บทที่ 5
เมตริกซ์ และ ดีเทอร์มิแนนท์
Matrices and Determinants

เราสามารถใช้เมตริกซ์และดีเทอร์มิแนนท์ ช่วยแก้ปัญหาในทางคณิตศาสตร์ได้มากมาย เช่น ช่วยหาคำตอบของสมการ

5.1 นิยามโดยทั่วไปและคุณสมบัติของเมตริกซ์

นิยาม 5.1 เมตริกซ์ (matrix) คือ การนำเอาตัวเลขมาเขียนเรียงแถวในรูปสี่เหลี่ยมผืนผ้าและปิดล้อมตัวเลขเหล่านั้นด้วยเครื่องหมาย [ ] ตัวอย่างเช่น

$$\begin{bmatrix} 3 & 2 & 6 \\ 1 & 2 & 4 \\ 3 & 2 & 1 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} 1 & 2 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} 3 & 7 & \pi & e \\ 0 & e-9 & \pi \\ 1 & 3 & 7 & 4 \end{bmatrix}$$

(1) (2) (3)

จากตัวอย่าง (1) ตัวเลข (3 2 6) เรียกว่า เป็นสมาชิกในแถว (row) ที่หนึ่ง ตัวเลข (1 2 4) เรียกว่าเป็นสมาชิกในแถวที่สอง และ (3 2 1) เรียกว่าเป็นสมาชิกในแถวที่ 3 และ

ตัวเลข $\begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 6 \\ 4 \\ 1 \end{bmatrix}$ เรียกว่า สมาชิกในแนวตั้ง (column) ที่ 1, 2 และ 3 ตามลำดับ

โดยทั่ว ๆ ไปแล้ว สมาชิกที่อยู่แถวที่ i และแนวตั้งที่ j ของเมตริกซ์ เรียกว่าเป็นสมาชิกที่ (i, j) เช่น จากตัวอย่าง (3) 0 เป็นสมาชิกที่ (2, 1) ของเมตริกซ์

โดยทั่ว ๆ ไป ถ้าให้ A เป็นเมตริกซ์ใด ๆ จะเขียนแทนเมตริกซ์ A ด้วย

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \quad \text{หรือ } A = (a_{ij})_{\substack{i = 1,\ldots,m \\ j = 1,\ldots,n}}$$

โดยที่ a_{ij} เป็นสมาชิกที่ (i, j) ของเมตริกซ์ A

นิยาม 5.2 ขนาด (size) ของเมตริกซ์บอกได้ด้วยจำนวนแถวและจำนวนแนวตั้ง (column) เช่น ในตัวอย่าง (1) เมตริกซ์นี้มี 3 แถว และ 3 แนวตั้ง เรากล่าวว่า เมตริกซ์ (1) มีขนาด 3×3 (อ่านว่า 3 by 3) ตัวอย่าง (2) มี 1 แถว 2 แนวตั้ง ดังนั้น เมตริกซ์ (2) มีขนาด 1×2 และตัวอย่าง (3) มี 3 แถว 4 แนวตั้ง เมตริกซ์ (3) จึงมีขนาด 3×4

นิยาม 5.3 ถ้าเมตริกซ์ใดมีจำนวนแถวเท่ากับจำนวนแนวตั้ง เรากล่าวว่า เมตริกซ์นั้นเป็นเมตริกซ์จัตุรัส (square matrix)

นอกจากนี้ ถ้าเมตริกซ์ใดมีจำนวนแถวเท่ากับจำนวนแนวตั้ง เท่ากับ n เรากล่าวว่า เมตริกซ์นี้เป็นเมตริกซ์จัตุรัสขนาด n (a square matrix of order n)

นิยาม 5.4 ถ้า $A = (a_{ij})_{\substack{i=1,\ldots,m \\ j=1,\ldots,n}}$ เป็น $m\times n$ เมตริกซ์ โดยที่ $a_{ij} = 0$ ทุก ๆ ค่า i และ j เรากล่าวว่า A เป็นเมตริกซ์ศูนย์ (zero matrix) ซึ่งเขียนแทนด้วย 0

นิยาม 5.5 ถ้า $A = (a_{ij})_{\substack{i=1,\ldots,n \\ j=1,\ldots,n}}$ เป็นเมตริกซ์จัตุรัสขนาด $n\times n$ สมาชิก $a_{11}, a_{22}, a_{33},\ldots,a_{nn}$ ของ A เรียกว่า เป็นสมาชิกที่อยู่บนเส้นทแยงมุมหลัก (main diagonal)

ตัวอย่างที่ 5.1 ให้ $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 3 \\ 1 & -1 & e \end{bmatrix}$

ตัวเลข 1, 1, e คือ สมาชิกที่อยู่บนเส้นทแยงมุมหลักของ A

นิยาม 5.6 เมตริกซ์จัตุรัส ขนาด $n\times n$ ที่อยู่ในรูปของ

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & a_{22} & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & a_{33} & \ldots & 0 \\ \ldots & & & & \ldots \\ 0 & 0 & 0 & & a_{nn} \end{bmatrix}$$

เรียกว่า เป็นเมตริกซ์เฉียง (diagonal matrix)

ตัวอย่างที่ 5.2 $A = \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$

เป็นเมตริกซ์เฉียง (diagonal matrix)

นิยาม 5.7 เมตริกซ์เฉียง ที่มีสมาชิกบนเส้นทแยงมุมหลักเป็น 1 หมด เรียกว่า เมตริกซ์เอกลักษณ์ (identity matrix) โดยทั่ว ๆ ไปจะใช้สัญลักษณ์ I_n แทนเมตริกซ์เอกลักษณ์ (identity matrix) ขนาด n

ตัวอย่างที่ 5.3 $I_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

$$I_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

การเท่ากันของเมตริกซ์

กำหนด $A = (a_{ij})_{\substack{i=1,\ldots,m \\ j=1,\ldots,n}}$ เป็น $m \times n$ เมตริกซ์ และ $B = (b_{ij})_{\substack{i=1,\ldots,p \\ j=1,\ldots,q}}$ เป็น $p \times q$ เมตริกซ์ เรากล่าวว่า $A = B$ เมื่อ

1) $m = p$ และ $n = q$ หรือกล่าวว่า A และ B มีขนาดเท่ากัน

2) $a_{ij} = b_{ij}$ ทุก ๆ ค่า i และ j

ตัวอย่างที่ 5.4 ให้ $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 1 & 5 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$

ในที่นี้ $A \neq B$ เพราะถึงแม้ว่า A และ B จะมีขนาดเดียวกัน แต่สมาชิก (1, 2) ของ A และ B ไม่เท่ากัน

การบวกเมตริกซ์

นิยาม 5.8 กำหนด $A = (a_{ij})$ และ $B = (b_{ij})$ เป็น $m \times n$ เมตริกซ์ ผลบวกของ A และ B เขียนแทนด้วย $A+B$ นิยามโดย

$$A+B = (a_{ij}+b_{ij})$$

ดังนี้ ผลบวกของเมตริกซ์ ขนาด $m \times n$ จะเป็นเมตริกซ์ ขนาด $m \times n$ ด้วย

ข้อควรจำ เราไม่นิยามผลบวกของเมตริกซ์ที่มีขนาดต่างกัน

ตัวอย่างที่ 5.5 $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 & 5 \\ 0 & 3 & 1 & 2 \\ 4 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

$B = \begin{bmatrix} 0 & 3 & 1 & 4 \\ 7 & 1 & 1 & 3 \\ 3 & 5 & 1 & 7 \end{bmatrix}$

จะได้ $A+B = \begin{bmatrix} 2+0 & 1+3 & 3+1 & 5+4 \\ 0+7 & 3+1 & 1+1 & 2+3 \\ 4+3 & 0+5 & 0+1 & 1+7 \end{bmatrix}$

$= \begin{bmatrix} 2 & 4 & 4 & 9 \\ 7 & 4 & 2 & 5 \\ 7 & 5 & 1 & 8 \end{bmatrix}$

การคูณเมตริกซ์ด้วยปริมาณสเกลาร์

นิยาม 5.9 กำหนด $A = (a_{ij})_{\substack{i=1,\dots,m \\ j=1,\dots,n}}$ เป็น $m \times n$ เมตริกซ์ c เป็นปริมาณสเกลาร์ ผลคูณของ c และ A เขียนแทนด้วย cA นิยามโดย $cA = (ca_{ij})_{\substack{i=1,\dots,m \\ j=1,\dots,n}}$

ตัวอย่างที่ 5.6 ให้ $A = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 4 \\ 5 & 3 \end{bmatrix}$

จะได้ $3A = \begin{bmatrix} 3\times 3 & 3\times 2 \\ 3\times 1 & 3\times 4 \\ 3\times 5 & 3\times 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9 & 6 \\ 3 & 12 \\ 15 & 9 \end{bmatrix}$

$$(\quad)A = \begin{bmatrix} (-1)3 & (-1)2 \\ (-1)1 & (-1)4 \\ (-1)5 & (-1)3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 & -2 \\ -1 & -4 \\ -5 & -3 \end{bmatrix}$$

หมายเหตุ 1) ถ้า A เป็นเมตริกซ์ใด ๆ เราใช้สัญลักษณ์ $-A$ แทน $(-1)A$

2) ถ้า A และ B เป็นเมตริกซ์ขนาดเดียวกัน

$$A-B = A+(-B) = A+(-1)B$$

ตัวอย่างที่ 5.7 ให้ $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 \\ -1 & 1 & 3 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} -1 & 0 & -2 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$

จะได้ $-B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -1 & -1 & 0 \end{bmatrix}$

และ $A-B = \begin{matrix} 2+1 & 3+0 & 4+2 \\ -1-1 & 1-1 & 3+0 \end{matrix} = \begin{bmatrix} 3 & 3 & 6 \\ -2 & 0 & 3 \end{bmatrix}$

คุณสมบัติของการบวกของเมตริกซ์

ทฤษฎีบท 5.1 ให้ $A = (a_{ij})$, $B = (b_{ij})$ เป็น $m \times n$ เมตริกซ์ จะได้ว่า $A+B = B+A$ กฎนี้เรียกว่า กฎการสลับที่สำหรับการบวก (The commutative law for addition)

พิสูจน์ $A+B = (a_{ij}+b_{ij}) = (b_{ij}+a_{ij}) = B+A$

#

ทฤษฎีบท 5.2 ให้ $A = (a_{ij})$, $B = (b_{ij})$ และ $C = (c_{ij})$ เป็น $m \times n$ เมตริกซ์ จะได้ว่า

$$(A+B)+C = A+(B+C)$$

กฎนี้เรียกว่า กฎการจัดหมู่ (The associative law for addition)

พิสูจน์
$$\begin{aligned} (A+B)+C &= (a_{ij}+b_{ij})+(c_{ij}) \\ &= ((a_{ij}+b_{ij})+c_{ij}) \\ &= (a_{ij}+(b_{ij}+c_{ij})) \\ &= (a_{ij})+(b_{ij}+c_{ij}) = A+(B+C) \end{aligned}$$

#

ทฤษฎีบท 5.3 กำหนด $A = (a_{ij})$ เป็น $m \times n$ เมตริกซ์ และ 0 เป็นเมตริกซ์ศูนย์ขนาด $m \times n$ จะได้

1) $A + 0 = O + A = A$

2) $A - A = 0$

3) $O - A = -A$

พิสูจน์ 1) เนื่องจากเมตริกซ์ มีคุณสมบัติสอดคล้องตามกฎการสลับที่สำหรับการบวกตามทฤษฎีบท 5.2 จึงได้ว่า $A + 0 = O + A$ และ

$$A + 0 = (a_{ij} + 0) = (a_{ij}) = (A) = (0 + a_{ij}) = O + A$$

2) $A - A = A + (-A) = (a_{ij} + (-a_{ij})) = (0)$

$= 0$

3) $O - A = 0 + (-A) = (0 - a_{ij}) = (-a,,)$

$= -A$

คุณสมบัติของการคูณเมตริกซ์ด้วยปริมาณสเกลาร์

ทฤษฎีบท 5.4 ให้ a เป็นปริมาณสเกลาร์ $B = (b_{ij})$ และ $C = (c_{ij})$ เป็น $m \times n$ เมตริกซ์ จะได้ว่า

$$a(B + C) = aB + aC$$

พิสูจน์ $a(B + C) = a(b_{ij} + c_{ij})$

$= (a(b_{ij} + c_{ij}))$

$= (ab_{ij} + ac_{ij})$

$= (ab_{ij}) + (ac_{ij})$

$= aB + aC$

#

ทฤษฎีบท 5.5 กำหนด a, b เป็นปริมาณสเกลาร์ $C = (c_{ij})$ เป็น $m \times n$ เมตริกซ์ จะได้

1) $(a + b)C = aC + bC$

2) $(ab)C = a(bC)$

พิสูจน์ 1) $(a + b)C = ((a + b)c_{ij}) = (ac_{ij} + bc_{ij})$

$= (ac_{ij}) + (bc_{ij})$

$= aC + bC$

2) $(ab)C = ((ab)c_{ij}) = (a(bc_{ij}))$

$$= a(bC)$$

5.2 ผลคูณระหว่างเมตริกซ์กับเมตริกซ์

นิยาม 5.10 กำหนด $A = (a_{ij})_{\substack{i=1,2,\ldots,m \\ j=1,2,\ldots,r}}$ เป็น $m \times r$ เมตริกซ์ และ $B = (b_{ij})_{\substack{i=1,2,\ldots,r \\ j=1,2,\ldots,n}}$ เป็น $r \times n$ เมตริกซ์ ผลคูณระหว่าง A และ B เขียนแทนด้วย AB จะเป็น $m \times n$ เมตริกซ์ ซึ่งนิยามโดย $AB = (c_{ij})_{\substack{i=1,\ldots,m \\ j=1,\ldots,n}}$ โดยที่

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^{r} a_{ik}b_{kj}; \quad 1 \leqslant i \leqslant m,\ 1 \leqslant j \leqslant n$$

ตัวอย่างที่ 5.8 กำหนดให้ $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 4 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$

A เป็น 2x3 เมตริกซ์ และ B เป็น 3x3 เมตริกซ์ ดังนั้น จะได้ AB เป็น 2×3 เมตริกซ์ และถ้ากำหนด $AB = (c_{ij})_{\substack{i=1,2 \\ j=1,2,3}}$ จะได้

$$c_{11} = a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21} + a_{13}b_{31}$$
$$= (1)(4) + (2)(0) + (3)(1) = 7$$
$$c_{12} = a_{11}b_{12} + a_{12}b_{22} + a_{13}b_{32}$$
$$= (1)(3) + (2)(1) + (3)(1) = 8$$
$$c_{13} = a_{11}b_{13} + a_{12}b_{23} + a_{13}b_{33}$$
$$= (1)(0) + (2)(0) + (3)(1) = 3$$
$$c_{21} = a_{21}b_{11} + a_{22}b_{21} + a_{23}b_{31}$$
$$= (0)(4) + (1)(0) + (1)(1) = 1$$
$$c_{22} = a_{21}b_{12} + a_{22}b_{22} + a_{23}b_{32}$$
$$= (0)(3) + (1)(1) + (1)(1) = 2$$
$$c_{23} = a_{21}b_{13} + a_{22}b_{23} + a_{23}b_{33}$$
$$= (0)(0) + (1)(0) + (1)(1) = 1$$

ดังนั้น จะได้ $AB = \begin{bmatrix} 7 & 8 & 3 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$

ข้อควรจำ จากนิยามการคูณระหว่างเมตริกซ์ พบว่า เมตริกซ์จะคูณกันได้ก็ต่อเมื่อจำนวนแนวตั้งของตัวตั้งเท่ากับจำนวนแถวของตัวคูณเท่านั้น

คุณสมบัติการคูณของเมตริกซ์

ถึงแม้ว่ากฎทางพีชคณิตต่าง ๆ ของจำนวนจริง จะใช้ได้สำหรับเมตริกซ์ แต่ยังมีข้อยกเว้นบางประการที่พบว่ากฎทางพีชคณิตของจำนวนจริงใช้ไม่ได้สำหรับเมตริกซ์ เช่น

1. สำหรับจำนวนจริง a และ b ใด ๆ จะได้ว่า ab = ba ซึ่งกฎนี้เรียกว่า กฎการสลับที่สำหรับการคูณของจำนวนจริง (The commutative law for multiplication) แต่สำหรับเมตริกซ์ เราพบว่า เมื่อ A และ B เป็นเมตริกซ์ใด ๆ ที่สามารถคูณกันได้แล้ว AB ไม่จำเป็นต้องเท่ากับ BA

ตัวอย่างที่ 5.9 กำหนดให้ $A = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 0 \end{bmatrix}$

จะได้ $AB = \begin{bmatrix} -1 & -2 \\ 11 & 4 \end{bmatrix}$ และ $BA = \begin{bmatrix} 3 & 6 \\ -3 & 0 \end{bmatrix}$

ตัวอย่างที่ 5.10 ให้ $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ และ $B = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 2 & -1 & 1 \end{bmatrix}$

จะได้ $AB = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 2 & -1 & 1 \end{bmatrix}$

แต่เราไม่สามารถหา BA ได้ เนื่องจากจำนวนแนวตั้งของ B ไม่เท่ากับจำนวนแถวของ A

2. สำหรับจำนวนจริง a, b, c ใด ๆ ถ้า ab = ac แล้ว โดยที่ $a \neq 0$ จะได้ว่า b = c ซึ่งกฎนี้เราเรียกว่า กฎการตัดออก (The cancellation law) แต่สำหรับเมตริกซ์ ถ้ากำหนดให้ $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$ และ $C = \begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$ จะพบว่า AB = AC โดยที่ $B \neq C$ ดังนั้น การคูณของเมตริกซ์จึงไม่เป็นไปตามกฎการตัดออก (The cancellation law)

3. สำหรับจำนวนจริง a, b ใด ๆ ถ้า ab = 0 แล้ว จะได้ว่า a = 0 หรือ b = 0 แต่สำหรับเมตริกซ์แล้วกฎนี้ไม่จริง ตัวอย่างเช่น

$$\text{ให้ } A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

จะได้ว่า $AB = 0$ โดยที่ $A \neq 0$ และ $B \neq 0$

ทฤษฎีบท 5.6 กำหนด $A = (a_{ij})$ เป็น $m \times n$ เมตริกซ์ $B = (b_{ij})$ เป็น $n \times p$ เมตริกซ์ และ $C = (c_{ij})$ เป็น $p \times q$ เมตริกซ์ จะได้ว่า $(AB)C = A(BC)$

กฎนี้เรียกว่า กฎการจัดหมู่สำหรับการคูณของเมตริกซ์ (The Associative law for multiplication)

พิสูจน์

$$AB = \left(\sum_{k=1}^{n} a_{ik}b_{kj}\right)_{\substack{i=1,\ldots,m \\ j=1,\ldots,p}}$$

ดังนั้น

$$(AB)C = \left(\sum_{j=1}^{p}\left(\sum_{k=1}^{n} a_{ik}b_{kj}\right)c_{jl}\right)_{\substack{i=1,\ldots,m \\ j=1,\ldots,q}}$$

$$= \left(\sum_{j=1}^{p}\left(\sum_{k=1}^{n} a_{ik}b_{kj}c_{jl}\right)\right)_{\substack{i=1,\ldots,m \\ j=1,\ldots,q}}$$

และ

$$BC = \left(\sum_{j=1}^{p} b_{kj}c_{jl}\right)_{\substack{k=1,\ldots,m \\ j=1,\ldots,q}}$$

$$A(BC) = \left(\sum_{k=1}^{n} a_{ik}\left(\sum_{j=1}^{p} b_{kj}c_{jl}\right)\right)_{\substack{i=1,\ldots,m \\ j=1,\ldots,q}}$$

$$= \left(\sum_{k=1}^{n}\left(\sum_{j=1}^{p} a_{ik}b_{kj}c_{jl}\right)\right)_{\substack{i=1,\ldots,m \\ j=1,\ldots,q}}$$

$$= \left(\sum_{j=1}^{p}\left(\sum_{k=1}^{n} a_{ik}b_{kj}c_{jl}\right)\right)_{\substack{i=1,\ldots,m \\ j=1,\ldots,q}}$$

$$= (AB)C$$

ทฤษฎีบท 5.7 กำหนด $A = (a_{ij})$ เป็น $m\times n$ เมตริกซ์ $B = (b_{ij})$ และ $C = (c_{ij})$ เป็น $n\times p$ เมตริกซ์ จะได้ว่า $A(B+C) = AB+AC$

กฎนี้เรียกว่า กฎการกระจาย (The distributive law)

พิสูจน์ ให้ A_i แทนแถวที่ i ของ A และ B^j, C^j แทนแนวตั้งที่ j ของ B และ C ตามลำดับ จะได้ว่าสมาชิกที่ (i, j) ของ AB คือ $A_i\cdot B^j$ และสมาชิกที่ (i, j) ของ AC คือ $A_i\cdot C^j$ นอกจากนั้นเนื่องจาก B^j+C^j เป็นแนวตั้งที่ j ของ $B+C$ จึงได้สมาชิกที่ (i, j) ของ $A(B+C)$ คือ $A_i(B^j+C^j)$ และจากคุณสมบัติของเวกเตอร์ได้ว่า $A_i(B^j+C^j) = A_i\cdot B^j+A_i\cdot C^j$ ดังนั้นสมาชิกที่ (i, j) ของ $A(B+C)$ เท่ากับสมาชิกที่ (i, j) ของ $AB+AC$ ซึ่งแสดงว่า

$$A(B+C) = AB+AC$$

ทฤษฎีบท 5.8 ให้ A, B เป็น $m\times n$ เมตริกซ์ C เป็น $n\times p$ เมตริกซ์ จะได้ว่า

$$(A+B)C = AC+BC$$

พิสูจน์ ให้ $A = (a_{ij})$, $B = (b_{ij})$ และ $C = (c_{ij})$

จะได้ $$A+B = (a_{ij}+b_{ij})_{\substack{i=1,\ldots,m\\ j=1,\ldots,n}}$$

ดังนั้น $$(A+B)C = \left(\sum_{k=1}^{n}(a_{ik}+b_{ik})c_{kj}\right)_{\substack{i=1,\ldots,m\\ j=1,\ldots,p}}$$

$$= \left(\sum_{k=1}^{n}(a_{ik}c_{kj}+b_{ik}c_{kj})\right)_{\substack{i=1,\ldots,m\\ j=1,\ldots,p}}$$

$$= \left(\sum_{k=1}^{n}a_{ik}c_{kj}+\sum_{k=1}^{n}b_{ik}c_{kj}\right)_{\substack{i=1,\ldots,m\\ j=1,\ldots,p}}$$

$$= \left(\sum_{k=1}^{n}a_{ik}c_{kj}\right)+\left(\sum_{k=1}^{n}b_{ik}c_{kj}\right)$$

$$= AC+BC$$

ทฤษฎีบท 5.9 กำหนด a เป็นปริมาณสเกลาร์ $B = (b_{ij})$ เป็น $m \times n$ เมตริกซ์ และ $C = (c_{ij})$ เป็น $n \times p$ เมตริกซ์ จะได้ $a(BC) = (aB)C = B(aC)$

พิสูจน์ $$BC = \left(\sum_{k=1}^{n} b_{ik}c_{kj}\right)$$

ดังนั้น $$a(BC) = \left(a\sum_{k=1}^{n} b_{ik}c_{kj}\right) = \left(\sum_{k=1}^{n} ab_{ik}c_{kj}\right)$$

$$= \left(\sum_{k=1}^{n} (ab_{ik})c_{kj}\right) = (aB)C$$

และ $$\left(\sum_{k=1}^{n} ab_{ik}c_{kj}\right) = \left(\sum_{k=1}^{n} b_{ik}(ac_{kj})\right) = B(aC)$$

จึงได้ว่า $\mathbf{a(BC)} = (aB)C = \mathbf{B(aC)}$

5.3 การสลับเปลี่ยนของเมตริกซ์ (The Transpose of a Matrix)

นิยาม 5.11 ถ้า $A = (a_{ij})$ เป็น $m \times n$ เมตริกซ์ และ $A^T = (b_{ij})$ เป็น $n \times m$ เมตริกซ์ โดยที่ $b_{ij} = a_{ji}$ เรียก A^T ว่า **การสลับเปลี่ยนของ A (The transpose of A)**

ตัวอย่างที่ 5.11 $$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & -1 \end{bmatrix}$$

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{และ} \quad D = [1 \ \ -1 \ \ 0]$$

จะได้ $$A^T = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \qquad B^T = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \\ 4 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

$$C^T = \begin{bmatrix} \\ 01 & 01 & 01 \end{bmatrix} \quad \text{และ} \quad D^T = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

ทฤษฎีบท 5.10 กำหนด r เป็นสเกลาร์ $A = (a_{ij})$ และ $B = (b_{ij})$ เป็น mxn เมตริกซ์

I) $(A^T)^T = A$

2) $(A+B)^T = A^T + B^T$

3) $(rA)^T = rA^T$

และถ้า $A = (a_{ij})$ เป็น $m \times n$ เมตริกซ์ $B = (b_{ij})$ เป็น $n \times p$ เมตริกซ์ จะได้

4) $(AB)^T = B^T A^T$

พิสูจน์ I) ให้ $A^T = (\bar{a}_{ij})$ โดยที่ $\bar{a}_{ij} = a_{ji}$ $1 \leqslant i \leqslant m$, $1 \leqslant j \leqslant n$

ดังนั้น $(A^T)^T = (\bar{a}_{ij}^T)$ โดยที่ $\bar{a}_{ij}^T = \bar{a}_{ji} = a_{ij}$

นั่นคือ $(A^T)^T = A$

2) ให้ $A + B = (c_{ij})$ โดยที่ $c_{ij} = a_{,,} + b_{ij}$

ดังนั้น $(A\ t\ B)^T = (\bar{c}_{ij})$ โดยที่ $\bar{c}_{ij} = c_{ji}$ $1 \leqslant i \leqslant m$, $1 \leqslant j \leqslant n$

และเนื่องจาก $c_{ji} = a_{ji} + b_{ji}$

จึงได้ว่า $(A+B)^T = (\bar{c}_{ij}) = (a_{ji} + b_{ji}) = (a_{,,}) + (b_{ji}) = A^T + B^T$

3) เนื่องจาก $rA = (ra_{ij})$ จึงได้ว่า ถ้า $(rA)^T = (c_{ij})$ แล้ว $c_{ij} = ra_{ji}$

ดังนั้น $(rA)^T = (c_{ij}) = (ra_{,,}) = r(a_{ji}) = rA^T$

4) ให้ $AB = (c_{,,})$ และ $(AB)' = (\bar{c}_{ij})$ โดยที่ $\bar{c}_{ij} = c_{ji}$

ดังนั้น $\bar{c}_{ij} = c_{ji} = \sum_{k=1}^{n} a_{jk} b_{ki}$

กำหนด $B^T A^T = (d_{ij})$ จะพบว่า $d_{ij} = \sum_{k=1}^{n} \bar{b}_{ik} \bar{a}_{ik}$ โดยที่ $\bar{b}_{ik} = b_{ki}$ และ $\bar{a}_{kj} = a_{jk}$

ดังนั้น $d_{ij} = \sum_{k=1}^{n} \bar{b}_{ik} \bar{a}_{kj} = \sum_{k=1}^{n} b_{ki} a_{jk} = \sum_{k=1}^{n} a_{jk} b_{ki} = c_{ji} = \bar{c}_{ij}$

นั่นก็คือ $(AB)^T = B^T A^T$ #

ตัวอย่างที่ 5.12 ให้ $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$

จะได้ $AB^T = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$

และ $B^TA^T = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$

นิยาม 5.12 เมตริกซ์ A จะเรียกว่าเป็นเมตริกซ์สมมาตร (symmetric matrix) ถ้า $A = A^T$ นั่นคือ A จะเป็นเมตริกซ์สมมาตร ถ้า A เป็นเมตริกซ์จัตุรัส และ $a_{ij} = a_{ji}$ ทุกค่า i และ j

ตัวอย่างเช่น $A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 5 \\ 4 & 2 & -1 \end{bmatrix}$, $I_4 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

เป็นเมตริกซ์สมมาตร (symmetric matrix)

การกระทำเบื้องต้นกับแถว (Elementary row operation)

นิยาม 5.13 ให้ $A = (a_{ij})$ เป็น $m \times n$ เมตริกซ์ การกระทำเบื้องต้นกับแถว (elementary row operation) บน A คือ การกระทำแบบหนึ่งแบบใดในสามแบบนี้คือ

ก) สลับแถวที่ i และ j ของ A นั่นคือ แทนที่ $a_{i1}, a_{i2}, \ldots, a_{in}$ ด้วย $a_{j1}, a_{j2}, \ldots, a_{jn}$ และแทนที่ $a_{j1}, a_{j2}, \ldots, a_{jn}$ ด้วย $a_{i1}, a_{i2}, \ldots, a_{in}$

ข) คูณแถวที่ i ของ A ด้วยสเกลาร์ $c \neq 0$ นั่นคือ แทนที่ $a_{i1}, a_{i2}, \ldots, a_{in}$ ด้วย $ca_{i1}, ca_{i2}, \ldots, ca_{in}$

ค) คูณแถวที่ i ของ A ด้วยสเกลาร์ $c \neq 0$ และนำมาบวกกับแถวที่ j, $i \neq j$ นั่นคือแทนที่ $a_{j1}, a_{j2}, \ldots, a_{jn}$ ด้วย $ca_{i1} + a_{j1}, ca_{i2} + a_{j2}, \ldots, ca_{in} + a_{jn}$

โดยทั่ว ๆ ไปเราใช้สัญลักษณ์ $R_i \longleftrightarrow R_j$ แทนการกระทำแบบ ก) cR_i แทนการกระทำแบบ ข) และ cR_i+R_j แทนการกระทำแบบ ค)

ตัวอย่างที่ 5.22 ให้ $A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 2 & -2 & 1 & 4 \end{bmatrix}$

สลับที่ระหว่างแถวที่ 1 และ 3 ของ A ($R_1 \longleftrightarrow R_3$) เราได้

$$B = \begin{bmatrix} 2 & -2 & 1 & 4 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \end{bmatrix}$$

คูณแถวที่ 3 ของ A ด้วย $\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}R_3\right)$ เราได้

$$C = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & \frac{1}{2} & 2 \end{bmatrix}$$

คูณแถวที่ 2 ของ A ด้วย 2 และบวกกับแถวที่ 3 ($2R_2+R_3$) เราได้

$$D = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 4 & 0 & 1 & 6 \end{bmatrix}$$

5.4 เมตริกซ์ผกผัน (The Inverse of a Matrix)

นิยาม 5.14 กำหนด A เป็น $n \times n$ เมตริกซ์ จะเรียก B ว่าเป็นเมตริกซ์ผกผัน (inverse) ของ A ถ้า $AB = BA = I_n$

โดยทั่ว ๆ ไป ถ้า B เป็นเมตริกซ์ผกผัน (inverse) ของ A เขียนแทน B ด้วย A^{-1}

ตัวอย่างที่ 5.13 กำหนด $A = \begin{bmatrix} 3 & 5 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$ จะได้ $B = \begin{bmatrix} 2 & -5 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}$ เป็นเมตริกซ์ผกผันของ A

เนื่องจาก $AB = \begin{bmatrix} 3 & 5 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 & -5 \\ -1 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

และ $$BA = \begin{bmatrix} 2 & -5 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 3 & 5 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

ตัวอย่างที่ 5.14 กำหนด $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 2 \end{bmatrix}$

ถ้าให้ $B = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{bmatrix}$ เป็น 3×3 เมตริกซ์ใด ๆ

จะพบว่า สมาชิกในแถวที่ 2 ของ AB จะเป็นศูนย์ทั้งแถว
นั่นคือ $AB \neq I_3$ ดังนั้น A เป็นเมตริกซ์ที่หาเมตริกซ์ผกผันไม่ได้

หมายเหตุ จากนิยามของเมตริกซ์ผกผันของ A พบว่า ถ้า B เป็นเมตริกซ์ผกผันของ A แล้ว จะได้ A เป็นเมตริกซ์ผกผันของ B ด้วย

ตัวอย่างที่ 5.15 กำหนด $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ เป็น 2×2 เมตริกซ์ โดยที่ $ad - bc \neq 0$

สมมุติว่า $B = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{bmatrix}$ เป็น 2×2 เมตริกซ์ โดยที่

$$AB = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

ดังนั้น โดยการแก้สมการหาค่า b_{11}, b_{12}, b_{21} และ b_{22} เราพบว่า

$$B = \frac{1}{ad - bc}\begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$$

และจะได้ว่า $BA = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

ดังนั้น ถ้า $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ เป็น 2×2 เมตริกซ์ โดยที่ $ad - bc \neq 0$ แล้ว

จะได้ว่า $A^{-1} = \frac{1}{ad\text{-}bc}\begin{bmatrix} d & 1 \\ -c & a \end{bmatrix}$

ตัวอย่างที่ 6.16 กำหนด $A = \begin{bmatrix} \text{cps}\ \theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$

เราพบว่า co&-(-sin%) $= 1 \neq 0$

ดังนั้น $A^{-1} = \frac{1}{\cos^2\theta + \sin^2\theta}\begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin 8 \\ \sin e & \cos\theta \end{bmatrix}$

$$= \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$$

เมตริกซ์เบื้องต้นและการหาเมตริกซ์ผกผันของ A (Elementary matrices and a method for finding A-')

นิยาม 5.15 เมตริกซ์จัตุรัสที่ได้จากการกระทำเบื้องต้นแบบแถว แบบใดแบบหนึ่งเพียงครั้งเดียว บนเมตริกซ์เอกลักษณ์ เรียกว่า เป็นเมตริกซ์เบื้องต้น (elementary matrix)

ตัวอย่างที่ 5.17 $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

เป็นเมตริกซ์เบื้องต้น (elementary matrix)

ตัวอย่างที่ 5.18 กำหนด $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 3 \\ 2 & -1 & 3 & 6 \\ 1 & 4 & 4 & 0 \end{bmatrix}$

และ $E = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ เป็นเมตริกซ์เบื้องต้น (elementary matrix) ซึ่งเกิดจากการเอา 2 คูณแถวที่ 1 ของ I_3 บวกกับแถวที่ 2 $(2R_1+R_2)$

ดังนั้นจะได้ $EA = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 3 \\ 4 & -1 & 7 & 12 \\ 1 & 4 & 4 & 0 \end{bmatrix}$

ซึ่งได้ผลเหมือนกับการกระทำเบื้องต้น บน A แบบเดียวกับกระทำบน I_3 ซึ่งทำให้ได้เมตริกซ์ E กล่าวคือ เอา 2 คูณ แถวที่ 1 ของ A แล้วนำมาบวกกับแถวที่ 2 $(2R_1+R_2)$ เมตริกซ์ที่ได้คือ EA

จากตัวอย่างที่กล่าวมาทำให้ได้ทฤษฎีบทต่อไปนี้คือ

ทฤษฎีบท 5.11 กำหนด E เป็นเมตริกซ์เบื้องต้น (elementary matrix) ซึ่งเกิดจากการกระทำแบบแถวบน I_m จะได้ว่า EA เป็นเมตริกซ์ซึ่งได้จากการกระทำเบื้องต้นแบบแถวบน A แบบเดียวกับที่ทำบน I_m

ดังนั้น ที่ทราบมาแล้วว่า เมตริกซ์เบื้องต้น (elementary matrix) เกิดจากการกระทำแบบแถวเพียงครั้งเดียวบนเมตริกซ์เอกลักษณ์ (identity matrix) ดังนี้ เราจะพบว่าถ้าเราทำการกระทำแบบแถวที่เหมาะสมบนเมตริกซ์เบื้องต้น ดังตารางที่แสดงไว้ จะทำให้ได้เมตริกซ์เอกลักษณ์ (identity matrix) ซึ่งการกระทำแบบนี้เรียก การกระทำผกผัน (inverse operations)

ตารางที่ 5.1

การกระทำแบบแถวบน I ซึ่งทำให้เกิด E	การกระทำแบบแถวบน E ซึ่งทำให้เกิด I
คูณแถวที่ i ด้วย $c \neq 0$	คูณแถวที่ i ด้วย $\frac{1}{c}$
สลับแถวที่ i และแถวที่ j	สลับแถวที่ i และแถวที่ j
คูณแถวที่ i ด้วย c และนำไปบวกกับแถวที่ j	คูณแถวที่ i ด้วย $-c$ แล้วนำไปบวกกับแถวที่ j

ทฤษฎีบท 5.12 เมตริกซ์เบื้องต้นเป็นเมตริกซ์ที่หาเมตริกซ์ผกผันได้ และเมตริกซ์ผกผันของเมตริกซ์เบื้องต้นย่อมเป็นเมตริกซ์เบื้องต้นด้วย

พิสูจน์ กำหนด E เป็นเมตริกซ์เบื้องต้น ดังนั้น จากตาราง 5.1 สามารถทำการกระทำแบบแถวบน E แล้วทำให้เกิด I ได้ ดังนั้นจากทฤษฎีบท 5.11 เราสามารถหาเมตริกซ์เบื้องต้น E_0 ได้ ซึ่ง $E_0E = I$ เนื่องจาก E_0 เป็นเมตริกซ์เบื้องต้น ด้วยเหตุผลเดียวกับข้างต้น ทำให้ได้เมตริกซ์เบื้องต้น E_1 ซึ่งทำให้ $E_1E_0 = I$

จาก $E_0E = I$ เราได้ $E_1E_0E = E_1I$ ซึ่งทำให้ได้ว่า $IE = E_1I$ นั่นคือ $E = E_1$

ดังนั้น E หาเมตริกซ์ผกผันได้ และเมตริกซ์ผกผันของ E เป็นเมตริกซ์เบื้องต้น

#

นิยาม 5.16 ถ้า B เป็นเมตริกซ์ซึ่งเกิดจากการกระทำแบบแถวบน A n ครั้ง เรากล่าวว่า B สมมูลย์แบบแถว (row equivalent) กับ A

ทฤษฎีบท 5.13 กำหนด A เป็นเมตริกซ์จัตุรัสขนาด n โดยที่ A สมมูลย์แบบแถวกับ I_n แล้ว A จะหาเมตริกซ์ผกผันได้

พิสูจน์ สมมุติ I_n เกิดจากการกระทำแบบแถว k ครั้ง บน A โดยผลของทฤษฎีบท 5.11 สามารถหาเมตริกซ์เบื้องต้น $E_1, E_2, \ldots, E_k$ ได้ ซึ่ง $E_kE_{k-1}, \ldots, E_2E_1A = I_n$ เนื่องจาก $E_k, E_{k-1}, \ldots, E_2, E_1$ เป็นเมตริกซ์เบื้องต้น ซึ่งหาเมตริกซ์ผกผันได้ ดังนั้น จะได้ $A = E_1^{-1}E_2^{-1}, \ldots, E_k^{-1}$ ซึ่งเป็นผลคูณของเมตริกซ์ที่มีเมตริกซ์ผกผัน ดังนั้น จึงได้ว่า A หาเมตริกซ์ผกผันได้

#

จากการพิสูจน์ทฤษฎีบท 5.13 พบว่า $A^{-1} = E_kE_{k-1} \ldots E_2E_1I_n$ ดังนั้น การหาเมตริกซ์-ผกผันของ A สามารถทำได้โดยการกระทำเบื้องต้นแบบแถวบน A ให้ได้เมตริกซ์เอกลักษณ์ I_n และกระทำแบบแถวแบบเดียวกันนั้นบน I_n เมตริกซ์ที่ได้นี้จะเป็นเมตริกซ์ผกผันของ A

ตัวอย่างที่ 5.19 กำหนด $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 3 \\ 5 & 5 & 1 \end{bmatrix}$

พิจารณา 3×6 เมตริกซ์

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 5 & 5 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{\frac{1}{2}R_2} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{3}{2} & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 5 & 5 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{-5R_1+R_3} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{3}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & -4 & -5 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{-\frac{1}{4}R_3} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{3}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{5}{4} & 0 & -\frac{1}{4} \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{-\frac{3}{2}R_3+R_2} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{15}{8} & \frac{1}{2} & \frac{3}{8} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{5}{4} & 0 & -\frac{1}{4} \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{-R_2+R_1} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & \frac{23}{8} & -\frac{1}{2} & -\frac{3}{8} \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{15}{8} & \frac{1}{2} & \frac{3}{8} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{5}{4} & 0 & -\frac{1}{4} \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{-R_3+R_1}\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & \frac{13}{8} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{8} \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{15}{8} & \frac{1}{2} & \frac{3}{8} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{5}{4} & 0 & -\frac{1}{4} \end{array}\right]$$

ดังนั้น $A^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{13}{8} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{8} \\ -\frac{15}{8} & \frac{1}{2} & \frac{3}{8} \\ \frac{5}{4} & 0 & -\frac{1}{4} \end{bmatrix}$

ตัวอย่างที่ 5.20 กำหนด $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 1 & -2 & 1 \\ 5 & -2 & -3 \end{bmatrix}$

พิจารณา

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & -3 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 5 & -2 & -3 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{-R_1+R_2}\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & -3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & 4 & -1 & 1 & 0 \\ 5 & -2 & -3 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{-5R_1+R_3}\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & -3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & 4 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & -12 & 12 & -5 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{-3R_2+R_3}\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & -3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & 4 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & -3 & 1 \end{array}\right]$$

ดังนั้น A จะสมมูลแบบแถวกับ $\begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 0 & -4 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ ซึ่งมีแถวที่ 3 เป็นศูนย์ทั้งแถวซึ่งหมายความว่า A จะไม่สามารถสมมูลแบบแถวกับ I_3

ดังนั้น A จึงหาเมตริกซ์ผกผันไม่ได้

5.5 ดีเทอร์มิแนนท์ (Determinants)

ก่อนที่จะรู้จักการหาดีเทอร์มิแนนท์ของเมตริกซ์จัตุรัสขนาด n ใด ๆ จะแนะนำให้เข้าใจถึงวิธีการหาดีเทอร์มิแนนท์ของเมตริกซ์จัตุรัส ขนาด 1×1 และ 2×2 เสียก่อน

นิยาม 5.16 ให้ A เป็นเมตริกซ์จัตุรัสขนาด 1×1 หรือ 2×2 ดีเทอร์มิแนนท์ของ A เขียนแทนด้วย det A หรือ $|A|$ นิยามโดย

1. ถ้า $A = [a_{11}]$, $\det A = a_{11}$

2. ถ้า $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$ $\det A = a_{11}a_{22} - a_{21}a_{22}$

ตัวอย่างที่ 5.21 ให้ $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}$

จะได้ $\det A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 4 \end{bmatrix} = 2\times4 - 1\times1 = 7$

ตัวอย่างที่ 5.22 $I_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

$$\det I_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = 1\times1 - 0\times0 = 1$$

นิยาม 5.17 กำหนด A เป็นเมตริกซ์จัตุรัส minor ของ a_{ij} เขียนแทนด้วย M_{ij}

กำหนดให้ M_{ij} คือ ดีเทอร์มิแนนท์ของเมตริกซ์ที่ได้จากการตัดแถวที่ i และแนวตั้งที่ j ของ A ออก และใช้สัญลักษณ์ C_{ij} แทน $(-1)^{i+j}M_{ij}$ ซึ่งเรียกว่า Cofactor ของ a_{ij}

ตัวอย่างที่ 5.23 $A = \begin{bmatrix} 3 & 1 & -4 \\ 2 & 5 & 6 \\ 1 & 4 & 8 \end{bmatrix}$.

$$M_{11} = \begin{vmatrix} 5 & 6 \\ 4 & 8 \end{vmatrix} = 5\times 8 - 6\times 4 = 16$$

$$C_{11} = (-1)^{1+1}M_{11} = 16$$

$$M_{23} = \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} = 3\times 4 - 1\times 1 = 11$$

$$C_{23} = (-1)^{2+3}M_{23} = (-1)(11) = -11$$

ข้อสังเกต cofactor และ minor ของ a_{ij} แตกต่างกันที่เครื่องหมายบวกหรือลบเท่านั้น ตาราง 5.2 จะแสดงถึงเครื่องหมายที่แตกต่างกันของ cofactor และ minor ของ a_{ij}

ตาราง 5.2

$$\begin{bmatrix} + & - & + & - & + & - & \cdots \\ - & + & - & + & - & + & \cdots \\ + & - & + & - & + & - & \cdots \\ - & + & - & + & - & + & \cdots \end{bmatrix}$$

จากตารางแสดงว่า $C_{11} = M_{11}$, $C_{23} = -M_{23}$, $C_{31} = M_{31}$ ดังนี้เป็นต้น

ต่อไปนี้จะให้นิยามของดีเทอร์มิแนนท์ของเมตริกซ์จัตุรัส ขนาด n ใด ๆ

นิยาม 5.18 กำหนด $A = (a_{ij})$ เป็นเมตริกซ์จัตุรัส ขนาด $n\times n$ กำหนด det A โดย

$$\det A = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}C_{ij} \quad \text{โดยที่ } 1 \leqslant i \leqslant n$$

ตัวอย่างที่ 5.24 $A = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 2 & -4 & 3 \\ 5 & 4 & -2 \end{bmatrix}$

$$\det A = \sum_{j=1}^{3} a_{ij}C_{ij}$$

$$= a_{11}C_{11} + a_{12}C_{12} + a_{13}C_{13}$$

$$= 3(-1)^{1+1}\begin{vmatrix} -4 & 3 \\ 4 & -2 \end{vmatrix} + 1(-1)^{1+2}\begin{vmatrix} -2 & 3 \\ 5 & -2 \end{vmatrix} + 0(-1)^{1+3}\begin{vmatrix} -2 & -4 \\ 5 & 4 \end{vmatrix}$$

$$= 3(8-12) - 1(4-15) + 0 = -1$$

หรืออาจหาได้โดย

$$\det A = \sum_{j=1}^{3} a_{2j}C_{2j}$$

$$= a_{21}C_{21} + a_{22}C_{22} + a_{23}C_{23}$$

$$= (-2)(-1)^{2+1}\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 4 & -2 \end{vmatrix} - 4(-1)^{2+2}\begin{vmatrix} 3 & 0 \\ 5 & -2 \end{vmatrix} + 3(-1)^{2+3}\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 5 & 4 \end{vmatrix}$$

$$= 2(-2) - 4(-6) - 3(12-5)$$

$$= -4 + 24 - 21 = -1$$

ตัวอย่างที่ 5.25 กำหนด $A = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & 3 \\ 0 & 1 & 8 & 0 \end{bmatrix}$ จงหา $\det A$

เนื่องจาก แถวที่ 3 ของ A มีสมาชิกเป็นศูนย์อยู่ 2 ตำแหน่ง ดังนั้น เพื่อความสะดวก จึงเลือก $i = 3$

$$\det A = \sum_{i=1}^{4} a_{3j}C_{3j}$$

$$= a_{31}C_{31} + a_{32}C_{32} + a_{33}C_{33} + a_{34}C_{34}$$

$$= 0(-1)^{3+1}\begin{vmatrix} -1 & 1 & 3 \\ 2 & -1 & 1 \\ 1 & 8 & 0 \end{vmatrix} + 0(-1)^{3+2}\begin{vmatrix} 0 & 1 & 3 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & 8 & 0 \end{vmatrix}$$

$$+ 3(-1)^{3+3}\begin{vmatrix} 0 & -1 & 3 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} + 3(-1)^{3+4}\begin{vmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 8 \end{vmatrix}$$

$$= 0 + 0 + 3\{0(-1) + 1(0-0) + 3(1)\} - 3\{0 + 1(8) + 1(1)\}$$

$$= 9 - 27 = -18$$ #

กฎของเครมเมอร์ (Cramer's Rule)

กำหนด $A = (a_{ij})$ เป็นเมตริกซ์จัตุรัส ขนาด nxn โดยที่ $\det A \neq 0$ **จะได้ว่า** **ระบบสม**การ

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n &= b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n &= b_2 \\ &\cdots\cdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nn}x_n &= b_n \end{aligned}$$

สามารถหาคำตอบได้ และหาได้เพียงคำตอบเดียวเท่านั้น กล่าวคือ ถ้า A_i **คือ เมตริกซ์ที่เกิดขึ้น**จากการแทนแนวตั้งที่ i ของ A ด้วย $\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ b_n \end{pmatrix}$ จะได้

$$x_i = \frac{\det A_i}{\det A} \qquad 1 \leqslant i \leqslant n$$

ตัวอย่างที่ 5.26 จงใช้กฎของเครมเมอร์ (Cramer's Rule) หาคำตอบของระ**บบสมการ**

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_3 &= 6 \\ -3x_1 + 4x_2 + 6x_3 &= 30 \\ -x_1 - 2x_2 + 3x_3 &= 8 \end{aligned}$$

ให้ $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 3 & 4 & 6 \\ -1 & -2 & 3 \end{bmatrix}$

จะได้ $\det A = 44 \neq 0$

$$A_1 = \begin{bmatrix} 6 & 0 & 2 \\ 30 & 4 & 6 \\ 8 & -2 & 3 \end{bmatrix}$$

$$A_2 = \begin{bmatrix} 1 & 6 & 2 \\ -3 & 30 & 6 \\ -1 & 8 & 3 \end{bmatrix}$$

$$A, = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 6 \\ -1 & -2 & 8 \\ 1 & 4 & 30 \end{vmatrix}$$

ได้ว่า $\det A, = -40$, $\det A_2 = 72$

$\det A_3 = 152$

ดังนั้น จะได้ $x_1 = \dfrac{\det A_1}{\det A} = -\dfrac{40}{44} = -\dfrac{10}{11}$

$$x_2 = \frac{\det A_2}{\det A} = \frac{12}{44} = \frac{18}{11}$$

และ $x_3 = \dfrac{\det A_3}{\det A} = \dfrac{152}{44} = \dfrac{38}{11}$

แบบฝึกหัด 5.1

1. ให้ $A = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ -1 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 4 & -1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$, $C = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 5 \\ 1 & 4 & 2 \end{bmatrix}$, $D = \begin{bmatrix} 1 & 5 & 2 \\ -1 & 0 & 1 \\ 3 & 2 & 4 \end{bmatrix}$

$E = \begin{bmatrix} 6 & 1 & 3 \\ -1 & 1 & 2 \\ 4 & 1 & 3 \end{bmatrix}$

จงหาค่าของ

ก) AB ข) $D + E$ ค) $D - E$

ง) DE จ) ED ฉ) $-7B$

2. จงใช้เมตริกซ์ในข้อ 1. หาค่า (ถ้าหาได้) ของ

ก) $3C - D$ ข) $(3E)D$ ค) $(AB)C$

ง) $A(BC)$ จ) $(4B)C + 2B$ ฉ) $D + E^2$ (โดยที่ $E^2 = EE$)

3. กำหนด $\begin{bmatrix} a - b & b + c \\ 3d + c & 2a - 4d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 & 1 \\ 7 & 6 \end{bmatrix}$ จงหาค่าของ a, b, c, d

4. กำหนด $\begin{bmatrix} a + b & c + d \\ c - d & a - b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 6 \\ 10 & 2 \end{bmatrix}$ จงหาค่า a, b, c, d

5. ให้ $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 4 \end{bmatrix}$ จงแสดงว่า $AB \neq BA$

6. ให้ $A = \begin{bmatrix} -2 & 3 \\ 2 & -3 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 3 & 6 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$ จงแสดงว่า $AB = 0$

7. ให้ $A = \begin{bmatrix} -2 & 3 \\ 2 & -3 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} -1 & 3 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}$ และ $C = \begin{bmatrix} -4 & -3 \\ 0 & -4 \end{bmatrix}$ จงแสดงว่า $AB = AC$

8. ให้ $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ จงแสดงว่า $A^* = I_2$ (โดยที่ $A^2 = AA$)

9. กำหนด $A = \begin{bmatrix} 12 & 21 & 43 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$, $C = \begin{bmatrix} 3 & -1 & 3 \\ 4 & 1 & 5 \\ 2 & 1 & 3 \end{bmatrix}$, $D = \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$,

$E = \begin{bmatrix} 2 & -4 & 5 \\ 0 & 1 & 4 \\ 3 & 2 & 1 \end{bmatrix}$ และ $F = \begin{bmatrix} -4 & 5 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$

จงหาค่าของ (ถ้าสามารถหาได้)

ก) A^T และ $(A^T)^T$ ข) $(C+E)^T$ และ $C^T + E^T$ ค) $(AB)^T$ และ B^TA^T

ง) $(2D + 3F)^T$ จ) $B^TC + A$ ฉ) $(B^T + A)C$

แบบฝึกหัด 5.2

1. เมตริกซ์ต่อไปนี้เมตริกซ์ใด เป็นเมตริกซ์เบื้องต้น (elementary matrices)

ก) $\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ ข) $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}$ ค) $\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$

ง) $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ จ) $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ ฉ) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

ช) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

2. จงพิจารณา การกระทำเบื้องต้นแบบแถว (elementary row operations) กับเมตริกซ์เบื้องต้นทั้งสามที่ทำให้ได้เมตริกซ์เอกลักษณ์ (identity matrix)

ก) $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 5 \end{bmatrix}$ ข) $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ ค) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 8 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

3. กำหนด $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 7 & 8 & 9 \\ 4 & 5 & 6 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$, $C = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 9 & 12 & 15 \end{bmatrix}$

จงหาเมตริกซ์เบื้องต้น E_1, E_2, E,, E_4 ที่ทำให้

ก) $E_1A = B$ ข) $E_2B = A$ ค) $E_3A = C$

ง) $E_4C = A$

จงพิจารณาหาเมตริกซ์ผกผันของเมตริกซ์ต่อไปนี้ (ถ้าสามารถหาได้)

4. ก) $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 5 \end{bmatrix}$ ข) $\begin{matrix} 2 & 3 \\ 3 & 5 \end{matrix}$ ค) $\begin{bmatrix} 8 & -6 \\ -4 & 3 \end{bmatrix}$

5. ก) $\begin{bmatrix} 3 & 4 & -1 \\ 1 & 0 & 3 \\ 2 & 5 & 4 \end{bmatrix}$ ข) $\begin{bmatrix} 3 & 1 & 5 \\ 2 & 4 & 1 \\ -4 & 2 & -9 \end{bmatrix}$ ค) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$

ง) $\begin{bmatrix} 2 & 6 & 6 \\ 2 & 7 & 6 \\ 2 & 7 & 7 \end{bmatrix}$ จ) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$ ฉ) $\begin{bmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{5} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{5} & \frac{1}{5} & -\frac{4}{5} \\ -\frac{2}{5} & \frac{1}{10} & \frac{1}{10} \end{bmatrix}$

แบบฝึกหัด 5.3

จงหาค่าของดีเทอร์มิแนนท์ต่อไปนี้

1. ก) $\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 3 \end{vmatrix}$ ข) $\begin{vmatrix} 6 & 4 \\ 3 & 2 \end{vmatrix}$ ค) $\begin{vmatrix} -1 & 7 \\ -8 & -3 \end{vmatrix}$

   ง) $\begin{vmatrix} k-1 & 2 \\ 4 & k-3 \end{vmatrix}$

2. ก) $\begin{vmatrix} 1 & -2 & 7 \\ 3 & 5 & 1 \\ 4 & 3 & 8 \end{vmatrix}$ ข) $\begin{vmatrix} 8 & 2 & -1 \\ -3 & 4 & -6 \\ 1 & 7 & 2 \end{vmatrix}$ ค) $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 4 & 0 & -1 \\ 2 & 8 & 6 \end{vmatrix}$

   ง) $\begin{vmatrix} k & -3 & 9 \\ 2 & 4 & k+1 \\ 1 & k^2 & 3 \end{vmatrix}$

3. fl) $\begin{vmatrix} 2 & 0 & 1 & 4 \\ 3 & 2 & -4 & -2 \\ 2 & 3 & -1 & 0 \\ 11 & 8 & -4 & 6 \end{vmatrix}$ ข) $\begin{vmatrix} 4 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & -3 & 0 \\ 1 & 5 & 3 & 5 \end{vmatrix}$

4. กำหนด $A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 \\ -2 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 3 & -2 & 5 \\ 2 & 1 & 3 \end{bmatrix}$ จงแสดงว่า $|AB| = |A||B|$

5. กำหนด $A = \begin{bmatrix} \lambda-1 & -2 \\ 1 & \lambda-4 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} k-6 & 0 & 0 \\ 0 & k & -1 \\ 0 & 4 & k-4 \end{bmatrix}$.

   fl) จงหาค่า A ที่ทำให้ $\det A = 0$

   ข) จงหาค่า k ที่ทำให้ $\det B = 0$

จงใช้กฎของเครมเมอร์ (ถ้าสามารถใช้ได้) หาคำตอบของสมการต่อไปนี้

6. $2x + 4y + 6z = 2$

$2x + 2z = 0$

$2x + 3y - z = -5$

7. $x t y t z - 2w = -4$

$2y + z + 3w = 4$

$2x + y - z + 2w = 5$

$X - Y \quad t \quad w = 4$

8. $2x t \ y + z = 6$

$3x + 2y - 2z = -2$

$x + y + 2z = 4$

9. $2x + 3y + 7z = 2$

$-2x - 4z = 0$

$x + 2y + 4z = 0$

10. $x t \ y - 2z = 1$

$2x - y t \ z = 2$

$x - 2y - 4z = -4$