บทที่ 7
จำนวนเชิงซ้อน
(Complex Numbers)

7.1 นิยามพื้นฐาน (Basic Definitions)

ตามปกติเมื่อเราพิจารณาเซตจำนวนจริง สามารถหาคำตอบ (solution) ของสมการได้ แต่มีสมการบางอย่างซึ่งไม่สามารถหาคำตอบในรูปจำนวนจริงได้ เช่น

$$x^2+1 = 0$$

หรือ $$x^2 = -1$$

ด้วยเหตุนี้ เราจึงต้องขยายจำนวนจริงออกไปอีก เพื่อที่จะได้หาผลเฉลยสมการลักษณะข้างต้นได้ โดยแนะนำให้รู้จักกับจำนวนเชิงซ้อน (complex numbers)

นิยาม 7.1 จำนวนเชิงซ้อน (z) คือ จำนวนที่สามารถเขียนได้ในรูป

$$z = a+ib$$

หรือ $$z = a+bi$$

โดยที่ a, b เป็นจำนวนจริง และ i ซึ่งเรียกว่า หน่วยจินตภาพ (imaginary unit) สอดคล้อง

$$i = \sqrt{-1}$$

หรือ $$i^2 = -1$$

เรียก a ว่า ส่วนจริง (real part) ของจำนวนเชิงซ้อน

เรียก b ว่า ส่วนจินตภาพ (imaginary part) ของจำนวนเชิงซ้อน

เขียนแทนด้วย

$$a = \mathrm{Re}(z), \qquad b = \mathrm{Im}(z)$$

ถ้า $a = 0$ แล้ว จะพบว่า $a+ib = 0+ib = ib$ เรียกว่าเป็น จำนวนจินตภาพแท้ (pure imaginary)

ถ้า $b = 0$ แล้ว จะพบว่า $a+ib = a+0i = a$ ซึ่งเป็นจำนวนจริง

นิยาม 7.2 ให้ $z = a+ib$ เป็นจำนวนเชิงซ้อน เราจะเรียกจำนวนเชิงซ้อน $a-ib$ ว่าเป็นจำนวนเชิงซ้อนสังยุค (conjugate complex number) ของ z เขียนแทนด้วย

$$\bar{z} = a-ib$$

นิยาม 7.3 จำนวนเชิงซ้อนสองจำนวนเท่ากันก็ต่อเมื่อ ส่วนจริงเท่ากัน และส่วนจินตภาพเท่ากัน นั่นคือ

$$z_1 = a_1 + ib_1 = z_2 = a_2 + ib_2$$

ก็ต่อเมื่อ

$$a_1 = a_2 \text{ และ } b_1 = b_2$$

ข้อสังเกต

1. การเปรียบเทียบจำนวนเชิงซ้อน กระทำได้แต่เพียงบอกว่าจำนวนเชิงซ้อนทั้งสองเท่ากันหรือไม่เท่ากันเท่านั้น เราไม่สามารถเปรียบเทียบในรูป $z_1 > z_2$ หรือ $z_1 < z_2$

2. จำนวนเชิงซ้อน z เท่ากับศูนย์ก็ต่อเมื่อ ส่วนจริงและส่วนจินตภาพเท่ากับศูนย์ นั่นคือ

$$z = a + ib = 0$$

ก็ต่อเมื่อ $a = b = 0$

ตัวอย่างที่ 7.1

$1+3i$ เป็นจำนวนเชิงซ้อนที่มี $a = 1, b = 3$

$-2-7i$ เป็นจำนวนเชิงซ้อนที่มี $a = -2, b = -7$

$-6i$ เป็นจำนวนเชิงซ้อนที่มี $a = 0, b = -6$

9 เป็นจำนวนเชิงซ้อนที่มี $a = 9, b = 0$

0 เป็นจำนวนเชิงซ้อนที่มี $a = 0, b = 0$

ตัวอย่างที่ 7.2

$3+5i$ เป็นจำนวนเชิงซ้อนสังยุคของ $3-5i$

$-1-2i$ เป็นจำนวนเชิงซ้อนสังยุคของ $-1+2i$

$-4i$ เป็นจำนวนเชิงซ้อนสังยุคของ $4i$

8 เป็นจำนวนเชิงซ้อนสังยุคของ 8

ตัวอย่างที่ 7.3

กำหนดให้ $4x - 13yi = 4 + 26i$

จงหาค่า x และ y

วิธีทำ

กำหนดให้ $4x - 13yi = 4 + 26i$

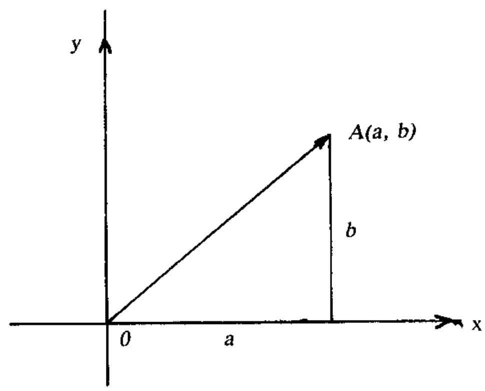
จากบทนิยาม 7.3 (ดูสมบัติการเท่ากันของจำนวนเชิงซ้อน)

จะพบว่า $4x = 4$ และ $-13y = 26$

นั่นคือ $x = 1$ และ $y = \frac{26}{-13} = -2$

การแทนจำนวนเชิงซ้อนในทางเรขาคณิต

สำหรับจำนวนเชิงซ้อนใด ๆ $z = a+ib$ เราสามารถเขียนแทนด้วยจุด A(a, b) ในระนาบ xy ได้ โดยทางกลับกันทุก ๆ จุด M(x, y) ของระนาบจะแทนจำนวนเชิงซ้อน $z = x+iy$ เราเรียกระนาบที่แทนด้วยจำนวนเชิงซ้อนนี้ว่า ระนาบเชิงซ้อน (complex plane) (ดูรูป 7.1)



รูปที่ 7.1

ทุก ๆ จุดบนแกน x สมนัยกับจำนวนจริง ($b = 0$) และทุก ๆ จุดบนแกน y สมนัยกับจำนวนจินตภาพแท้ ($a = 0$) เพราะฉะนั้นในระนาบเชิงซ้อน, เรียกแกน y ว่า แกนจินตภาพ (imaginary axis) และเรียกแกน x ว่าแกนจริง (real axis) การเชื่อมโยงจุด A(a, b) กับจุดกำเนิด จะได้เวกเตอร์ $\overline{OA}$ เป็นการแทนจำนวนเชิงซ้อนในทางเรขาคณิต

ข้อสังเกต อาจจะเป็นเพราะเหตุนี้จึงเขียนจำนวนเชิงซ้อนในอีกรูปแบบหนึ่ง คือ คู่อันดับ นั่นคือ

$$z = a+ib = (a, b)$$

แบบฝึกหัด 7.1

1. จงหาส่วนจริง, ส่วนจินตภาพ และจำนวนเชิงซ้อนสังยุคของจำนวนเชิงซ้อนต่อไปนี้

1.1 2	1.2 i	1.3 $3-4i$
1.4 $-2-7i$	1.5 $-11i$	1.6 $4+2i$

2. จงหาค่า x และ y จากสมการต่อไปนี้

2.1 $2x+3yi = 0$

2.2 $-x+7yi = 4+2i$

2.3 $x+yi = i$

2.4 $9x+6yi-3 = 0$

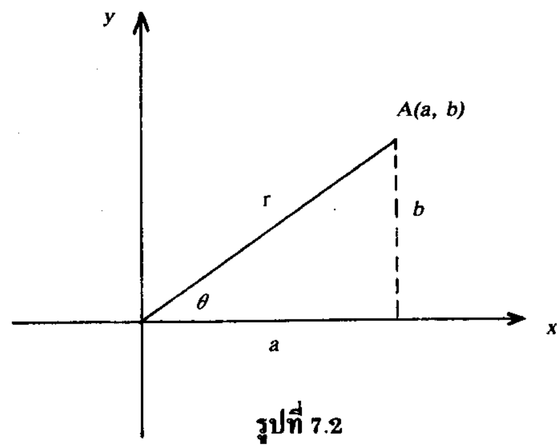
2.5 $8x-4yi-16i = 0$

3. จงเขียนจำนวนเชิงซ้อนเหล่านี้ในระนาบเชิงซ้อนเดียวกัน

3.1 $-2+i$	3.2 $-2-i$	3.3 $2-i$
3.4 $2+i$	3.5 $-\frac{1}{2}i$	

7.2 จำนวนเชิงซ้อนในรูปเชิงขั้ว (Polar Form of a Complex Number)

ให้ θ และ r ($r \geqslant 0$) เป็นพิกัดเชิงขั้ว (polar coordinate) ของจุด A(a, b) โดยจุดกำเนิดเป็นขั้ว (pole) และแกน x ทางบวก เป็นแกนขั้ว (polar axis) ดังนั้นจากรูปที่ 7.2 เราได้ความสัมพันธ์ดังนี้



รูปที่ 7.2

$$a = r\cos\theta,\ b = r\sin\theta$$

ทำให้จำนวนเชิงซ้อนสามารถเขียนได้เป็น

$$a+ib = r\cos\theta + ir\sin\theta$$

หรือ
$$z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$$

ซึ่งรูปแบบทางขวามือเรียกว่า รูปเชิงขั้ว หรือรูปตรีโกณมิติ (trigonometric form) ของจำนวนเชิงซ้อน $z = a+ib$

เรียก r ว่า มอดุลัส (modulus) ของจำนวนเชิงซ้อน z

เรียก θ ว่า อาร์กิวเมนต์ (argument) ของจำนวนเชิงซ้อน z เขียนแทนด้วย

$$r = |z|,\ \theta = \arg z$$

โดย r และ θ เขียนในพจน์ของ a และ b ได้ดังนี้

$$r = \sqrt{a^2+b^2},\ \theta = \tan^{-1}\frac{b}{a}$$

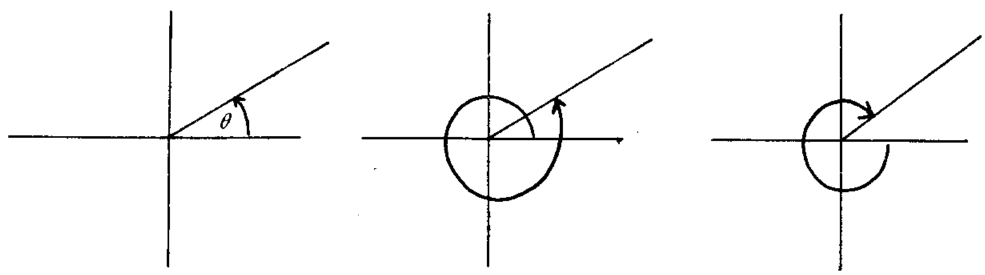
สรุปได้ว่า

$$|z| = |a+ib| = \sqrt{a^2+b^2}$$

$$\theta = \arg z = \arg(a+ib) = \tan^{-1}\frac{b}{a}$$

อาร์กิวเมนต์ของจำนวนเชิงซ้อนพิจารณาค่าเป็นบวก เมื่อวัดมุมในทิศทวนเข็มนาฬิกา (จากแกน x ที่เป็นบวก) และค่าเป็นลบเมื่อวัดมุมในทิศตามเข็มนาฬิกา ตามปกติแล้วอาร์-กิวเมนต์ θ ไม่ได้มีเพียงค่าเดียว แต่มีได้มากมายนับไม่ถ้วนคือ บวกด้วย $2\pi k$ เมื่อ k เป็นจำนวนเต็ม นั่นคือรูปทั่วไป คือ

$$\theta = \tan^{-1}\frac{b}{a} + 2k\pi,\ k \in Z$$



รูปที่ 7.3

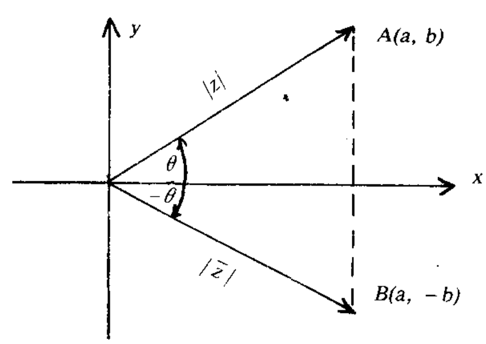
ยิ่งกว่านั้น เรานิยมที่จะกำหนดค่า θ โดยที่ $-\pi < \theta \leqslant \pi$ ซึ่งค่าอาร์กิวเมนต์ที่อยู่ในช่วงดังกล่าวเรียกว่า ค่าหลักของอาร์กิวเมนต์ (Principal value of the argument)

ข้อสังเกต

1. จำนวนเชิงซ้อนและจำนวนเชิงซ้อนสังยุค จะมีมอดุลัสเท่ากัน และอาร์กิวเมนต์ก็เท่ากัน แต่ต่างกันที่เครื่องหมาย

นั่นคือ $|z| = |\bar{z}|$ และ $\arg z = -\arg \bar{z}$

ดูรูป 7.4



รูปที่ 7.4

2. จำนวนจริง a ใด ๆ สามารถเขียนในรูปเชิงขั้วได้ดังนี้

$a = |a|(\cos 0 + i\sin 0),\ a > 0$

$a = |a|(\cos \pi + i\sin \pi),\ a < 0$

3. มอดุลัสของจำนวนเชิงซ้อน 0 คือ ศูนย์ : $|0| = 0$ ส่วนอาร์กิวเมนต์มีค่าเท่าใดก็ได้ นั่นคือ

$$0 = 0(\cos\theta + i\sin\theta)$$

4. รูปแบบ $z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$

   บางตำราอาจเขียนสั้น ๆ ให้กะทัดรัดเป็น

   $$z = r \text{ cis } \theta$$

ตัวอย่างที่ 7.4 จงหามอดุลัสของจำนวนเชิงซ้อน $z_1 = 2-i$, $z_2 = 2\sqrt{6}+5i$, $z_3 = i$

วิธีทำ จากความสัมพันธ์

$$|z| = \sqrt{a^2+b^2}$$

ดังนั้น

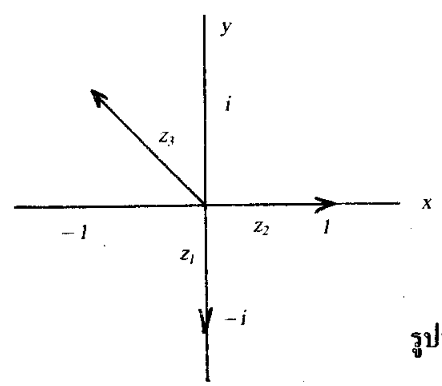
$$|z_1| = \sqrt{4+1} = \sqrt{5}$$

$$|z_2| = \sqrt{(2\sqrt{6})^2+5^2} = 7$$

$$|z_3| = \sqrt{0+1} = 1$$

ตัวอย่างที่ 7.5 จงหาค่าหลักของอาร์กิวเมนต์ของจำนวนเชิงซ้อน $z_1 = -i$, $z_2 = 1$, $z_3 = -1+i$

วิธีทำ นำจำนวนเชิงซ้อนมาเขียนในระนาบเชิงซ้อนจะได้ดังรูป 7.5



รูปที่ 7.5

ซึ่งเป็นการง่ายที่จะหาค่าหลักของอาร์กิวเมนต์จากรูป นั่นคือ $\theta_1 = -\frac{\pi}{2}$, $\theta_2 = 0$, $\theta_3 = \frac{3\pi}{4}$

ข้อสังเกต ถ้าเขียนในรูปทั่วไป จะได้

$$\arg z_1 = -\frac{\pi}{2} + 2k\pi, \quad k \in Z$$

$$\arg z_2 = 2k\pi, \quad k \in Z$$

$$\arg z_3 = \frac{3\pi}{4} + 2k\pi, \quad k \in Z$$

ตัวอย่างที่ 7.6 จงหาอาร์กิวเมนต์ของจำนวนเชิงซ้อน $z = -1-\sqrt{3}i$

วิธีทำ ในที่นี้ $a = -1$ และ $b = -\sqrt{3}$

ดังนั้น $r = \sqrt{1^2+3} = 2$

จาก
$$\theta = \tan^{-1}\frac{b}{a}$$
$$= \tan^{-1}\frac{-\sqrt{3}}{-1}$$
$$= \tan^{-1}\sqrt{3}$$

ซึ่งใน 1 รอบของวงกลมหนึ่งหน่วย (2π) ค่า $\tan^{-1}\sqrt{3}$ มีได้สองค่า คือ $\frac{\pi}{3}$ (จตุภาคที่ 1) และ $\frac{4\pi}{3}$, (จตุภาคที่ 3) แต่เนื่องจาก a และ b มีค่าเป็นลบ ดังนั้น จึงใช้ค่าที่อยู่ในจตุภาคที่ 3 นั่นคือ

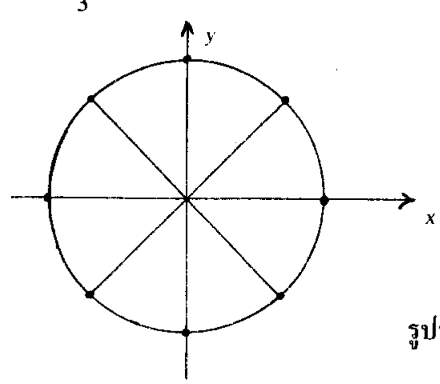
$$\theta = \tan^{-1}\sqrt{3}$$
$$= \frac{4\pi}{3}$$

ซึ่งเขียนรูปทั่วไปได้เป็น

$$\arg(-1-\sqrt{3}i) = \frac{4\pi}{3}+2k\pi, \quad k \in Z$$

ถ้าต้องการค่าหลัก มุม $\frac{4\pi}{3}$ จะตรงกับ $-\frac{2\pi}{3}$ จึงอาจเขียนในรูปค่าหลักได้เป็น

$$\arg(-1-\sqrt{3}i) = -\frac{2\pi}{3}+2k\pi, \; k \in Z$$



รูปที่ 7.6

ข้อสังเกต

จาก $\theta = \tan^{-1}\sqrt{3}$

ซึ่งเป็นฟังก์ชันตรีโกณมิติผกผัน เขียนในรูปฟังก์ชันตรีโกณมิติได้เป็น

$$\tan\theta = \sqrt{3}$$

จากความรู้เบื้องต้น เราทราบว่า $\tan\frac{\pi}{3} = \sqrt{3}$ ดังนั้น

$$\tan\theta = \tan\frac{\pi}{3}$$

$$\theta = \frac{\pi}{3} \quad \text{(เป็นมุมในจตุภาคที่ 1)}$$

แต่ a และ b เป็นลบ จำนวนเชิงซ้อนต้องอยู่ในจตุภาคที่ 3 จึงต้องหามุมให้สอดคล้องกัน คือ อยู่ในจตุภาคที่ 3 ด้วย

จาก $\tan\theta = \tan\frac{\pi}{3}$

$$= \tan\left(\pi + \frac{\pi}{3}\right)$$

$$= \tan\frac{4\pi}{3}$$

ดังนั้น $\theta = \frac{4\pi}{3}$

หรือใช้วิธีดูรูป 7.6 ก็ได้ ดังนี้

เพราะว่า $\tan\theta = \sqrt{3}$ (ค่าเป็นบวก) ค่า tangent ที่เป็นบวกจะอยู่ในจตุภาคที่ 1 และ 3 ค่าที่ตรงกับ $\frac{\pi}{3}$ ก็คือ $\frac{4\pi}{3}$

ตัวอย่างที่ 7.7 จงหาอาร์กิวเมนต์ของจำนวนเชิงซ้อน $z = -\sqrt{3}+i$

วิธีทำ ในที่นี้ $a = -\sqrt{3}$ และ $b = 1$

จาก $\theta = \tan^{-1}\frac{b}{a}$

$$= \tan^{-1}\frac{1}{\sqrt{3}}$$

หรือ $\tan\theta = -\frac{1}{\sqrt{3}}$

$$= -\tan\frac{\pi}{6}$$

$$= \tan\left(-\frac{\pi}{6}\right)$$

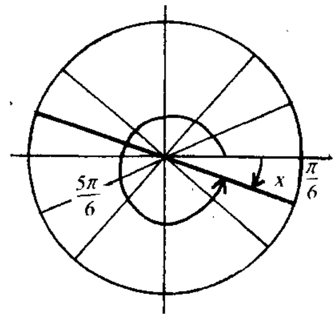
ดังนั้น $\theta = -\frac{\pi}{6}$

ซึ่ง $z = -\sqrt{3}+i$ อยู่ในจตุภาคที่ 4 และตรงกับค่า θ ที่ได้ นั่นคือ

$$\arg z = -\frac{\pi}{6} + 2k\pi,\ k \in Z$$

ข้อสังเกต

มุม $-\frac{\pi}{6}$ ถ้าใช้ค่ามุมเป็นบวกจะตรงกับ $\frac{5\pi}{6}$ ดูรูป 7.7



รูปที่ 7.7

จึงอาจเขียนในรูป

$$\arg z = \frac{5\pi}{6} + 2k\pi,\ k \in Z$$

ตัวอย่างที่ 7.8 จงเขียน $z = 2-2i$ ให้อยู่ในรูปเชิงขั้ว

วิธีทำ ในที่นี้ $a = 2$ และ $b = -2$

จาก
$$r = \sqrt{a^2+b^2}$$
$$= \sqrt{2^2+(-2)^2} = 2\sqrt{2}$$

และจาก
$$\theta = \tan^{-1}\frac{b}{a}$$
$$= \tan^{-1} -\frac{2}{2}$$
$$= \tan^{-1} -1$$

หรือ
$$\tan\theta = -1$$
$$= -\tan\frac{\pi}{4}$$
$$= \tan\left(-\frac{\pi}{4}\right)$$

ดังนั้น
$$\theta = -\frac{\pi}{4}$$

ซึ่ง $z = 2-2i$ อยู่ในจตุภาคที่ 4 และตรงกับ θ ที่ได้เพราะว่า

$$a+bi = r(\cos\theta + i\sin\theta)$$

ทำให้ได้

$$2-2i = 2\sqrt{2}\left(\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right)$$
$$= 2\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4} - i\sin\frac{\pi}{4}\right)$$

แบบฝึกหัด 7.2

1. จงหามอดุลัสของ

   1.1 $4+3i$

   1.2 $-5+2i$

   1.3 i

   1.4 $\cos(-\theta)+i\sin(-\theta)$

2. จงหาค่าหลักของอาร์กิวเมนต์ของ

   2.1 $\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{2}}i$

   2.2 $\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i$

   2.3 $-\frac{1}{\sqrt{2}}-\frac{1}{\sqrt{2}}i$

   2.4 $-\frac{25}{2}+\frac{25\sqrt{3}}{2}i$

   2.5 -1

3. จงเขียนจำนวนเชิงซ้อนต่อไปนี้ให้อยู่ในรูปเชิงขั้ว

   3.1 $2+2\sqrt{3}i$

   3.2 $-5+5i$

   3.3 $-\sqrt{6}-\sqrt{2}i$

   3.4 $-3i$

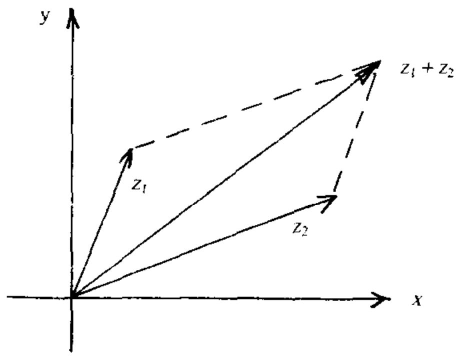
7.3 การกระทำพื้นฐานบนจำนวนเชิงซ้อน (Basic Operations on Complex Numbers)

นิยาม 7.4 การบวกจำนวนเชิงซ้อน

ผลบวกของสองจำนวนเชิงซ้อน $z_1 = a_1+ib_1$ และ $z_2 = a_2+ib_2$ คือ จำนวนเชิงซ้อนซึ่งนิยามโดยสมการ

$$\begin{aligned} z_1+z_2 &= (a_1+ib_1)+(a_2+ib_2) \\ &= (a_1+a_2)+i(b_1+b_2) \end{aligned}$$

จากสมการข้างต้นเราได้ว่า การบวกจำนวนเชิงซ้อนสามารถเขียนแทนด้วยรูปของการบวกกันของเวกเตอร์ (ดูรูป 7.8)



รูปที่ 7.8

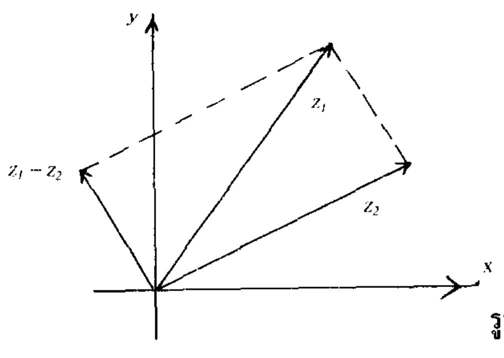
นิยาม 7.5 การลบจำนวนเชิงซ้อน

ผลต่างของสองจำนวนเชิงซ้อน $z_1 = a_1+ib_1$ และ $z_2 = a_2+ib_2$ คือจำนวนเชิงซ้อนซึ่งถ้าบวกด้วย z_2 แล้วจะเท่ากับ z_1 ดังนั้นจะพิจารณาเห็นว่า

$$\begin{aligned} z_1-z_2 &= (a_1+ib_1)-(a_2+ib_2) \\ &= (a_1-a_2)+i(b_1-b_2) \end{aligned}$$

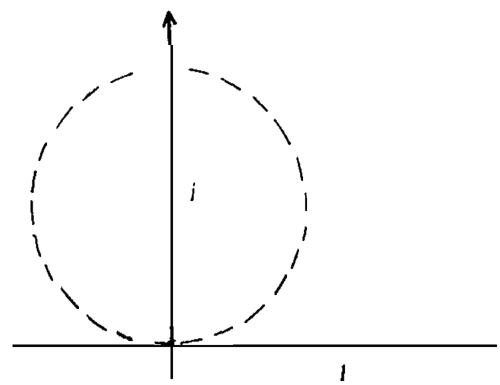
ข้อสังเกต

1. มอดุลัสของผลต่างของสองจำนวนเชิงซ้อน คือ ระยะห่างระหว่างสองจุดที่แทนจำนวนดังกล่าว ในระนาบเชิงซ้อน (ดูรูป 7.9)



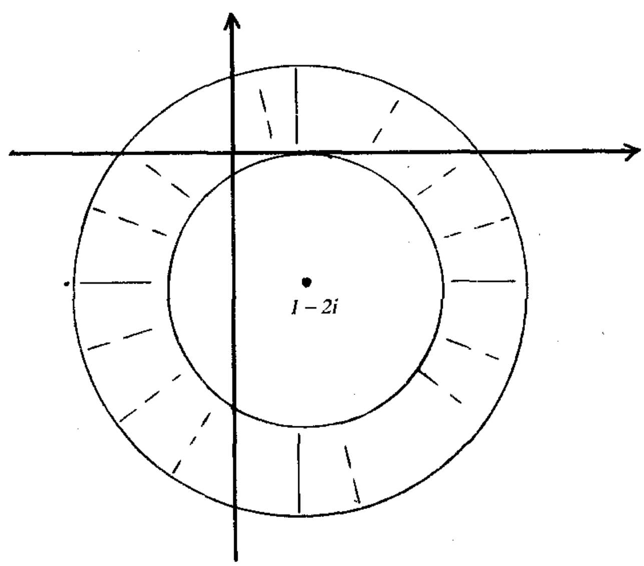
รูปที่ 7.9

2. จากข้อ 1 ทำให้ช่วยอธิบายเกี่ยวกับทางเดินของจุด z ได้ เช่น $|z-i| = 1$ หมายถึง ทางเดินของจุด z จะเป็นวงกลมซึ่งมีจุดศูนย์กลางที่ i และรัศมี 1 หน่วยดังรูป 7.10



รูปที่ 7.10

หรือ $2 < |z-1+2i| < 3$ หมายถึง ระยะห่างจาก z ใด ๆ ไปยังจุด $(1-2i)$ มีค่าน้อยกว่า 3 แต่มากกว่า 2 นั่นคือ พื้นที่วงแหวน ดังรูป 7.11



รูปที่ 7.11

นิยาม 7.6 การคูณจำนวนเชิงซ้อน

ผลคูณของสองจำนวนเชิงซ้อน $z_1 = a_1 + ib_1$ และ $z_2 = a_2 + ib_2$ คือ จำนวนเชิงซ้อนที่ได้จากการใช้การคูณแบบทวินาม (binomials) โดยกฎทางพีชคณิต โดยที่

$i^2 = -1,\ i^3 = -i,\ i^4 = (-i)i = -i^2 = 1$

$i^5 = i, \ldots$

เขียนรูปทั่วไป สำหรับจำนวนเต็ม k ได้ดังนี้

$i^{4k} = 1,\ i^{4k+1} = i,$

$i^{4k+2} = -1,\ i^{4x+3} = -i$

จากกฎนี้ เราได้ว่า

$$z_1z_2 = (a_1 + ib_1)(a_2 + ib_2)$$
$$= a_1a_2 + ib_1a_2 + ia_1b_2 + i^2b_1b_2$$

หรือ
$$z_1z_2 = (a_1a_2 - b_1b_2) + i(b_1a_2 + a_1b_2)$$

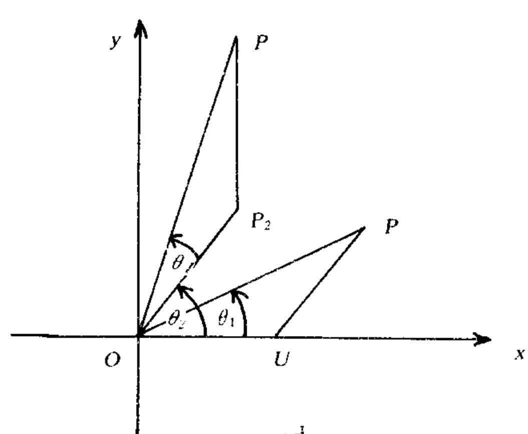
สำหรับกรณีจำนวนเชิงซ้อนที่อยู่ในรูปเชิงขั้ว

$$z_1 = r_1(\cos\theta_1 + i\sin\theta_1),$$
$$z_2 = r_2(\cos\theta_2 + i\sin\theta_2)$$

จะได้
$$z_1z_2 = r_1(\cos\theta_1 + i\sin\theta_1)\ r_2(\cos\theta_2 + i\sin\theta_2)$$
$$= r_1r_2[\cos\theta_1\cos\theta_2 + i\sin\theta_1\cos\theta_2 + i\cos\theta_1\sin\theta_2 + i^2\sin\theta_1\sin\theta_2]$$
$$= r_1r_2[(\cos\theta_1\cos\theta_2 - \sin\theta_1\sin\theta_2) + i(\sin\theta_1\cos\theta_2 + \cos\theta_1\sin\theta_2)]$$
$$= r_1r_2[\cos(\theta_1 + \theta_2) + i\sin(\theta_1 + \theta_2)]$$

นั่นคือ ผลคูณของสองจำนวนเชิงซ้อนคือ จำนวนเชิงซ้อนที่มีมอดุลัสของผลคูณเท่ากับผลคูณของมอดุลัสของ z_1 และ z_2 และอาร์กิวเมนต์ของผลคูณเท่ากับผลบวกของอาร์กิวเมนต์ของ z_1 และ z_2

การสร้างรูปแทนผลคูณ :



รูปที่ 7.12

ให้ P_1 และ P_2 แทนจำนวนเชิงซ้อน z_1 และ z_2

ให้ U เป็นจำนวนเชิงซ้อน $1 = 1+0i$

สร้างสามเหลี่ยม OP_2P ให้คล้ายกับสามเหลี่ยม OUP_1 โดย O เป็นจุดกำเนิด จะได้ว่าจุด P แทนผลคูณ z_1z_2 ด้วยเหตุผลดังนี้

$$P_2\hat{O}P = U\hat{O}P_1 = \theta_1 = \arg z_1$$

และ $$U\hat{O}P_2 = \theta_2 = \arg z_2$$

ดังนั้น

$$\begin{aligned} X\hat{O}P &= X\hat{O}P_2 + P_2\hat{O}P \\ &= \theta_2 + \theta_1 \\ &= \theta_1 + \theta_2 \\ &= \arg z_1 + \arg z_2 \\ &= \arg z_1z_2 \end{aligned}$$

จากสามเหลี่ยม OP_2P คล้ายกันกับสามเหลี่ยม UOP_1 ทำให้ได้

$$\frac{|OP|}{|OP_2|} = \frac{|OP_1|}{|OU|}$$

$$\begin{aligned} |OP| &= |OP_1||OP_2| \\ &= |z_1||z_2| \\ &= |z_1z_2| \end{aligned}$$ (ซึ่งเป็นคุณสมบัติของมอดุลัส)

ข้อสังเกต

จากนิยามการคูณ ทำให้ได้ผลคูณของ z และ $\bar{z}$ ดังนี้

$$z\bar{z} = a^2 + b^2$$

หรือ $$z\bar{z} = |z|^2 = |\bar{z}|^2$$

นั่นคือ ผลคูณของ z และ $\bar{z}$ เท่ากับผลคูณของมอดุลัสของ z และ $\bar{z}$

นิยาม 7.7 การหารจำนวนเชิงซ้อน

การหารของจำนวนเชิงซ้อน นิยามโดยการกระทำผกผันของการคูณ สมมติว่ามี $z_1 = a_1 + ib_1, z_2 = a_2 + ib_2$ โดยที่ $|z_2| = \sqrt{a^2+b^2} \neq 0$ ดังนั้น $\frac{z_1}{z_2} = z$ เป็นจำนวนเชิงซ้อน ซึ่ง $z_1 = z_2z$ นั่นคือ

ถ้า $$\frac{a_1 + ib_1}{a_2 + ib_2} = x + iy$$

แล้ว $$a_1 + ib_1 = (a_2 + ib_2)(x + iy)$$

หรือ $$a_1 + ib_1 = (a_2x - b_2y) + i(a_2y + b_2x)$$

โดย x และ y หาได้จากการแก้สมการ

$$a_2x - b_2y = a_1$$
$$b_2x + a_2y = b_1$$

จะได้

$$x = \frac{a_1a_2 + b_1b_2}{a_2^2 + b_2^2}$$

$$y = \frac{a_2b_1 - a_1b_2}{a_2^2 + b_2^2}$$

เพราะฉะนั้น

$$z = \frac{a_1a_2 + b_1b_2}{a_2^2 + b_2^2} + i\frac{a_2b_1 - a_1b_2}{a_2^2 + b_2^2}$$

การหารจำนวนเชิงซ้อนสามารถกระทำได้อีกอย่างหนึ่ง ดังนี้

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{a_1 + ib_1}{a_2 + ib_2}$$

โดยคูณตัวเศษและตัวส่วนด้วยจำนวนเชิงซ้อนสังยุคของ z_2 ซึ่งจะทำให้ตัวส่วนเป็นจำนวนจริง

$$\frac{a_1 + ib_1}{a_2 + ib_2} = \frac{(a_1 + ib_1)(a_2 - ib_2)}{(a_1 + ib_1)(a_2 - ib_2)}$$

$$= \frac{(a_1a_2 + b_1b_2) + i(a_2b_1 - a_1b_2)}{a_2^2 + b_2^2}$$

$$= \frac{a_1a_2 + b_1b_2}{a_2^2 + b_2^2} + i\,\frac{a_2b_1 - a_1b_2}{a_2^2 + b_2^2}$$

ในกรณีจำนวนเชิงซ้อนที่อยู่ในรูปเชิงขั้ว

$$z_1 = r_1(\cos\theta_1 + i\sin\theta_1),$$
$$z_2 = r_2(\cos\theta_2 + i\sin\theta_2)$$

ดังนั้น ให้

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1(\cos\theta_1 + i\sin\theta_1)}{r_2(\cos\theta_2 + i\sin\theta_2)}$$

$$= z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$$

โดยคุณสมบัติการหาร จะได้ว่า $z_1 = z_2z$

หรือ $r_1(\cos\theta_1 + i\sin\theta_1) = r_2(\cos\theta_2 + i\sin\theta_2)\,r(\cos\theta + i\sin\theta)$

$$= r_2r[\cos(\theta_2 + \theta) + i\sin(\theta_2 + \theta)]$$

จากนิยามการเท่ากันของจำนวนเชิงซ้อน จะพบว่า

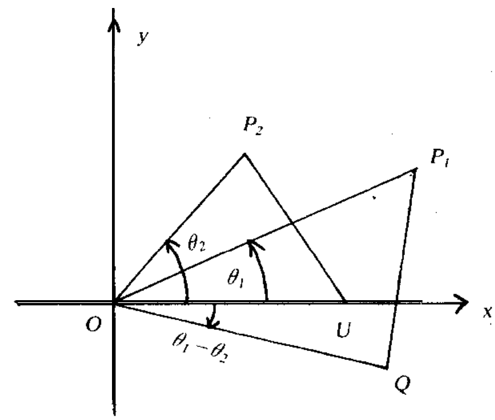
$$r = \frac{r_1}{r_2} \text{ และ } \theta = \theta_1 - \theta_2$$

นั่นคือ $\quad \frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1(\cos\theta_1 + i\sin\theta_1)}{r_2(\cos\theta_2 + i\sin\theta_2)}$

$$= \frac{r_1}{r_2}[\cos(\theta_1-\theta_2) + i\sin(\theta_1-\theta_2)]$$

แสดงว่า มอดุลัสของผลหารเท่ากับผลหารของมอดุลัสของ z_1 และ z_2 และอาร์-กิวเมนต์ของผลหารเท่ากับผลต่างของอาร์กิวเมนต์ของ z_1 และ z_2

การสร้างรูปแทนผลหาร :



รูปที่ 7.13

ให้ P_1 และ P_2 แทนจำนวนเชิงซ้อน z_1 และ z_2, $z_2 \neq 0$

ให้ $U = 1 + 0i$

สร้างสามเหลี่ยม OP_1Q ให้คล้ายกับสามเหลี่ยม OP_2U

จะได้ว่า Q แทนผลหาร $\frac{z_1}{z_2}$ เพราะว่า

$$\begin{aligned}
X\hat{O}Q &= X\hat{O}P_1 + P_1\hat{O}Q \\
&= X\hat{O}P_1 - X\hat{O}P_2 \\
&= \theta_1 - \theta_2 \\
&= \arg z_1 - \arg z_2 \\
&= \arg\left(\frac{z_1}{z_2}\right)
\end{aligned}$$

และจากสามเหลี่ยมคล้าย

$$\frac{|OQ|}{|OP_1|} = \frac{|OU|}{|OP_2|}$$

$$\begin{aligned}
|OQ| &= \frac{|OP_1|}{|OP_2|} \\
&= \frac{|z_1|}{|z_2|} \\
&= \left|\frac{z_1}{z_2}\right| \qquad \text{(ซึ่งเป็นคุณสมบัติของมอดุลัส)}
\end{aligned}$$

ตัวอย่างที่ 7.9 จงหาผลบวกและผลคูณของจำนวนเชิงซ้อน $z_1 = -3+2i$ และ $z_2 = 13-i$

วิธีทำ จาก $z_1+z_2 = (a_1+b_1i)+(a_2+b_2i)$

$= (a_1 + a_2)+(b_1+b_2)i$

ดังนั้น $z_1+z_2 = (-3+2i)+(13-i)$

$= (-3+13)+(2-1)i$

$= 10+i$

จาก $z_1z_2 = (a_1+b_1i)\cdot(a_2+b_2i)$

$= (a_1a_2-b_1b_2)+(b_1a_2+a_1b_2)i$

ดังนั้น $z_1z_2 = (-3+2i)(13-i)$

$= \{(-3)(13)-(2)(-1)\}+\{2(13)+(-3)(-1)\}i$

$= \{-39+2\}+\{26+3\}i$

$= -37+29i$

ตัวอย่างที่ 7.10 จงหาผลต่างและผลหารของ $z_1 = -3+2i$ และ $z_2 = $ **13-i**

วิธีทำ จาก $z_1-z_2 = (a_1+b_1i)-(a_2+b_2i)$

$= (a_1-a_2)+i(b_1-b_2)$

ดังนั้น $z_1-z_2 = (-3+2i)-(13-i)$

$= (-3-13)+i(2-(-1))$

$= -16+3i$

จาก $\dfrac{z_1}{z_2} = \dfrac{(a_1+ib_1)}{(a_2+ib_2)}$

$= \dfrac{a_1a_2+b_1b_2}{a_2^2+b_2^2}+i\,\dfrac{(a_2b_1-a_1b_2)}{a_2^2+b_2^2}$

ดังนั้น $\dfrac{z_1}{z_2} = \dfrac{-3+2i}{13-i}$

$= \dfrac{(-3)(13)+2(-1)}{(13)^2+(-1)^2}+i\left\{\dfrac{(13)(2)-(-3)(-1)}{(13)^2+(-1)^2}\right\}$

$\dfrac{-39-2}{140}+\dfrac{23i}{140}$

$= -\dfrac{41}{140}+\dfrac{23}{140}i$

ข้อสังเกต เราอาจจะใช้วิธีการของจำนวนเชิงซ้อนสังยุคเพื่อหาผลหารได้ดังนี้

$$\frac{-3+2i}{13-i} = \frac{(-3+2i)}{(13-i)}\cdot\frac{(13+i)}{(13+i)}$$

$$= \frac{(-3)(13)-(2)(1)+i(2(13)+(-3)(1))}{(13)^2+(1)^2}$$

$$= \frac{-39-2+i(26-3)}{140}$$

$$= \frac{-41}{140}+\frac{23}{140}i$$

ตัวอย่างที่ 7.11 จงหาค่าของ $\frac{(-1+3i)(1+2i)}{2-i}+2i$

วิธีทำ $\frac{(-1+3i)(1+2i)}{2-i}+2i = \frac{(-1)(1)-(3)(2)+i(3(1)+(-1)2)}{2-i}$

$$= \frac{-7+i}{2-i}+2i$$

$$= \frac{(-7+i)}{(2-i)}\cdot\frac{(2+i)}{(2+i)}+2i$$

$$= \frac{(-7)(2)-(1)(1)+i(1(2)+(-7)(1))}{4+1}+2i$$

$$= \frac{-15-5i}{5}+2i$$

$$= -3-i+2i$$

$$= -3+i$$

ตัวอย่างที่ 7.12 กำหนดให้ $z = 2+3i$ จงหา z^2+2z+3

วิธีทำ จาก $z = 2+3i$

ดังนั้น $z^2+2z+3 = (2+3i)(2+3i)+2(2+3i)+3$

$$= \{(2)(2)-(3)(3)+((3)(2)+(2)(3))i\}+4+6i+3$$

$$= \{-5+12i\}+7+6i$$

$$= 2+18i$$

ตัวอย่างที่ 7.13 จงหาผลคูณของ

$$z_1 = \sqrt{2}\left(\cos \frac{11\pi}{4} + i \sin \frac{11\pi}{4}\right) \text{ และ}$$

$$z_2 = \sqrt{8}\left(\cos \frac{3\pi}{8} + i \sin \frac{3\pi}{8}\right)$$

วิธีทำ จาก $|z_1| = r_1 = \sqrt{2}$

และ $|z_2| = r_2 = \sqrt{8}$

อาร์กิวเมนต์ของผลคูณ z_1z_2 คือ $\theta_1 + \theta_2 = \frac{11\pi}{4} + \frac{3\pi}{8} = \frac{25\pi}{8}$

เนื่องจาก

$$\begin{aligned} z_1z_2 &= r_1r_2[\cos(\theta_1+\theta_2) + i \sin(\theta_1+\theta_2)] \\ &= \sqrt{2}\sqrt{8}\left[\cos \frac{25\pi}{8} + i \sin \frac{25\pi}{8}\right] \\ &= 4\left(\cos \frac{25\pi}{8} + i \sin \frac{25\pi}{8}\right) \end{aligned}$$

ตัวอย่างที่ 7.14 จงหาค่าของ $z = \dfrac{i-1}{\cos\left(\frac{\pi}{3}\right) + i \sin\left(\frac{\pi}{3}\right)}$ ในรูปเชิงขั้ว

วิธีทำ ให้ $z_1 = i - 1$

และให้ $z_2 = \cos \frac{\pi}{3} + i \sin \frac{\pi}{3}$

เนื่องจาก $|z_2| = r_2 = 1$ และ $\theta_2 = \frac{\pi}{3}$

พิจารณา $z_1 = -1 + i$

$|z_1| = r_1 = \sqrt{2}$ และ $\theta_1 = \frac{3\pi}{4}$

ดังนั้น

$$\begin{aligned} z = \frac{z_1}{z_2} &= \frac{r_1}{r_2}[\cos(\theta_1-\theta_2) + i \sin(\theta_1-\theta_2)] \\ &= \sqrt{2}\left[\cos\left(\frac{3\pi}{4} - \frac{\pi}{3}\right) + i \sin\left(\frac{3\pi}{4} - \frac{\pi}{3}\right)\right] \\ &= \sqrt{2}\left(\cos \frac{5\pi}{12} + i \sin \frac{5\pi}{12}\right) \end{aligned}$$

แบบฝึกหัด 7.3

1. จงหาค่าของ z_1+z_2, z_1z_2, z_1-z_2 และ $\frac{z_1}{z_2}$ ถ้า

 1.1 $z_1 = 2+5i,\ z_2 = 1-7i$

 1.2 $z_1 = \sqrt{2}-\sqrt{3}i,\ z_2 = \sqrt{2}+\sqrt{3}i$

2. จงหาค่าของ x และ y ที่เป็นจำนวนจริงจากสมการ

 2.1 $3x+2iy-ix+5y = 7+5i$

 2.2 $(3+4i)^2-2(x-yi) = x+yi$

 2.3 $\left(\frac{1+i}{1-i}\right)^2+\frac{1}{x+yi} = 1+i$

 2.4 $(3-2i)(x+yi) = 2(x-2yi)+2i-1$

 2.5 $2x-3yi+4xi-2y-5-10i = (x+y+2)-(y-x+3)i$

3. จงหาค่าของ

 3.1 $z = \frac{-41+63i}{50}-\frac{(6i+1)}{1-7i}$

 3.2 $z = \left(\frac{-1+\sqrt{3}i}{2i}\right)^2$

 3.3 $z = \frac{13+12i}{6i-8}+\frac{(2i+1)^2}{i+2}$

 3.4 $z = (2+i)^6$

 3.5 $z = \frac{3i^{30}-i^{19}}{2i-1}$

 3.6 $z = \frac{i^4+i^9+i^{16}}{2-i^5+i^{10}-i^{15}}$

4. จงหาค่าในรูปเชิงขั้วของ

 4.1 $z = \frac{1+i\sqrt{3}}{2i\,(\cos 60°+i\sin 60°)}$

 4.2 $z = \frac{i-1}{i\left(1-\cos\frac{2\pi}{5}\right)+\sin\frac{2\pi}{5}}$

5. จงแสดงว่า $\quad \mathrm{Im}(iz) = \mathrm{Re}(z)$

 และ $\quad \mathrm{Re}(iz) = -\mathrm{Im}(z)$

6. จงอธิบายความหมายทางเรขาคณิตของสมการต่อไปนี้

6.1 $|z+i| = 3$

6.2 $|z| \leqslant 2$

6.3 $\mathrm{Im}(z) \geqslant 1$

7.4 คุณสมบัติต่าง ๆ ที่ควรทราบ

ทฤษฎีบท 7.1 สำหรับจำนวนเชิงซ้อน z_1, z_2 และ z_3 จะสอดคล้องคุณสมบัติต่อไปนี้

1. คุณสมบัติปิดภายใต้การบวกและการคูณ นั่นคือ z_1+z_2 และ z_1z_2 ต่างก็เป็นจำนวนเชิงซ้อน

2. คุณสมบัติการสลับที่ภายใต้การบวกและการคูณ นั่นคือ

$$z_1+z_2 = z_2+z_1$$

$$z_1z_2 = z_2z_1$$

3. คุณสมบัติการจัดหมู่ภายใต้การบวกและการคูณ นั่นคือ

$$z_1+(z_2+z_3) = (z_1+z_2)+z_3$$

$$z_1(z_2z_3) = (z_1z_2)z_3$$

4. คุณสมบัติการกระจาย นั่นคือ

$$z_1(z_2+z_3) = z_1z_2+z_1z_3$$

ทฤษฎีบท 7.2 สำหรับจำนวนเชิงซ้อน $z = a+ib$ ใด ๆ

1. $z+\overline{z} = 2a = \mathrm{Re}(z)$
2. $z-\overline{z} = i(2b) = 2i\mathrm{Im}(z)$
3. $z\cdot\overline{z} = a^2+b^2 = |z|^2$
4. $\overline{\overline{z}} = z$
5. $z = \overline{z}$ ก็ต่อเมื่อ z เป็นจำนวนจริง

พิสูจน์

1. $$\begin{aligned} z+\overline{z} &= (a+ib)+(a-ib) \\ &= 2a \\ &= 2\,\mathrm{Re}(z) \end{aligned}$$

2. $$\begin{aligned} z-\overline{z} &= (a+ib)-(a-ib) \\ &= 2ib \\ &= 2i\,\mathrm{Im}(z) \end{aligned}$$

3. $$\begin{aligned} z\cdot\overline{z} &= (a+ib)(a-ib) \\ &= a^2+b^2 \\ &= |z|^2 \end{aligned}$$

4. $\overline{\overline{z}} = \overline{(a-ib)}$

$= \overline{(a+i(-b))}$

$= a-i(-b)$

$= a+ib$

$= z$

5. $z = \overline{z} \leftrightarrow \quad a+ib = a-ib$

$\leftrightarrow \quad b = -b$

$\leftrightarrow \quad 2b = 0$

$\leftrightarrow \quad b = 0$

$\leftrightarrow \quad z = a+ib = a$

ทฤษฎีบท 7.3

สำหรับจำนวนเชิงซ้อน z_1 และ z_2

1. $\overline{z_1+z_2} = \overline{z}_1+\overline{z}_2$

2. $\overline{z_1z_2} = \overline{z}_1 \cdot \overline{z}_2$

3. $z_1 \cdot \overline{z}_2 + \overline{z}_1 \cdot z_2 = 2\ \text{Re}\ (z_1 \cdot z_2)$

พิสูจน์

1. ให้ $z_1 = a_1+ib_1,\ z_2 = a_2+ib_2$

เนื่องจาก $z_1+z_2 = (a_1+a_2)+i(b_1+b_2)$

ดังนั้น $\overline{z_1+z_2} = (a_1+a_2)-i(b_1+b_2)$

$= (a_1-ib_1)+(a_2+ib_2)$

$= \overline{z}_1+\overline{z}_2$

2. เนื่องจาก $z_1z_2 = (a_1a_2-b_1b_2)+i(a_1b_2+a_2b_1)$

ดังนั้น $\overline{z_1z_2} = (a_1a_2-b_1b_2)-i(a_1b_2+a_2b_1)$

$= (a_1-ib_1)(a_2-ib_2)$

$= \overline{z}_1 \cdot \overline{z}_2$

3. เนื่องจาก

$z_1 \cdot \overline{z}_2 + \overline{z}_1 \cdot z_2 = z_1 \cdot \overline{z}_2 + \overline{z_1 \cdot \overline{z}_2}$

$= 2\ \text{Re}(z_1\overline{z}_2)$

ทฤษฎีบท 7.4

สำหรับจำนวนเชิงซ้อน z ใด ๆ

1. $|z| \geqslant 0$
2. $|z| = 0$ ก็ต่อเมื่อ $z = 0$
3. $|z| > 0$ ก็ต่อเมื่อ $z \neq 0$
4. $-|z| \leqslant \operatorname{Re}(z) \leqslant |z|$ และ $-|z| \leqslant \operatorname{Im}(z) \leqslant |z|$
5. $|-z| = |z| = |\bar{z}|$

พิสูจน์

1. $|z| = \sqrt{z \cdot \bar{z}}$

$$= \sqrt{(\operatorname{Re}(z))^2 + (\operatorname{Im}(z))^2} \geqslant 0$$

2. $|z| = 0 \leftrightarrow (\operatorname{Re}(z))^2 + (\operatorname{Im}(z))^2 = 0$

$\leftrightarrow \operatorname{Re}(z) = 0$ และ $\operatorname{Im}(z) = 0$

$\leftrightarrow z = 0$

3. จากข้อ 1. และข้อ 2.

4. เนื่องจาก $|z|^2 = (\operatorname{Re}(z))^2 + (\operatorname{Im}(z))^2$

ดังนั้น $(\operatorname{Re}(z))^2 \leqslant |z|^2$ และ $(\operatorname{Im}(z))^2 \leqslant |z|^2$

นั่นคือ $\pm\operatorname{Re}(z) \leqslant |z|$ และ $\pm\operatorname{Im}(z) \leqslant |z|$

หรือ $-|z| \leqslant \operatorname{Re}(z) \leqslant |z|$ และ $-|z| \leqslant \operatorname{Im}(z) \leqslant |z|$

5. เนื่องจาก
$$\begin{aligned}|-z| &= \sqrt{(\operatorname{Re}(-z))^2 + (\operatorname{Im}(-z))^2} \\ &= \sqrt{(-\operatorname{Re}(z))^2 + (-\operatorname{Im}(z))^2} \\ &= \sqrt{(\operatorname{Re}(z))^2 + (\operatorname{Im}(z))^2} \\ &= |z|\end{aligned}$$

และ
$$\begin{aligned}|\bar{z}| &= \sqrt{(\operatorname{Re}(z))^2 + (-\operatorname{Im}(z))^2} \\ &= \sqrt{(\operatorname{Re}(z))^2 + (\operatorname{Im}(z))^2} \\ &= |z|\end{aligned}$$

ทฤษฎีบท 7.5

สำหรับจำนวนเชิงซ้อน z_1, z_2, z_3

1. $|z_1 z_2| = |z_1||z_2|$
2. ถ้า $z_2 \neq 0$, $\left|\dfrac{z_1}{z_2}\right| = \dfrac{|z_1|}{|z_2|}$
3. $|z_1 - z_2| = 0$ ก็ต่อเมื่อ $z_1 = z_2$

4. $|z_1 - z_2| = |z_2 - z_1|$

5. $|z_1 + z_2| \leqslant |z_1| + |z_2|$

6. $|z_1 - z_2| \leqslant |z_1 - z_3| + |z_2 - z_3|$

7. $||z_1| - |z_2|| \leqslant |z_1 - z_2|$

พิสูจน์

1. $$\begin{aligned} |z_1 z_2|^2 &= (z_1 z_2)\overline{(z_1 z_2)} \\ &= (z_1 z_2)(\overline{z}_1 \overline{z}_2) \\ &= (z_1 \overline{z}_1)(z_2 \overline{z}_2) \\ &= |z_1|^2 |z_2|^2 \\ &= (|z_1||z_2|)^2 \end{aligned}$$

แต่ $0 \leqslant |z_1 z_2|$ และ $0 \leqslant |z_1||z_2|$

ดังนั้น $|z_1 z_2| = |z_1||z_2|$

3. $|z_1 - z_2| = 0$ ก็ต่อเมื่อ $z_1 - z_2 = 0$

ก็ต่อเมื่อ $z_1 = z_2$

5. $$\begin{aligned} |z_1 + z_2|^2 &= (z_1 + z_2)\overline{(z_1 + z_2)} \\ &= (z_1 + z_2)(\overline{z}_1 + \overline{z}_2) \\ &= z_1 \overline{z}_1 + z_2 \overline{z}_2 + z_1 \overline{z}_2 + \overline{z}_1 z_2 \\ &= |z_1|^2 + |z_2|^2 + 2\,\mathrm{Re}(z_1 \overline{z}_2) \\ &\leqslant |z_1|^2 + |z_2|^2 + 2|z_1 \overline{z}_2| \\ &= |z_1|^2 + |z_2|^2 + 2|z_1||\overline{z}_2| \\ &= |z_1|^2 + 2|z_1||z_2| + |z_2|^2 \\ &= (|z_1| + |z_2|)^2 \end{aligned}$$

ดังนั้น $|z_1 + z_2| \leqslant |z_1| + |z_2|$

7. $|z_1| = |(z_1 - z_2) + z_2| \leqslant |z_1 - z_2| + |z_2|$

ดังนั้น $|z_1| - |z_2| \leqslant |z_1 - z_2|$

และ $|z_2| = |(z_2 - z_1| + z_1| \leqslant |z_2 - z_1| + |z_1|$

$= |z_1 - z_2| + |z_1|$

หรือ $-(|z_1| - |z_2|) = |z_2| - |z_1| \leqslant |z_1 - z_2|$

นั่นคือ $\pm(|z_1| - |z_2|) \leqslant |z_1 - z_2|$

เพราะฉะนั้น $||z_1| - |z_2|| \leqslant |z_1 - z_2|$

ข้อสังเกต คุณสมบัติตามข้อ 5 เราเรียกว่า อสมการของสามเหลี่ยม (triangle inequality)

แบบฝึกหัด 7.4

1. ถ้า $z_1 = 3-4i$ และ $z_2 = -2+3i$ แล้ว จงหา

   1.1 $3z_1 - 2\overline{z}_2$

   1.2 $z_1 - \overline{z}_2 - 4$

   1.3 $|2\overline{z}_1 + 3\overline{z}_2 - 1|$

2. ถ้า $z_1 = 1-i$, $z_2 = -2+4i$ และ $z_3 = \sqrt{3}-2i$ จงหา

   2.1 $|2z_2 - 3z_1|^2$

   2.2 $\left|\dfrac{z_1+z_2+1}{z_1-z_2+i}\right|$

   2.3 $\mathrm{Re}(2z_1^3 + 3z_2^2 - 5z_3^2$

   2.4 $\mathrm{Im}\left(\dfrac{z_1 z_2}{z_3}\right)$

3. จงแสดงว่า

   3.1 $\overline{\overline{z}+3i} = z-3i$

   3.2 $\overline{iz} = -i\overline{z}$

   3.3 $\dfrac{(\overline{2+i})^2}{3-4i} = 1$

   3.4 ถ้า $z = \sqrt{3}-2i$ แล้ว $(z-\overline{z})^5 = -1024i$

4. สำหรับจำนวนเชิงซ้อน z จงแสดงว่า

   4.1 $z = 0 \leftrightarrow z\cdot\overline{z} = 0$

   4.2 $\mathrm{Im}(z) = 0 \leftrightarrow z = \overline{z}$

   4.3 $\mathrm{Re}(z) = 0 \leftrightarrow z = -\overline{z}$

   4.4 $|z^2| = |z|^2$

5. จงแสดงว่า $z_1 = -1-i$ และ $z_2 = -2+3i$ สอดคล้องคุณสมบัติอสมการของสามเหลี่ยม

6. จงพิสูจน์ทฤษฎีบท 7.5 ข้อ 2, 4, 6

7.5 กำลังและรากของจำนวนเชิงซ้อน (Powers and Roots of Complex Numbers)

1 กำลัง

จากหัวข้อ 7.3 เราทราบว่า

$$z_1 z_2 = r_1 r_2 [\cos(\theta_1 + \theta_2) + i \sin(\theta_1 + \theta_2)]$$

ถ้า $z_1 = z_2 = z$ จะพบว่า

$$z^2 = r^2 (\cos 2\theta + i \sin 2\theta)$$

ดังนั้นโดยอุปนัยเชิงคณิตศาสตร์ (mathematical induction) สามารถแสดงได้ว่า

$$z^n = r^n (\cos n\theta + i \sin n\theta)$$

เมื่อ n เป็นจำนวนเต็มบวก

หมายเหตุ อุปนัยเชิงคณิตศาสตร์เป็นวิธีพิสูจน์แบบหนึ่ง ซึ่งจะไม่กล่าวถึงในที่นี้

จากสมการ $z^n = r^n (\cos n\theta + i \sin n\theta)$

แสดงว่า เมื่อจำนวนเชิงซ้อนยกกำลังจำนวนเต็มบวก ผลที่ได้คือ มอดุลัสจะถูกยกกำลังด้วย และอาร์กิวเมนต์จะถูกคูณด้วยเลขชี้กำลัง

ถ้า $r = 1$ จะได้สมการที่สำคัญ คือ

$$\begin{aligned} z^n &= (\cos \theta + i \sin \theta)^n \\ &= \cos n\theta + i \sin n\theta \end{aligned}$$

ซึ่งเรียกว่า สูตรของเดอมัวฟ์ (De Moivre's formula) และเป็นจริงสำหรับ n ที่เป็นจำนวนเต็มลบ และจำนวนตรรกยะ ดังนี้

กรณี n เป็นจำนวนเต็มลบ

ให้ $n = -m$ โดย m เป็นจำนวนเต็มบวก

ดังนั้น
$$\begin{aligned} (\cos \theta + i \sin \theta)^n &= (\cos \theta + i \sin \theta)^{-m} \\ &= \frac{1}{(\cos \theta + i \sin \theta)^m} \\ &= \frac{1}{\cos m\theta + i \sin m\theta} \\ &= \frac{\cos m\theta - i \sin m\theta}{(\cos m\theta + i \sin m\theta)(\cos m\theta - i \sin m\theta)} \\ &= \cos m\theta - i \sin m\theta \\ &= \cos(-m)\theta + i \sin(-m)\theta \end{aligned}$$

นั่นคือ
$$(\cos \theta + i \sin \theta)^n = \cos n\theta + i \sin n\theta$$

กรณี n เป็นจำนวนตรรกยะ

ให้ $n = \frac{p}{q}$ โดย p และ q เป็นจำนวนเต็ม

เราสามารถเขียน

$$(\cos\theta + i\sin\theta)^p = \cos p\theta + i\sin p\theta$$

และ $\left(\cos \frac{p}{q}\theta + i\sin\frac{p}{q}\theta\right)^q = \cos p\theta + i\sin p\theta$

ผลที่ได้คือ

$$[(\cos\theta + i\sin\theta)^p]^{\frac{1}{q}} = \cos\frac{p}{q}\theta + i\sin\frac{p}{q}\theta$$

นั่นคือ $(\cos\theta + i\sin\theta)^n = \cos n\theta + i\sin n\theta$

ต่อไปจะพิจารณาถึงการประยุกต์สูตรของเดอมัวฟ์

จาก $(\cos\theta + i\sin\theta)^n = \cos n\theta + i\sin n\theta$

ซ้ายมือของสมการ สามารถใช้ทฤษฎีบททวินาม (Binomial Theorem) กระจาย จากนั้นใช้คุณสมบัติการเท่ากันของจำนวนเชิงซ้อน จะทำให้ได้รูปของ $\sin n\theta$ และ $\cos n\theta$ ในพจน์ของ $\sin\theta$ และ $\cos\theta$ ยกกำลัง ดังตัวอย่างเช่น

ถ้า n = 3 จะได้

$$(\cos\theta + i\sin\theta)^3 = \cos 3\theta + i\sin 3\theta$$

$$\cos^3\theta + 3i\cos^2\theta\sin\theta - 3\cos\theta\sin^2\theta - i\sin^3\theta = \cos 3\theta + i\sin 3\theta$$

หรือ

$$\cos^3\theta - 3\cos\theta\sin^2\theta + i(-\sin^3\theta + 3\cos^2\theta\sin\theta) = \cos 3\theta + i\sin 3\theta$$

จากคุณสมบัติการเท่ากันของจำนวนเชิงซ้อน จะได้

$$\begin{aligned}\cos 3\theta &= \cos^3\theta - 3\cos\theta\sin^2\theta\\ &= \cos^3\theta - 3\cos\theta(1-\cos^2\theta)\\ &= 4\cos^3\theta - 3\cos\theta\end{aligned}$$

และ

$$\begin{aligned}\sin 3\theta &= -\sin^3\theta + 3\cos^2\theta\sin\theta\\ &= -\sin^3\theta + 3(1-\sin^2\theta)\sin\theta\\ &= 3\sin\theta - 4\sin^3\theta\end{aligned}$$

จากข้างต้นนี้ สามารถเขียนให้อยู่ในรูปสูตรที่กะทัดรัดขึ้นดังนี้

ให้ $z = \cos\theta + i\sin\theta$

ดังนั้น $z^n = \cos n\theta + i\sin n\theta$

$$\frac{1}{z} = \cos\theta - i\sin\theta$$

$$\frac{1}{z^n} = \cos n\theta - i\sin n\theta$$

ซึ่งจะพบว่า $$\cos\theta = \frac{1}{2}\left(z + \frac{1}{z}\right),$$

$$\cos n\theta = \frac{1}{2}\left(z^n + \frac{1}{z^n}\right)$$

และ $$\sin\theta = \frac{1}{2i}\left(z - \frac{1}{z}\right),$$

$$\sin n\theta = \frac{1}{2i}\left(z^n - \frac{1}{z^n}\right)$$

เพราะฉะนั้น จะได้สูตรที่นำไปใช้บ่อย ๆ คือ

$$\cos^n\theta = \frac{1}{2^n}\left(z + \frac{1}{z}\right)^n$$

และ $$\sin^n\theta = \frac{1}{(2i)^n}\left(z - \frac{1}{z}\right)^n$$

ตัวอย่างที่ 7.15 จงเขียน $z = (i-\sqrt{3})^{13}$ ให้อยู่ในรูปพีชคณิต (รูป $a+bi$)

วิธีทำ จาก $$z^n = r^n(\cos n\theta + i\sin n\theta)$$

ในที่นี้ $$z = i-\sqrt{3}$$

$$|z| = r = \sqrt{1+3} = 2$$

$$\arg z = \frac{5\pi}{6}$$

ดังนั้น $$z = i-\sqrt{3}$$

$$= 2\left(\cos\frac{5\pi}{6} + i\sin\frac{5\pi}{6}\right)$$

$$(i-\sqrt{3})^{13} = 2^{13}\left(\cos\frac{65\pi}{6} + i\sin\frac{65\pi}{6}\right)$$

$$= 2^{13}\left(\cos\frac{5\pi}{6} + i\sin\frac{5\pi}{6}\right)$$

$$= 2^{13}\left(-\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i\right)$$

$$= -2^{12}\sqrt{3} + 2^{12}i$$

ตัวอย่างที่ 7.16 จงแสดงว่า $\cos^4\theta = \frac{1}{8}(\cos 4\theta + 4\cos 2\theta + 3)$

วิธีทำ จากสูตร $\cos^n\theta = \frac{1}{2^n}\left(z + \frac{1}{z}\right)^n$

ดังนั้น
$$\cos^4\theta = \frac{1}{2^4}\left(z + \frac{1}{z}\right)^4$$
$$= \frac{1}{16}\left(z^4 + 4z^3\cdot\frac{1}{z} + 6z^2\cdot\frac{1}{z^2} + 4z\cdot\frac{1}{z^3} + \frac{1}{z^4}\right)$$
$$= \frac{1}{16}\left[\left(z^4 + \frac{1}{z^4}\right) + 4\left(z^2 + \frac{1}{z^2}\right) + 6\right]$$

แต่ $z^2 + \frac{1}{z^2} = 2\cos 2\theta$

และ $z^4 + \frac{1}{z^4} = 2\cos 4\theta$

ดังนั้น
$$\cos^4\theta = \frac{1}{16}[2\cos 4\theta + 4(2\cos 2\theta) + 6]$$
$$= \frac{1}{16}[2\cos 4\theta + 8\cos 1\theta + 6]$$
$$= \frac{1}{8}(\cos 4\theta + 4\cos 2\theta + 3)$$

ตัวอย่างที่ 7.17 จงแสดงว่า $\sin 3\theta = 3\sin\theta - 4\sin^3\theta$

วิธีทำ จากสูตร $\sin^n\theta = \frac{1}{(2i)^n}\left(z - \frac{1}{z}\right)^n$

ดังนั้น
$$\sin^n\theta = \frac{1}{(2i)^3}\left(z - \frac{1}{z}\right)^3$$
$$= -\frac{1}{8i}\left(z^3 - 3z^2\cdot\frac{1}{z} + 3z\cdot\frac{1}{z^2} - \frac{1}{z^3}\right)$$
$$= -\frac{1}{8i}\left[\left(z^3 - \frac{1}{z^3}\right) - 3\left(z - \frac{1}{z}\right)\right]$$

แต่ $z - \frac{1}{z} = 2i\sin\theta$

และ $z^3 - \frac{1}{z^3} = 2i\sin 3\theta$

ดังนั้น $\sin^3\theta = -\frac{1}{8i}[2i\sin 3\theta - 3(2i\sin\theta)]$

$$= \frac{1}{4}(-\sin 3\theta + 3\sin\theta)$$

นั่นคือ $\sin 3\theta = 3\sin\theta - 4\sin^3\theta$

2. ราก

เราจะมาพิจาณารากที่ n ของจำนวนเชิงซ้อนโดยเราจะเรียกจำนวน z ว่าเป็นรากที่ n ของจำนวน w (อาจเขียนแทนด้วย $z = w^{\frac{1}{n}}$ หรือ $\sqrt[n]{w}$)

ถ้า $z^n = w$

เช่น

$z_1 = i$ และ $z_2 = -i$ ต่างก็เป็นรากที่สองของจำนวน $w = -1$ เนื่องจาก $i^2 = -1$ และ $(-i)^2 = -1$ ดังนั้นจึงกล่าวได้ว่า ทุก ๆ คำตอบของสมการ $z^n = w$ เป็นรากที่ n ของจำนวน w

ถ้า $w = 0$ แล้วสมการ $z^n = w$ มีคำตอบเดียวคือ $z = 0$ ถ้า $w \neq 0$ แล้ว $z \neq 0$, กำหนด z และ w ในรูปเชิงขั้วเป็น

$$z = r(\cos\theta + i\sin\theta),\ w = \rho(\cos\alpha + i\sin\alpha)$$

ดังนั้น สมการ $z^n = w$ จึงเขียนเป็น

$$r^n(\cos n\theta + i\sin n\theta) = \rho(\cos\alpha + i\sin\alpha)$$

จำนวนเชิงซ้อนเท่ากันก็ต่อเมื่อมอดุลัสเท่ากัน และอาร์กิวเมนต์ต่างกันเป็นจำนวน $2\pi k$, k เป็นจำนวนเต็ม นั่นคือ

$$r^n = \rho \text{ และ } n\theta = \alpha + 2\pi k$$

หรือ

$$r = \sqrt[n]{\rho} \text{ และ } \theta = \frac{\alpha}{n} + \frac{2\pi}{n}k,\ k \in Z$$

เพราะฉะนั้นทุก ๆ คำตอบของสมการ $z^n = w$ สามารถเขียนได้เป็น

$$z_k = \sqrt[n]{\rho}\left[\cos\left(\frac{\alpha}{n} + \frac{2\pi}{n}k\right) + i\sin\left(\frac{\alpha}{n} + \frac{2\pi}{n}k\right)\right],\ k \in Z$$

ซึ่งจะเห็นได้โดยง่ายว่า ทุกจำนวน z_k ที่ได้จากค่า $k = 0, 1, 2, \ldots, n-1$ นั้นต่างกัน แต่ถ้าเราให้ $k \geqslant n$ จะพบว่าเราได้จำนวนเชิงซ้อนที่ไม่ต่างจาก $z_0, z_1, z_2, \ldots, z_{n-1}$ เลย เช่น

ให้ $k = n$ จะได้

$$z_n = \sqrt[n]{\rho}\left[\cos\left(\frac{\alpha}{n} + 2\pi\right) + i\sin\left(\frac{\alpha}{n} + 2\pi\right)\right]$$

$$= \sqrt[n]{\rho}\left[\cos\frac{\alpha}{n} + i\sin\frac{\alpha}{n}\right]$$

$$= z_0$$

จึงกล่าวได้ว่า ถ้า $w \neq 0$ แล้วจะมี n รากที่ต่างกัน ซึ่งอยู่ในรูปสูตรดังนี้

$$z_k = \sqrt[n]{\rho}\left[\cos\left(\frac{\alpha}{n} + \frac{2\pi}{n}k\right) + i\sin\left(\frac{\alpha}{n} + \frac{2\pi}{n}k\right)\right],$$

$$k = 0, 1, 2, \ldots, n-1$$

จากสูตรข้างบนนี้จะสังเกตเห็นว่า ทุก ๆ รากมีมอดุลัสเท่ากัน แต่ต่างกันที่อาร์กิวเมนต์ โดยต่างกันเป็นจำนวน $\frac{2\pi}{n}k,\ k \in Z$ ดังนั้น เมื่อเขียนจำนวนเชิงซ้อนที่เป็นรากที่ n ของ w ลงในระนาบเชิงซ้อน จะสมนัยกับจุดซึ่งเป็นจุดยอดของรูป n เหลี่ยมที่แนบในวงกลมซึ่งมีรัศมี $\sqrt[n]{\rho}$ และจุดศูนย์กลางที่ $z = 0$

หมายเหตุ สำหรับกรณี $w = 1$ เรานิยมแทนรากที่ n ของ 1 ด้วย w_k

ดังนั้น

$$w_k = \cos\frac{2\pi}{n}k + i\sin\frac{2\pi}{n}k,\ k = 0, 1, 2, \ldots, n-1$$

(เพราะว่า $\rho = 1, \alpha = 0$)

และยิ่งกว่านั้น w_k ยังสอดคล้องคุณสมบัติต่อไปนี้

1. $w_k = w_1^k,\ k = 0, 1, 2, \ldots, n-1$

2. $\sum_{k=0}^{n-1} w_k = 0 = \sum_{k=0}^{n-1} w_1^k$

พิสูจน์ 1. $w_k = \cos\frac{2\pi}{n}k + i\sin\frac{2\pi}{n}k$

$$= \left(\cos\frac{2\pi}{n} + i\sin\frac{2\pi}{n}\right)^k \quad \text{จากสูตรเดอมัวฟ์}$$

$$= w_1^k$$

พิสูจน์ 2. $\sum_{k=0}^{n-1} w_k = \sum_{k=0}^{n-1} w_1^k$

$$= \sum_{k=0}^{n-1}\left[\cos\frac{2\pi}{n} + i\sin\frac{2\pi}{n}\right]^k$$

$$= \sum_{k=0}^{n-1}[e^{2i\pi/n}]^k$$ ดูสูตรของออยเลอร์ หน้า 306

$$= \frac{(e^{n(2i\pi/n)} - 1)}{(e^{2i\pi/n} - 1)} \qquad \text{จากสูตร} \quad s_n = \frac{a(r^n - 1)}{r - 1}$$

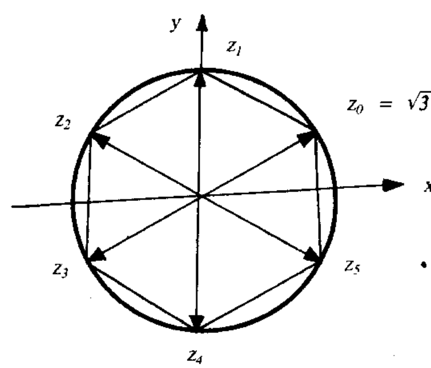
$$= \frac{(e^{2i\pi} - 1)}{(e^{2i\pi/n} - 1)}$$

$$= \frac{1 - 1}{(e^{2i\pi/n} - 1)}$$

$$= 0$$

ตัวอย่างที่ 7.18 จงหารากทั้งหมดจากสมการ $z^6 = -64$

วิธีทำ



รูปที่ 7.14

ในที่นี้ $w = -64$ ซึ่งเขียนในรูปเชิงขั้วได้เป็น

$$-64 = 64(\cos \pi + i \sin \pi)$$

จากสูตรรากที่ n

$$z_k = \sqrt[n]{\rho}\left[\cos\left(\frac{\alpha}{n} + \frac{2\pi}{n}k\right) + i \sin\left(\frac{\alpha}{n} + \frac{2\pi}{n}k\right)\right]$$

$k = 0, 1, 2, \ldots, n-1$

โดย $\rho = 64, n = 6, \alpha = \pi$

ดังนั้น

$$z_k = \sqrt[6]{64}\left[\cos\left(\frac{\pi}{6} + \frac{2\pi}{6}k\right) + i \sin\left(\frac{\pi}{6} + \frac{2\pi}{6}k\right)\right]$$

$$k = 0, 1, 2, 3, 4, 5$$

ผลที่ได้ คือ

$$z_0 = 2\left[\cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6}\right] = \sqrt{3} + i$$

$$z_1 = 2\left[\cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2}\right] = 2i$$

$$z_2 = 2\left[\cos\frac{5\pi}{6} + i\sin\frac{5\pi}{6}\right] = -\sqrt{3} + i$$

$$z_3 = 2\left[\cos\frac{7\pi}{6} + i\sin\frac{7\pi}{6}\right] = -\sqrt{3} - i$$

$$z_4 = 2\left[\cos\frac{3\pi}{2} + i\sin\frac{3\pi}{2}\right] = -2i$$

$$z_5 = 2\left[\cos\frac{11\pi}{6} + i\sin\frac{11\pi}{6}\right] = \sqrt{3} - i$$

ซึ่งนำค่าต่าง ๆ ไปเขียนในระนาบเชิงซ้อนจะได้จุดยอดของรูปหกเหลี่ยมด้านเท่าแนบในวงกลมรัศมี 2 หน่วย ที่มีจุดศูนย์กลางที่จุด $z = 0$ ดังรูป

ตัวอย่างที่ 7.19 จงหารากที่สามของ 1 ทุก ๆ ค่า

วิธีทำ ในที่นี้ $w = 1$ ซึ่งเขียนในรูปเชิงขั้วได้เป็น

$$1 = \cos 0° + i\sin 0°$$

จากสูตรรากที่ n

$$z_k = \sqrt[n]{\rho}\left[\cos\left(\frac{\alpha}{n} + \frac{2\pi}{n}k\right) + i\sin\left(\frac{\alpha}{n} + \frac{2\pi}{n}k\right)\right]$$

$k = 0, 1, 2, \ldots, n-1$

โดย $\rho = 1, n = 3, \alpha = 0$

ดังนั้น

$$z_k = \sqrt[3]{1}\left[\cos\frac{2\pi}{3}k + i\sin\frac{2\pi}{3}k\right]$$

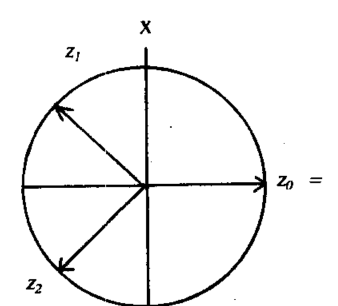
$$k = 0, 1, 2$$

ผลที่ได้ คือ

$$z_0 = \cos 0 + i\sin 0 = 1$$

$$z_1 = \cos\frac{2\pi}{3} + i\sin\frac{2\pi}{3} = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$$

$$z_2 = \cos\frac{4\pi}{3} + i\sin\frac{4\pi}{3} = -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$$



รูปที่ 7.15

ตัวอย่างที่ 7.20 จงหารากทั้งหมดของ $(-1+i)^{\frac{1}{3}}$

วิธีทำ ในที่นี้ $w = -1+i$ ซึ่งเขียนในรูปเชิงขั้วได้เป็น

$$-1+i = \sqrt{2}\left(\cos\frac{3\pi}{4} + i\sin\frac{3\pi}{4}\right)$$

จากสูตรรากที่ n

$$z_k = \sqrt[n]{\rho}\left[\cos\left(\frac{\alpha}{n} + \frac{2\pi}{n}k\right) + i\sin\left(\frac{\alpha}{n} + \frac{2\pi}{n}k\right)\right]$$

$k = 0, 1, 2, \ldots, n-1$

โดย $\rho = 2^{\frac{1}{2}}, n = 3, \alpha = \frac{3\pi}{4}$

ดังนั้น

$$z_k = 2^{\frac{1}{6}}\left[\cos\left(\frac{\pi}{4} + \frac{2\pi}{3}k\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{4} + \frac{2\pi}{3}k\right)\right]$$

ผลที่ได้คือ

$$z_0 = 2^{\frac{1}{6}}\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right)$$

$$z_1 = 2^{\frac{1}{6}}\left(\cos\frac{11\pi}{12} + i\sin\frac{11\pi}{12}\right)$$

$$z_2 = 2^{\frac{1}{6}}\left(\cos\frac{19\pi}{12} + i\sin\frac{19\pi}{12}\right)$$

ข้อสังเกต กรณีที่ w เป็นจำนวนจริง

1. ถ้า w เป็นจำนวนจริงบวกแล้ว รากที่ n ของ w คือ

$$\sqrt[n]{w}\left(\cos\frac{2\pi}{n}k + i\sin\frac{2\pi}{n}k\right) \qquad k = 0, 1, 2, \ldots, n-1$$

2. ถ้า w เป็นจำนวนจริงลบแล้ว รากที่ n ของ w คือ

$$\sqrt[n]{|w|}\left[\cos\left(\frac{\pi}{n} + \frac{2\pi}{n}k\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{n} + \frac{2\pi}{n}k\right)\right]$$

สูตรของออยเลอร์ (Euler's Formula)

เราทราบว่าอนุกรม

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \ldots + \frac{x^n}{n!} + \ldots$$

โดยการเขียน ix แทน x จะได้

$$e^{ix} = 1 + ix + \frac{i^2x^2}{2!} + \frac{i^3x^3}{3!} + \ldots + \frac{i^nx^n}{n!} + \ldots$$

$$= 1 + ix - \frac{x^2}{2!} - i\frac{ix^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{ix^5}{5!} - \ldots$$

$$= \left(1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \ldots\right) + i\left(x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \ldots\right)$$

ซึ่งเราจะพบภายหลังว่า

$$1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \ldots = \cos x$$

และ

$$x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \ldots = \sin x$$

ดังนั้น

$$e^{ix} = \cos x + i \sin x$$

ซึ่งเรียกสมการข้างต้นนี้ว่า สูตรของออยเลอร์

ทำนองเดียวกัน เราได้

$$e^{-ix} = \cos x - i \sin x$$

ยิ่งกว่านั้น จากความสัมพันธ์ของสมการทั้งสองจะพบว่า

$$\cos x = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}$$

และ $$\sin x = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}$$

ข้อสังเกต

จาก $z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$

ดังนั้น $z = re^{i\theta}$

แบบฝึกหัด 7.5

1. จงใช้สูตรของเดอมัวฟ์ หาค่าต่อไปนี้

   1.1 $\dfrac{2}{(1-i)^4}$

   1.2 $\dfrac{\{2(\cos 15^\circ + i \sin 15^\circ)\}^7}{\{4(\cos 45^\circ + i \sin 45^\circ)\}^3}$

   1.3 $\left(\dfrac{1-\sqrt{3}i}{1-\sqrt{3}i}\right)^{10}$

2. จงแสดงว่า

   2.1 $\cos 5\theta = 16 \cos^5 \theta - 20 \cos^3 \theta + 5 \cos \theta$

   2.2 $\dfrac{\sin 5\theta}{\sin \theta} = 16 \cos^4 \theta - 12 \cos^2 \theta + 1$

   ถ้า $\theta \neq 0, \pm\pi, \pm 2\pi, \ldots$

3. จงแสดงว่า $2+i = \sqrt{5}e^{i \tan^{-1} \frac{1}{2}}$

4. จงหาค่ารากทั้งหมดของ

   4.1 $8^{\frac{1}{3}}$

   4.2 $-32^{\frac{1}{5}}$

   4.3 $(-2\sqrt{3}-2i)^{\frac{1}{4}}$

   4.4 $(4\sqrt{2}+4\sqrt{2}i)^{\frac{1}{2}}$

   4.5 $i^{\frac{1}{2}}$

   4.6 $(-15-8i)^{\frac{1}{2}}$

5. จงแก้สมการต่อไปนี้

   5.1 $z^5 - 1 = 0$

   5.2 $z^4 + 81 = 0$

   5.3 $z^6 + 1 = -\sqrt{3}i$