ภาคผนวก

ภาคผนวก 1
อนุพันธ์ย่อย
(Partial Derivative)

1. บทนำ

เท่าที่ศึกษามา เราพบว่าฟังก์ชันที่ได้พบส่วนมากเป็นฟังก์ชันของตัวแปรเดียวเท่านั้น แต่มีปัญหามากมายที่เป็นฟังก์ชันของหลายตัวแปร เช่น

ปริมาตรของกรวยกลม (V) ที่มีรัศมี r และส่วนสูง h จะได้ว่า

$$v = \frac{1}{2}\pi r^2 h$$

หรือเขียนเป็น $V = f(r, h)$

นั่นคือ V เป็นฟังก์ชันของ r และ h (ฟังก์ชันของสองตัวแปร)

ปริมาตรของกล่องสี่เหลี่ยม (V) ที่กว้าง ℓ, ยาว m, และสูง n จะได้ว่า

$$V = \ell mn$$

หรือ $V = f(\ell, m, n)$

นั่นคือ V เป็นฟังก์ชันของ ℓ, m และ n (ฟังก์ชันของสามตัวแปร) แต่ในขั้นต้นนี้เราจะพิจารณาฟังก์ชันสองตัวแปรในรูปของ

$$z = f(x, y)$$

ซึ่งเรียกตัวแปร x, y ว่าตัวแปรอิสระ และเรียกตัวแปร z ว่าตัวแปรตาม

2. ลิมิตและความต่อเนื่อง

นิยาม 1 (ลิมิต)

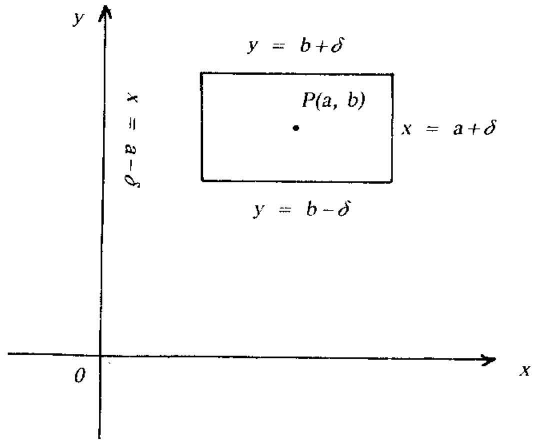
ฟังก์ชัน f(x, y) ซึ่งนิยามในโดเมน R มีค่าเข้าใกล้ ℓ โดยที่ $x \to a$, $y \to b$ ก็ต่อเมื่อสำหรับ $\varepsilon > 0$ จะมี $\delta > 0$ ซึ่ง

$$|f(x, y) - \ell| < \varepsilon$$

สำหรับทุกค่า x, y ที่

$$0 < |x - a| < \delta$$

และ $$0 < |y - b| < \delta$$



เขียนแทนด้วย

$$\lim_{\substack{x\to a\\ y\to b}} f(x, y) = \ell$$

หรือ $$\lim_{(x,y)\to(a,b)} f(x, y) = \ell$$

วิธีหาลิมิต

การที่ f(x, y) เข้าใกล้ ℓ หมายความว่า ไม่ว่าจุด (x, y) จะเข้าใกล้จุด (a, b) ตามเส้นทางไหนก็ตาม f(x, y) ต้องเข้าใกล้ ℓ ค่าเดียวกัน ส่วนมากจะพิจารณาเส้นทางตามแกน x, แกน y หรือตามเส้นตรง y = mx ดังนี้

1. ให้ $x\to a$ ก่อน แล้วให้ $y\to b$ นั่นคือ

$$\lim_{y\to b}\ \lim_{x\to a} f(x, y)$$

2. ให้ $y\to b$ ก่อน แล้วให้ $x\to a$ นั่นคือ

$$\lim_{x\to a}\ \lim_{y\to b} f(x, y)$$

3. ให้ (x, y) เข้าใกล้ (a, b) ตามเส้นตรง y = mx นั่นคือ

$$\lim_{x\to a} f(x, mx)$$

ตัวอย่างที่ 1 จงหา $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x-y}{x+y}$

วิธีทำ เนื่องจาก $\displaystyle\lim_{y\to 0}\ \lim_{x\to 0}\frac{x-y}{x+y} = \lim_{y\to 0}\frac{-y}{y} = -1$

และ $\displaystyle\lim_{x\to 0}\ \lim_{y\to 0}\frac{x-y}{x+y} = \lim_{x\to 0}\frac{x}{x} = 1$

เพราะว่าลิมิตตามเส้นทางทั้งสองมีค่าไม่เท่ากัน
เพราะฉะนั้นตัวอย่างนี้จึงไม่มีลิมิต

ตัวอย่างที่ 2 จงหา $\lim\limits_{(x, y)\to(0, 0)} \dfrac{2y^2}{\sqrt{x^2+xy}}$

วิธีทำ ให้ $y = mx$

ดังนั้น $\lim\limits_{(x, y)\to(0, 0)} \dfrac{2y^2}{\sqrt{x^2+xy}} = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{2m^2x^2}{\sqrt{x^2+mx^2}}$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{2m^2x}{\sqrt{1+m}}$$

$= 0, m$ มีค่าจำกัด

ตัวอย่างที่ 3 จงหา $\lim\limits_{(x, y)\to(0, 0)} \dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2}$

วิธีทำ ให้ $y = mx$

ดังนั้น $\lim\limits_{(x, y)\to(0, 0)} \dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2} = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x^2-m^2x^2}{x^2+m^2x^2}$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{1-m^2}{1+m^2}$$

ซึ่งมีค่ามากมายนับไม่ถ้วน ขึ้นกับการเลือกค่า m

เพราะฉะนั้นตัวอย่างนี้ไม่มีลิมิต

นิยาม 2 (ความต่อเนื่อง)

ฟังก์ชัน $f(x, y)$ ต่อเนื่องที่จุด (a, b) ก็ต่อเมื่อ สำหรับ $\varepsilon > 0$ จะมี $\delta > 0$ ซึ่ง

$$|f(x, y) - f(a, b)| < \varepsilon$$

สำหรับทุก ๆ จุด (x, y) ที่

$$0 < |x-a| < \delta$$

และ $$0 < |y-b| < \delta$$

เขียนแทนด้วย

$$\lim_{(x, y)\to(a, b)} f(x, y) = f(a, b)$$

นั่นคือ $$\lim_{(h, k)\to(0, 0)} f(a+h, b+k) = f(a, b)$$

ตัวอย่างที่ 4 $f(x, y) = xy^2$ เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องที่จุด $(1, 2)$ หรือไม่

วิธีทำ เนื่องจาก $f(x, y) = xy^2$

ดังนั้น $f(1, 2) = 1(2)^2 = 4$

ต่อไปนี้จะพิจารณาค่าลิมิต โดยให้ $(x, y) \to (1, 2)$
ตามแนวเส้นตรง $y - 2 = m(x - 1)$
นั่นคือ $\quad y = mx - m + 2$
เพราะฉะนั้น

$$\lim_{(x, y) \to (1, 2)} f(x, y) = \lim_{(x, y) \to (1, 2)} xy^2$$

$$= \lim_{x \to 1} x(mx - m + 2)^2$$

$$= 4$$

ซึ่งจะพบว่า ค่าลิมิตเท่ากับค่าฟังก์ชัน
แสดงว่า $f(x, y) = xy^2$ ต่อเนื่องที่จุด $(1, 2)$

3. อนุพันธ์ย่อย

ให้ $z = f(x, y)$ เป็นฟังก์ชันสองตัวแปร ถ้า x แปรเปลี่ยน ในขณะที่ให้ y ยังคงที่ ดังนั้น z จะเปลี่ยนจาก $f(x, y)$ ไปเป็น $f(x + \Delta x, y)$, ถ้า

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + 4x, y) - f(x, y)}{\Delta x}$$

หาค่าได้ แล้วเราเรียกลิมิตข้างต้นนี้ว่า อนุพันธ์ย่อยของ $f(x, y)$ เทียบกับ x ที่จุด (x, y) ใด ๆ เขียนแทนด้วย

$$\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)_{(x, y)} \text{ หรือ } f_x(x, y) \text{ หรือ } f_x$$

ทำนองเดียวกัน ถ้า

$$\lim_{\Delta y \to 0} \frac{f(x, y + \Delta y) - f(x, y)}{\Delta y}$$

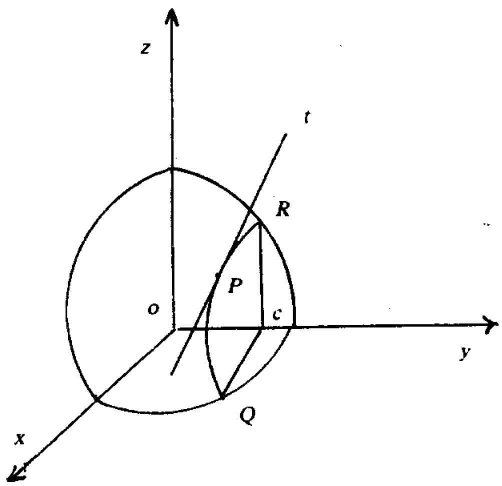
หาค่าได้ แล้วเราเรียกลิมิตนี้ว่า อนุพันธ์ย่อยของ $f(x, y)$ เทียบกับ y ที่จุด (x, y) ใด ๆ เขียนแทนด้วย

$$\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)_{(x, y)} \text{ หรือ } f_y(x, y) \text{ หรือ } f_y$$

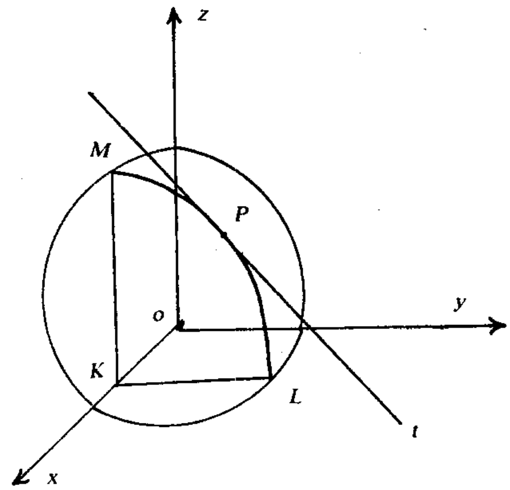
ความหมายทางเรขาคณิต

เนื่องจาก $z = f(x, y)$ จะแทนพื้นผิว (surface) ถ้าให้ y คงที่ (นั่นคือ ถ้า $y = c$ แล้วค่าของฟังก์ชัน คือ $z = f(x, c)$ เราทราบว่า $y = c$ แทนระนาบที่ขนานกับระนาบ xoz โดยห่างจากจุดกำเนิด c หน่วย (ดูรูปที่ 1) และยิ่งกว่านั้น สมการ $z = f(x, c)$ คือ เส้นโค้ง QPR ที่เกิดจากการตัดพื้นผิว $z = f(x, y)$ ด้วยระนาบ $y = c$ ซึ่งความชันของเส้นสัมผัส

เส้นโค้งนี้ที่จุด P(x, c, f(x, y)) กำหนดโดยอนุพันธ์ย่อยของ z เทียบกับ x (เมื่อ y คงที่) นั่นคือ อนุพันธ์ย่อยของ z เทียบกับ x ก็คือ ความชันของเส้นสัมผัสเส้นโค้งที่เกิดจากการตัดกันของเส้นผิว z = f(x, y) กับระนาบที่ขนานกับระนาบ xoz



รูปที่ 1 $\frac{\partial f}{\partial x}$ = *ความชันของ t*



รูปที่ 2 $\frac{\partial f}{\partial y}$ = *ความชันของ t*

ทำนองเดียวกัน อนุพันธ์ย่อยของ z เทียบกับ y ก็คือ ความชันของเส้นสัมผัสเส้นโค้งที่เกิดจากการตัดกันของเส้นผิว z = f(x, y) กับระนาบ yoz

ข้อสังเกต ในการคำนวณหาอนุพันธ์ย่อยเทียบกับ x จึงให้คิดว่า y เป็นค่าคงที่ แล้วใช้หลักเกณฑ์ทั่ว ๆ ไปเกี่ยวกับอนุพันธ์ของฟังก์ชันตัวแปรเดียว และทำนองเดียวกันการหาอนุพันธ์ย่อยเทียบกับ y ให้คิดว่า x เป็นค่าคงที่

อนุพันธ์ย่อยอันดับสูงกว่า

อนุพันธ์ย่อยอันดับหนึ่งของ z เทียบกับ x หรือ y ยังคงเป็นฟังก์ชันของ x และ y ดังนั้น เราสามารถหาอนุพันธ์ย่อยเทียบกับ x หรือ y ได้อีก ซึ่งอนุพันธ์ย่อยอันดับสองของ z เทียบ x เขียนแทนด้วย

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right) \text{ หรือ } \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} \text{ หรือ } f_{xx}$$

นิยามโดย

$$f_{xy} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f_x(x+\Delta x, y) - f_x(x, y)}{\Delta x}$$

ถ้าลิมิตข้างบนนี้หาค่าได้

ทำนองเดียวกัน

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = f_{yy} = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{f_y(x, y+\Delta y) - f_y(x, y)}{\Delta y}$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} = f_{xy} = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{f_x(x, y+\Delta y) - f_x(x, y)}{\Delta y}$$

และ
$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = f_{yx} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f_y(x+\Delta y, y) - f_y(x, y)}{\Delta x}$$

ค่าลิมิตเหล่านี้หาค่าได้

ข้อสังเกต $\frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}$ และ $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$ โดยทั่ว ๆ ไป จะมีค่าไม่เท่ากัน เพราะว่า $\frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}$ เป็นการหาอนุพันธ์ย่อยของ z เทียบกับ x ก่อน ส่วน $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$ เป็นการหาอนุพันธ์ย่อยของ z เทียบกับ y ก่อน แต่เรามีทฤษฎีบทที่จะพิสูจน์ได้ว่า ถ้า $f(x, y), f_{xy}, f_{yx}$ เป็นฟังก์ชันต่อเนื่อง แล้ว $f_{xy} = f_{yx}$

ตัวอย่างที่ 5 จงหา $\frac{\partial z}{\partial x}$ และ $\frac{\partial z}{\partial y}$ เมื่อกำหนดให้

1. $z = x^3y^2 - 2xy + 4y^3$
2. $z = x^2 - 3xy + 2x - 3y + 7$

วิธีทำ 1. จาก
$$z = x^3y^2 - 2xy + 4y^3$$
$$\frac{\partial z}{\partial x} = y^2\frac{\partial}{\partial x}(x^3) - 2y\frac{\partial}{\partial x}(x) + \frac{\partial}{\partial x}(4y^3)$$
$$= 3x^2y^2 - 2y$$
$$\frac{\partial z}{\partial y} = x^3\frac{\partial}{\partial y}(y^2) - 2x\frac{\partial}{\partial y}(y) + 4\frac{\partial}{\partial y}(y^3)$$
$$= 2x^3y - 2x + 12y^2$$

2. จาก
$$z = x^2 - 3xy + 2x - 3y + 7$$
$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}(x^2) - 3y\frac{\partial}{\partial x}(x) + 2\frac{\partial}{\partial x}(x) - 3y\frac{\partial}{\partial x}(1) + \frac{\partial}{\partial x}(7)$$
$$= 2x - 3y + 2$$
$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}(x^2) - 3x\frac{\partial}{\partial y}(y) + \frac{\partial}{\partial y}(2x) - 3\frac{\partial}{\partial y}(1) + \frac{\partial}{\partial y}(7)$$
$$= -3x - 3$$

ตัวอย่างที่ 6 จงหาอนุพันธ์ย่อยที่หนึ่งของ

1. $e^{ax}\cos by$
2. $x-2y\tan^{-1}\frac{x}{y}$

วิธีทำ 1.

$$z = e^{ax}\cos by$$

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \cos by\frac{\partial}{\partial x}e^{ax} = ae^{ax}\cos by$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = e^{ax}\frac{\partial}{\partial y}(\cos by) = -be^{ax}\sin by$$

2.

$$z = x-2y\tan^{-1}\frac{x}{y}$$

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}(x)-2y\frac{\partial}{\partial x}\left(\tan^{-1}\frac{x}{y}\right)$$

$$= 1-2y\frac{1}{1+\frac{x^2}{y^2}}\cdot\frac{1}{y}$$

$$= 1-\frac{2y^2}{y^2+x^2}$$

$$= \frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}(x)-2\left\{1\cdot\tan^{-1}\frac{x}{y}+y\frac{1}{1+\frac{x^2}{y^2}}\cdot\left(-\frac{x}{y^2}\right)\right\}$$

$$= \frac{2xy}{x^2+y^2}-2\tan^{-1}\frac{x}{y}$$

ตัวอย่างที่ 7 ให้ $z = 3x^4y^2$ **จงหา** $f_{xx}, f_{yy}, f_{xy}, f_{yx}$

วิธีทำ ให้ $f(x, y) = 3x^4y^2$

ดังนั้น

$$f_x = 12x^3y^2,\ f_{xx} = 36x^2y^2$$

$$f_y = 6x^4y,\ f_{yy} = 6x^4$$

$$f_{xy} = 24x^3y$$

$$f_{yx} = 24x^3y$$

4. ผลต่างอนุพัทธ์ (Differentials)

ถ้า y เป็นฟังก์ชันของ x อย่างเดียว อนุพันธ์ (ถ้ามี) คือ $\frac{dy}{dx}$ ต่อไปนี้เราจะให้ความหมายของ dx และ dy ซึ่งจะทำให้พิจารณาอนุพันธ์ $\frac{dy}{dx}$ ว่าเป็นผลหารของปริมาณ dy และ dx ได้ โดยเรียกปริมาณ dy หรือ dx ว่า **ผลต่างอนุพัทธ์** ซึ่งสำคัญมากในการนำไปใช้ในเรื่องสมการเชิงเส้นอนุพันธ์

จาก $\quad y = f(x)$

เรานิยาม dy โดยให้

$$dy = f'(x)\Delta x$$

ดังนั้น dx จะกำหนดได้โดย

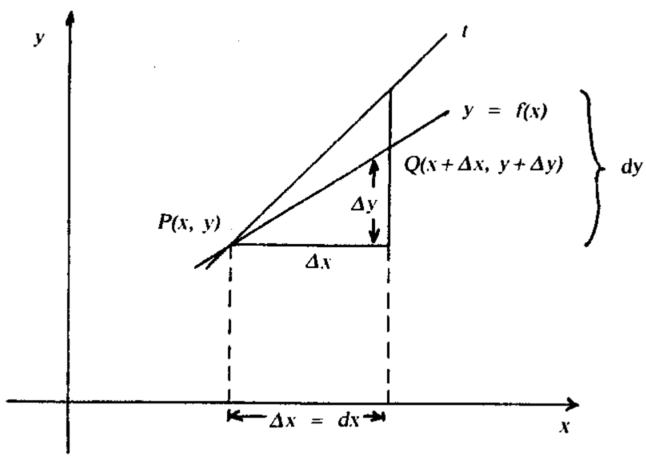
$$dx = 1\cdot\Delta x$$

เนื่องจากอนุพันธ์ของ x เทียบกับตัวมันเองคือหนึ่ง

เพราะฉะนั้น เราสามารถเขียนได้ว่า

$$dy = f'(x)dx$$

ซึ่งแสดงได้ดังรูปที่ 3



รูปที่ 3

ต่อไปพิจารณากรณีสองตัวแปร

ให้ $\quad z = f(x, y)$

เราทราบแล้วว่า

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x,\ y)-f(x,\ y)}{\Delta x}$$

และ

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \lim_{\Delta y\to 0}\frac{f(x,\ y+\Delta y)-f(x,\ y)}{\Delta y}$$

ให้ Δz เป็นส่วนที่เปลี่ยนไป ดังนั้น x และ y ก็จะเปลี่ยนไปด้วยปริมาณ Δx และ Δy ตามลำดับ

ดังนั้นให้ $$\lim_{\Delta x,\ \Delta y \to 0} \Delta z = dz$$

เรียก dz นี้ว่า **ผลต่างอนุพัทธ์รวม** (total differential)

จาก
$$\begin{aligned}
\Delta z &= f(x+\Delta x,\ y+\Delta y) - f(x,\ y) \\
&= f(x+\Delta x,\ y+\Delta y) - f(x,\ y+\Delta y) + f(x,\ y+\Delta y) - f(x,\ y) \\
&= \frac{f(x+\Delta x,\ y+\Delta y) - f(x,\ y+\Delta y)}{\Delta x} \cdot \Delta x + \frac{f(x,\ y+\Delta y) - f(x,\ y)}{\Delta y} \cdot \Delta y
\end{aligned}$$

ดังนั้น
$$\begin{aligned}
\lim_{\substack{\Delta x \to 0 \\ \Delta y \to 0}} \Delta z &= \lim_{\substack{\Delta x \to 0 \\ \Delta y \to 0}} \frac{f(x+\Delta x,\ y+\Delta y) - f(x,\ y+\Delta y)}{\Delta x} \cdot \lim_{\Delta x \to 0} \Delta x \\
&\quad + \lim_{\substack{\Delta x \to 0 \\ \Delta y \to 0}} \frac{f(x,\ y+\Delta y) - f(x,\ y)}{\Delta y} \cdot \lim_{\Delta y \to 0} \Delta y
\end{aligned}$$

โดย
$$\lim_{\substack{\Delta x \to 0 \\ \Delta y \to 0}} \frac{f(x+\Delta x,\ y+\Delta x) - f(x,\ y+\Delta y)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x,\ y) - f(x,\ y)}{\Delta x} = \frac{\partial z}{\partial x}$$

$$\lim_{\substack{\Delta x \to 0 \\ \Delta y \to 0}} \frac{f(x,\ y+\Delta y) - f(x,\ y)}{\Delta y} = \frac{\partial z}{\partial y}$$

$$\lim_{\Delta x \to 0} \Delta x = dx,\quad \lim_{\Delta y \to 0} \Delta y = dy$$

และ $$\lim_{\substack{\Delta x \to 0 \\ \Delta y \to 0}} \Delta z = dz$$

เพราะฉะนั้น $$dz = \frac{\partial z}{\partial x} dx + \frac{\partial z}{\partial y} dy$$

ซึ่งเป็นสมการที่มีความสำคัญมาก
