับของสมาชิกใน R ได้ คุณสมบัติดังกล่าวนี้จะเรียกว่า สัจจพจน์ของการจัดลำดับ (ordered axiom) ซึ่งได้แก่

12. มีจำนวนจริงบางจำนวนเป็นจำนวนบวก

13. ถ้า $a \in R$ ข้อความทั้ง 3 ข้อต่อไปนี้จะเป็นจริงเพียงกรณีใดกรณีหนึ่งเท่านั้น คือ

    $a = o$, a เป็นจำนวนบวก หรือ $-a$ เป็นจำนวนบวก

14. ผลบวกของจำนวนบวกสองจำนวนเป็นจำนวนบวก

15. ผลคูณของจำนวนบวกสองจำนวนเป็นจำนวนบวก

ฟีลด์ใด ๆ ที่สอดคล้องกับคุณสมบัติข้อ 12-15 จะเรียกว่า ออร์เดอร์ฟีลด์ (ordered field) ดังนั้น R เป็นออร์เดอร์ฟีลด์

นิยาม 1.2.1 : ถ้า $a \in R$ เราจะกล่าวว่า a เป็นจำนวนลบ (negative) ถ้า $-a$ เป็นจำนวนบวก

นิยาม 1.2.2 : ถ้า $a, b \in R$ เราจะกล่าวว่า a น้อยกว่า b ซึ่งจะเขียนแทนด้วย $a < b$ ถ้า $b - a$ เป็นจำนวนบวก

ตัวอย่าง 1.2.1 จะเห็นว่า $3 < 7$ เพราะว่า $7-3 = 4$ เป็นจำนวนบวก และ $-8 < -2$ เพราะว่า $(-2) - (-8) = 6$ ซึ่งเป็นจำนวนบวก

นิยาม 1.2.3 : ถ้า $a, b \in R$ เราจะกล่าวว่า a มากกว่า b ซึ่งจะเขียนแทนด้วย $a > b$ ถ้า $a-b$ เป็นจำนวนบวก

ตัวอย่าง 1.2.2 จะเห็นว่า $7 > 3$ เพราะว่า $7-3 = 4$ เป็นจำนวนบวก และ $-2 > -8$ เพราะวา $(-2) - (-8) = 6$ เป็นจำนวนบวก

หมายเหตุ จากนิยาม 1.2.2 และ 1.2.3 จะเห็นว่า $a < b$ ก็ต่อเมื่อ $b > a$

นิยาม 1.2.4 : ถ้า $a, b \in R$ เราจะกล่าวว่า a น้อยกว่าหรือเท่ากับ b ซึ่งจะเขียนแทนด้วย $a \leq b$ ถ้า $a < b$ หรือ $a = b$ และจะกล่าวว่า a มากกว่า หรือ เท่ากับ b ซึ่งจะเขียนแทนด้วย $a \geq b$ ถ้า $a > b$ หรือ $a = b$

จากคุณสมบัติหรือสัจจพจน์เกี่ยวกับจำนวนจริงทั้ง 15 ข้อ เราสามารถจะพิสูจน์ทฤษฎีต่าง ๆ ต่อไปนี้ได้

ทฤษฎี 1.2.1 : ถ้า $a \in R$ แล้ว $a > 0$ ก็ต่อเมื่อ a เป็นจำนวนบวก

พิสูจน์ สมมุติให้ a เป็นจำนวนบวก จะพบว่า

$$a - 0 = a + (-0) = a + 0 = a$$

นั่นคือ $a - 0$ เป็นจำนวนบวก ดังนั้นตามนิยาม 1.2.3 เราสรุปได้ว่า $a > 0$

ในทางกลับกัน สมมุติให้ $a > 0$ จะต้องพิสูจน์ว่า a เป็นจำนวนบวก

ถ้า $a > 0$ แสดงว่า $a - 0$ เป็นจำนวนบวก แต่ $a - 0 = a$ ดังนั้น a เป็นจำนวนบวก

ทฤษฎี 1.2.2 : ให้ $a, b, c \in R$ ถ้า $a < b$ และ $b < c$ แล้ว $a < c$

พิสูจน์ $a < b$ หมายถึง $b - a$ เป็นจำนวนบวก และ

$b < c$ หมายถึง $c - b$ เป็นจำนวนบวก

จากคุณสมบัติของจำนวนจริงข้อ 14 จะได้

$(c - b) + (b - a) = c - a$ เป็นจำนวนบวก

นั่นคือ $a < c$

ทฤษฎี 1.2.3 : ให้ $a, b, c \in R$ ถ้า $a < b$ และ c เป็นจำนวนบวกแล้ว $ac < bc$

พิสูจน์ เนื่องจาก $a < b$ ดังนั้น $b - a$ เป็นจำนวนบวก

จากคุณสมบัติข้อ 14 จะได้ $(b - a)c = bc - ac$ เป็นจำนวนบวก

นั่นคือ $ac < bc$

จากคุณสมบัติของจำนวนจริงที่กล่าวแล้วนั้น จะเห็นว่า $1 \in R$ ตามคุณสมบัติข้อ 9 และจากคุณสมบัติข้อ 1 เราทราบว่าผลบวกของจำนวนจริง 2 สองจำนวนเป็นจำนวนจริง ดังนั้น $1 + 1$ ซึ่งจะแทนด้วย 2 เป็นจำนวนจริง และในทำนองเดียวกัน $3 = 2 + 1 = 1 + 1 + 1$, $4 = 3 + 1 = 1 + 1 + 1 + 1$ ฯลฯ ดังนั้น เซตของจำนวนเต็มบวก $N = \{1, 2, 3, \ldots\}$ เป็นสับเซตของ R ทำนองเดียวกัน เซตของจำนวนเต็มซึ่งจะแทนด้วย I ประกอบด้วยจำนวนเต็มบวก จำนวนเต็มลบ และศูนย์ ก็เป็นสับเซตของ R เช่นกัน จำนวนจริงที่เขียนอยู่ในรูป $\frac{a}{b}$ โดยที่ a, b เป็นจำนวนเต็ม และ $b \neq 0$ จะเรียกว่าจำนวนตักยะ จะเห็นว่าจำนวนเต็มก็เป็นจำนวนตักยะ ทั้งนี้เพราะสามารถเขียนให้อยู่ในรูป $\frac{a}{b}$ ได้ เช่น $2 = \frac{2}{1}$ หรือ $-3 = \frac{-3}{1}$ เป็นต้น เซตของจำนวนตักยะจะแทนด้วย Q ยังมีจำนวนจริงอีกมากที่ไม่ใช่จำนวนตักยะ เช่น $\sqrt{2}$ เราสามารถพิสูจน์ได้

ว่า $\sqrt{2}$ ไม่เป็นจำนวนตักยะ แต่เราจะไม่พิสูจน์ในที่นี้ จำนวนจริงที่ไม่ใช่จำนวนตักยะ จะเรียกว่า จำนวนอตักยะ ดังนั้นจำนวนจริงสามารถแบ่งออกได้ดังนี้

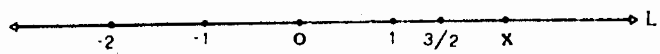
1. จำนวนเต็ม (integer) ประกอบด้วย จำนวนเต็มบวก จำนวนเต็มลบ และ 0 โดยปกติเรามักเขียนเซตของจำนวนเต็มดังนี้

$$I = \{ \ldots, -2, -1, 0, 1, 2, \ldots \}$$

2. จำนวนตักยะ (rational number) ประกอบด้วยจำนวนที่เป็นเศษส่วน (fraction) เช่น $\frac{3}{5}$, $-\frac{10}{3}$ เป็นต้น บางครั้งเราอาจแทนจำนวนที่เป็นเศษส่วนด้วยจำนวนทศนิยม เช่น $\frac{365}{100} = 3.65$, $-0.3 = -\frac{3}{10}$ ซึ่งเป็นทศนิยมแบบรู้จบ หรือ $\frac{1}{3} = 0.333\ldots$, $-\frac{61}{111} = -0.549540540\ldots$ ซึ่งเป็นทศนิยมไม่รู้จบแบบซ้ำ

3. จำนวนอตักยะ (irrational number) ซึ่งได้แก่จำนวนทศนิยมไม่รู้จบแบบไม่ซ้ำ เพราะไม่สามารถจะเขียนในรูปเศษส่วนได้ เช่น $1.414\ldots = \sqrt{2}$, $3.14159\ldots = \pi$ หรือ $2.71828\ldots = e$ เป็นต้น

ในแง่เรขาคณิตเราสามารถแทนจำนวนจริงแต่ละจำนวนด้วยจุดบนเส้นตรง เส้นตรงนี้จะเรียกว่าเส้นจำนวนจริง (real line) ในการแทนจำนวนจริงด้วยจุดบนเส้นตรงนั้น เราเริ่มต้นด้วยการเลือกจุดสองจุดบนเส้นตรงให้แทนจำนวน 0 และ 1 โดยให้จุดที่แทน 0 อยู่ทางซ้ายของจุดที่แทน 1 ดังรูป 1.2.1



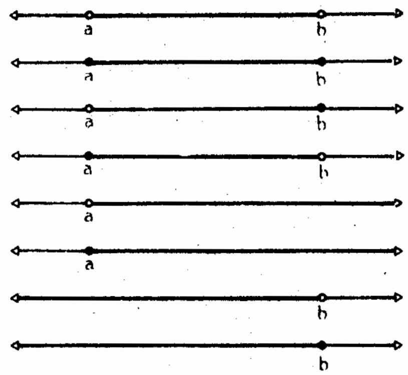
รูป 1.2.1

ระยะจาก 0 ถึง 1 จะเรียกว่า หนึ่งหน่วย ถ้า x เป็นจำนวนจริงบวก เราจะแทนด้วยจุดที่อยู่ทางขวาของ 0 และห่างจากจุด 0 เป็นระยะ x หน่วย ถ้า x เป็นจำนวนจริงลบ เราจะแทนด้วยจุดที่อยู่ทางซ้ายของ 0 และห่างจาก 0 เป็นระยะ $-x$ หน่วย จะเห็นว่าจำนวนจริงแต่ละจำนวนจะแทนได้ด้วยจุดเพียงหนึ่งจุดเท่านั้น ในทางกลับกัน จุดหนึ่งจุดจะแทนจำนวนจริงได้เพียงจำนวนเดียวเท่านั้น ในกรณีเช่นนี้เรากล่าวว่า จำนวนจริงจับคู่กับจุดบนเส้นตรงแบบหนึ่งต่อหนึ่ง (one to one correspondence)

เราจะพบว่า ถ้า $a < b$ แล้ว จุดที่แทน a จะอยู่ทางซ้ายของจุดที่แทน b เสมอ เช่น $-1 < \frac{3}{2}$ ดังรูป 1.2.1 ถ้า $a < x$ และ $x < b$ เราจะเขียนรวมเป็นประโยคเดียวกันคือ $a < x < b$ นั่นคือ x อยู่ระหว่าง a และ b นั่นเอง ในทำนองเดียวกัน ถ้า $a \leq x$ และ $x \leq b$ เราจะเขียน $a \leq x \leq b$ ซึ่งเราจะเรียก $a < x < b$ หรือ $a \leq x \leq b$ ว่าอสมการต่อเนื่อง เซตของจำนวนจริงที่สอดคล้องกับอสมการต่อเนื่องจะเรียกว่า ช่วง (interval) และจะเรียก a, b ว่าจุดปลาย (end point)

นิยาม 1.2.5 : ถ้า a และ b เป็นจำนวนจริงซึ่ง $a < b$ ช่วงใน R จะอยู่ในรูปใดรูปหนึ่งต่อไปนี้

(a, b)	$=$	$\{x \mid a < x < b\}$
$[a, b]$	$=$	$\{x \mid a \le x \le b\}$
$(a, b]$	$=$	$\{x \mid a < x \le b\}$
$[a, b)$	$=$	$\{x \mid a \le x < b\}$
(a, ∞)	$=$	$\{x \mid x > a\}$
$[a, \infty)$	$=$	$\{x \mid x \ge a\}$
$(-\infty, b)$	$=$	$\{x \mid x < b\}$
$(-\infty, b]$	$=$	$\{x \mid x \le b\}$
$(-\infty, \infty)$	$=$	R



ช่วงที่ไม่รวมจุดปลายทุกจุดจะเรียกว่าช่วงเปิด (open interval) ซึ่งได้แก่ช่วงต่อไปนี้ (a, b), (a, ∞), $(-\infty, b)$ ส่วนช่วงที่รวมจุดปลายจะเรียกว่าช่วงปิด (closed interval) ซึ่งได้แก่ช่วงต่อไปนี้ $[a, b]$, $[a, \infty)$, $(-\infty, b]$ ส่วนช่วง $(-\infty, \infty)$ จะเรียกว่าช่วงเปิดหรือช่วงปิดก็ได้ เพราะไม่มีจุดปลาย สำหรับช่วงที่อยู่ในรูป$(a, b]$, $[a, b)$ จะเรียกว่าช่วงครึ่งเปิด (half-open interval) ช่วงทั้งหมดที่กล่าวมาแล้วทั้งหมด แบ่งออกได้เป็น 2 ประเภทใหญ่ ๆ คือ ช่วงที่มีขอบเขต (bounded interval) ซึ่งได้แก่ช่วงต่อไปนี้ (a, b), $[a, b]$, $(a, b]$, $[a, b)$ ช่วงอีกประเภทหนึ่งคือช่วงที่ไม่มีขอบเขต (unbounded interval) ซึ่งได้แก่ช่วงต่อไปนี้ (a, ∞), $[a, \infty)$, $(-\infty, b)$, $(-\infty, b]$, $(-\infty, \infty)$

หมายเหตุ :∞หรือ $+\infty$ อ่านว่าบวกอนันต์ (positive infinity) และ $-\infty$ อ่านว่า ลบอนันต์ (negative infinity) ทั้ง $+\infty$ และ $-\infty$ ไม่ใช่จำนวนจริง เป็นเพียงสัญญลักษณ์ที่แทนค่ามาก ๆ ทางบวก และค่ามาก ๆ ทางลบเท่านั้น

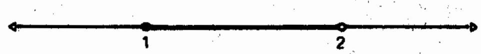
ในการเขียนกราฟหรือแผนภาพของเซตนั้น ถ้าเซตหรือช่วงนั้นรวมจุด a ด้วย เราจะใช้วงกลมทึบ ๆ ที่จุด a แต่ถ้าเซตหรือช่วงนั้นไม่รวมจุด a เราจะใช้วงกลมโปร่งที่จุด a

ตัวอย่าง 1.2.3 เซตของจำนวนจริงหรือจุดบนเส้นจำนวนจริง ตั้งแต่ 1 ถึง 2 รวมทั้ง 1 และ 2 ด้วย คือ

$$[1, 2] = \{x \mid 1 \le x \le 2\}$$

และเซตของจำนวนจริงหรือจุดบนเส้นจำนวนจริงตั้งแต่ 1 ถึง 2 รวมจุด 1 แต่ไม่รวมจุด 2 คือ

$$[1, 2) = \{x \mid 1 \le x < 2\}$$



นิยาม 1.2.6 รากของสมการหรืออสมการคือเซตของจำนวนจริงที่สอดคล้องกับสมการ หรืออสมการนั้น

ตัวอย่าง 1.2.4 จงหารากของอสมการ $-x - 3 < 2x + 9$ พร้อมทั้งแสดงภาพประกอบ

วิธีทำ กำหนดให้ $-x - 3 < 2x + 9$

เอา 3 บวกทั้งสองข้าง จะได้

$$-x < 2x + 12$$

เอา $-2x$ บวกทั้งสองข้าง จะได้

$$-3x < 12$$

เอา $-\frac{1}{3}$ คูณทั้งสองข้างจะได้

$$x > -4 \quad \text{(แบบฝึกหัด 1.2 ข้อ 8)}$$

ดังนั้นรากของอสมการนี้คือ

$$S = \{ x \mid x > -4 \}$$

ตัวอย่าง 1.2.5 จงหารากของอสมการต่อเนื่อง $4 < 3x - 2 < 10$ พร้อมทั้งแสดงภาพประกอบ

วิธีทำ จากอสมการที่กำหนดให้ $4 < 3x - 2 < 10$

เอา 2 บวกตลอด จะได้ $6 < 3x < 12$

เอา $\frac{1}{3}$ คูณตลอด จะได้ $2 < x < 4$

ดังนั้นรากของอสมการต่อเนื่องนี้คือ

$$S = \{ x \mid 2 < x < 4 \}$$

นิยาม 1.2.7 : ถ้า x เป็นจำนวนจริง และ $x \geq 0$ รากที่สองของ x คือ จำนวนซึ่งยกกำลังสองแล้วเท่ากับ x และรากหลักของ x (principal square root of x) ซึ่งจะเขียนแทนด้วย $\sqrt{x}$ คือ จำนวนบวกซึ่งเมื่อยกกำลังสองแล้วเท่ากับ x

ตัวอย่าง 1.2.6 รากที่สองของ 4 คือ -2 และ 2

แต่รากหลักของ 4 คือ $\sqrt{4} = 2$

หมายเหตุ : รากที่สองของจำนวนจริงใด ๆ จะมีทั้งค่าบวกและค่าลบ แต่รากหลักของจำนวนจริงจะมีเพียงจำนวนเดียวที่เป็นค่าบวก

ตัวอย่าง 1.2.7 จงหาค่าของ x ซึ่งทำให้ $\sqrt{x^2 + 5x + 6}$ เป็นจำนวนจริง

วิธีทำ เนื่องจาก $x^2 + 5x + 6 = (x + 3)(x + 2)$

ดังนั้น $\sqrt{x^2 + 5x + 6}$ จะเป็นจำนวนจริงก็ต่อเมื่อ $(x + 3)(x + 2) \geq 0$

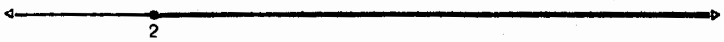
แต่ $(x + 3)(x + 2) \geq 0$ จะเป็นไปได้ 2 กรณีเท่านั้นคือ

กรณีที่ 1 $x + 3 \geq 0$ และ $x + 2 \geq 0$

หรือ $x \geq -3$ และ $x \geq -2$

อสมการ $x \geq -3$ และ $x \geq -2$ จะเป็นจริงพร้อมกันก็ต่อเมื่อ

$x \geq -2$ นั่นคือ $x \in [-2, \infty)$

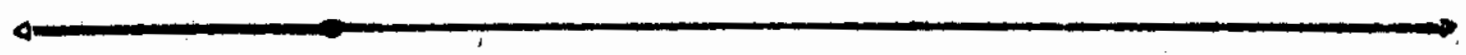


กรณีที่ 2 $x + 3 \leq 0$ และ $x + 2 \leq 0$

หรือ $x \leq -3$ และ $x \leq -2$

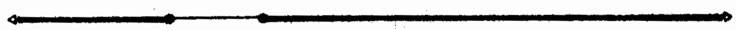
อสมการ $x \leq -3$ และ $x \leq -2$ จะเป็นจริงพร้อมกันเมื่อ

$x \leq -3$ นั่นคือ $x \in (-\infty, -3]$



จากกรณีที่ 1 และ 2 จะได้ว่า $x \in [-2, \infty)$ หรือ $x \in (-\infty, -3]$ นั่นคือ

$$x \in [-2, \infty) \cup (-\infty, -3]$$



นิยาม 1.2.8 : ถ้า x เป็นจำนวนจริง ค่าสัมบูรณ์ของ x (absolute value of x) ซึ่งจะเขียนแทนด้วย $|x| = x$ ถ้า $x \geq 0$ และ $|x| = -x$ ถ้า $x < 0$

จะเห็นว่าค่าสัมบูรณ์ของ x นั้นจะเป็นตัวบอกให้ทราบว่าจำนวนจริง x อยู่ห่างจากจุดกำเนิด o เท่าใดบนเส้นจำนวนจริง แต่จะไม่บอกว่าจำนวนนั้นเป็นบวกหรือลบ

ตัวอย่าง 1.2.8 $|6| = 6$, $|0| = 0$ และ $|-5| = -(-5) = 5$

ในทำนองเดียวกัน $|b - a|$ จะเป็นตัวชี้ให้เห็นว่า a และ b อยู่ห่างกันเท่าใด แต่จะไม่บอกให้ทราบว่า a อยู่ทางซ้ายของ b หรือ b อยู่ทางซ้ายของ a

ตัวอย่าง 1.2.9 $|7 - 3| = 4$, $|3 - 6| = 3$

หมายเหตุ : เราอาจนิยามค่าสัมบูรณ์ของ x ในรูปของรากที่สองของ x^2 ได้ นั่นคือ

$$|x| = \sqrt{x^2}$$

ซึ่งทำให้เราสามารถพิสูจน์ความจริงต่อไปนี้ได้

ทฤษฎี 1.2.4 : ค่าสัมบูรณ์ของผลคูณของจำนวนจริงสองจำนวน เท่ากับผลคูณของค่าสัมบูรณ์ของจำนวนจริงแต่ละจำนวนนั้น นั่นคือ

$$|xy| = |x|\,|y|$$

พิสูจน์ $|xy| = \sqrt{(xy)^2} = \sqrt{x^2 y^2} = \sqrt{x^2}\sqrt{y^2} = |x|\,|y|$

ตัวอย่าง 1.2.10 ถ้า $x = 4$, $y = -3$ จะได้

$$|xy| = |4(-3)| = |-12| = 12$$

$|x||y| = |4||-3| = (4)(3) = 12$

ดังนั้น $|xy| = |x||y|$

จากนิยามของค่าสัมบูรณ์ เราสามารถจะพิสูจน์ความจริงต่อไปนี้ โดยไม่ยากนัก

ทฤษฎี 1.2.5 : ถ้า $a > 0$ จะได้

1. $|x| < a$ ก็ต่อเมื่อ $-a < x < a$
2. $|x| \leq a$ ก็ต่อเมื่อ $-a \leq x \leq a$
3. $|x| > a$ ก็ต่อเมื่อ $x > a$ หรือ $x < -a$
4. $|x| \geq a$ ก็ต่อเมื่อ $x \geq a$ หรือ $x \leq -a$

ทฤษฎี 1.2.6 : ถ้า x และ y เป็นจำนวนจริงใด ๆ ดังนั้น $|x + y| \leq |x| + |y|$

ทฤษฎีนี้เรียกว่า อสมการสามเหลี่ยม (triangle inequality)

พิสูจน์ เนื่องจาก x และ y เป็นจำนวนจริง ดังนั้น

$$-|x| \leq x \leq |x|$$

และ $-|y| \leq y \leq |y|$

บวกอสมการต่อเนื่องทั้งสองนี้ จะได้

$$-(|x| + |y|) \leq x + y \leq |x| + |y|$$

จากทฤษฎี 1.2.5 ข้อ 2 จะได้

$$|x + y| \leq |x| + |y|$$

ตัวอย่าง 1.2.11 จงหารากของอสมการ $|3x - 9| < 6$

วิธีทำ จากทฤษฎี 1.2.5 ข้อ 2 จะได้

$$-6 < 3x - 9 < 6$$

$$3 < 3x < 15$$

$$1 < x < 5$$

ตัวอย่าง 1.2.12 จงหารากของอสมการ $\left|\frac{x+1}{x-2}\right| < 2$

วิธีทำ เราจะต้องหาค่าของ x ซึ่งสอดคล้องกับอสมการต่อเนื่องต่อไปนี้

$$-2 < \frac{x+1}{x-2} < 2$$

เอา $(x - 2)^2$ คูณตลอด จะได้

$$-2(x - 2)^2 < (x + 1)(x - 2) < 2(x - 2)^2$$

ซึ่งแบ่งออกได้เป็นสองกรณี นั่นคือ

กรณีที่ 1 จะต้องหาค่า x ซึ่งสอดคล้องกับอสมการ

$$-2(x - 2)^2 < (x + 1)(x - 2)$$

หรือ $$2(x - 2)^2 + (x + 1)(x - 2) > 0$$

$$(x - 2)(2x - 4 + x + 1) > 0$$

$$3(x - 2)(x - 1) > 0$$

แก้อสมการนี้โดยใช้วิธีทำนองเดียวกับในตัวอย่าง 1.2.7

ดังนั้นรากของอสมการนี้คือ $A = (-\infty, 1) \cup (2, \infty)$

กรณีที่ 2 จะต้องหาค่า x ซึ่งสอดคล้องกับอสมการ

$$(x + 1)(x - 2) < 2(x - 2)^2$$

หรือ $$(x + 1)(x - 2) - 2(x - 2)^2 < 0$$

$$(x - 2)(x + 1 - 2x + 4) < 0$$

$$-(x - 2)(x - 5) < 0$$

$$(x - 2)(x - 5) > 0$$

ดังนั้นรากของอสมการนี้คือ $B = (-\infty, 2) \cup (5, \infty)$

จากกรณีที่ 1 และ 2 จะได้รากของอสมการ $\left|\frac{x + 1}{x - 2}\right| < 2$ คือ

$$S = A \cap B = (-\infty, 1) \cup (5, \infty)$$

ตัวอย่าง 1.2.13 จงหารากของสมการ $|2x + 1| = 3$

วิธีทำ จาก $|2x + 1| = 3$ ซึ่งอาจจะเป็นกรณีใดกรณีหนึ่งต่อไปนี้

กรณีที่ 1 $2x + 1 = 3$ นั่นคือ $x = 1$

กรณีที่ 2 $-(2x + 1) = 3$ นั่นคือ $x = -2$

ดังนั้นรากของสมการ $|2x + 1| = 3$ คือ

$x = 1$ หรือ $x = -2$

ตัวอย่าง 1.2.14 จงหารากของสมการ $|2x - 1| = |4x + 3|$

วิธีทำ จาก $|2x - 1| = |4x + 3|$ สามารถแยกออกได้เป็นสองกรณีคือ

กรณีที่ 1 $2x - 1 = 4x + 3$ นั่นคือ $x = -2$

กรณีที่ 2 $2x - 1 = -(4x + 3)$ นั่นคือ $x = -\frac{1}{3}$

ดังนั้นรากของสมการ $|2x - 1| = |4x + 3|$ คือ

$$x = -2 \text{ หรือ } x = -\frac{1}{3}$$

หรือจะเขียน $x = -2, -\frac{1}{3}$ ก็ได้

แบบฝึกหัด 1.2

1. จงเขียนกราฟของเซตต่อไปนี้บนเส้นจำนวนจริง

1.1 $\{x \mid 1 \leq x \leq 5\}$ 1.2 $\{x \mid -4 < x \leq -1\}$

1.3 $\{x \mid x > 4\}$ 1.4 $\{x \mid x \leq -\frac{1}{2}\}$

1.5 $(-5, 3)$ 1.6 $[2, 8]$

1.7 $(-\infty, 4)$ 1.8 $(-2, 5]$

2. จงหา

2.1 $(2, 6) \cup [5, 7]$ 2.2 $(3, 7) \cap [2, 5]$

2.3 $(5, \infty) \cup (3, \infty)$ 2.4 $(-5, \infty) \cap (3, \infty)$

3. จงหาค่าของ x ซึ่งจะทำให้จำนวนต่อไปนี้เป็นจำนวนจริง

3.1 $\sqrt{5x + 10}$ 3.2 $\sqrt{8x - 5}$ 3.3 $\sqrt{x^2 - 16}$

3.4 $\sqrt{9x^2 - 25}$ 3.5 $\sqrt{x^2 - 2x + 1}$ 3.6 $\sqrt{x^2 - 5x + 4}$

4. จงหารากของอสมการต่อไปนี้พร้อมทั้งเขียนกราฟประกอบ

4.1 $x + 3 > 5$ 4.2 $\frac{1}{3} - 2x \leq \frac{1}{2}$

4.3 $\frac{1}{2}(x - \frac{4}{3}) > \frac{4}{3}x + 5$ 4.4 $2x + 2 < 5 - 5x$

4.5 $-7 < 4 - x \leq -2$ 4.6 $2 < 5 - 3x < 11$

4.7 $13 \geq 2x - 3 \geq 5$ 4.8 $|x + 4| < 7$

4.9 $|2x - 5| < 3$ 4.10 $|3x - 4| \leq 2$

4.11 $|2x - 5| > 3$ 4.12 $|6 - 2x| \geq 7$

4.13 $|x + 4| \leq |2x - 6|$ 4.14 $|3 + 2x| < |4 - x|$

4.15 $|3x| > |6 - 3x|$ 4.16 $|9 - 2x| \geq |4x|$

5. จงหาค่าของ x ซึ่งสอดคล้องกับสมการต่อไปนี้

5.1 $|4x + 7| = 7$ 5.2 $|3x - 8| = 4$

5.3 $|5 - 2x| = 11$ 5.4 $|4 + 3x| = 1$

5.5 $|5x - 3| = |3x + 5|$ 5.6 $|x - 2| = |3 - 2x|$

5.7 $|7x| = 4 - x$ 5.8 $2x + 3 = |4x + 5|$

5.9 $x^2 + 5x + 3 = 0$ 5.10 $4x^2 - 4x + 1 = 0$

5.11 $2x^2 - 6x + 1 = 0$ 5.12 $-3y^2 - 3y + 2 = 0$

6. ถ้า $a < b$ จงพิสูจน์ว่า $a + c < b + c$ และ $a - c < b - c$ เมื่อ c คือจำนวนจริงใด ๆ

7. ถ้า $a < b$ และ $c < d$ จงพิสูจน์ว่า $a + c < b + d$

8. ถ้า $a < b$ และ c เป็นจำนวนลบ จงพิสูจน์ว่า $ac > bc$

9. ถ้า $a > b$ และ $b > c$ จงพิสูจน์ว่า $a > c$

10. ถ้า $a > b$ จงพิสูจน์ว่า $a + c > b + c$ และ $a - c < b - c$ เมื่อ c คือจำนวนจริงใด ๆ

11. ถ้า $a > b$ และ $c > d$ จงพิสูจน์ว่า $a + c > b + d$

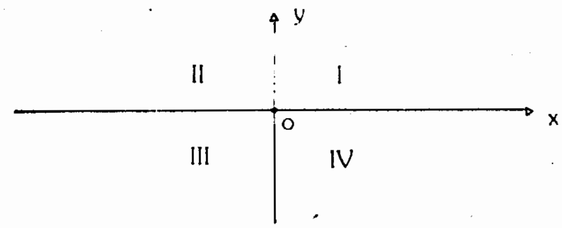
12. ถ้า $a > b$ และ c เป็นจำนวนบวก จงพิสูจน์ว่า $ac > bc$

13. ถ้า $a > b$ และ c เป็นจำนวนลบ จงพิสูจน์ว่า $ac < bc$

1.3 ระบบพิกัดฉาก และ กราฟ
Rectangular Coordinate System and Graphs

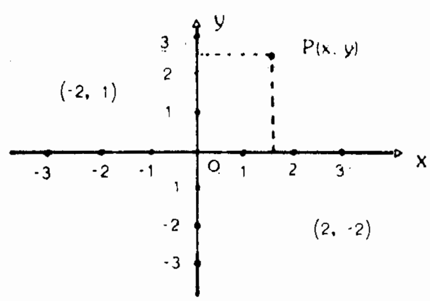
ในหัวข้อ 1.2 เราแทนจำนวนจริงด้วยจุดบนเส้นตรงซึ่งเรียกว่า เส้นจำนวนจริง ในหัวข้อนี้จะพิจารณาเกี่ยวกับเลขคู่ลำดับ (ordered pair) และการแทนเลขคู่ลำดับนั้นด้วยจุดบนระนาบ (plane) เลขคู่ลำดับหมายถึงจำนวนจริงสองจำนวนซึ่งเขียนอยู่ในรูป (x, y)

ในการสร้างระบบพิกัดฉากบนระนาบนั้น เราจะเริ่มต้นด้วยการเลือกเส้นจำนวนจริงที่อยู่ในแนวนอน ซึ่งจะเรียกเส้นจำนวนดังกล่าวนี้ว่าแกน x ลากเส้นตรงให้ตั้งฉากกับแกน x ที่จุด o บนแกน x เราจะเรียกแกนตั้งฉากนี้ว่าแกน y ให้จุดที่แกน y ตัดกับแกน x แทนจุด 0 บนแกน y และจะเรียกจุดตัดนี้ว่าจุดกำเนิด ซึ่งจะแทนด้วย 0 จุดต่าง ๆ บนแกน y ที่อยู่เหนือแกน x จะแทนจำนวนบวก และจุดต่าง ๆ บนแกน y ที่อยู่ใต้แกน x จะแทนจำนวนลบ หนึ่งหน่วยบนแกน y ไม่จำเป็นจะต้องเท่ากับหนึ่งหน่วยบนแกน x แต่โดยปกติแล้วมักนิยมกำหนดให้เท่ากัน ระนาบซึ่งกำหนดโดยแกน x และแกน y จะเรียกว่า ระนาบ $-xy$ แกน x และแกน y จะแบ่งระนาบออกเป็น 4 ส่วน แต่ละส่วนเรียกว่าจตุภาค (quadrant) เรียงลำดับดังรูป 1.3.1



รูป 1.3.1

เราจะแทนเลขคู่ลำดับ (x, y) ด้วยจุด P บนระนาบ $-xy$ โดยที่จุด P นี้จะอยู่ห่างจากแกน y ไปทางขวา x หน่วย ถ้า $x > 0$ หรืออยู่ห่างจากแกน y ไปทางซ้าย $|x|$ หน่วย ถ้า $x < 0$ และจุด P จะอยู่ห่างจากแกน x ไปทางด้านบน y หน่วย ถ้า $y > 0$ หรืออยู่ห่างจากแกน x ไปทางด้านล่าง $|y|$ หน่วย ถ้า $y < 0$ ดังรูป 1.3.2

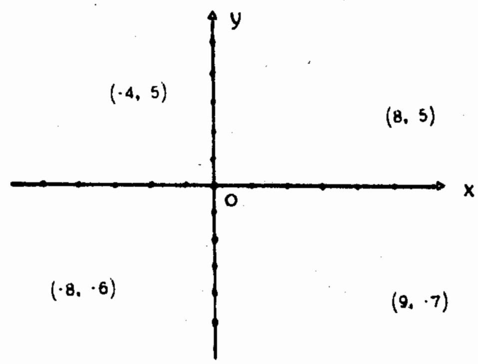


รูป 1.3.2

เราจะเรียก (x, y) ว่า โคออร์ดิเนตของจุด P จะเรียก x ว่า แอบซิสซา (abscissa) และจะเรียก y ว่า ออร์ดิเนต (ordinate)

จะเห็นว่าเลขคู่ลำดับแต่ละคู่จะแทนด้วยจุดบนระนาบได้เพียงจุดเดียวเท่านั้น ในทางกลับกัน จุดบนระนาบหนึ่งจุดจะแทนเลขคู่ลำดับได้เพียง 1 คู่ เท่านั้น นั่นคือ เลขคู่ลำดับจับคู่กับจุดบนระนาบแบบหนึ่งต่อหนึ่ง (one to one correspondence) การแทนเลขคู่ลำดับด้วยจุดบนระนาบจะเรียกว่า การลงจุด (plotting a point) หรือ การเขียนกราฟนั่นเอง

ตัวอย่าง 1.3.1 จงลงจุด $(-8, -6)$, $(-4, 5)$, $(9, -7)$ และ $(8, 5)$ บนระนาบ

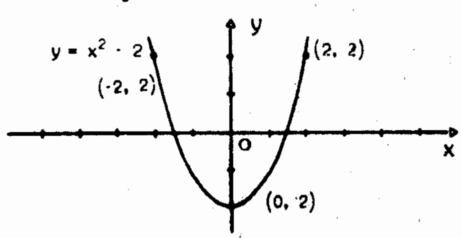


รูป 1.3.3

ต่อไปเราจะพิจารณาสมการที่มีตัวแปรหรือตัวไม่ทราบค่า 2 ตัว เช่น สมการ $y = x^2 - 2$ เราจะเรียกสมการนี้ว่าสมการใน R^2 ถ้าค่าของ x และ y สอดคล้องกับสมการ $y = x^2 - 2$ เราจะกล่าวว่า (x, y) เป็นคำตอบของสมการนี้ จากสมการจะเห็นว่าเมื่อแทนค่า x ด้วย 3 จะได้ $y = 7$ ดังนั้น $(3, 7)$ เป็นคำตอบของสมการนี้ ถ้าแทนค่า x ด้วย 4 จะได้ $y = 14$ จะเห็นว่าเมื่อแทนค่า x หนึ่งค่าจะได้ค่า y หนึ่งค่าเสมอ ดังนั้น $y = x^2 - 2$ มีคำตอบเป็นจำนวนไม่จำกัดดังในตารางต่อไปนี้

x	0	1	2	3	4	-1	-2	-3	-4
$y = x^2 - 2$	-2	-1	2	7	14	-1	2	7	14

เรานำเลขคู่ลำดับ (x, y) ซึ่งเป็นคำตอบของสมการนี้ไปกำหนดจุดบนระนาบจะได้ดังรูป 1.3.4



รูป 1.3.4

รูปที่ได้นี้จะเรียกว่ากราฟของสมการ $y = x^2 - 2$ ทุก ๆ จุดที่อยู่บนกราฟนี้จะสอดคล้องกับสมการ $y = x^2 - 2$

นิยาม 1.3.1 : กราฟของสมการใน R^2 คือเซตของจุด (x, y) ใน R^2 ซึ่งมีโคออร์ดิเนต x และ y สอดคล้องกับสมการนั้น ๆ

บางครั้งเราเรียกกราฟใน R^2 ว่าเส้นโค้ง (curve)

ตัวอย่าง 1.3.2 จงเขียนกราฟของสมการ $y^2 - x - 1 = 0$

วิธีทำ จากสมการ $y^2 - x - 1 = 0$ จะได้

$$y = \pm\sqrt{x+1} \tag{1.3.1}$$

ซึ่งสามารถแยกออกได้เป็นสองสมการคือ

$$y = \sqrt{x+1} \tag{1.3.2}$$

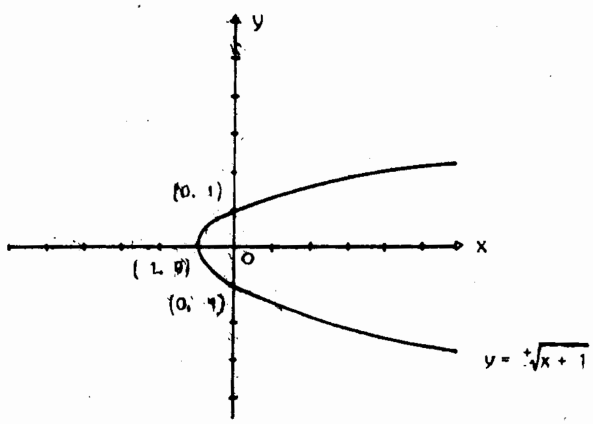
และ

$$y = -\sqrt{x+1} \tag{1.3.3}$$

โคออร์ดิเนตของจุดที่สอดคล้องกับสมการ (1.3.1) จะต้องสอดคล้องกับสมการ (1.3.2) หรือสมการ (1.3.3) ตารางข้างล่างนี้เป็นตารางแสดงค่าบางค่าของ x และ y ที่สอดคล้องกับสมการดังกล่าว

x	1	0	1	2	3	4	5
$y = \pm\sqrt{x+1}$	0	± 1	$\pm\sqrt{2}$	$\pm\sqrt{3}$	± 2	$\pm\sqrt{5}$	$\pm\sqrt{6}$

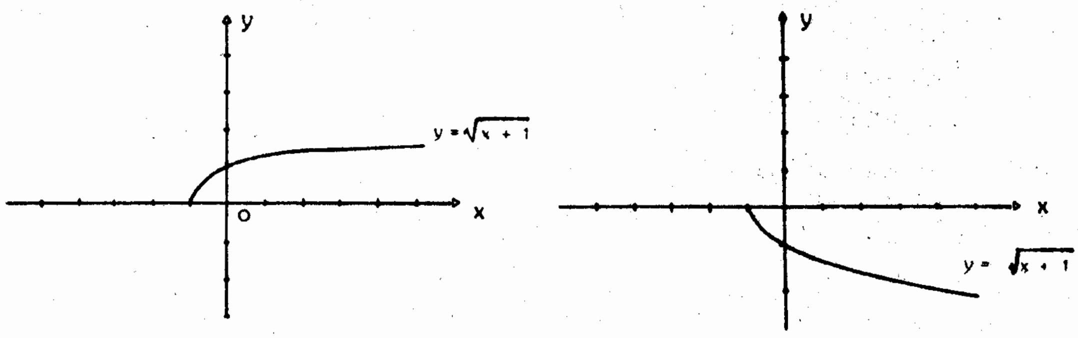
ข้อสังเกต ค่าของ x จะน้อยกว่า -1 ไม่ได้ เพราะจะทำให้ y ไม่เป็นจำนวนจริง และเมื่อ x เป็นค่าใด ๆ ที่มากกว่า -1 จะให้ค่า y สองค่าเสมอ ดังนั้นจะได้กราฟดังรูป 1.3.5



รูป 1.3.5

ตัวอย่าง 1.3.3 จงเขียนกราฟของสมการ $y = \sqrt{x+1}$ และ $y = -\sqrt{x+1}$

วิธีทำ จะเห็นว่าสมการทั้งสองนี้ถ้ารวมเข้าด้วยกันก็คือสมการในตัวอย่าง 1.3.2 นั่นเอง กราฟของสมการทั้งสองนี้คือ



รูป 1.3.6

กราฟของสมการ $y = \sqrt{x+1}$ กราฟของสมการ $y = -\sqrt{x+1}$

ตัวอย่าง 1.3.4 จงเขียนกราฟของสมการ $y = |x + 3|$

วิธีทำ จากคุณสมบัติของค่าสัมบูรณ์จะได้

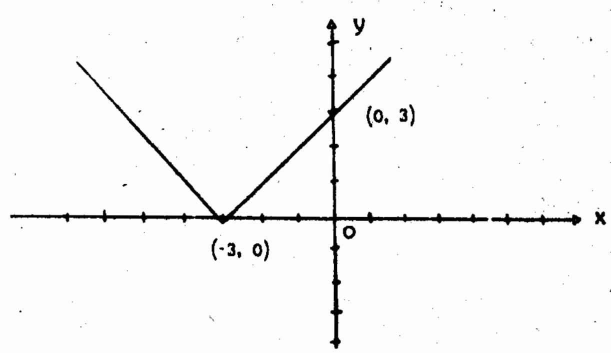
$y = x + 3$ ถ้า $x + 3 > 0$ หรือ $x > -3$

หรือ $y = -(x + 3)$ ถ้า $x + 3 < 0$ หรือ $x < -3$

ตารางข้างล่างนี้เป็นการแสดงค่าของ x และ y บางค่าที่สอดคล้องกับสมการ $y = |x + 3|$

x	-4	-3	-2	1	0	1	2	3	4
y	1	0	1	2	3	4	5	6	7

จะได้กราฟ ดังรูป 1.3.7

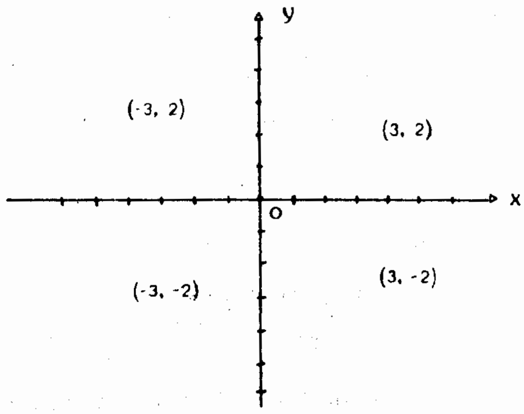


รูป 1.3.7

ตัวอย่าง 1.3.5 สมการ $y = 3$ ใน R^2 ก็คือสมการซึ่งมีกราฟประกอบด้วยจุดทุกจุดที่มี y หรือออร์ดิเนตเท่ากับ 3 ส่วน x หรือแอบซิสซาเป็นเท่าใดก็ได้ ดังนั้นกราฟของสมการ $y = 3$ คือเส้นตรงที่ขนานกับแกน x อยู่เหนือแกน x และห่างจากแกน x เป็น

ระยะทาง 3 หน่วย ในทำนองเดียวกันสมการ $x = -3$ จะมีกราฟประกอบด้วยจุดซึ่งมี x หรือ แอบซิสซา เท่ากับ -3 ส่วน y หรือออร์ดิเนตเป็นเท่าใดก็ได้ ดังนั้นกราฟของสมการ $x = -3$ จึงเป็นเส้นตรงซึ่งขนานกับแกน y อยู่ทางซ้ายของแกน y และห่างจากแกน y เป็นระยะ 3 หน่วย

นิยาม 1.3.2 : เราจะกล่าวว่าจุด P และจุด Q สมมาตรกันเมื่อเทียบกับจุด M ถ้าจุด M เป็นจุดกึ่งกลางระหว่าง P และ Q และจะกล่าวว่าจุด P และ Q สมมาตรกันเมื่อเทียบกับเส้นตรง L ถ้าเส้นตรง L แบ่งครึ่งและตั้งฉากกับเส้นตรง PQ



รูป 1.3.8

จากรูป จุด (3, 2) และ (-3, -2) สมมาตรกันเมื่อเทียบกับจุดกำเนิด จุด (3, 2) และ (3, -2) สมมาตรกันเมื่อเทียบกับแกน x จุด (3, 2) และ (-3, 2) สมมาตรกันเมื่อเทียบกับแกน y

จากตัวอย่างเหล่านี้สรุปได้ว่า (x, y) และ (-x, -y) สมมาตรกันเมื่อเทียบกับจุดกำเนิด

นิยาม 1.3.3 : เราจะกล่าวว่ากราฟของสมการใด ๆ มีความสมมาตรเมื่อเทียบกับจุด M ถ้าสำหรับจุด P ใด ๆ บนกราฟมีจุด S บนกราฟนั้นซึ่งทำให้จุด P และจุด S สมมาตรกันและจะกล่าวว่ากราฟนั้น ๆ สมมาตรเมื่อเทียบกับเส้นตรง L ถ้าสำหรับจุดใด ๆ บนกราฟมีจุด Q บนกราฟซึ่งทำให้จุด P และ Q สมมาตรกัน

จากนิยามข้างต้นแสดงว่าถ้าจุด (x, y) อยู่บนกราฟซึ่งสมมาตรเมื่อเทียบกับจุดกำเนิดแล้ว จุด (-x, -y) จะต้องอยู่บนกราฟด้วย นั่นคือจุด (x, y) และ (-x, -y) จะสอดคล้องกับสมการของกราฟนั้น ดังนั้นกราฟของสมการที่มีตัวแปรเป็น x และ y จะสมมาตรเมื่อเทียบกับจุดกำเนิดก็ต่อเมื่อเราแทนค่า x ด้วย -x และแทนค่า y ด้วย -y ในสมการนั้นแล้วไม่ทำให้สมการเปลี่ยนไป สำหรับกราฟที่สมมาตรเมื่อเทียบกับเส้นตรงก็พิจารณาในทำนองเดียวกัน ดังนั้นเราจะได้ทฤษฎีต่อไปนี้

ทฤษฎี 1.3.1 :

(1) กราฟมีความสมมาตรเมื่อเทียบกับจุดกำเนิดก็ต่อเมื่อแทนค่า x ด้วย -x และแทนค่า y ด้วย -y ในสมการของกราฟนั้นแล้วไม่ทำให้สมการเปลี่ยนแปลง

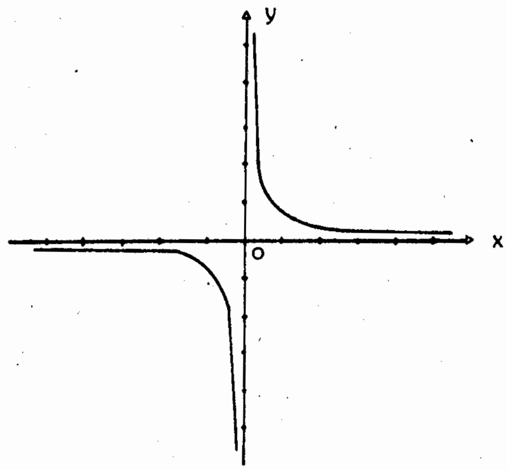
(2) กราฟมีความสมมาตรเมื่อเทียบกับแกน x ก็ต่อเมื่อแทนค่า y ด้วย -y ในสมการของ

กราฟนั้นแล้วไม่ทำให้สมการนั้นเปลี่ยนแปลง

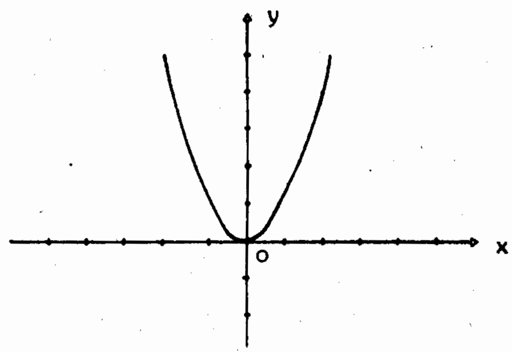
(3) กราฟมีความสมมาตรเมื่อเทียบกับแกน y ก็ต่อเมื่อแทนค่า x ด้วย $-x$ ในสมการของกราฟนั้นแล้วไม่ทำให้สมการนั้นเปลี่ยนแปลง

ตัวอย่าง 1.3.6 จงเขียนกราฟของสมการ $xy = 1$ และ $y = x^2$ พร้อมทั้งพิจารณาการสมมาตรของกราฟด้วย

วิธีทำ



กราฟของสมการ $xy = 1$



กราฟของสมการ $y = x^2$

รูป 1.3.9

จากสมการ $xy = 1$ ถ้าแทน x ด้วย $-x$ และ y ด้วย $-y$ จะได้ $(-x)(-y) = 1$ หรือ $xy = 1$ แสดงว่าสมการไม่เปลี่ยนแปลง ดังนั้นกราฟของสมการ $xy = 1$ จึงสมมาตรเมื่อเทียบกับจุดกำเนิด จากสมการ $y = x^2$ ถ้าแทน x ด้วย $-x$ จะได้ $y = (-x)^2$ หรือ $y = x^2$ จะเห็นว่าสมการไม่เปลี่ยนแปลง ดังนั้นกราฟของสมการ $y = x^2$ สมมาตรเมื่อเทียบกับแกน y

ในลำดับต่อไปเราจะพิจารณาวิธีหาระยะทางระหว่างจุดสองจุด ถ้า A และ B เป็นจุดสองจุดใด ๆ ในระนาบ ส่วนของเส้นตรงที่มีจุดเริ่มต้นที่ A และมีจุดปลายที่ B จะเขียนแทนด้วย $\overline{AB}$ และจะแทนขนาดหรือความยาวของส่วนของเส้นตรงนี้ด้วย $|AB|$

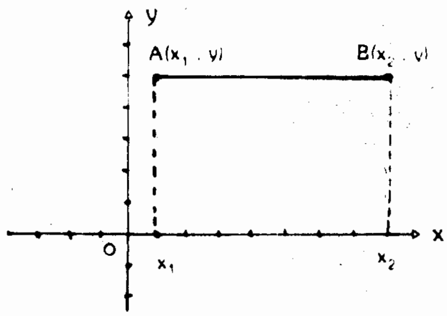
ถ้า A คือจุด (x_1, y) และ B คือจุด (x_2, y) ระยะทางจาก A ถึง B คือ

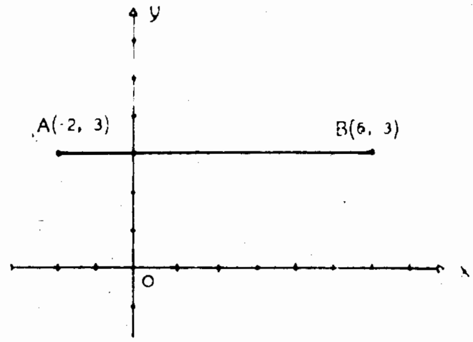
$$|AB| = |x_2 - x_1|$$

เช่นระยะทางจากจุด A $(-2, 3)$ ถึงจุด B $(6, 3)$ คือ

$$|AB| = |6 - (-2)| = |6 + 2| = 8$$

ดังรูป 1.3.10



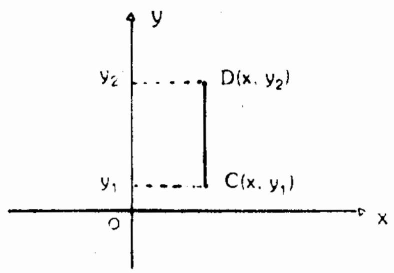


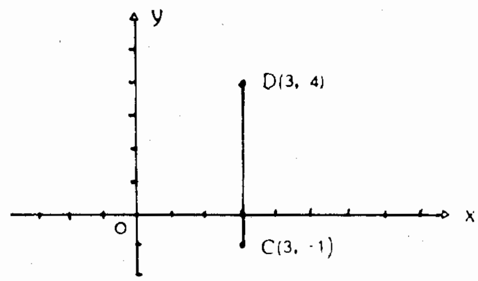
รูป 1.3.10

ถ้า C คือจุด (x, y_1) และ D คือจุด (x, y_2) ระยะทางจาก C ถึง D คือ

$$|CD| = |y_2 - y_1|$$

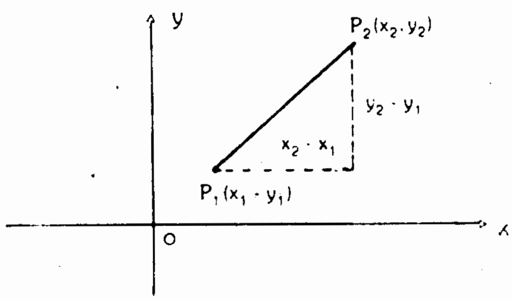
เช่นระยะทางจากจุด C (3, -1) ถึงจุด D (3, 4) คือ $|CD| = |4 - (-1)| = |4 + 1| = 5$ ดังรูป 1.3.11





รูป 1.3.11

ในกรณีทั่วไปให้ P_1 คือจุด (x_1, y_1) และ P_2 คือจุด (x_2, y_2) เราสามารถหาความยาวของส่วนของเส้นตรง P_1P_2 ได้โดยอาศัยทฤษฎีของไพธากอรัส ดังรูป 1.3.12



รูป 1.3.12

จากทฤษฎีของไพธากอรัสจะได้

$$|P_1P_2|^2 = (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2$$

ดังนั้น

$$|P_1P_2| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

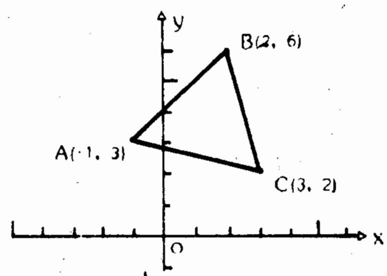
ทฤษฎี 1.3.2 : ให้ $P_1(x_1, y_1)$ และ $P_2(x_2, y_2)$ เป็นจุด 2 จุดใด ๆ ในระนาบ ดังนั้นความยาวระหว่างจุด P_1 และ P_2 คือ

$$|P_1P_2| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

ตัวอย่าง 1.3.7 จงหาความยาวของด้านทั้งสามของสามเหลี่ยมซึ่งมีจุดยอดที่ A(-1, 3) , B(2, 6) และ C(3, 2) และจงแสดงว่าสามเหลี่ยมดังกล่าวนี้เป็นสามเหลี่ยมหน้าจั่ว

วิธีทำ

$$|AB| = \sqrt{(2+1)^2 + (6-3)^2} = \sqrt{9+9} = 3\sqrt{2}$$
$$|CB| = \sqrt{(2-3)^2 + (6-2)^2} = \sqrt{1+16} = \sqrt{17}$$
$$|CA| = \sqrt{(-1-3)^2 + (3-2)^2} = \sqrt{16+1} = \sqrt{17}$$

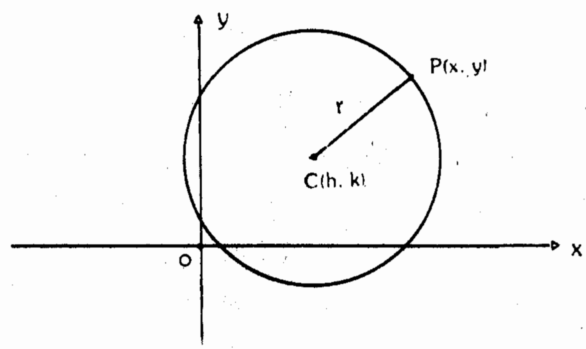


รูป 1.3.13

เนื่องจากสามเหลี่ยม ABC มีด้านยาวเท่ากัน 2 ด้านคือ $|CB| = |CA|$
ดังนั้นสามเหลี่ยม ABC เป็นสามเหลี่ยมหน้าจั่ว

นิยาม 1.3.4 : วงกลมคือเซตของจุดในระนาบซึ่งอยู่ห่างจากจุดคงที่เท่ากัน จุดคงที่นี้จะเรียกว่าจุดศูนย์กลางของวงกลม และเรียกระยะที่เท่ากันนั้นว่ารัศมีของวงกลม

ให้ P(x, y) เป็นจุดใด ๆ บนเส้นรอบวงของวงกลมซึ่งมีจุดศูนย์กลางอยู่ที่ C(h, k) และมีรัศมีเท่ากับ r ดังรูป 1.3.14



รูป 1.3.14

ดังนั้น $|PC| = r$ หรือ

$$\sqrt{(x-h)^2 + (y-k)^2} = r \quad \text{หรือ}$$
$$(x-h)^2 + (y-k)^2 = r^2$$

เป็นสมการของวงกลมซึ่งมีจุดศูนย์กลางอยู่ที่ (h, k) และมีรัศมีเท่ากับ r

ตัวอย่าง 1.3.8 จงหาสมการของวงกลมซึ่งมีจุดศูนย์กลางที่จุดกำเนิด $(0, 0)$ และมีรัศมีเท่ากับ r

วิธีทำ สมการของวงกลมซึ่งมีจุดศูนย์กลางที่ (h, k) และมีรัศมี r คือ

$$(x - h)^2 + (y - k)^2 = r^2$$

ในที่นี้ $h = 0$, $k = 0$ ดังนั้นสมการของวงกลมนี้คือ

$$x^2 + y^2 = r^2$$

ตัวอย่าง 1.3.9 จงหาสมการของวงกลมซึ่งมีจุดศูนย์กลางที่ $(2, -3)$ และมีรัศมี 4 หน่วย พร้อมทั้งเขียนภาพประกอบ

วิธีทำ ในที่นี้ $h = 2$, $k = -3$ และ $r = 4$ จะได้

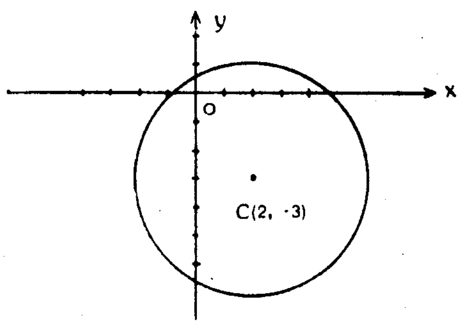
$$(x - 2)^2 + y - (-3))^2 = 4^2$$

$$(x - 2)^2 + (y + 3)^2 = 16$$

หรือ $$(x^2 - 4x + 4) + (y^2 + 6y + 9) = 16$$

ดังนั้น $$x^2 + y^2 - 4x + 6y - 3 = 0$$

เป็นสมการของวงกลมซึ่งมีจุดศูนย์กลางที่ $(2, -3)$ และมีรัศมียาว 4 หน่วยตามต้องการ



รูป 1.3.15

ตัวอย่าง 1.3.10 จงแสดงให้เห็นว่ากราฟของสมการ $x^2 + y^2 + 8x - 6y + 21 = 0$ เป็นวงกลม พร้อมทั้งหาจุดศูนย์กลางและรัศมีของวงกลมนี้

วิธีทำ จากสมการ $x^2 + y^2 + 8x - 6y + 21 = 0$ จัดรูปเสียใหม่จะได้

$$(x^2 + 8x) + (y^2 - 6y) = -21$$

ทำให้อยู่ในรูปกำลังสองสมบูรณ์ โดยการบวก 16 และ 9 ทั้งสองข้างจะได้

$$(x^2 + 8x + 16) + (y^2 - 6y + 9) = -21 + 16 + 9$$

หรือ $$(x + 4)^2 + (y - 3)^2 = 4 = 2^2$$

ซึ่งเป็นสมการของวงกลม มีจุดศูนย์กลางอยู่ที่ $(-4, 3)$ และมีรัศมียาวเท่ากับ 2 หน่วย

หมายเหตุ : จากสมการวงกลม $(x - h)^2 + (y - k)^2 = r^2$ เขียนใหม่จะได้

$$x^2 - 2hx + h^2 + y^2 - 2ky + k^2 = r^2$$

หรือ $$x^2 + y^2 - 2hx - 2ky + (h^2 + k^2 - r^2) = 0$$

ดังนั้นวงกลมทุกวงกลมจะมีสมการอยู่ในรูป

$$x^2 + y^2 + ax + by + c = 0$$

เมื่อ $a = -2h$, $b = -2k$ และ $c = h^2 + k^2 - r^2$

หรือกล่าวว่ารูปทั่ว ๆ ไปของสมการวงกลมคือ

$$x^2 + y^2 + ax + by + c = 0 \qquad (1.3.4)$$

จากรูปทั่ว ๆ ไปของสมการวงกลม เราสามารถหาจุดศูนย์กลางและรัศมีของวงกลมได้ดังนี้

จัดสมการ $x^2 + y^2 + ax + by + c = 0$ ให้อยู่ในรูปกำลังสองสมบูรณ์ จะได้

$$(x^2 + ax + \frac{a^2}{4}) + (y^2 + by + \frac{b^2}{4}) = \frac{a^2}{4} + \frac{b^2}{4} - c$$

หรือ

$$(x + \frac{a}{2})^2 + (y + \frac{b}{2})^2 = \frac{\sqrt{a^2 + b^2 - 4c}}{2}$$

แสดงว่าวงกลมนี้มีจุดศูนย์กลางอยู่ที่ $(-\frac{a}{2}, -\frac{b}{2})$ และมีรัศมี $r = \frac{1}{2}\sqrt{a^2 + b^2 - 4c}$ ถ้า $a^2 + b^2 - 4c > 0$ แต่ถ้าจำนวนที่อยู่ใต้เครื่องหมายราก คือ $a^2 + b^2 - 4c = 0$ แสดงว่าสมการ (1.3.4) เป็นสมการของจุด $(-\frac{a}{2}, -\frac{b}{2})$ ซึ่งจะเรียกว่าวงกลมจุด (circle point) และถ้า $a^2 + b^2 - 4c < 0$ แล้วเราไม่สามารถจะหาจุด (x, y) ที่สอดคล้องกับสมการ (1.3.4) นี้ได้ ดังนั้นเราจะเรียกวงกลมนี้ว่า วงกลมจินตภาพ (imaginary circle)

ตัวอย่าง 1.3.11 จงพิจารณาสมการ $x^2 + y^2 + 1 = 0$

วิธีทำ จะเห็นว่าเราไม่สามารถหาค่า x และ y

ซึ่งสอดคล้องกับสมการ $x^2 + y^2 + 1 = 0$ ได้

ทั้งนี้เพราะว่าจำนวนทางซ้ายของสมการนี้ คือ

$x^2 + y^2 + 1$ มีค่ามากกว่า 0 เสมอ ไม่ว่าจะแทน x และ y ด้วยจำนวนจริงใด ๆ

ตัวอย่าง 1.3.12 จงหาสมการของวงกลมซึ่งผ่านจุด $A(-2, 0)$, $B(2, 8)$ และ $C(5, -1)$

วิธีทำ รูปทั่ว ๆ ไปของสมการวงกลม คือ

$$x^2 + y^2 + ax + by + c = 0$$

วงกลมผ่านจุด $A(-2, 0)$ จะได้ $4 + 0 - 2a + 0b + c = 0$

วงกลมผ่านจุด $B(2, 8)$ จะได้ $4 + 64 + 2a + 8b + c = 0$

วงกลมผ่านจุด $C(5, -1)$ จะได้ $25 + 1 + 5a - b + c = 0$

แก้สมการทั้งสามจะได้ $a = -4$, $b = -6$ และ $c = -12$

แทนค่า a, b และ c ในรูปทั่ว ๆ ไปของสมการวงกลม จะได้

$$x^2 + y^2 - 4x - 6y - 12 = 0$$

แบบฝึกหัด 1.3

ในข้อ 1 - 20 จงเขียนกราฟของสมการเหล่านั้น

1. $y = 3x + 1$	2. $y = x^2 + 2$	3. $y = \sqrt{x - 3}$
4. $y = -\sqrt{x - 3}$	5. $y^2 = x - 3$	6. $y = 5$
7. $x = -3$	8. $x = y^2 + 1$	9. $y = \|3x + 2\|$
10. $y = -\|x + 2\|$	11. $y = \|x\| - 5$	12. $y = -\|x\| + 2$
13. $xy = 4$	14. $x^2y = 4$	15. $y = x^3$
16. $y = (x - 3)^3$	17. $y = (x + 3)^3$	18. $y = -x^3$
19. $x^2 + y^2 = 16$	20. $4x^2 + 4y^2 = 1$	

จากข้อ 21 - 26 จงเขียนกราฟของสมการทั้งสามโดยใช้แกน x และแกน y เดียวกัน

21.	(a) $y = \sqrt{2x}$	(b) $y = -\sqrt{2x}$	(c) $y^2 = 2x$
22.	(a) $y = \sqrt{-2x}$	(b) $y = -\sqrt{-2x}$	(c) $y^2 = -2x$
23.	(a) $y = \sqrt{4 - x^2}$	(b) $y = -\sqrt{4 - x^2}$	(c) $x^2 + y^2 = 4$
24.	(a) $y = \sqrt{25 - x^2}$	(b) $y = -\sqrt{25 - x^2}$	(c) $x^2 + y^2 = 25$
25.	(a) $x + 3y = 0$	(b) $x - 3y = 0$	(c) $x^2 - 9y^2 = 0$
26.	(a) $2x - 5y = 0$	(b) $2x + 5y = 0$	(c) $4x^2 - 25y^2 = 0$

27. (a) จงเขียนสมการของแกน x
    (b) จงเขียนสมการของแกน y
28. (a) จงเขียนสมการของกราฟซึ่งจุดทุกจุดที่อยู่บนกราฟมีแอบซิสซาเท่ากับ 4
    (b) จงเขียนสมการของกราฟซึ่งจุดทุกจุดที่อยู่บนกราฟมีออร์ดิเนตเท่ากับ -3

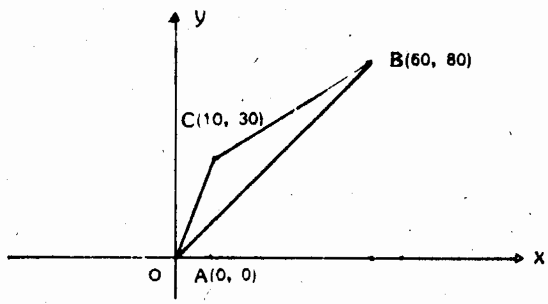
จากข้อ 29 - 32 จงหาระยะทางระหว่างจุดสองจุดที่กำหนดให้

29. (2, -5) และ (6, 1)	30. (3, 0) และ (-4, 1)
31. $(\frac{1}{2}, \frac{3}{4})$ และ $(-\frac{1}{2}, -\frac{3}{4})$	32. (9, -10) และ (-1, 10)

33. จงแสดงให้เห็นว่าสามเหลี่ยมซึ่งมีจุดยอดทั้งสามอยู่ที่จุด (-8, 1) , (-1, -6) และ (2, 4) เป็นสามเหลี่ยมหน้าจั่ว
34. จงแสดงให้เห็นว่าจุด A(6, -13) , B(-2, 2) , C(13, 10) และ D(21, -5) เป็นจุดยอดมุมทั้งสี่ของสี่เหลี่ยมจัตุรัส พร้อมทั้งหาความยาวของเส้นทะแยงมุมด้วย
35. จงใช้สูตรในการหาระยะทางเพื่อแสดงให้เห็นว่าจุด (-3, 2) , (1, -2) และ (9, -10) อยู่บนเส้นตรงเดียวกัน

36. จงพิจารณาว่าจุด (14, 7) , (2, 2) และ (-4, -1) อยู่บนเส้นตรงเดียวกันหรือไม่ โดยอาศัยสูตรในการหาระยะทางช่วยในการพิจารณา

37. สมมุติให้เมือง A, B และ C ตั้งอยู่ ณ จุดดังรูป 1.3.16 และให้ระยะ 1 หน่วยเท่ากับ 1 ไมล์ ในการขนส่งสินค้าอย่างหนึ่งโดยทางรถไฟจากเมือง A ไปยังเมือง B จะต้องเสียค่าขนส่ง 6 เหรียญต่อไมล์ ถ้าขนส่งโดยตรงจากเมือง A ถึงเมือง B แต่ถ้าผ่านทางเมือง C จะเสียค่าขนส่งแค่ 5 เหรียญต่อไมล์ จงพิจารณาดูว่าควรจะขนส่งสินค้าทางใดจึงจะทำให้เสียค่าขนส่งถูกที่สุด

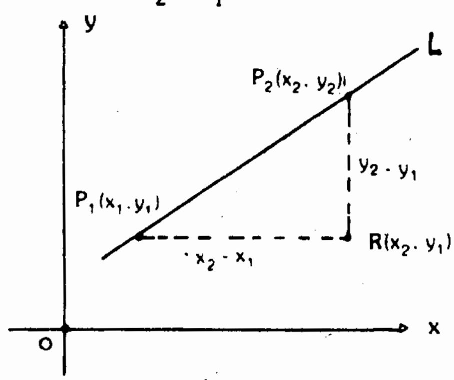


รูป 1.3.16

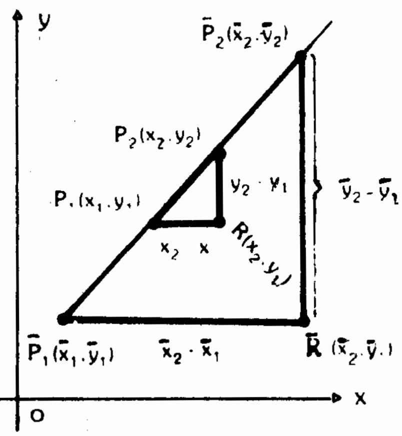
38. จงหาสมการของวงกลมซึ่งมีจุดศูนย์กลางที่ (4, -5) และมีรัศมีเท่ากับ 6
39. จงหาสมการของวงกลมซึ่งมีจุดศูนย์กลางที่ (-5, -12) และมีรัศมีเท่ากับ 3
40. จงหาสมการของวงกลมซึ่งมีจุดศูนย์กลางที่ (4, -3) และผ่านจุด (7, 2)
41. จงหาจุดศูนย์กลางและรัศมีของวงกลมซึ่งมีสมการเป็น $x^2 + y^2 - 4x + 6y - 3 = 0$
42. จงหาจุดศูนย์กลางและรัศมีของวงกลมซึ่งมีสมการเป็น $3x^2 + 3y^2 - x + 2y = 0$
43. จงหาสมการของวงกลมที่ผ่านจุด A(-1, -1) , B(1, 0) และ C(0, 2)
44. จงหาสมการของวงกลมที่ผ่านจุด A(-2, 4) , B(6, 3) และ C(5, -2)
45. จงหาสมการของวงกลมที่ผ่านจุด A(3, -4) และ B(1, 0) และมีจุดศูนย์กลางอยู่บนเส้นตรง $2x + y + 8 = 0$

1.4 สมการเส้นตรง Equations of a Line

ให้ L เป็นเส้นตรงใด ๆ ซึ่งไม่อยู่ในแนวดิ่ง ให้ $P_1(x_1, y_1)$ และ $P_2(x_2\ y_2)$ เป็นจุดสองจุดบนเส้นตรง L ให้ R คือจุด (x_2, y_1) ดังนั้น จุด P_1 . P_2 และ R เป็นจุดยอดของสามเหลี่ยมมุมฉาก โดยที่ $P_1R = x_2 - x_1$ และ $RP_2 = y_2 - y_1$, ดังรูป 1.4.1 จะเห็นว่า $y_2 - y_1$ นั้นอาจจะมีค่าเป็นบวกหรือลบหรือเท่ากับศูนย์ก็ได้ แต่ $x_2 - x_1 \neq 0$ เพราะ $x_2 \neq x_1$ เนื่องจากเส้นตรง L ไม่อยู่ในแนวดิ่ง ดังนั้นเราสามารถหาค่า $\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$ ได้ และเราสามารถพิสูจน์ได้โดยไม่ยากนักว่า $\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$ จะมีค่าคงที่เสมอ ไม่ว่า P_1 และ P_2 จะเป็นจุดใด ๆ บนเส้นตรง L



รูป 1.4.1



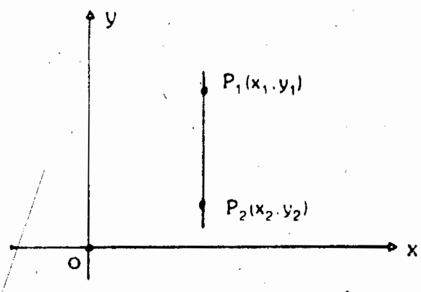
รูป 1.4.2

จากรูป 1.4.2 ให้ $m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$ และ $\bar{m} = \frac{\bar{y}_2 - \bar{y}_1}{\bar{x}_2 - \bar{x}_1}$ จะได้ $m = \bar{m}$ ทั้งนี้เพราะว่าสามเหลี่ยม P_1P_2R และสามเหลี่ยม $\bar{P}_1\bar{P}_2\bar{R}$ เป็นสามเหลี่ยมคล้าย ดังนั้นเราจึงนิยามความชัน (slope) ของเส้นตรงดังนี้

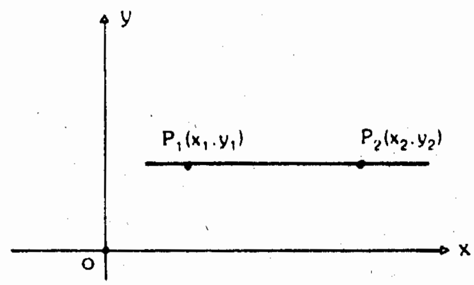
นิยาม 1.4.1 : ถ้า $P_1(x_1, y_1)$ และ $P_2(x_2, y_2)$ เป็นจุดสองจุดใด ๆ บนเส้นตรงซึ่งไม่อยู่ในแนวดิ่งหรือไม่ขนานกับแกน y แล้วความชันของเส้นตรงนี้คือ

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

ในกรณีที่เส้นตรงอยู่ในแนวดิ่งหรือขนานกับแกน y ดังรูป 1.4.3 จะได้ $x_1 = x_2$ ดังนั้น $x_2 - x_1 = 0$ ซึ่งจะทำให้ไม่สามารถหาค่า $m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$ ได้ ดังนั้นเราจะกล่าวว่าเส้นตรงซึ่งอยู่ในแนวดิ่งไม่มีความชัน



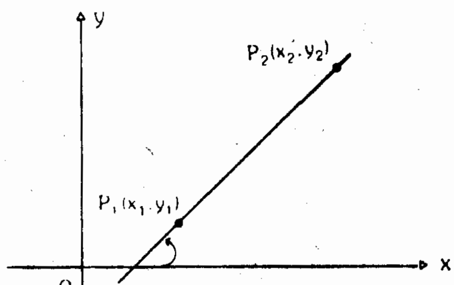
รูป 1.4.3



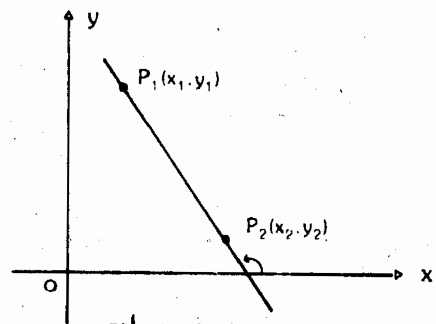
รูป 1.4.4

ถ้าเส้นตรงอยู่ในแนวนอน หรือ ขนานกับแกน x ดังรูป 1.4.4 จะได้ $y_1 = y_2$ ดังนั้น $y_2 - y_1 = 0$ ซึ่งจะทำให้ $m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = 0$ ดังนั้นเราจะกล่าวว่าเส้นตรงที่อยู่ในแนวนอนมีความชันเป็นศูนย์

ถ้าเส้นตรงอยู่ในลักษณะที่ทำมุมกับแกน y เป็นมุมแหลม ดังรูป 1.4.5 จะเห็นว่า $x_2 - x_1 > 0$ และ $y_2 - y_1 > 0$ ดังนั้น $m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} > 0$ นั่นคือเส้นตรงมีความชันเป็นบวก



รูป 1.4.5



รูป 1.4.6

ถ้าเส้นตรงอยู่ในลักษณะที่ทำมุมกับแกน x เป็นมุมป้าน ดังรูป 1.4.6 จะเห็นว่า $x_2 - x_1 > 0$ ดังนั้น $m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} < 0$ นั่นคือเส้นตรงมีความชันเป็นลบ แต่ $y_2 - y_1 < 0$

ทฤษฎี 1.4.1 : ถ้า L_1 และ L_2 เป็นเส้นตรงสองเส้น มีความชันเป็น m_1 และ m_2 ตามลำดับ เส้นตรงทั้งสองนี้จะตั้งฉากกันก็ต่อเมื่อ $m_1 m_2 = -1$

ตัวอย่าง 1.4.1 ถ้า L_1 เป็นเส้นตรงซึ่งผ่านจุด A(-1, 5) และ B(4, -1)

ดังนั้นความชันของ L_1 คือ

$$m_1 = \frac{-1 - 5}{4 - (-1)} = -\frac{6}{5}$$

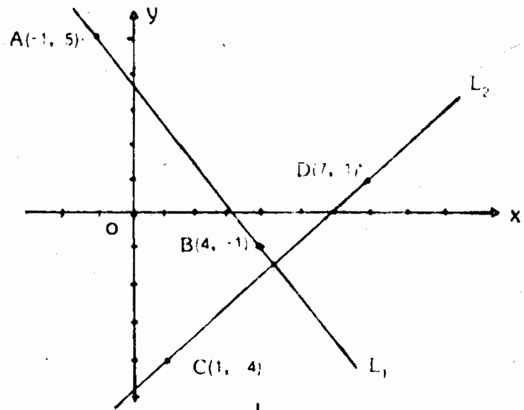
ให้ L_2 เป็นเส้นตรงซึ่งผ่านจุด C(1, -4) และ D(7, 1) ดังนั้น

ความชันของ L_2 คือ

$$m_2 = \frac{1-(-4)}{7-1} = \frac{5}{6}$$

จะได้ $m_1m_2 = (-\frac{6}{5})(\frac{5}{6}) = -1$

นั่นคือ L_1 และ L_2 ตั้งฉากกัน

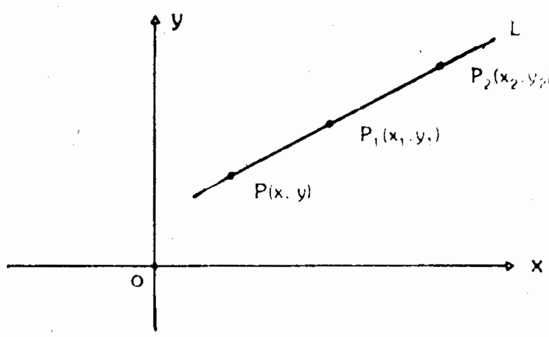


รูป 1.4.8

จากนิยาม 1.4.1 เราสามารถหาความชันของเส้นตรงได้ถ้าทราบจุดสองจุดซึ่งอยู่บนเส้นตรงนั้น ให้ $P_1(x_1, y_1)$ และ $P_2(x_2, y_2)$ เป็นจุดสองจุดบนเส้นตรง L คือ

$$m_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2\ x_1}$$

ถ้า P(x, y) เป็นจุดใด ๆ บนเส้นตรง L นี้ด้วย ดังรูป 1.4.9



รูป 1.4.9

เราอาจหาความชันของเส้นตรง L ซึ่งมีจุด P(x, y) และ $P_1(x_1, y_1)$ เป็นจุดสองจุดบนเส้นตรงได้ ดังนี้

$$m_2 = \frac{y - y_1}{x - x_1}$$

เนื่องจาก m_1 และ m_2 เป็นความชันของเส้นตรง L เดียวกัน ดังนั้น m_1 และ m_2 จะต้องเท่ากัน นั่นคือ

$$\frac{y - y_1}{x - x_1} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

ดังนั้นเราจึงสรุปได้ว่า สมการของเส้นตรงที่ผ่านจุด $P_1(x_1, y_1)$ และ $P_2(x_2, y_2)$ คือ

$$\frac{y - y_1}{x - x_1} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \qquad (1.4.1)$$

เมื่อ $x_1 \neq x_2$ แต่ถ้า $x_1 = x_2$ นั่นคือเส้นตรงอยู่ในแนวดิ่ง ทุกจุดบนเส้นตรงนี้จะมีแอบซิสซาเท่ากัน ดังนั้นถ้า $P(x, y)$ เป็นจุดใด ๆ บนเส้นตรงนี้ เราจะได้สมการของเส้นตรงนี้ คือ

$$x = x_1$$

ตัวอย่าง 1.4.2 จงหาสมการของเส้นตรงที่ผ่านจุด (6, -3) และ (-3, 3)

วิธีทำ เส้นตรงผ่านจุด (6, -3) และ (-3, 3) จะได้

$$\frac{y-(-3)}{x-6} = \frac{3-(-3)}{-3-6}$$

$$y + 3 = -\frac{6}{9}(x-6)$$

$$y + 3 = -\frac{2}{3}(x-6)$$

ดังนั้นสมการของเส้นตรงนี้คือ

$$y + 3 = -\frac{2}{3}(x-6)$$

หรือ

$$y = -\frac{2}{3}x + 1$$

ตัวอย่าง 1.4.3 จงหาสมการของเส้นตรงซึ่งผ่านจุด (3, 2) และ (3, 5)

วิธีทำ จะเห็นว่า $x_1 = x_2 = 3$

ดังนั้นสมการของเส้นตรงนี้คือ $x = 3$

จากสมการเส้นตรง (1.4.1) จะเห็นว่า $\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$ คือความชันของเส้นตรงซึ่งผ่านจุด (x_1, y_1) และ (x_2, y_2) นั่นเอง ถ้า m คือความชันของเส้นตรงดังกล่าวนี้ เราจะได้

$$\frac{y - y_1}{x - x_1} = m$$

หรือ

$$y - y_1 = m(x - x_1) \qquad (1.4.2)$$

เป็นสมการของเส้นตรงซึ่งผ่านจุด (x_1, y_1) และมีความชันเท่ากับ m

ตัวอย่าง 1.4.4 จงหาสมการของเส้นตรงซึ่งผ่านจุด (3, 4) และมีความชันเท่ากับ $\frac{2}{3}$

วิธีทำ ในที่นี้ $(x_1, y_1) = (3, 4)$ และ $m = \frac{2}{3}$ แทนค่าใน (1.4.2) จะได้

$$y - 4 = \frac{2}{3}(x-3)$$

หรือ

$$y = \frac{2}{3}x + 2$$

เป็นสมการของเส้นตรงซึ่งผ่านจุด (3, 4) และมีความชันเท่ากับ $\frac{2}{3}$

จากสมการ (1.4.2) ถ้าเส้นตรงผ่านจุด (0, b) หรือกล่าวว่าเส้นตรงตัดแกน y ที่จุด (0, b) เราจะได้

$$y - b = m(x - 0)$$

หรือ

$$y = mx + b \qquad (1.4.3)$$

เป็นสมการของเส้นตรงซึ่งตัดแกน y ที่จุด (0, b) และมีความชันเท่ากับ m เราจะเรียก b ว่า **ระยะตัดแกน y (y-intercept)**

ตัวอย่าง 1.4.5 จงหาสมการของเส้นตรงซึ่งมีความชันเท่ากับ 2 และมีระยะตัดแกน y เท่ากับ -3

วิธีทำ ระยะตัดแกน y เท่ากับ -3 หมายความว่าเส้นตรงตัดแกน y ที่ (0, -3) ดังนั้นจะได้

$$y = 2x + (-3)$$

หรือ

$$y = 2x - 3$$

เป็นสมการของเส้นตรงที่ต้องการ

ตัวอย่าง 1.4.6 จงหาความชันและระยะตัดแกน y ของเส้นตรง $3x + 4y = 7$

วิธีทำ จากสมการ $3x + 4y = 7$ จัดให้อยู่ในรูปเดียวกับสมการ (1.4.3) จะได้

$$y = -\frac{3}{4}x + \frac{7}{4}$$

ดังนั้นความชันของเส้นตรงที่กำหนดให้คือ $m = -\frac{3}{4}$

และระยะตัดแกน y คือ $b = \frac{7}{4}$ หรือกล่าวว่าเส้นตรงนี้ตัดแกน y ที่จุด $(0, \frac{7}{4})$

จากตัวอย่าง 1.4.6 จะเห็นว่าสมการทั่ว ๆ ไปของเส้นตรงจะอยู่ในรูป $Ax + By + C = 0$ ซึ่งจะเรียกว่าสมการเชิงเส้น (linear equation) เพราะกำลังของตัวแปร x และ y เป็นหนึ่ง

ในการเขียนกราฟของสมการเส้นตรงนั้น เราเพียงแต่หาจุด 2 จุดบนเส้นตรงนั้น แล้วลากเส้นเชื่อมจุดทั้งสองนั้น ก็จะได้เส้นตรงที่ต้องการ ในการหาจุด 2 จุดบนเส้นตรงนั้นเพื่อให้ง่ายเรามักหาจุดที่เส้นตรงนั้นตัดแกน x (ค่าออร์ดิเนตจะเป็น 0) และจุดตัดแกน y (ค่าแอบซิสซาจะเป็น 0) ถ้าเส้นตรงตัดแกน x ที่จุด (a, 0) เราจะเรียก a ว่า ระยะตัดแกน x (x-intercept) และถ้าเส้นตรงตัดแกน y ที่จุด (0, b) เราจะเรียก b ว่าระยะตัดแกน y (y-intercept)

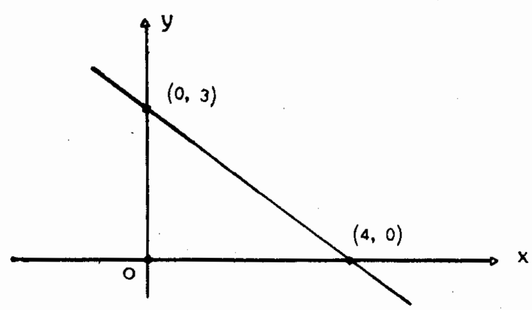
ตัวอย่าง 1.4.7 จงเขียนกราฟของเส้นตรง

$$3x + 4y = 12$$

วิธีทำ ถ้าให้ $y = 0$ จะได้ $x = 4$

นั่นคือ ระยะตัดแกน x เท่ากับ 4

หรือกล่าวว่าเส้นตรงตัดแกน x ที่จุด (4, 0)

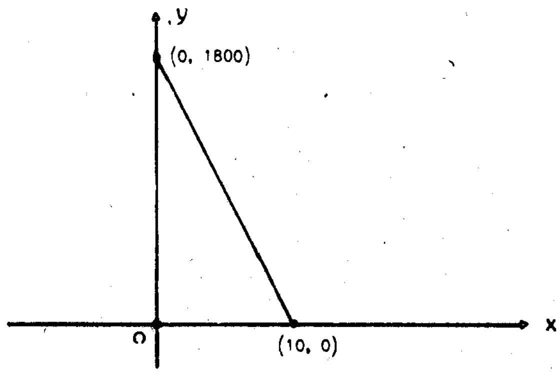


รูป 1.4.10

ถ้าให้ $x = 0$ จะได้ $y = 3$

ดังนั้นเส้นตรงจะตัดแกน y ที่จุด (0, 3) ดังรูป 1.4.10

ตัวอย่าง 1.4.8 บรรษัทแห่งหนึ่งซื้อเครื่องมือชนิดหนึ่งราคา 1,800 บาท เครื่องมือนี้มีอายุการใช้งาน 10 ปี สมุหบัญชีของบรรษัทได้ใช้วิธีอัตราเส้นตรง (straight-line method) ในการคิดค่าเสื่อมราคา นั่นคือราคาตามบัญชี (book value) ของเครื่องมือ จะลดลงในอัตราคงที่ ดังนั้นเมื่อสิ้นปีที่ 10 ราคาตามบัญชีของเครื่องมือจะเป็นศูนย์ สมมุติว่าเมื่อสิ้นปีที่ x ราคาตามบัญชีของเครื่องมือเท่ากับ y บาท ดังนั้นเมื่อ $x = 0$, $y = 1800$ และเมื่อ $x = 10$, $y = 0$ กราฟซึ่งแสดงความสัมพันธ์ระหว่าง x และ y คือส่วนของเส้นตรงซึ่งเชื่อมระหว่างจุด (0, 1800) และ (10, 0) ดังรูป 1.4.11



รูป 1.4.11

ถ้าให้ m คือความชันของส่วนของเส้นตรงนี้ จะได้

$$m = \frac{0 - 1800}{10 - 0} = -180$$

และเนื่องจากระยะตัดแกน y คือ $b = 1800$ ดังนั้น

$$y = -180x + 1800$$

เป็นสมการของเส้นตรงนี้เมื่อ $0 \leq x \leq 10$

ข้อสังเกต : จะเห็นว่า -180 ซึ่งเป็นความชันของเส้นตรงนี้คือค่าเสื่อมราคาต่อปีนั่นเอง แสดงว่าราคาตามบัญชีจะลดลงปีละ 180 บาท

แบบฝึกหัด 1.4

1. จงหาความชันของเส้นตรงซึ่งผ่านจุดที่กำหนดให้ต่อไปนี้

   1.1 (2, 3) , (-4, 3)   1.2 (5, 2) , (-2, -3)

   1.3 $(\frac{1}{3}, \frac{1}{2})$, $(-\frac{5}{6}, \frac{2}{3})$ 1.4 (-2.1, 0.3) , (2.3, 1.4)

จากข้อ 2 - 11 จงหาสมการของเส้นตรงซึ่งสอดคล้องกับเงื่อนไขที่กำหนดให้ต่อไปนี้

2. ความชันเท่ากับ 4 และผ่านจุด (2, -3)
3. ผ่านจุด 2 จุด คือ (3, 1) และ (-5, 4)
4. ผ่านจุด (-3, -4) และขนานกับแกน y
5. ผ่านจุด (1, -7) และขนานกับแกน x
6. ระยะตัดแกน x คือ -3 และระยะตัดแกน y คือ 4
7. ผ่านจุด (1, 4) และขนานกับเส้นตรง $2x - 5y + 7 = 0$
8. ผ่านจุด (-2, -5) และมีความชัน $\sqrt{3}$
9. ผ่านจุดกำเนิดและแบ่งครึ่งมุมระหว่างแกนทั้งสองซึ่งอยู่ในจตุภาคที่ 1 และ 3
10. ผ่านจุดกำเนิดและแบ่งครึ่งมุมระหว่างแกนทั้งสองซึ่งอยู่ในจตุภาคที่ 2 และ 4
11. มีความชันเท่ากับ -2 และระยะตัดแกน x เท่ากับ -4
12. จงหาความชันของเส้นตรงต่อไปนี้

    12.1 $4x - 6y = 5$ 12.2 $x + 3y = 7$

    12.3 $2x + 9 = 0$ 12.4 $3x - 5 = 0$

13. จงหาสมการของเส้นซึ่งผ่านจุด (3, -5) และ (1, -2) ในรูป $y = mx + b$
14. จงแสดงว่าเส้นตรง $3x + 5y + 7 = 0$ และเส้นตรง $3x + 5y - 2 = 0$ ขนานกัน
15. จงแสดงว่าเส้นตรง $3x + 5y + 7 = 0$ และเส้นตรง $5x - 3y - 2 = 0$ ตั้งฉากกัน
16. จงหาสมการของเส้นตรงซึ่งผ่านจุด (-4, -5) และขนานกับเส้นตรงซึ่งมีสมการเป็น $x - 2y + 6 = 0$ พร้อมทั้งเขียนกราฟของเส้นตรงทั้งสองบนระนาบ -xy เดียวกัน
17. จุดสามจุดที่กำหนดให้ในแต่ละข้อต่อไปนี้ จงพิจารณาว่าจุดทั้งสามนั้นอยู่บนเส้นตรงเดียวกันหรือไม่ (อาศัยการหาความชันช่วยในการพิจารณา)

    17.1 (2, 3) , (-4, -7) , (5, 8)

    17.2 (-3, 6) , (3, 2) , (9, -2)

    17.3 (2, -1) , (1, 1) , (3, 4)

    17.4 (4, 6) , (1, 2) , (-5, -4)

18. สมมุติว่าซื้อเครื่องมือชนิดหนึ่งราคา A บาท เครื่องมือนี้มีค่าเสื่อมราคาเป็นอัตราเส้นตรงในช่วง n ปี ถ้าราคาตามบัญชีเป็น y บาท เมื่อสิ้นปีที่ x จงหาสมการแสดงความสัมพันธ์ระหว่าง y และ x ถ้าเครื่องมือนั้นราคา 3,000 บาท จงใช้วิธีคิดค่าเสื่อมราคาในอัตราเส้นตรงในช่วง 12 ปี หาราคาตามบัญชีเมื่อสิ้นปีที่ 5

19. ซื้อเครื่องจักรชนิดหนึ่งเมื่อปี 2511 ราคา 750,000 บาท ที่ดินราคา 150,000 บาท และสิ่งปรับปรุงที่ดิน (improvement) ราคา 600,000 บาท สำหรับสิ่งปรับปรุงที่ดินมีอายุการใช้งาน 20 ปี และมีค่าเสื่อมราคาเป็นอัตราเส้นตรง จงหาราคาตามบัญชีของสิ่งปรับปรุงที่ดินในปี 2519

20. บรรษัทแห่งหนึ่งซื้อเครื่องจักรราคา 15,000 บาท เมื่อสิ้นปีที่ 10 ราคาซากของเครื่องจักรเป็น 2,000 บาท ถ้าคิดค่าเสื่อมราคาโดยวิธีอัตราเส้นตรง จงหาราคาตามบัญชีของเครื่องจักร เมื่อสิ้นปีที่ 6

1.5 ฟังก์ชันและกราฟ Functions and Their Graphs

เราจะกล่าวว่า y เป็นฟังก์ชันของ x ถ้ามีกฎหรือสูตรซึ่งแสดงถึงความสัมพันธ์ระหว่าง x และ y โดยเราสามารถหาค่า y ได้หนึ่งค่าเมื่อกำหนดค่า x ให้หนึ่งค่า เช่น ฟังก์ชันซึ่งนิยามโดยกฎที่ว่า "y ได้จากการนำ 4 ไปบวกกับกำลังสองของ x" นั่นคือ $y = x^2 + 4$ ถ้า $x = 3$ จะได้ $y = 3^2 + 4 = 13$ จะเห็นว่าเราสามารถหาค่า y ได้ เมื่อกำหนดค่า x ให้ ดังนั้นเราจึงให้นิยามของฟังก์ชันได้ดังนี้

นิยาม 1.5.1 : ฟังก์ชันจากเซต A ไปยังเซต B คือกฎเกณฑ์ซึ่งบ่งถึงความสัมพันธ์ระหว่างสมาชิกของ A และ B โดยที่สมาชิกใน A แต่ละตัวจะต้องสัมพันธ์กับสมาชิกในเซต B หนึ่งตัวและเพียงตัวเดียวเท่านั้น ถ้า f เป็นฟังก์ชันจาก A ไปยัง B เราจะเขียนแทนด้วย $f : A \to B$

โดยปกติเรามักแทนสมาชิกของ A ด้วย x และแทนสมาชิกของ B ซึ่งสัมพันธ์กับ x ด้วย y ดังนั้นเราจึงอาจกล่าวได้ว่า ฟังก์ชันคือเซตของเลขคู่ลำดับ (x, y) โดยที่ x มีค่าไม่ซ้ำกันเลย เช่น ความสัมพันธ์ซึ่งนิยามโดย $y = x^2 + 4$ เป็นฟังก์ชัน หรือ ถ้าให้ f เป็นเซตของเลขคู่ลำดับ (x, y) ซึ่งสอดคล้องกับ $y = x^2 + 4$ นั่นคือ

$$f = \{ (x, y) \mid y = x^2 + 4 \}$$

เป็นฟังก์ชัน ถ้า x เป็นจำนวนจริง จะได้ว่า y ก็เป็นจำนวนจริงด้วย ดังนั้น f เป็นฟังก์ชันจากเซต R ไปยัง R เราจะเรียก x ว่าตัวแปร (variable) ส่วนค่า y นั้นจะแปรตามค่าของ x ดังนั้นบางครั้งเราจึงเรียก x ว่าตัวแปรอิสระ (independent variable) และเรียก y ว่าตัวแปรตาม (dependent variable)

ถ้า f เป็นฟังก์ชันจาก A ไปยัง B ซึ่งกำหนดค่า $y \in B$ ให้สัมพันธ์กับ $x \in A$ แล้วเราจะแทน y ด้วย $f(x)$ นั่นคือ $y = f(x)$ และจะเรียก $f(x)$ ว่าอิมเมจ (image) ของ x ภายใต้ฟังก์ชัน f และเราจะเรียกเซต A ว่าโดเมน (domain) ของฟังก์ชัน f ซึ่งจะเขียนแทนด้วย D_f ดังนั้น

$$D_f = \{ x \mid x \in A \}$$

เราจะเรียกเซตของ $y \in B$ ซึ่งสัมพันธ์กับ $x \in A$ ว่าเรนจ์ (range) ของฟังก์ชัน f ซึ่งจะเขียนแทนด้วย R_f ดังนั้น

$$R_f = \{ y \in B \mid f(x) = y \text{ สำหรับบาง } x \in A \}$$

ตัวอย่าง 1.5.1 ให้จำนวนจริง x แต่ละตัวสัมพันธ์กับ x^2 จะเห็นว่าความสัมพันธ์ดังกล่าวนี้เป็นฟังก์ชัน ถ้าเราแทนฟังก์ชันนั้นด้วย f ดังนั้น

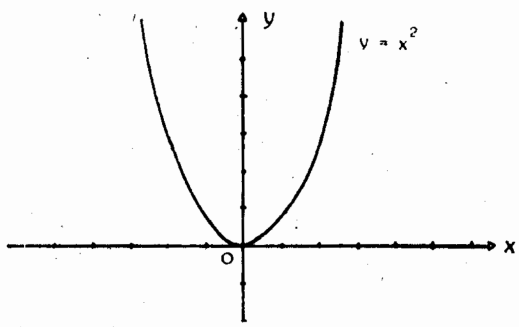
$$f(x) = x^2$$

หรือกล่าวว่า f เป็นฟังก์ชันซึ่งนิยามโดย $y = x^2$
หรืออาจกล่าวว่า f เป็นเซตของเลขคู่ลำดับ (x, y) ซึ่ง $y = x^2$
ในที่นี้โดเมนของฟังก์ชัน f คือจำนวนจริงทั้งหมด นั่นคือ

$$D_f = R = (-\infty, \infty)$$

ส่วนเรนจ์ของ f คือจำนวนจริงบวกและ 0 ดังนั้น

$$R_f = [0, \infty) = \{ x \in R \mid x \geq 0 \}$$

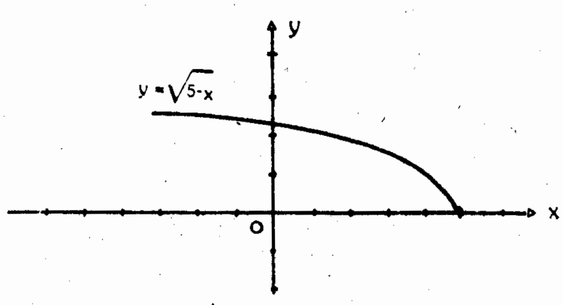


รูป 1.5.1

ในวิชาแคลคูลัสนั้นเรามักกล่าวถึงฟังก์ชันของจำนวนจริง นั่นคือ ฟังก์ชันที่มีโดเมนเป็นเซตของจำนวนจริง หรือสับเซตของจำนวนจริง ในกรณีที่โดเมนเป็นสับเซตของจำนวนจริง เรามักจะบ่งไว้ด้วย เช่น $y = x^2$ เมื่อ $0 \leq x \leq 1$ แสดงว่าโดเมนคือช่วงปิด $[0, 1]$ ซึ่งเป็นสับเซตของ R

ตัวอย่าง 1.5.2 ให้ f เป็นฟังก์ชันซึ่งนิยามโดย $y = \sqrt{5 - x}$
จะเห็นว่า ถ้า $x > 5$ จะทำให้ y ไม่เป็นจำนวนจริง
ดังนั้น x จะต้องเป็นจำนวนจริงซึ่งน้อยกว่าหรือเท่ากับ 5
นั่นคือ $D_f = \{ x \mid x \leq 5 \}$
ส่วนค่า y นั้นจะมากกว่าหรือเท่ากับ 0 ดังนั้น

$$R_f = \{ y \mid y \geq 0 \} = [0, \infty)$$

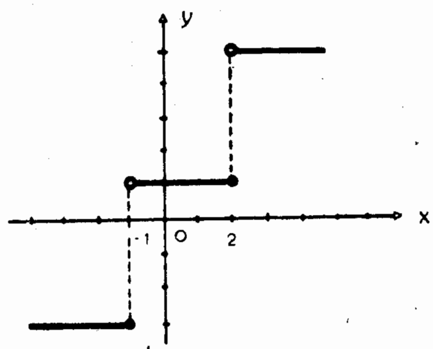


รูป 1.5.2

ตัวอย่าง 1.5.3 ให้ g เป็นฟังก์ชันซึ่งนิยามโดย

$$y = \begin{cases} -3 & \text{เมื่อ } x \le -1 \\ 1 & \text{เมื่อ } -1 < x \le 2 \\ 4 & \text{เมื่อ } 2 < x \end{cases}$$

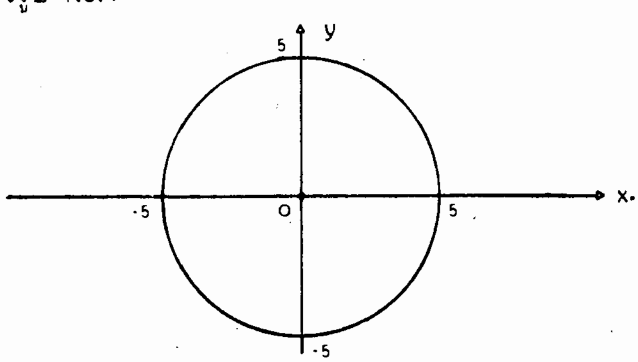
จะเห็นว่า x คือจำนวนจริงทั้งหมด ส่วน y มี 3 ค่า คือ -3, 1 และ 4 ดังนั้น โดเมนของ g คือ $(-\infty, \infty)$ ส่วนเรนจ์ของ g คือ $\{-3, 1, 4\}$ ดังรูป 1.5.3



รูป 1.5.3

ตัวอย่าง 1.5.4 จงพิจารณาเซต $g = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 = 25\}$

วิธีทำ จะเห็นว่า g ไม่เป็นฟังก์ชัน เพราะว่าถ้า x อยู่ในช่วง (-5, 5) จะให้ค่า y สองค่า เช่น เมื่อ x = 3 จะได้ $y = \pm 4$ แสดงว่า y สองค่าสัมพันธ์กับค่า x หนึ่งค่า ดังนั้น g จึงไม่เป็นฟังก์ชัน ดังรูป 1.5.4



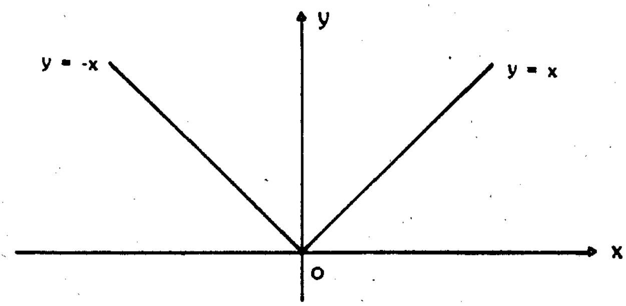
รูป 1.5.4

ตัวอย่าง 1.5.5 ให้ h เป็นฟังก์ชันซึ่งนิยามโดย

$$y = |x|.$$

วิธีทำ จะเห็นว่า x เป็นจำนวนจริงใด ๆ ก็ได้ แต่ y จะเป็นค่าลบไม่ได้ ดังนั้นโดเมนของ h คือ $(-\infty, \infty)$ และเรนจ์ของ h คือ $[0, \infty)$ จาก $y = |x|$ เราสามารถเขียนใหม่ได้

$$y = \begin{cases} x & \text{เมื่อ } x \geqslant 0 \\ -x & \text{เมื่อ } x < 0 \end{cases}$$



รูป 1.5.5

ตัวอย่าง 1.5.6 ให้ h เป็นฟังก์ชันซึ่งนิยามโดย

$$y = \frac{x^2 - 9}{x - 3}$$

จงหาโดเมน เรจน์ และกราฟ ของฟังก์ชัน

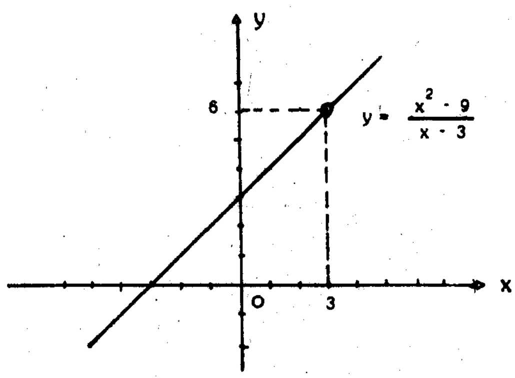
วิธีทำ จะเห็นว่า ถ้า $x = 3$ จะได้ $y = \frac{0}{0}$ ซึ่งไม่มีความหมาย เพราะเราไม่มีการหารด้วย 0
ดังนั้นโดเมนของ h คือจำนวนจริงทั้งหมดยกเว้น 3

แต่ $y = \frac{x^2 - 9}{x - 3} = \frac{(x - 3)(x + 3)}{x - 3}$

ดังนั้นเมื่อ $x \neq 3$ เราจะได้

$$y = x + 3$$

จะเห็นว่า y เป็นจำนวนจริงทั้งหมด ยกเว้น 6 เพราะ $x \neq 3$
ดังนั้นเรนจ์ของ h คือ จำนวนจริงทั้งหมดยกเว้น 3
ฉะนั้นกราฟของ h คือจุดทุกจุดบนเส้นตรง $y = x + 3$ ยกเว้นจุด (3, 6) ดังรูป 1.5.6



รูป 1.5.6

ดังได้กล่าวแล้วว่าฟังก์ชัน คือ กฎเกณฑ์ซึ่งทำให้เราสามารถหาค่าของ y หรือ $f(x)$ ได้ เมื่อกำหนดค่าของตัวแปรอิสระ x ให้ ดังนั้นสำหรับฟังก์ชัน

$$f(x) = x^2 - 5$$

คือกฎเกณฑ์ซึ่งทำให้เราหาค่าของฟังก์ชัน f ได้ โดยการยกกำลังสองตัวแปรอิสระ แล้วลบออกด้วย 5 ถ้าเราทำตามกฎดังกล่าวนี้ จะได้

$$f(3) = 3^2 - 5 = 4$$

$$\text{และ} \quad f(x+1) = (x+1)^2 - 5 = x^2 + 2x + 1 - 5 = x^2 + 2x - 4$$

จะเห็นว่า เมื่อค่าของตัวแปรอิสระเปลี่ยนแปลงจาก x เป็น $x + 1$ แล้ว ค่าของฟังก์ชันจะเปลี่ยนจาก $x^2 - 5$ เป็น $x^2 + 2x - 4$ นั่นคือเปลี่ยนไปเท่ากับ $(x^2 - 5) - (x^2 + 2x - 4) = 2x - 1$ นั่นเอง

ในทางคณิตศาสตร์เรามักใช้สัญญลักษณ์ $\triangle$ (delta) แทน "ค่าที่เปลี่ยนแปลงไป" เช่น $\triangle x$ แทนค่าของ x ที่เปลี่ยนไป ถ้าตัวแปรอิสระเปลี่ยนจาก x เป็น $x + 1$ จะได้ $\triangle x = 1$ ในทำนองเดียวกัน $\triangle y$ แทนค่าของ y ที่เปลี่ยนแปลงไป ดังนั้นเมื่อ $\triangle x = 1$ จะได้ $\triangle y = 2x - 1$ เป็นต้น

ตัวอย่าง 1.5.7 ให้ f เป็นฟังก์ชันซึ่งนิยามโดย

$$f(x) = x^2 + 3x - 4$$

จงหา $f(0)$, $f(-2)$ และ $f(x + \triangle x)$

วิธีทำ เนื่องจาก $f(x) = x^2 + 3x - 4$

ดังนั้น

$$f(0) = 0^2 + 3\cdot 0 - 4 = -4$$

$$f(-2) = (-2)^2 + 3(-2) - 4 = -6$$

$$\begin{aligned} f(x + \triangle x) &= (x + \triangle x)^2 + 3(x + \triangle x) - 4 \\ &= x^2 + 2x\triangle x + (\triangle x)^2 + 3x + 3\triangle x - 4 \\ &= x^2 + (2\triangle x + 3)x + (\triangle x)^2 + 3\triangle x - 4 \end{aligned}$$

ตัวอย่าง 1.5.8 ให้ $g(x) = \sqrt{3x-1}$ จงหา $\dfrac{g(x+h) - g(x)}{h}$ เมื่อ $h \neq 0$

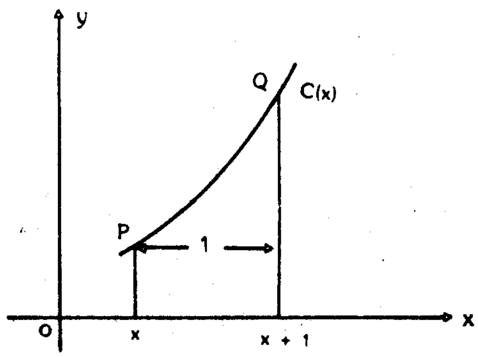
วิธีทำ

$$\begin{aligned} \frac{g(x+h) - g(x)}{h} &= \frac{\sqrt{3(x+h)-1} - \sqrt{3x-1}}{h} \\ &= \frac{(\sqrt{3x+3h-1} - \sqrt{3x-1})(\sqrt{3x+3h-1} + \sqrt{3x-1})}{h(\sqrt{3x+3h-1} + \sqrt{3x-1})} \\ &= \frac{(3x+3h-1) - (3x-1)}{h(\sqrt{3x+3h-1} + \sqrt{3x-1})} \end{aligned}$$

$$= \frac{3h}{h(\sqrt{3x+3h-1}+\sqrt{3x-1})}$$

$$= \frac{3}{\sqrt{3x+3h-1}+\sqrt{3x-1}}$$

ตัวอย่าง 1.5.9 ให้ $C(x) = 100 + 6x + 0.01x^2$ เป็นฟังก์ชันของค่าใช้จ่ายในการผลิตสินค้าต่อ x หน่วย หมายความว่าถ้าเราต้องการผลิตสินค้า x หน่วย จะต้องเสียค่าใช้จ่ายทั้งหมดเท่ากับ $C(x)$ บาท รูป 1.5.8 คือกราฟของฟังก์ชัน $C(x)$



รูป 1.5.8

$C(x)$ คือค่าใช้จ่ายในการผลิตสินค้า x หน่วย

$C(x + 1)$ คือค่าใช้จ่ายในการผลิตสินค้า $x + 1$ หน่วย

ให้ $S(x) = C(x + 1) - C(x)$

$= [100 + 6(x + 1) + 0.01(x+1)^2] - [100 + 6x + 0.01x^2]$

$= (100 + 6x + 6 + 0.01x^2 + 0.02x + 0.01) - (100 + 6x + 0.01x^2)$

$= 0.02x + 6.01$

จะเห็นว่า $S(x)$ คือค่าใช้จ่ายที่จะต้องจ่ายเพิ่มขึ้นถ้าเราเพิ่มการผลิต จาก x หน่วย เป็น $x + 1$ หน่วย นั่นคือ ในการผลิตสินค้าหน่วยที่ $x + 1$ จะต้องเสียค่าใช้จ่าย $0.02x + 6.01$ บาท เช่นค่าใช้จ่ายในการผลิตสินค้าหน่วยที่ 101 เป็นเงินเท่ากับ

$$S(100) = 0.02(100) + 6.01 = 8.01$$

เราจะเรียก $S(100)$ ว่า marginal cost ของสินค้าหน่วยที่ 101

ดังนั้น $S(x)$ คือ marginal cost ของสินค้าหน่วยที่ $x + 1$

แบบฝึกหัด 1.5

ในข้อ 1 - 10 จงหาโดเมนและเรนจ์ของฟังก์ชันที่กำหนดให้พร้อมทั้งเขียนกราฟของฟังก์ชันประกอบด้วย

1. $f = \{(x, y) \mid y = 3x - 1\}$
2. $g = \{(x, y) \mid y = x^2 + 2\}$
3. $F = \{(x, y) \mid y = 3x^2 - 6\}$
4. $G = \{(x, y) \mid y = \sqrt{x + 1}\}$
5. $h = \{(x, y) \mid y = \sqrt{3x - 4}\}$
6. $f = \{(x, y) \mid y = 4 - x^2\}$
7. $g = \{(x, y) \mid y = \sqrt{x^2 - 4}\}$
8. $H = \{(x, y) \mid y = |x - 3|\}$
9. $\phi = \{(x, y) \mid y = |3x + 2|\}$
10. $F = \{(x, y) \mid y = \frac{4x^2 - 1}{2x + 1}\}$

ในข้อ 11 - 26 จงหาโดเมนและเรนจ์ของฟังก์ชันที่กำหนดให้พร้อมทั้งเขียนกราฟประกอบ

11. $G : y = \begin{cases} -2 & \text{ถ้า } x \leq 3 \\ 2 & \text{ถ้า } 3 < x \end{cases}$

12. $h : y = \begin{cases} -4 & \text{ถ้า } x < -2 \\ -1 & \text{ถ้า } -2 \leq x \leq 2 \\ 3 & \text{ถ้า } 2 < x \end{cases}$

13. $f : y = \begin{cases} 2x - 1 & \text{ถ้า } x \neq 2 \\ 0 & \text{ถ้า } x = 2 \end{cases}$

14. $: y = \begin{cases} x + 5 & \text{ถ้า } x < -5 \\ \sqrt{25 - x^2} & \text{ถ้า } -5 \leq x \leq 5 \\ x - 5 & \text{ถ้า } 5 < x \end{cases}$

15. $H : y = \begin{cases} x^2 - 4 & \text{ถ้า } x < 3 \\ 2x - 1 & \text{ถ้า } 3 \leq x \end{cases}$

16. $h : y = \begin{cases} 6x + 7 & \text{ถ้า } x \leq -2 \\ 4 - x & \text{ถ้า } -2 < x \end{cases}$

17. $F : y = \frac{(x + 1)(x^2 + 3x - 10)}{x^2 + 6x + 5}$
18. $G : y = \frac{(x^2 + 3x - 4)(x^2 - 5x + 6)}{(x^2 - 3x + 2)(x - 3)}$
19. $f : y = \sqrt{x^2 - 3x - 4}$
20. $h : y = \sqrt{6x^2 - 5x - 4}$
21. $g : y = \frac{x^3 - 2x^2}{x - 2}$
22. $f : y = \frac{x^3 + 3x^2 + x + 3}{x + 3}$
23. $h : y = \frac{x^3 + 5x^2 - 6x - 30}{x + 5}$
24. $F : y = \frac{x^4 + x^3 - 9x^2 - 3x + 18}{x^2 + x - 6}$
25. $f : y = |x| + |x - 1|$
16. $g : y = |x| \cdot |x - 1|$

27. ให้ $f(x) = 2x^2 + 5x - 3$ จงหา

27.1 $f(-2)$	27.2 $f(-1)$	27.3 $f(0)$
27.4 $f(3)$	27.5 $f(n + 1)$	27.6 $f(2x^2)$
27.7 $f(x^2 - 3)$	27.8 $f(x + h)$	27.9 $f(x) + f(n)$

27.10 $\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$, $h \neq 0$

28. ให้ $g(x) = 3x^2 - 4$ จงหา

28.1 $g(-4)$ 28.2 $g(\frac{1}{2})$ 28.3 $g(x^2)$

28.4 $g(3x^2 - 4)$ 28.5 $g(x - h)$ 28.6 $g(x) - g(h)$

28.7 $\frac{g(x+h)-g(x)}{h}$, $h \neq 0$

29. ให้ $F(x) = \sqrt{2x+3}$ จงหา

29.1 $F(-1)$ 29.2 $F(4)$ 29.3 $F(\frac{1}{4})$

29.4 $F(30)$ 29.5 $F(2x + 3)$ 29.6 $\frac{F(x+h)-F(x)}{h}$, $h \neq 0$

30. ให้ $G(x) = \sqrt{2x^2+1}$ จงหา

30.1 $G(-2)$ 30.2 $G(0)$ 30.3 $G(\frac{1}{5})$

30.4 $G(\frac{4}{7})$ 30.5 $G(2x^2 - 1)$ 30.6 $\frac{G(x+h)-G(x)}{h}$, $h \neq 0$

31. ถ้าค่าใช้จ่ายในการผลิตสินค้า x หน่วย เป็นเงิน $C(x) = 50 + x + 0.1x^2$ จงหา marginal cost ของสินค้าหน่วยที่ $x + 1$ และหน่วยที่ 11

1.6 พีชคณิตของฟังก์ชัน ชนิดของฟังก์ชัน และการประยุกต์

พิจารณาการบวก การลบ การคูณ และการหารของฟังก์ชัน เราเรียกฟังก์ชันที่เกิดขึ้นเหล่านี้ว่า ผลรวม ผลต่าง ผลคูณ และผลหาร ของฟังก์ชันเดิม ซึ่งมีนิยามดังนี้

นิยาม 1.6.1 : กำหนดให้ f และ g เป็นฟังก์ชัน 2 ฟังก์ชัน

(1) ผลรวมของ 2 ฟังก์ชัน ซึ่งเป็นฟังก์ชันนิยาม โดย

$$(f+g)(x) = f(x)+g(x)$$

(2) ผลต่างของ 2 ฟังก์ชัน แทนด้วย $f-g$ ซึ่งเป็นฟังก์ชันและนิยามโดย

$$(f-g)(x) = f(x)-g(x)$$

(3) ผลคูณของ 2 ฟังก์ชัน แทนด้วย $f \cdot g$ ซึ่งเป็นฟังก์ชันและนิยามโดย

$$(f \cdot g)(x) = f(x) \cdot g(x)$$

(4) ผลหารของ 2 ฟังก์ชัน แทนด้วย $\frac{f}{g}$ ซึ่งเป็นฟังก์ชัน และนิยามโดย

$$\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)} \quad ; \ g(x) \neq 0$$

ในแต่ละกรณี โดเมน (domain) ของฟังก์ชัน คือค่าของ x ทั้งหลายที่อยู่ในโดเมนของฟังก์ชัน f และ g ยกเว้นในกรณีที่ (4) ไม่รวมค่าของ x ซึ่ง $g(x) = 0$

ตัวอย่าง 1.6.1 กำหนดให้ f เป็นฟังก์ชันนิยามโดย

$$f(x) = \sqrt{x-2}$$

และ

$$g(x) = 2x+1$$

จงหา 1. $(f+g)(x)$

2. $(f-g)(x)$

3. $(f \cdot g)(x)$

4. $\left(\frac{f}{g}\right)(x)$

วิธีทำ

1. $$(f+g)(x) = f(x)+g(x) = \sqrt{x-2} + 2x+1$$

2. $$(f-g)(x) = f(x)-g(x) = \sqrt{x-2} - 2x-1$$

3. $$(f \cdot g)(x) = f(x) \cdot g(x) = \sqrt{x-2}\,(2x+1)$$

4. $\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$

$= \frac{\sqrt{x-2}}{2x+1}$

โดเมนของ f คือ $[2, \infty)$ และ โดเมนของ g คือ R ดังนั้นในข้อ (1), (2) และ (3) โดเมนของผลลัพธ์คือ $[2, \infty)$ สำหรับข้อ (4) ส่วนจะเป็นศูนย์เมื่อ $x = -\frac{1}{2}$ แต่ $-\frac{1}{2} \notin [2, \infty)$ ดังนั้น โดเมนของข้อ (4) ยังคงเป็น $[2, \infty)$

หมายเหตุ ผลคูณของ f และ f แทนด้วย f^2 ตัวอย่างเช่น $f(x) = 3x$ ดังนั้น f^2 เป็นฟังก์ชัน และ

$$f^2(x) = (3x) \cdot (3x) = 9x^2$$

ฟังก์ชันประกอบ (Composite Functions)

นิยาม 1.6.2 : กำหนดให้ f และ g เป็นฟังก์ชัน 2 ฟังก์ชัน ฟังก์ชันประกอบของ f และ g เขียนแทนด้วย fog และนิยามโดย

$$(f\circ g)(x) \quad f(g(x))$$

โดเมนของ fog คือ เซ็ตของ x ใด ๆ ในโดเมนของ g ซึ่ง g(x) อยู่ในโดเมนของ f

ตัวอย่าง 1.6.2 กำหนดให้ $f(x) = \sqrt{x}$ และ $g(x) = 2x - 3$

จงหา fog และ โดเมนของ fog

วิธีทำ โดเมนของ f คือ $[0, \infty)$ โดเมนของ g คือ R (จำนวนจริง)

$$(f\circ g)(x) = f(g(x))$$
$$= f(2x-3)$$
$$= \sqrt{2x-3}$$

โดเมนของ fog คือเซ็ตของจำนวนจริง ซึ่ง $2x - 3 \geq 0$ หรือมีค่าเท่ากับ $[\frac{3}{2}, \infty)$

ตัวอย่าง 1.6.3 กำหนดให้ $f(x) = \sqrt{x}$ และ $g(x) = x^2 - 1$

จงหา 1. fof

2. gog

3. fog

4. gof

และหาโดเมนของฟังก์ชันประกอบในแต่ละข้อ

วิธีทำ โดเมนของ f คือ $[0, \infty)$ และ โดเมนของ g คือ $(-\infty, \infty)$

1. $(f\circ f)(x) = f(f(x)) = f(\sqrt{x})$

$= \sqrt{\sqrt{x}}$

$= \sqrt[4]{x}$

โดเมนของ fof คือ $[0, \infty)$

2. $(g \circ g)(x) = g(g(x)) = g(x^2 - 1)$

$= (x^2 - 1)^2 - 1$

$= x^4 - 2x^2$

โดเมนของ $g \circ g$ คือ $(-\infty, \infty)$

3. $(f \circ g)(x) = f(g(x)) = f(x^2 - 1)$

$= \sqrt{x^2 - 1}$

โดเมนของ $f \circ g$ คือ $(-\infty, -1] \cup [1, \infty)$ หรือมีค่าเท่ากับทุกจำนวนจริง x ซึ่งไม่อยู่ใน $(-1, 1)$

4. $(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(\sqrt{x})$

$= (\sqrt{x})^2 - 1$

$= x - 1$

พิจารณา $(g \circ f)(x) = x - 1$ จะได้ โดเมนคือ R ซึ่งไม่จริง เพราะว่าโดเมนของ $g \circ f$ ตามนิยามคือ ค่า x ซึ่งอยู่ในโดเมนของ f โดยที่ $f(x)$ อยู่ในโดเมนของ g ดังนั้น โดเมนของ $g \circ f$ คือ $[0, \infty)$

ถ้าพิสัย (range) ของฟังก์ชัน f เป็นจำนวนจริงเพียงค่าเดียว แล้วเรียก f เป็นฟังก์ชันคงที่ (constant function) นั่นคือ $f(x) = c$ เป็นฟังก์ชันคงที่ สำหรับ c เป็นจำนวนจริงใด ๆ กราฟของมันจะเป็นเส้นตรงซึ่งขนานและห่างจากแกน x เป็นระยะ c หน่วย

ฟังก์ชัน f กำหนดโดย

$$f(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + \dots\dots\dots + a_{n-1}x + a_n$$

โดยที่ n เป็นจำนวนเต็มบวก และ $a_0, a_1, a_2, \dots\dots\dots, a_n$ เป็นเลขจำนวนจริง และ $a_0 \neq 0$ จะเรียก f ว่าเป็นฟังก์ชันโพลีโนเมียล (polynomial function) ดีกรีที่ n ตัวอย่างเช่น

$$f(x) = 3x^5 - x^2 + 7x - 1$$

เป็นโพลีโนเมียลดีกรี 5

ถ้าดีกรีของฟังก์ชันโพลีโนเมียล เป็น 1 แล้ว ฟังก์ชันนี้เรียกว่า ฟังก์ชันเชิงเส้น (linear function) ถ้าดีกรีเป็น 2 เรียกว่าฟังก์ชันกำลังสอง (quadratic function) และถ้าดีกรีเป็น 3 เรียกว่าฟังก์ชันกำลังสาม (cubic function) เช่น

$f(x) = 2x - 1$ เป็นฟังก์ชันเชิงเส้น

$f(x) = 1 - 3x + 2x^2$ เป็นฟังก์ชันกำลังสอง

$f(x) = 3x^3 - 1$ เป็นฟังก์ชันกำลังสาม

ถ้าดีกรีของโพลีโนเมียลเป็นศูนย์ ฟังก์ชันนี้จะเป็นฟังก์ชันคงที่ โดยทั่วไปฟังก์ชันเชิงเส้นจะเขียนอยู่ในรูป

$$f(x) = mx + b$$

เมื่อ m, b เป็นค่าคงที่ และ $m \neq 0$ กราฟของฟังก์ชันนี้เป็นเส้นตรง มี m เป็นความชัน และ b เป็นระยะแกนตัด y

ในกรณีที่ $f(x) = x$ จะเรียกฟังก์ชันนี้ว่า "ฟังก์ชันเอกลักษณ์" (Identity function)" และฟังก์ชัน

$$f(x) = ax^2 + bx + c$$

เขียนแทนรูปทั่วไปของฟังก์ชันกำลังสอง เมื่อ a, b และ c เป็นค่าคงที่ และ $a \neq 0$

ถ้าฟังก์ชันใด อยู่ในรูปผลหารของโพลีโนเมียลฟังก์ชันสองฟังก์ชันแล้ว จะเรียกฟังก์ชันนี้ว่า "ฟังก์ชันตักยะ (rational function)" เช่น

$$f(x) = \frac{x^3 - x^2 + 5}{x^2 - 9}$$

เป็นฟังก์ชันตักยะซึ่งมีโดเมนคือ เซ็ตของจำนวนจริงไม่รวม 3 และ -3

ฟังก์ชันพีชคณิต (Algebraic function) คือฟังก์ชันซึ่งเกิดจากการกระทำโดยเครื่องหมายทางพีชคณิตจำนวนนับได้ถ้วนต่อฟังก์ชันเอกลักษณ์ และฟังก์ชันคงที่ เครื่องหมายพีชคณิตประกอบด้วย เครื่องหมาย บวก ลบ คูณ หาร ยกกำลัง และถอดรูท ตัวอย่างของฟังก์ชันพีชคณิต คือ

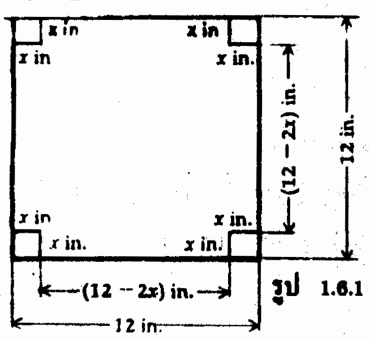
$$f(x) = \frac{(x^2 - 3x + 1)^3}{\sqrt{x^4 + 1}}$$

นอกจากฟังก์ชันพีชคณิต ยังมีฟังก์ชันที่ควรพิจารณาในแคลคูลัสเบื้องต้น คือ ฟังก์ชันอดิศัย (Trancendental function) ตัวอย่างของฟังก์ชันอดิศัย คือ ฟังก์ชันลอการิทึม (logarithm function) ฟังก์ชันเอกโพเนนเชียล (exponential function) ซึ่งจะกล่าวในบทต่อไป

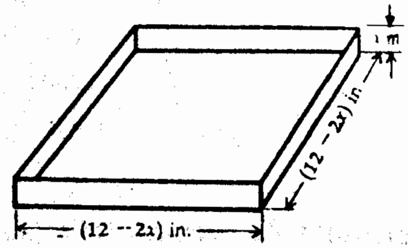
ตัวอย่าง 1.6.4 ผู้ผลิตกล่องกระดาษแข็งต้องการจะทำกล่องแบบเปิดด้านบนจากกระดาษแข็งชิ้นหนึ่งซึ่งมีพื้นที่เป็น 12 x 12 ตารางนิ้ว โดยตัดมุมทั้งสี่ออกเป็นสี่เหลี่ยมจตุรัสเท่า ๆ กัน จงหาปริมาตรของกล่องในรูปของฟังก์ชันของความยาวด้านของสี่เหลี่ยมจตุรัสที่ตัดออก และหาโดเมนของฟังก์ชันนั้นด้วย

วิธีทำ ให้ x = ความยาวด้านของสี่เหลี่ยมจตุรัสที่ตัดออกมีหน่วยเป็นนิ้ว

จำนวนนิ้วของด้านทั้งสามของกล่องคือ x ,(12 – 2x) และ (12 – 2x) รูปที่ 1.6.1 แสดงชิ้นกระดาษแข็งที่โจทย์กำหนดให้ และรูป 1.6.2 แสดงรูปของกล่อง



รูป 1.6.1



รูป 1.6.2

ให้ $V(x)$ แทนปริมาตรของกล่องมีหน่วยเป็นลูกบาศก์นิ้ว จะได้ว่า

$$V(x) = x(12-2x)(12-2x) \quad (1.6.1)$$

หรือ

$$V(x) = 144x - 48x^2 + 4x^3$$

จากสมการ (1.6.1) เราพบว่า $V(0) = 0$ และ $V(6) = 0$ เพราะฉะนั้นจะเห็นได้ว่าค่าของ x จะอยู่ระหว่าง 0 และ 6 ดังนั้นโดเมนของ V คือช่วงเปิด $(0, 6)$

ในบทที่ 4 จะศึกษาวิธีหาค่าของ x ซึ่งทำให้กล่องมีปริมาตรมากที่สุดเท่าที่จะเป็นไปได้

ตัวอย่าง 1.6.5 ผู้ผลิตนาฬิกา สามารถผลิตนาฬิกาชนิดหนึ่งราคาต้นทุน 150 บาทต่อเรือน ผู้ผลิตคาดว่าถ้าราคาขายของนาฬิกาชนิดนี้เป็น x บาทต่อเรือน และจำนวนของนาฬิกาที่ขายได้ต่อสัปดาห์ คือ $(350 - x)$ เรือน

1. จงหากำไรต่อสัปดาห์ในรูปของฟังก์ชันของ x

2. จากคำตอบ ข้อ 1. จงหากำไรต่อสัปดาห์ ถ้าขายนาฬิกาเรือนละ 300 บาท

วิธีทำ (1) กำไรหาได้โดยเอารายได้ลบต้นทุนทั้งหมด ให้ R บาท เป็นรายได้ต่อสัปดาห์ เพราะว่า รายได้คือผลคูณระหว่างราคานาฬิกาแต่ละเรือนกับจำนวนนาฬิกาที่ขาย เราจะได้

$$R = x(350 - x) \quad (1.6.2)$$

ให้ C บาท เป็นราคาต้นทุนของนาฬิกาทั้งหมดซึ่งขายได้ในแต่ละสัปดาห์ เพราะว่าราคาต้นทุนทั้งหมดคือ ผลคูณของราคาต้นทุนแต่ละเรือนกับจำนวนของนาฬิกาที่ขายได้ ดังนั้นจะได้ว่า

$$C = 150(350 - x) \quad (1.6.3)$$

ให้ $P(x)$ บาท คือกำไรต่อสัปดาห์ ดังนั้น

$$\begin{aligned} P(x) &= R - C \\ &= x(350-x) - 150(350-x) \\ &= (350-x)(x-150) \quad (1.6.5) \end{aligned}$$

(2) จำนวนกำไรต่อสัปดาห์ ถ้าราคาขายเป็น 300 บาทต่อเรือน คือ $P(300)$ จาก (5) จะได้

$$\begin{aligned} P(300) &= (350-300)(300-150) \\ &= 50 \times 150 \\ &= 22500 \end{aligned}$$

นั่นคือกำไรต่อสัปดาห์ เป็น 22,500 บาท เมื่อขายนาฬิกาเรือนละ 300 บาท

ใน 2 ตัวอย่างต่อไปนี้ ประกอบด้วย 2 สมการซึ่งเกี่ยวข้องกับตัวแปรตาม (dependent variable) 1 ตัว และตัวแปรต้น (independent variables) 2 ตัว การแก้ปัญหาแบบนี้ จะ

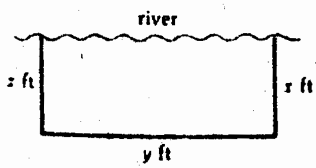
จัดตัวแปรตามให้อยู่ในรูปของฟังก์ชันของตัวแปรต้นตัวหนึ่ง โดยการกำจัดตัวแปรต้นอีกตัวหนึ่งออกจากสมการทั้งสองนั้น

ตัวอย่าง 1.6.6 ในการสร้างรั้วล้อมรอบสนามหญ้ารูปสี่เหลี่ยมผืนผ้าซึ่งอยู่ริมฝั่งแม่น้ำ ยกเว้นด้านที่ติดกับแม่น้ำ ราคาวัสดุที่ใช้สร้างรั้วเป็น 80 บาทต่อความยาว 1 ฟุต สำหรับสองด้าน และ 120 บาทต่อความยาว 1 ฟุต สำหรับด้านซึ่งขนานกับแม่น้ำ ค่าใช้จ่ายทำรั้วทั้งหมดเป็น 36,000 บาท

1. ถ้า x ฟุต เป็นความยาวของปลายสนาม จงบอกขนาดพื้นที่ของสนามในรูปของฟังก์ชัน ของ x

2. จงหาโดเมนของฟังก์ชันผลลัพธ์

วิธีทำ



รูป 1.6.3

ให้	x	=	ความยาวของด้านปลายของสนามมีหน่วยเป็นฟุต
	y	=	ความยาวของด้านขนานกับแม่น้ำมีหน่วยเป็นฟุต
	A	=	พื้นที่ของสนาม มีหน่วยเป็นตารางฟุต
ดังนั้น	A	=	xy (1.6.6)

เพราะว่าราคาของวัสดุที่ใช้ด้านปลายสนามแต่ละด้านเป็น 80 บาทต่อ 1 ฟุต และความยาวด้านปลายเป็น x ฟุต ค่าทำรั้วแต่ละด้านเป็น 80x ในทำนองเดียวกัน ค่าทำรั้วด้านขนานกับแม่น้ำเป็น 120y บาท เพราะฉะนั้นค่าทำรั้วทั้งสามด้าน

$$80x + 80x + 120y = 36{,}000 \qquad (1.6.7)$$

แก้สมการ (1.6.7) หาค่า y ในเทอมของ x จะได้

$$120y = 36{,}000 - 160x$$

$$y = 300 - \frac{4}{3}x \qquad (1.6.8)$$

แทนค่า y จากสมการ (1.6.8) ลงในสมการ (1.6.6)

$$A = x\left(300 - \frac{4}{3}x\right)$$

สมการนี้จะอยู่ในฟังก์ชันของ x แทนค่าฟังก์ชันนี้ด้วย f นั่นคือ $f(x)$ เป็นพื้นที่ของสนาม (หน่วยเป็นตารางฟุต) และ

$$f(x) = x\left(300 - \frac{4}{3}x\right)$$

2. เพราะว่าทั้ง x และ y ไม่เป็นค่าลบ เพราะฉะนั้นค่าน้อยที่สุดของ x และ y ที่สามารถเป็นได้ คือ 0 และเมื่อ $y = 0$

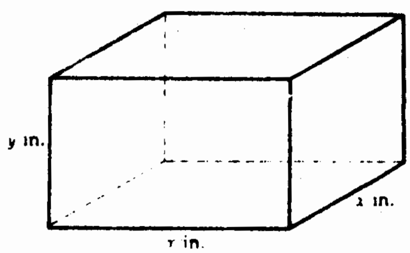
จากสมการ (1.6.7) จะได้ $x = 225$ ดังนั้น 225 จึงเป็นค่าที่มากที่สุดของ x เท่าที่สามารถกำหนดได้ ด้วยเหตุนี้ x จะมีค่าอยู่บนช่วงปิด $[0, 225]$ และช่วงปิดนี้ คือ โดเมนของ f

หมายเหตุ : ในบทที่ 4 จะพิจารณาตัวอย่างที่ 1.6.6 เพิ่มขึ้นอีก โดยจะศึกษาถึงวิธีการหาด้านกว้างและด้านยาวของสนาม ซึ่งจะทำให้ได้พื้นที่มากที่สุด ภายในวงเงินสร้างรั้ว 36,000 บาท

ตัวอย่าง 1.6.7 กล่องปิดใบหนึ่งมีฐานของกล่องเป็นรูปสี่เหลี่ยมจัตุรัสและมีปริมาตรเป็น 2,000 ลูกบาศก์นิ้ว ราคาวัสดุที่ใช้ทำด้านบนและด้านล่างของกล่อง คือ 3 บาทต่อตารางนิ้ว และ 1.50 บาท ต่อตารางนิ้ว สำหรับด้านข้างของกล่อง

1. ถ้า x เป็นความยาวของด้านของสี่เหลี่ยมจัตุรัสที่เป็นฐานมีหน่วยเป็นนิ้ว จงหาราคาวัสดุที่ใช้ในรูปของฟังก์ชันของ x มีหน่วยเป็นบาท

2. จงหาโดเมนของฟังก์ชันผลลัพธ์



รูป 1.6.4

วิธีทำ

ให้ x = ความยาวของด้านของสี่เหลี่ยมที่เป็นฐานของกล่องมีหน่วยเป็นนิ้ว

y = ความลึกของกล่องมีหน่วยเป็นนิ้ว

C = ราคาวัสดุที่ใช้ทำกล่องมีหน่วยเป็นบาท

พื้นที่ด้านบนและด้านล่างของกล่อง $= 2x^2$

และพื้นที่ด้านข้างของกล่อง $= 4xy$

ดังนั้นจะได้

$$C = 3(2x^2) + \frac{3}{2}(4xy) \qquad (1.6.9)$$

เพราะว่าปริมาตรของกล่องคือผลคูณของพื้นที่ของฐานกับความลึกของกล่อง

$$x^2y = 2{,}000 \qquad (1.6.10)$$

แก้สมการ (1.6.10) ให้ y อยู่ในเทอมของ x แล้วแทนค่าลงในสมการ (1.6.9)

$$C = 6x^2 + \frac{12,000}{x}$$

สมการนี้แสดงว่า C เป็นฟังก์ชันของ x ถ้าแทน C ด้วย f(x) นั่นคือ f(x) คือราคาวัสดุ มีหน่วยเป็นบาท

$$f(x) = 6x^2 + \frac{12,000}{x}$$

2. สังเกตว่า x มีค่าเป็นศูนย์ไม่ได้ เพราะว่า x เป็นตัวส่วนของเทอมที่สองทางขวาของสมการ ซึ่งนิยาม f(x) อย่างไรก็ตาม x สามารถเป็นเลขจำนวนบวกใด ๆ นั่นคือ โดเมนของ f คือ $(0, \infty)$

หมายเหตุ : ในบทที่ 4 จะศึกษาวิธีการทำกล่องให้ได้ขนาดที่มีราคาต้นทุนทำกล่องต่ำที่สุด

ตัวอย่าง 1.6.8 ในการวางแผนของร้านขายกาแฟ คาดว่าถ้ามีที่นั่ง 40 ถึง 80 ที่ จะได้กำไร 8 บาท ต่อ 1 ที่นั่ง ต่อวัน อย่างไรก็ตาม ถ้ามีที่นั่งมากกว่า 80 ที่ กำไรต่อที่ต่อวันจะลดลง 4 สตางค์ คูณกับจำนวนของที่นั่งที่มากกว่า 80 ที่นั่งขึ้นไป ถ้าให้ x เป็นจำนวนที่นั่ง ให้บอกจำนวนบาทที่กำไรทั้งหมดในแต่ละวันอยู่ในรูปของฟังก์ชันของ x กำหนดว่ากำไรไม่เป็นลบ

วิธีทำ กำหนดให้

x = จำนวนที่นั่ง

P(x) = จำนวนเงินที่ได้กำไรในแต่ละวัน

$$P(x) = 8x \; ; 40 \le x \le 80$$

เมื่อ $x > 80$

$$P(x) = x\{8 - 0.04\,(x - 80)\}$$

$$= 11.20x - 0.04x^2$$

ดังนั้นเราจะได้

$$P(x) = \begin{cases} 8x \; ; 40 \le x \le 80 \\ 11.20x - 0.04x^2 \; ; 80 < x \le 280 \end{cases}$$

ขอบเขตบน (upper bound) x = 280 หาได้จากสมการ $11.20x - 0.04x^2 = 0$ และเมื่อ $x > 280$ สมการ $11.20x - 0.04x^2$ เป็นลบ (แต่โจทย์กำหนดให้กำไรไม่เป็นลบ) ดังนั้น ค่า $x > 280$ จึงใช้ไม่ได้

จากนิยาม x เป็นจำนวนเต็ม ดังนั้น x จะเป็นจำนวนเต็มใด ๆ บนช่วงปิด [40, 280]

แบบฝึกหัด 1.6

จากแบบฝึกหัดข้อ 1 ถึง 10 ฟังก์ชัน f และ g ถูกนิยามมาให้ ในแต่ละปัญหานิยามฟังก์ชันดังต่อไปนี้ (ก) $f+g$ (ข) $f-g$ (ค) $f \cdot g$ (ง) $\frac{f}{g}$ (จ) $\frac{g}{f}$ (ฉ) fog (ช) gof จงหาโดเมนของฟังก์ชันผลลัพธ์ (resulting function) เหล่านี้

1.	$f(x) = x - 5$	;	$g(x) = x^2 - 1$
2.	$f(x) = \sqrt{x}$	;	$g(x) = x^2 + 1$
3.	$f(x) = \frac{x+1}{x-1}$	;	$g(x) = \frac{1}{x}$
4.	$f(x) = \sqrt{x}$	;	$g(x) = 4 - x^2$
5.	$f(x) = \sqrt{x}$	;	$g(x) = x^2 - 1$
6.	$f(x) = \|x\|$	;	$g(x) = \|x - 3\|$
7.	$f(x) = x^2 - 4$	;	$g(x) = 4x - 3$
8.	$f(x) = \sqrt{x+2}$	;	$g(x) = x^2 + 4$
9.	$f(x) = \frac{1}{x-3}$	;	$g(x) = \frac{x}{x+1}$
10.	$f(x) = \sqrt{x}$	;	$g(x) = \frac{1}{x^2}$

11. ผู้ผลิตกล่องดีบุกต้องการทำกล่องโดยใช้แผ่นดีบุกขนาด 8 x 15 ตารางนิ้ว ตัดพื้นที่สี่เหลี่ยมจัตุรัสที่มุมทั้งสี่ออกเท่า ๆ กัน แล้วพับด้านทั้งสี่ขึ้น

    (ก) ถ้า x เป็นความยาวของด้านของสี่เหลี่ยมจัตุรัสที่ถูกตัดออก มีหน่วยเป็นนิ้ว ให้บอกปริมาตรของกล่องใบนี้ที่อยู่ในรูปฟังก์ชันของ x

    (ข) หาโดเมนของฟังก์ชันผลลัพธ์ (resulting function)

12. ที่ดินรูปสี่เหลี่ยมผืนผ้าถูกล้อมรอบด้วยรั้ว และแบ่งครึ่งตรงกลางด้วยรั้วอีกอันหนึ่ง ถ้าราคาทำรั้วตรงกลางเป็น 2 บาทต่อ 1 ฟุต และค่าทำรั้วล้อมรอบที่ดินรูปสี่เหลี่ยมผืนผ้าเป็น 5 บาทต่อฟุต และราคาทำรั้วทั้งหมดเป็น 960 บาท

    (ก) ถ้า x เป็นความยาวของรั้วที่แบ่ง ให้บอกจำนวนของพื้นที่ที่อยู่ในรูปฟังก์ชันของ x

    (ข) หาโดเมนของฟังก์ชันผลลัพธ์

13. สนามรูปสี่เหลี่ยมผืนผ้ามีพื้นที่ 2,700 ตารางหลา ถูกสร้างรั้วล้อมรอบด้านทั้งสี่ และรั้วที่แบ่งครึ่งพื้นที่ผืนนี้ ราคาค่าทำรั้วตรงกึ่งกลางพื้นที่เป็น 4 บาทต่อ 1 หลา และค่าทำรั้วรอบด้านทั้งสี่เป็น 6 บาทต่อ 1 หลา

    (ก) ถ้า x เป็นความยาวของรั้วที่แบ่งครึ่งพื้นที่ให้บอกจำนวนบาทซึ่งเป็นค่าทำรั้วที่อยู่ในรูปฟังก์ชันของ x

(ข) หาโดเมนของฟังก์ชันผลลัพธ์

14. แท้งค์น้ำเปิดด้านบนรูปสี่เหลี่ยมผืนผ้า มีฐานเป็นสี่เหลี่ยมจัตุรัส และมีปริมาตรเป็น 125 ลูกบาศก์หลา ราคาต่อหนึ่งตารางหลาสำหรับด้านล่างเป็น 8 บาท และสำหรับด้านข้างเป็น 4 บาท

(ก) ถ้า x เป็นความยาวของด้านฐานมีหน่วยเป็นหลา จงบอกราคาของโลหะที่ใช้ทำเป็นบาทที่อยู่ในรูปฟังก์ชันของ x

(ข) หาโดเมนของฟังก์ชันผลลัพธ์

15. ช่างไม้คนหนึ่งสามารถทำตู้วางหนังสือราคาตู้ละ 20 บาท ถ้าช่างไม้ขายตู้วางหนังสือตู้ละ x บาท ประมาณว่าตู้วางหนังสือจะสามารถขายได้ 200 − 2x ตู้ต่อเดือน

(ก) จงบอกกำไรที่ช่างไม้ได้รับใน 1 เดือน ที่อยู่ในรูปฟังก์ชันของ x

(ข) ใช้ผลจากข้อ (ก) หากำไรตลอดเดือน ถ้าราคาขายของตู้วางหนังสือเป็น 65 บาท

16. บริษัทหนึ่งได้ประดิษฐ์เครื่องอิเลคโทรนิคออกวางตลาดเป็นสินค้าใหม่ ระหว่างปีแรกต้นทุนคงที่ (fixed costs) ของสินค้าใหม่เป็น 140,000 บาท และต้นทุนผลิตสินค้าใหม่แต่ละหน่วยเป็น 25 บาท ซึ่งราคานี้สามารถเปลี่ยนแปลงได้ (variable costs) ในระหว่างปีแรกราคาขายเป็น 65 บาทต่อหน่วย

(ก) ถ้า x คือจำนวนหน่วยที่ขายในปีแรก จงบอกกำไรปีแรกที่อยู่ในรูปฟังก์ชันของ x

(ข) ถ้าประมาณว่า 23,000 หน่วย ถูกขายในระหว่างปีแรก ใช้ผลลัพธ์จากข้อ (ก) หากำไรในปีแรก

(ค) จำนวนหน่วยที่จะขายได้ในปีแรก เพื่อว่าบริษัทจะไม่กำไรและขาดทุน

17. ต้นทุนคงที่ (fixed costs) ประจำเดือนของบริษัทผลิตรองเท้าเล่นสกีแห่งหนึ่งเป็น 4,200 บาท และต้นทุนผลิตรองเท้าเล่นสกีคู่ละ 55 บาท (ราคานี้เปลี่ยนแปลงได้) ราคาขายรองเท้าเล่นสกีคู่ละ 105 บาท

(ก) ถ้า x เป็นจำนวนรองเท้าเล่นสกีที่ขายได้ ในระหว่างเดือน ให้บอกกำไรในระหว่างเดือนเป็นบาทที่อยู่ในรูปฟังก์ชันของ x

(ข) ใช้ผลจากข้อ (ก) หากำไรในเดือนธันวาคม ถ้ารองเท้าเล่นสกีขายได้ 600 คู่ ในเดือนนั้น

(ค) รองเท้าเล่นสกีจะขายไปเท่าใดในระหว่างเดือนเพื่อว่าบริษัทจะไม่ขาดทุนหรือกำไร

18. ผู้ผลิตคนหนึ่งสามารถทำกำไรได้ 20 บาทต่อชิ้น ถ้าเขาผลิตไม่มากกว่า 800 ชิ้นต่อสัปดาห์ และกำไรต่อชิ้นจะลดลง 2 สตางค์ คูณกับสิ่งที่เขาผลิตมากกว่า 800 ชิ้น ถ้าให้ x เป็นจำนวนชิ้นที่เขาผลิตในแต่ละสัปดาห์ จงบอกกำไรของผู้ผลิตตลอดสัปดาห์เป็นบาทที่อยู่ในรูปฟังก์ชันของ x กำหนดว่ากำไรไม่มีค่าเป็นลบ

19. ในการจัดทัศนศึกษาของโรงเรียนแห่งหนึ่ง สามารถจัดอาหารและที่พักให้นักเรียนได้ 250 คน โดยทางโรงเรียนเรียกเก็บเงินคนละ 15 บาท ถ้าจำนวนนักเรียนที่ไปไม่มากกว่า 150 คน อย่างไรก็ตามเงินที่เก็บจากนักเรียนจะลดลงคนละ 5 สตางค์ คูณจำนวนนักเรียนที่ไปมากกว่า 150 คน จนกระทั่งเงินที่เก็บต่อคนเป็น 10 บาท ถ้า x เป็นจำนวนนักเรียนที่ไปเที่ยว จงบอกรายได้เป็นบาทที่อยู่ในรูปฟังก์ชันของ x

1.7 สมการอุปสงค์และอุปทาน Demand and Supply Equations

พิจารณาเหตุการณ์ที่มีผลต่อผู้ผลิต โดยเฉพาะตัวแปรคือราคาสินค้าและปริมาณความต้องการของสินค้า กำหนดให้ p เป็นราคาสินค้า 1 หน่วย มีหน่วยเป็นบาท และ x เป็นจำนวนหน่วยสินค้าที่ต้องการ

จากผลข้างต้นพบว่า จำนวนของสินค้าที่ต้องการในตลาดของผู้ซื้อ จะขึ้นอยู่กับราคาของสินค้า กล่าวคือ ขณะที่สินค้าราคาตก ผู้ซื้อจะมีความต้องการซื้อสินค้ามาก แต่เมื่อราคาสินค้าสูงขึ้น จะเป็นตรงกันข้ามคือ ผู้ซื้อจะมีความต้องการซื้อน้อยลง

สมการซึ่งกำหนดความสัมพันธ์ระหว่างจำนวนสินค้า x ที่ผู้ซื้อต้องการ กับราคาสินค้า p เรียกว่า สมการอุปสงค์ (demand equation) ซึ่งได้มาโดยใช้วิธีการทางสถิติต่อข้อมูลทางเศรษฐศาสตร์ และสามารถเขียนสมการได้ 2 แบบ คือ

$$p = f(x) \qquad (1.7.1)$$

หรือ

$$x = g(p) \qquad (1.7.2)$$

ฟังก์ชัน f ในสมการ (1.7.1) เรียกว่า "ฟังก์ชันราคา (price function)" และ f(x) บาทเป็นราคา 1 หน่วยสินค้า เมื่อ x หน่วยเป็นจำนวนสินค้าที่ผู้ซื้อต้องการฟังก์ชัน g ในสมการ (1.7.2) เรียกว่า "ฟังก์ชันอุปสงค์ (demand function)" และ g(p) เป็นจำนวนหน่วยของสินค้าซึ่งผู้ซื้อต้องการ ถ้า p เป็นราคาต่อ 1 หน่วยของสินค้า ตามปกติในทางเศรษฐศาสตร์ โดเมนของฟังก์ชันราคา และฟังก์ชันอุปสงค์ จะประกอบด้วยจำนวนที่ไม่เป็นลบ

กราฟของสมการอุปสงค์ เรียกว่า "เส้นโค้งอุปสงค์ (demand curve)" เมื่อเขียนเส้นโค้งอุปสงค์จะใช้แกนดิ่งแทนราคา และแกนนอนแทนจำนวนสินค้าที่ผู้ซื้อต้องการ เพราะว่าสมการอุปสงค์ที่กำหนดให้อาจจะใช้ได้กับค่าเฉพาะบางค่าของ x และ p ดังนั้น มีความจำเป็นที่ต้องจำกัดค่าของ x และ p ในช่วงปิด นั่นคือ $x \in \{0, a\}$ และ $p \in \{0, b\}$

ตัวอย่างเช่น พิจารณาสมการอุปสงค์

$$p^2 + 2x - 16 = 0 \qquad (1.7.3)$$

เพราะว่าโดยปกติในทางเศรษฐศาสตร์ตัวแปร x และ p จะไม่เป็นลบ เมื่อแก้สมการ (1.7.3) หาค่า p เราจะตัดค่า p ที่เป็นลบทิ้ง จึงได้

$$p = \sqrt{16 - 2x} \qquad (1.7.4)$$

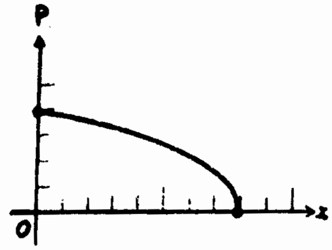
ซึ่งอยู่ในรูปของสมการ (1.7.1) ทั้งนี้ฟังก์ชันราคาสำหรับสมการอุปสงค์ (1.7.3) คือ ฟังก์ชัน f ซึ่ง

$$f(x) = \sqrt{16 - 2x}$$

แก้สมการ (1.7.3) หา x จะได้

$$x = 8 - \tfrac{1}{2}p^2 \qquad (1.7.5$$

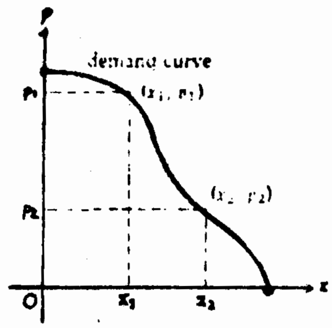
ซึ่ง x เป็นฟังก์ชันของ p เหมือนสมการ (1.7.2) และฟังก์ชันอุปสงค์เป็นฟังก์ชันของ p โดยที่ $g(p) = 8 - \frac{1}{2}p^2$ การเขียนเส้นโค้งอุปสงค์แสดงในรูป 1.7.1 กราฟถูกจำกัดในควอดแรนท์ที่ 1 (เพราะไม่ต้องการให้ค่า x และ p เป็นลบ) จากสมการ (1.7.4) พบว่า $p \le 4$ และ $16 - 2x \ge 0$ หรือ $x \le 8$ ดังนั้น $x \in [0, 8]$ และ $p \in [0, 4]$



รูป 1.7.1

ในการเพิ่มข้อจำกัดว่า x และ p ไม่เป็นลบภายใต้เหตุการณ์ปกติ จะกำหนดเงื่อนไขว่า ขณะที่ราคาต่อหน่วยสินค้าลดลงความต้องการสินค้าจะเพิ่มขึ้น และขณะที่ราคาต่อหน่วยสินค้าเพิ่มขึ้น ความต้องการซื้อสินค้าจะลดลง นั่นคือ

ถ้า p_1 บาท เป็นราคาต่อหน่วยของสินค้า x_1 หน่วย
และ p_2 บาท เป็นราคาต่อหน่วยของสินค้า x_2 หน่วย
แล้ว $x_2 > x_1$ ก็ต่อเมื่อ $p_2 < p_1$ ดูรูป 1.7.2



รูป 1.7.2

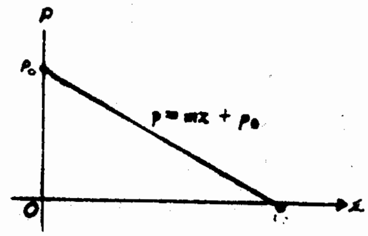
สมการอุปสงค์แบบที่ง่ายที่สุด คือ สมการเชิงเส้นซึ่งสามารถเขียนอยู่ในรูป

$$p = mx + p_0 \qquad (1.7.6)$$

โดยที่ $m < 0$ กราฟของสมการเส้นตรงนี้ส่วนหนึ่งจะอยู่ในควอดแรนท์ที่ 1 ซึ่งมีความชัน m และ p_0 เป็นจุดตัดของเส้นตรงบนแกน p ดูรูป 1.7.3 สังเกตว่า p_0 เป็นจำนวนบาทในราคาต่อหน่วยสูงสุดที่ลูกค้าจะจ่ายตามสมการอุปสงค์ (1.7.6) ถ้าแก้สมการ (1.7.6) เพื่อหาค่า x จะได้สมการในรูป

$$x = kp + x_0$$

โดยที่ $k < 0$ เพราะว่า $x = x_0$ เมื่อ $p = 0$, x_0 คือจำนวนหน่วยของปริมาณอุปสงค์ เมื่อราคาของสินค้าเท่ากับศูนย์ เมื่อ $k < 0$ หมายความว่า ความต้องการซื้อลดลงขณะที่ราคาสินค้าเพิ่มขึ้นจากศูนย์ และสินค้าสูญเสียภาวะอิสระ (free status)



รูป 1.7.3

ตัวอย่าง 1.7.1 บริษัทท่องเที่ยวแห่งหนึ่งรู้ว่าเมื่อราคาของการท่องเที่ยวต่อคนเป็น 60 บาท จำนวนตั๋วที่ขายโดยเฉลี่ยต่อการท่องเที่ยวครั้งหนึ่งตก 300 ใบ และเมื่อราคาเพิ่มขึ้น 100 บาท จำนวนตั๋วที่ขายโดยเฉลี่ยเป็น 180 ใบ ถ้าสมการอุปสงค์เป็นแบบเชิงเส้น จงหาสมการพร้อมทั้งวาดรูปของเส้นอุปสงค์

วิธีทำ

ให้ x = จำนวนตั๋วที่มีผู้ต้องการซื้อ และ

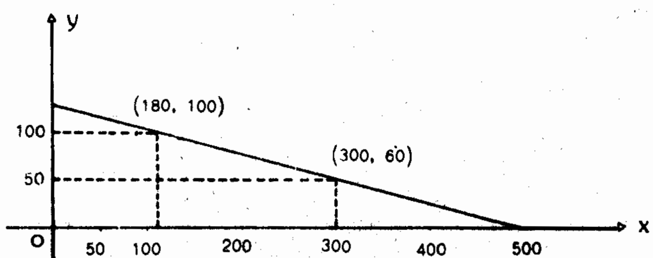
p = จำนวนบาทต่อตั๋ว 1 ใบ

เพราะว่า $x = 300$ เมื่อ $p = 60$ และ $x = 180$ เมื่อ $p = 100$ จุด (300, 60) และ (180, 100) จะอยู่บนเส้นตรงที่ต้องการหา ใช้จุด 2 จุดบนเส้นตรงนี้ หาค่าความชัน จะได้

$$p - 60 = \frac{100 - 60}{180 - 300}(x - 300)$$

$$x + 3p = 480$$

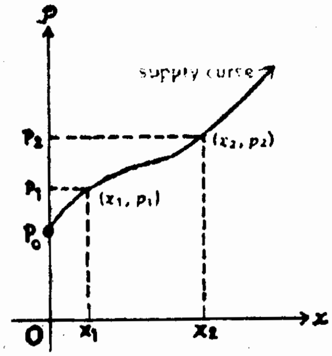
เพราะว่า $x \geq 0$ และ $p \geq 0$ เส้นโค้งอุปสงค์จะถูกจำกัดให้อยู่ในควอดแรนท์ที่ 1 เท่านั้น การเขียนเส้นโค้งอุปสงค์แสดงตามรูป 1.7.4



รูป 1.7.4

กำหนดว่า x เป็นจำนวนหน่วยที่แน่นอนของสินค้าที่ผลิตโดยผู้ผลิต และ p เป็นราคา 1

หน่วยสินค้า กำหนดว่ามีตัวแปรเพียง 2 ตัวเท่านั้น สมการอุปทาน (supply equation) คือสมการที่เกี่ยวข้องกับตัวแปรทั้งสองนี้ ตามปกติในทางเศรษฐศาสตร์ x และ p จะต้องไม่เป็นลบ และ $x_2 > x_1$ ก็ต่อเมื่อ $p_2 > p_1$ นั่นคือขณะราคาสินค้าที่ขายโดยผู้ผลิตมีราคาสูงขึ้น ผู้ผลิตจะเพิ่มการผลิตเพื่อรับผลประโยชน์จากราคาที่สูงขึ้น โดยวิธีเดียวกัน มีความโน้มเอียงที่จะลดจำนวนผลผลิต เมื่อราคาขายลดลง กราฟของสมการอุปทานเรียกว่า เส้นโค้งอุปทาน (supply curve) ดูตามรูป 1.7.5 ซึ่งแสดงการเขียนเส้นโค้งอุปทานในสภาพปกติ เมื่อ $x = 0$, $p = p_0$ เป็นจำนวนบาทในราคาต่อหน่วย ที่จะไม่มีสินค้าวางเมื่อราคาต่อหน่วยมากขึ้น ผู้ผลิตสินค้าจะผลิตสินค้าเข้าสู่ตลาดมากขึ้น

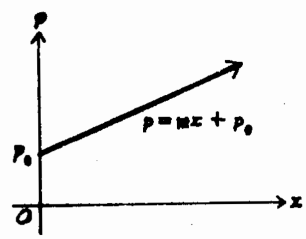


รูป 1.7.5

สมการอุปทานแบบที่ง่ายที่สุด คือสมการเชิงเส้น และสามารถเขียนอยู่ในรูป

$$p = mx + p_0$$

เมื่อ $m > 0$ ตามรูป 1.7.6 แสดงการเขียนกราฟของสมการซึ่งกราฟนี้ คือส่วนหนึ่งที่อยู่ในควอดแรนท์ที่ 1 ของเส้นตรงตัดแกน p ที่จุด p_0 และมีความชันเป็น m



รูป 1.7.6

ตัวอย่าง 1.7.2 ถ้าจะให้ขายโต๊ะแบบพิเศษชนิดหนึ่งในราคาไม่มากกว่า 2500 บาท จะทำให้ไม่มีโต๊ะวางขายในตลาด แต่ถ้าราคาโต๊ะเป็น 3500 บาท จะมีโต๊ะ 2000 ตัววางขายในตลาด จงหาสมการอุปทาน ถ้าเป็นสมการเชิงเส้น พร้อมทั้งเขียนเส้นโค้งอุปทาน

วิธีทำ กำหนดให้

x เป็นจำนวนโต๊ะที่ผลิตขาย และ

p เป็นราคาขายโต๊ะ 1 ตัว มีหน่วยเป็นบาท

เมื่อ $p = 2500$, $x = 0$ และ เมื่อ $p = 3500$, $x = 2000$ ดังนั้น จุด (0, 2500) และ (2000, 3500) อยู่บนเส้นโค้งอุปทาน ใช้จุดทั้ง 2 นี้หาความชัน เพื่อสร้างสมการเส้นตรง

สูตรสมการเส้นตรง

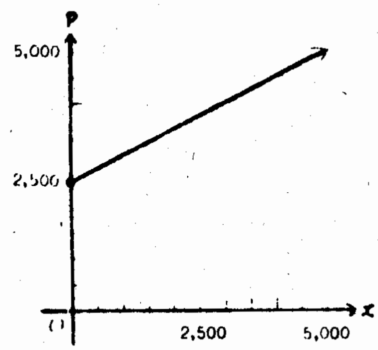
$$y - y_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x - x_1)$$

แทนค่า

$$p - 2500 = \frac{3500 - 2500}{2000 - 0}(x - 0)$$

$$p = \frac{1}{2}x + 2500$$

เขียนรูปของเส้นโค้งอุปทาน แสดงตามรูป 1.7.7

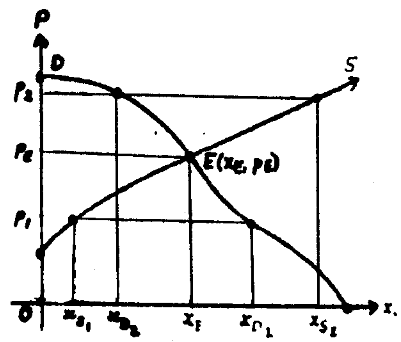


รูป 1.7.7

ในที่นี้จะเรียกบริษัททั้งหลายที่ผลิตสินค้าชนิดเดียวกันว่าอุตสาหกรรม (Industy) ตลาดสำหรับสินค้าเฉพาะประกอบด้วยอุตสาหกรรมและผู้ซื้อสินค้า (ซึ่งอาจประกอบด้วยฝ่ายธุรกิจ รัฐบาล หรือผู้ซื้อรายย่อย) สมการอุปทานของตลาดหาได้จากสมการอุปทานของทุก ๆ บริษัทในอุตสาหกรรม และสมการอุปสงค์ของตลาดหาได้จากสมการอุปสงค์ของผู้ซื้อทุกฝ่าย ต่อไปนี้จะแสดงวิธีการหาราคาสมดุลย์ (Equilibrium price) และ จำนวนสมดุลย์ (Equilibrium amount) ของสินค้าในตลาด

สมดุลย์ตลาด (Market equilibrium) เกิดขึ้นเมื่อปริมาณของสินค้าที่ผู้ซื้อต้องการเท่ากันกับปริมาณของสินค้าที่ผู้ผลิตต้องการขายในราคาเดียวกัน นั่นก็คือ เมื่อราคาของสินค้าที่ผู้ซื้อต้องการซื้อเท่ากับราคาของสินค้าที่ผู้ผลิตต้องการขาย เมื่อสมดุลย์ตลาดเกิดขึ้นเรียกปริมาณของสินค้าที่ผลิตว่า จำนวนสมดุลย์ (equilibrium amount) และราคาของสินค้าว่า ราคาสมดุลย์ (equilibrium price) จำนวนสมดุลย์และราคาสมดุลย์หาได้ โดยการแก้สมการอุปสงค์ของตลาด

และสมการอุปทานของตลาดตามรูป 1.7.8 แสดงให้เห็นกราฟอุปสงค์ของตลาดและอุปทานของตลาด คือ D และ S ตามลำดับ จุด E คือ จุดสมดุลย์ (point of equilibrium) และพิกัด (coordinate) ของจุดนี้ คือ x_E และ p_E โดยที่ x_E หน่วย คือจำนวนสมดุลย์ และ p_E บาท เป็นราคาสมดุลย์ ตามรูป 1.7.8 กำหนดราคาของสินค้าเป็น p_1 บาท ดังนั้น โรงงานจะต้องวางแผนขายสินค้า x_{S_1} หน่วย และผู้บริโภคจะวางแผนซื้อ x_{D_1} หน่วย ด้วยเหตุนี้จะเกิดการขาดแคลนสินค้า $(x_{D_1} - x_{S_1})$ หน่วย เป็นผลให้ราคาสินค้าสูงขึ้นเป็น p_E บาท และปริมาณการผลิตจะเพิ่มเป็น x_E หน่วย อย่างไรก็ตาม ถ้าราคาเป็น p_2 บาท ดังนั้นผู้ซื้อจะวางแผนซื้อเพียง x_{D_2} หน่วย และโรงงานจะวางแผนขาย x_{S_2} หน่วย ผลที่ตามมา ทางโรงงานจะมีสินค้าเหลือ $(x_{S_2} - x_{d_2})$ หน่วย และบังคับให้ราคาสินค้าลดไปเป็น p_E บาท และปริมาณสินค้าที่ผลิตลดลงเป็น x_E หน่วย



รูป 1.7.8

ตัวอย่าง 1.7.3 สมการอุปสงค์ของตลาดและสมการอุปทานของตลาดคือ

$$x^2 + p^2 + 2x - 24 = 0 \quad (1.7.7)$$

และ

$$2x - p + 2 = 0 \quad (1.7.8)$$

ตามลำดับ โดยที่ p เป็นราคาสินค้ามีหน่วยเป็นบาท และ 100x เป็นปริมาณสินค้า จงหาจำนวนสมดุลย์และราคาสมดุลย์ พร้อมทั้งเขียนกราฟ อุปสงค์และอุปทานบนแกนชุดเดียวกัน และแสดงจุดสมดุลย์

วิธีทำ จุดสมดุลย์หาได้ โดยการแก้สมการทั้งสองที่โจทย์กำหนดมาให้ จากสมการ (1.7.8) หาค่า $p = 2x + 2$ แล้วแทนค่าลงใน (1.7.7) จะได้

$$\begin{aligned} x^2 + (2x + 2)^2 + 2x - 24 &= 0 \\ x^2 + 4x^2 + 8x + 4 + 2x - 24 &= 0 \\ 5x^2 + 10x - 20 &= 0 \\ x^2 + 2x - 4 &= 0 \end{aligned}$$

ใช้สูตรหาค่า x จากสมการกำลังสอง (quadratic formula)

$$x = \frac{-2 \pm \sqrt{4 + 16}}{2}$$

$$= \frac{-2 \pm 2\sqrt{5}}{2}$$

$$x = -1 \pm \sqrt{5}$$

เราจะใช้สัญญลักษณ์ $\approx$ มีความหมายเป็น "เท่ากับ (โดยประมาณ)" เช่น $\sqrt{5} \approx 2.236$ ดังนั้น

$$x = -1 \pm 2.236$$

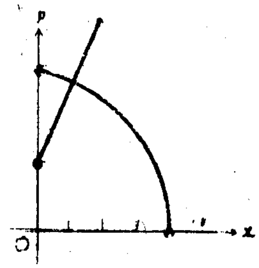
เพราะว่า $x \geq 0$ (ค่า x เป็นลบไม่ได้) เราจึงได้ $x \approx 1.24$ แทนค่า x ใน (1.7.8) จะได้ $p \approx 4.48$ เพราะฉะนั้นราคาสมดุลย์คือ 4.48 บาท และจำนวนสมดุลย์เป็น 124 หน่วย (เพราะว่าโจทย์กำหนดให้จำนวนสินค้า = 100x หน่วย) เขียนสมการแรกอยู่ในรูป

$$(x + 1)^2 + p^2 = 25 = (5)^2$$

พบว่ากราฟ ของสมการนี้เป็นรูปวงกลมซึ่งมีจุดศูนย์กลางอยู่ที่จุด (-1, 0) และรัศมียาว 5 หน่วย เพราะว่า $x \geq 0$ และ $p \geq 0$ เส้นโค้งอุปสงค์จะเป็นส่วนหนึ่งของวงกลมซึ่งอยู่ในควอทแรนท์ที่ 1 แก้สมการอุปทานหา p จะได้

$$p = 2x + 2$$

ดังนั้นเส้นโค้งอุปทานคือส่วนหนึ่งของเส้นตรงที่อยู่ในควอดแรนท์ที่ 1 มีความชันเป็น 2 และตัดแกน p ที่จุด (0, 2) เขียนรูปที่ต้องการ



รูป 1.7.9

ข้อควรสังเกต ถ้าเส้นโค้งอุปสงค์และเส้นโค้งอุปทานไม่ตัดกันในควอดแรนท์ที่ 1 จะกล่าวได้ว่าสมดุลย์ไม่มีความหมาย ตัวอย่างเช่น ถ้าส่วนโค้งตัดกันในควอดแรนท์ที่ 2 เราจะอธิบายได้ว่าจำนวนสมดุลย์เป็นลบ และการที่จะพูดว่าปริมาณผลผลิตเป็นลบนั้นย่อมไม่มีความหมาย

แบบฝึกหัดที่ 1.7

จากแบบฝึกหัดข้อที่ 1 ถึง 10 กำหนดให้เป็นสมการเส้นตรง ให้เขียนส่วนหนึ่งของเส้นตรงในควอดแรนท์ที่ 1 และหาว่าส่วนของเส้นตรงนี้เป็นเส้นโค้งอุปสงค์ (demand curve) หรือเส้นโค้งอุปทาน (supply curve) หรือไม่เป็นทั้ง 2 อย่าง

1. $2x - 3p + 6 = 0$
2. $4x + 5p - 10 = 0$
3. $x + 4p = 7$
4. $3x - 4p + 24 = 0$
5. $3x + 5p + 12 = 0$
6. $3p = 2$
5. $4p - 5 = 0$
8. $4x - 3p = 0$
9. $5p - 6x = 0$
10. $2x + 6p + 3 = 0$

จากแบบฝึกหัดข้อ 11 ถึง 14 กำหนดสมการอุปสงค์ของสินค้าเฉพาะอย่างหนึ่งมาให้ (ก) เขียนกราฟของเส้นโค้งอุปสงค์ (ข) หาราคาสูงสุดที่ผู้ซื้อสามารถซื้อได้ และ (ค) หาความต้องการซื้อสูงสุดถ้าสินค้ามีเหลือเฟือ

11. $3x + 2p - 15 = 0$
12. $x^2 + p^2 = 36$
13. $p^2 + 4p + 2x - 10 = 0$
14. $x^2 + 2x + 3p - 23 = 0$

จากแบบฝึกหัดข้อ 15 ถึง 18 กำหนดสมการอุปทานสำหรับสินค้าเฉพาะอย่างหนึ่งมาให้ (ก) เขียนกราฟของเส้นโค้งอุปทาน (ข) หาราคาต่ำสุดที่สินค้าสามารถจะผลิตได้

15. $x^2 - 4p + 12 = 0$
16. $2x - 6p + 9 = 0$
17. $p^2 + 8p - 6x - 20 = 0$
18. $2x^2 + 12x - 3p + 24 = 0$

19. บริษัทหนึ่งขายสินค้าได้ 20,000 หน่วย เมื่อขายหน่วยละ 14 บาท และบริษัทพบว่าเขาสามารถจะขายได้มากขึ้นอีก 2,000 หน่วย เมื่อลดราคาขายลงหน่วยละ 2 บาท จงหาสมการอุปสงค์ (กำหนดให้เป็นเส้นตรง) พร้อมทั้งเขียนรูป

20. เมื่อราคาขายเป็น 40 บาท หลอดไฟ 10,000 หลอด สามารถขายได้ในตลาด แต่เมื่อเพิ่มขึ้นอีกหน่วยละ 5 บาท หลอดไฟสามารถขายได้ 8,000 หลอด ถ้าสมการอุปทานเป็นเส้นตรง จงหาสมการอุปทานพร้อมทั้งเขียนกราฟ

จากแบบฝึกหัดข้อ 21 ถึง 24 กำหนดความต้องการของตลาด (market's demand) และสมการอุปทานมาให้ (ก) ให้หาจำนวนสมดุลย์ (equilibrium amount) และราคาสมดุลย์ (equilibrium price) และ (ข) เขียนเส้นโค้งของอุปสงค์และอุปทานบนแกนชุดเดียวกัน พร้อมทั้งแสดงจุดสมดุลย์ (point of equilibrium)

21. $x + 2p - 15 = 0, \quad x - 3p + 3 = 0$

22. $3x + p - 21 = 0, \quad 3x - 4p + 9 = 0$

23. $3x^2 + p - 10 = 0, \quad x^2 + 2x - p + 4 = 0$

24. $p^2 + p + x - 12 = 0, \quad 2p^2 - 2p - x - 4 = 0$