บทที่ 4
สมการเชิงอนุพันธ์
Differential Equations

4.1 บทนำและนิยามเบื้องต้น

ปัญหาทางด้านวิทยาศาสตร์และวิทยาศาสตร์ประยุกต์ เช่น วิศวกรรมศาสตร์ ส่วนใหญ่เกี่ยวข้องกับสมการเชิงอนุพันธ์ กฎต่าง ๆ ในทางฟิสิกส์สามารถเขียนในรูปของสมการเชิงอนุพันธ์ได้ เช่น กฎการเคลื่อนที่ของนิวตัน ในทางเคมี เช่น การสลายตัวของสารกัมมันตภาพรังสีหรือในทางชีววิทยา เช่น อัตราการเพิ่มของประชากรก็ล้วนแต่เกี่ยวข้องกับสมการเชิงอนุพันธ์ นอกจากนี้การแก้ปัญหาทางด้านสังคมศาสตร์ เศรษฐศาสตร์ ก็ใช้สมการเชิงอนุพันธ์เข้าไปช่วย

ถ้ากำหนดให้ $y = f(x)$ แล้ว อนุพันธ์ของฟังก์ชัน

$$\frac{dy}{dx} = y' = f'(x)$$

เป็นฟังก์ชันของ x ด้วย สมมุติเป็น $F(x)$

ดังนั้น $$\frac{dy}{dx} = F(x)$$

หรือ $$dy = F(x)\,dx$$

และเรียกสมการ $\frac{dy}{dx} = F(x)$ หรือ $dy = F(x)\,dx$ ว่าสมการเชิงอนุพันธ์

ปัญหาคือ ถ้ามีสมการเชิงอนุพันธ์ $y' = f'(x)$ แล้ว ทำอย่างไรจึงจะหา $y = f(x)$ ได้ และจะเรียก $y = f(x)$ ว่าเป็นคำตอบของสมการเชิงอนุพันธ์ $y' = f'(x)$

นิยาม 4.1 สมการเชิงอนุพันธ์เป็นสมการซึ่งเกี่ยวข้องกับฟังก์ชันของตัวแปร และอนุพันธ์ของตัวแปรตาม (dependent variables) เทียบกับตัวแปรอิสระ (independent variables)

ตัวอย่างที่ 4.1

1. $\frac{dy}{dx} - 3x^2 + 2x + 1 = 0$

2. $\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + x^2y^2 + 1 = 0$

3. $\frac{d^2x}{dt^2} + t\frac{dx}{dt} + x = 0$

4. $\frac{\partial x}{\partial s} + \frac{\partial x}{\partial t} = x$

5. $\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} = 0$

ในตัวอย่างข้อ 1 และ 2 มี x เป็นตัวแปรอิสระ และ y เป็นตัวแปรตาม ส่วนในตัวอย่างข้อ 3 มี x เป็นตัวแปรตาม และ t เป็นตัวแปรอิสระ ซึ่งมีอย่างละหนึ่งตัวเท่านั้นในทั้ง 3 ตัวอย่าง

ในตัวอย่างข้อ 4 มี x เป็นตัวแปรตาม และ s, t เป็นตัวแปรอิสระทั้งสองตัว

ในตัวอย่างที่ 5 มี v เป็นตัวแปรตาม และ x, y, z เป็นตัวแปรอิสระ

จากตัวอย่างข้างต้น จะพบว่าตัวแปรอิสระอาจมีหนึ่งตัวหรือมากกว่าหนึ่งตัวก็ได้ ดังนั้นจึงแบ่งสมการเชิงอนุพันธ์ออกเป็นสองชนิด

นิยาม 4.2 ถ้าสมการเชิงอนุพันธ์ ประกอบด้วยอนุพันธ์ธรรมดา (ordinary derivatives) ของตัวแปรตามเทียบกับตัวแปรอิสระเพียงตัวเดียว เรียกสมการชนิดนี้ว่า **สมการเชิงอนุพันธ์แบบธรรมดา (ordinary differential equation)**

จากตัวอย่าง 3.1 ข้อ 1, 2 และ 3 เป็นสมการเชิงอนุพันธ์แบบธรรมดา

นิยาม 4.3 ถ้าสมการเชิงอนุพันธ์ ประกอบด้วยอนุพันธ์ย่อย (partial derviative) ของตัวแปรตามเทียบกับตัวแปรอิสระมากกว่าหนึ่งตัว เรียกสมการชนิดนี้ว่า **สมการเชิงอนุพันธ์ย่อย (partial differential equation)**

จากตัวอย่าง 3.1 ข้อ 4 และ 5 เป็นสมการเชิงอนุพันธ์ย่อย

ในขั้นต้นนี้จะศึกษาเฉพาะสมการเชิงอนุพันธ์แบบธรรมดาเพียงอย่างเดียว

นิยาม 4.4 **อันดับ (order)** ของสมการเชิงอนุพันธ์คือ อันดับสูงสุดของอนุพันธ์ของตัวแปรในสมการนั้น ๆ

ตัวอย่างที่ 4.2

1. $\frac{dy}{dx} - 2y = 0$

2. $\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + x^2y^2 + 1 = 0$

3. $\frac{d^2y}{dx^2} + x\frac{dy}{dx} + y = 0$

4. $\left(\frac{d^3y}{dx^3}\right)^2 + \left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)^3 + 5\frac{dy}{dx} = 0$

จากตัวอย่างข้อ 1, 2 เป็นสมการเชิงอนุพันธ์อันดับหนึ่ง
จากตัวอย่างข้อ 3 เป็นสมการเชิงอนุพันธ์อันดับสอง
และในตัวอย่างข้อ 4 เป็นสมการเชิงอนุพันธ์อันดับสาม

นิยาม 4.5 ถ้าสามารถทำให้ทุก ๆ อนุพันธ์ในสมการเชิงอนุพันธ์มีกำลังเป็นจำนวนเต็มบวก **ดีกรี (degree)** ของสมการเชิงอนุพันธ์ก็คือเลขชี้กำลัง (index) ของอนุพันธ์ ซึ่งมีอันดับสูงสุดในสมการเชิงอนุพันธ์นั้น

ตัวอย่างที่ 4.3

1. $\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + x^2y^2 + 1 = 0$

2. $\frac{d^2y}{dx^2} + x\frac{dy}{dx} + y = 0$

3. $\frac{d^3y}{dx^3} - x^2 = 0$

4. $\left(\frac{d^5y}{dx^5}\right)^2 + 2\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)^3 = 0$

จากตัวอย่างข้อ 1, 4 มีดีกรีเป็น 2 เพราะกำลังสูงสุดของอนุพันธ์ที่มีอันดับสูงสุดเป็น 2 ส่วนในตัวอย่างข้อ 2, 3 มีดีกรีเป็น 1 เพราะกำลังสูงสุดของอนุพันธ์ที่มีอันดับสูงสุดเป็น 1

ในการหาดีกรีของสมการเชิงอนุพันธ์นั้น จะต้องจัดรูปสมการให้อยู่ในรูปที่กำลังเป็นจำนวนเต็มบวกก่อน จึงจะบอกดีกรีของสมการได้ เช่น

$$\sqrt{\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)^2} = \sqrt[3]{1 + \frac{dy}{dx}}$$

ยกกำลัง 6 ทั้งสองข้างได้

$$\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)^6 = \left(1 + \frac{dy}{dx}\right)^2 = \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + 2\frac{dy}{dx} + 1$$

สมการนี้มีดีกรีเป็น 6

แบบฝึกหัด 4.1

จงบอกอันดับและดีกรีของสมการเชิงอนุพันธ์ต่อไปนี้

1. $y'' + 3y' + y = t$
2. $(y'')^2 + 1 + y^2 = 0$
3. $x^2dy + y^2dx = 0$
4. $\frac{d^4y}{dx^4} + 3\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)^5 + 5y = 0$
5. $\frac{d^3y}{dx^3} + 2\left(\frac{dy}{dx}\right)^4 + 5y = 0$
6. $\left(\frac{dy}{dx}\right)^3 = \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + 1$
7. $y'' + ye^x = 0$
8. $(1 + t^2)y'' + ty' = 0$
9. $\left(\frac{dy}{dx}\right)^3 = \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}$
10. $\frac{d^2y}{dx^2} = \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^4}$

4.2 คำตอบของสมการเชิงอนุพันธ์ (Solution of Differential Equation)

ในการหาคำตอบของสมการพีชคณิต

$$x^2 - 3x + 2 = 0$$

จะต้องหาเลขจำนวนที่นำมาแทนค่า x แล้วทำให้ด้านซ้ายของสมการ**เป็นศูนย์ ซึ่ง**จะพบว่ามีเลขอยู่สองจำนวนคือ 1 และ 2 ที่ทำให้สมการเป็นจริง แสดงว่า **1 กับ 2 เป็น**คำตอบของสมการนี้

สำหรับการหาคำตอบของสมการเชิงอนุพันธ์นั้น ไม่ใช่เป็นการหาจำน**วนเลขดังเช่น**ในสมการพีชคณิต แต่เป็นการหาฟังก์ชันซึ่งเมื่อหาค่าอนุพันธ์แล้วได้เท่ากับสมกา**รเชิงอนุพันธ์**

นิยาม 4.6 คำตอบของสมการเชิงอนุพันธ์ ก็คือฟังก์ชันซึ่งมีความสัมพันธ์กับ**ตัวแปรอิสระ**ที่ไม่มีอนุพันธ์มาเกี่ยวข้อง และฟังก์ชันนี้สอดคล้องตามสมการที่**กำหนดให้**

ตัวอย่างที่ 4.4 $y = e^{2x}$ เป็นคำตอบของสมการเชิงอนุพันธ์

$$\frac{dy}{dx} - 2y = 0$$

จาก $y = e^{2x}$

หาอนุพันธ์ได้ $\dfrac{dy}{dx} = 2e^{2x}$

แทนค่าในสมการเชิงอนุพันธ์ด้านซ้ายได้

$2e^{2x} - 2y$ แต่ $y = e^{2x}$

ดังนั้น $2e^{2x} - 2e^{2x} = 0$ ซึ่งเท่ากับด้านขวา

แสดงว่า $y = e^{2x}$ คล้องตามสมการเชิงอนุพันธ์

$$\frac{dy}{dx} - 2y = 0$$

นั่นคือ $y = e^{2x}$ เป็นคำตอบของสมการเชิงอนุพันธ์

$$\frac{dy}{dx} - 2y = 0 \text{ ตามนิยาม}$$

ตัวอย่างที่ 4.5 จงแสดงว่า $y = 2\sin x$ เป็นคำตอบของสมการเชิงอนุพันธ์

$$y'' + y = 0$$

วิธีทำ จาก $y = 2\sin x$

$$y' = 2\cos x$$

$$y'' = -2\sin x$$

แทนค่า y'' และ y ด้านซ้ายของสมการเชิงอนุพันธ์ได้

$$y''+y = -2\sin x+2\sin x$$
$$= 0$$

ซึ่งเท่ากับด้านขวาของสมการที่กำหนดให้

แสดงว่า $y = 2\sin x$ เป็นคำตอบของสมการ

$$y''+y = 0$$

เราลองมาพิจารณาสมการเชิงอนุพันธ์ $y' = \cos x$ บ้าง จะเห็นว่า $y = \sin x$, $y = \sin x+5$, $y = \sin x-10$ ต่างก็เป็นคำตอบของสมการ $y' = \cos x$ ทั้งสิ้น แสดงว่าคำตอบของสมการเชิงอนุพันธ์ที่ยกมานี้มีได้มากมายหลายคำตอบ ซึ่งสามารถเขียนคำตอบของสมการนี้ได้ในรูป $y = \sin x+C$ เมื่อ C เป็นค่าคงที่ตามใจชอบ (arbitrary constant) ดังนั้นจึงแบ่งคำตอบของสมการเชิงอนุพันธ์ออกเป็นสองชนิดคือ

1. คำตอบทั่วไป (general solution) ของสมการเชิงอนุพันธ์ คือ คำตอบซึ่งมีค่าคงที่ตามใจชอบ เช่น $y = \sin x+C$ เป็นคำตอบทั่วไปของสมการ $y' = \cos x$ เมื่อ C เป็นค่าคงที่ตามใจชอบ

2. คำตอบเฉพาะ (particular solution) ของสมการเชิงอนุพันธ์ คือ คำตอบใดคำตอบหนึ่งของสมการ นั่นคือคำตอบที่กำหนดค่าคงที่ตามใจชอบแล้วนั่นเอง เช่น $y = \sin x+5$ เป็นคำตอบหนึ่งของสมการ $y' = \cos x$

ตัวอย่างที่ 4.6 จงแสดงว่า $y = c_1e^t+c_2e^{2t}$ เป็นคำตอบทั่วไปของสมการ

$$y''-3y'+2y = 0$$

วิธีทำ จาก $y = c_1e^t+c_2e^{2t}$

จะได้ $y' = c_1e^t+2c_2e^{2t}$

และ $y'' = c_1e^t+4c_1e^{2t}$

แทนค่า y, y' และ y'' ลงในสมการเชิงอนุพันธ์ที่กำหนดให้ทางด้านซ้ายได้

$c_1e^t+4c_2e^{2t}-3(c_1e^t+2c_2e^{2t})+2(c_1e^t+c_2e^{2t}) = 0 =$ ด้านขวาของสมการ

แสดงว่า $y = c_1e^t+c_2e^{2t}$ เป็นคำตอบทั่วไปของสมการ

$y''-3y'+2y = 0$ เมื่อ c_1, c_2 เป็นค่าคงที่ตามใจชอบ

ข้อสังเกต สมการเชิงอนุพันธ์อันดับ n คำตอบทั่วไปจะมีค่าคงที่ตามใจชอบ n ตัว

แบบฝึกหัด 4.2

จงแสดงฟังก์ชันที่กำหนดให้ในแต่ละข้อเป็นคำตอบเฉพาะของสมการที่กำหนด

1. $f(x) = x + 2e^{-x} \; ; \; y' + y = x + 1$
2. $f(x) = 3e^{-x} - 5e^{x}; \; y'' - y = 0$
3. $f(x) = e^{x} + 2x^2 + 6x + 7 \; ; \; y' - 3y' + 2y = 4x^2$
4. $f(x) = \frac{1}{x^2}(1 - \ln x) \; ; \; x^2y'' + 5xy' + 4y = 0$
5. $f(x) = \frac{1}{2x+1} \; ; \; (2x+1)^2y'' - (4x+2)y' - 12y = 0$

จงแสดงว่าฟังก์ชั่นที่กำหนดให้ เป็นคำตอบทั่วไปของสมการที่กำหนดให้แต่ละข้อ เมื่อ c, c_1, c_2, c_3 เป็นค่าคงที่ตามใจชอบ

6. $f(x) = (x^3 + c)e^{-3x} \; ; \; y' + 3y = 3x^2e^{-3x}$
7. $f(x) = c_1e^{4t} + c_2e^{-2t} \; ; \; y'' - 2y' - 8y = 0$
8. $f(x) = -16x^2 + c_1x + c_2 \; ; \; y'' = -32$
9. $f(x) = c_1e^{x} + c_2xe^{x} \; ; \; y'' - 2y' + y = 0$
10. $f(x) = c_1e^{2x} + c_2xe^{2x} + c_3e^{-2x} \; ; \; y''' - 2y'' - 4y' + 8y = 0$
11. $f(x) = c_1e^{x} + c_2e^{-2x} + x^2 \; ; \; y'' + y' - 2y = 2(1 + x - x^2)$
12. $f(t) = c_1t^2 + c_1t^{-3} \; ; \; t^2y'' + 2ty' - 6y = 0$
13. $g(x) = c_1x + c_1e^{x} \; ; \; (1-x)y'' + xy' - y = 0$
14. $g(t) = c_1e^{t} + c_2e^{-t} + \frac{1}{2}te^{t} \; ; \; y'' - y = e^{t}$

4.3 สมการเชิงอนุพันธ์อันดับหนึ่ง และกำลังหนึ่ง

ในหัวข้อนี้จะกล่าวถึงการหาคำตอบของสมการเชิงอนุพันธ์อันดับหนึ่ง และกำลังหนึ่ง ซึ่งมีวิธีหาหลายวิธี แต่ในชั้นเริ่มต้นนี้จะกล่าวถึงเพียงบางวิธีเท่านั้น

สำหรับสมการเชิงอนุพันธ์อันดับหนึ่งนั้น สามารถเขียนในแบบมาตรฐานคือ

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y) \qquad .....(4.1)$$

4.3.1 แบบแยกตัวแปรได้

จาก *(4.1)* สามารถเขียนให้อยู่ในรูป

$$M(x)\,dx + N(y)\,dy = 0 \qquad .....(4.2)$$

ซึ่ง M เป็นฟังก์ชันของ x อย่างเดียว และ N เป็นฟังก์ชันของ y เพียงอย่างเดียว เราเรียก (4.2) ว่าสมการเชิงอนุพันธ์แบบแยกตัวแปรได้ (variable separable) ซึ่งสามารถหาคำตอบของ (4.2) ได้โดยการอินทิเกรต (ingegrate) ดังนี้

$$\int M(x)\,dx + \int N(y)\,dy = C \qquad .....(4.3)$$

เมื่อ c เป็นค่าคงที่ตามใจชอบ (arbitrary constant)

ตัวอย่างที่ 4.7 จงแก้สมการ $x\ dx + y^2\ dy = 0$

94

วิธีทำ สมการ $x\,dx + y^2\,dy = 0$ เป็นแบบแยกตัวแปรได้

ดังนั้น

$$\int x\,dx + \int y^2\,dy = c$$

$$\frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{3} = c$$

ตัวอย่างที่ 4.8 จงแก้สมการ $2x\frac{dy}{dx} = 2x^3 - 1$

วิธีทำ สำหรับ $x \neq 0$ จัดรูปสมการใหม่ได้

$$dy = \left(x^2 - \frac{1}{2x}\right)dx$$

ซึ่งเป็นแบบแยกตัวแปรได้ ดังนั้น

$$\int dy = \int x^2\,dx - \int \frac{1}{2x}dx$$

$$y = \frac{x^3}{3} - \frac{1}{2}\ln|x| + C$$

ตัวอย่างที่ 4.9 จงแก้สมการ $\frac{dy}{dx} = \frac{3x^2-1}{2(y-1)}$ เมื่อ $x = 0, y = -2$

วิธีทำ จากโจทย์สามารถแยกตัวแปรได้เป็น

$$2(y-1)\,dy = (3x^2-1)\,dx$$

ดังนั้น $$\int 2(y-1)\,dy = \int (3x^2-1)\,dx$$

$$y^2-2y = x^3-x+c$$

หรือ $y^2-2y-x^3+x = c$ เป็นคำตอบทั่วไป

เมื่อ $x = 0, y = -2$

$$4+4 = c$$

ดังนั้น $y^2-2y-x^3+x = 8$ เป็นคำตอบเฉพาะของสมการนี้

ข้อสังเกต การกำหนดเงื่อนไขให้สามารถหาค่าคงที่ตามใจชอบได้

แบบฝึกหัด 4.3

1. จงหาคำตอบทั่วไปของสมการเชิงอนุพันธ์ต่อไปนี้

   1.1 $dx - 2xy\,dy = 0$

   1.2 $2x(1+y^2)\,dx + dy = 0$

   1.3 $3dx - ydy = 0$

   1.4 $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{y}{x^2}$

   1.5 $y' = y$

   1.6 $\sqrt{1-y^2}\,dx - x\sqrt{x^2-1}\,xy = 0$

   1.7 $\dfrac{dy}{dx} = e^{y-x}$

   1.8 $\dfrac{dy}{dt} = -4yt$

   1.9 $\cos^2 y\,dx + \sin^2 x\,dy = 0$

   1.10 $2xy\,dx + dy = 0$

2. จงหาคำตอบเฉพาะของสมการต่อไปนี้ตามเงื่อนไขที่กำหนดให้

   2.1 $yy' = t^3$; เมื่อ $t = 1, y = 10$

   2.2 $(2+y)\dfrac{dy}{dx} = x\sqrt{x}$; เมื่อ $x = 0, y = 1$

   2.3 $(2xy+2x)\,dx - dy = 0$; เมื่อ $x = 0, y = 0$

   2.4 $\dfrac{dy}{dx} = 3y$; เมื่อ $x = 0, y = 1$

   2.5 $\dfrac{dy}{dx} = (3+y)\cot x$; เมื่อ $x = \dfrac{\pi}{2}, y = 4$

4.3.2 สมการเอกพันธ์ (Homogeneous equations)

นิยาม 4.7 ฟังก์ชัน $f(x, y)$ จะเรียกว่าเป็นฟังก์ชัน **เอกพันธ์** ดีกรี n ก็ต่อเมื่อ

$$f(kx, ky) = k^n f(x, y)$$

นิยาม 4.8 สมการเชิงอนุพันธ์อันดับหนึ่งในรูป

$$M(x, y)\,dx + N(x, y)\,dy = 0$$

จะเรียกว่าเป็นสมการเอกพันธ์ ถ้า $M(x, y)$ และ $N(x, y)$ เป็นฟังก์ชันเอกพันธ์ซึ่งมีดีกรีเดียวกัน

ตัวอย่างที่ 4.10 $f(x, y) = y^2 - xy$ เป็นฟังก์ชันเอกพันธ์ดีกรี 2

เพราะว่า
$$\begin{aligned} f(kx, ky) &= (ky)^2 - (kx)(ky) \\ &= k^2y^2 - k^2xy \\ &= k^2(y^2 - xy) \\ &= k^2 f(x, y) \end{aligned}$$

แสดงว่า $y^2 - xy$ เป็นฟังก์ชันเอกพันธ์ดีกรี 2

ตัวอย่างที่ 4.11 $f(x, y) = x^2 + \sin x \cos y$ ไม่เป็นฟังก์ชันเอกพันธ์

เพราะว่า
$$\begin{aligned} f(kx, ky) &= k^2x^2 + \sin(kx)\cos(ky) \\ &\neq k^n f(x, y) \end{aligned}$$

ตัวอย่างที่ 4.12
$$\begin{aligned} f(x, y) &= e^{x/y} + \sin\left(\frac{x}{y}\right) \\ f(kx, ky) &= e^{kx/ky} + \sin\left(\frac{kx}{ky}\right) \\ &= e^{x/y} + \sin\left(\frac{x}{y}\right) \end{aligned}$$

เป็นฟังก์ชันเอกพันธ์ ดีกรี 0

การแก้สมการเอกพันธ์สามารถทำได้โดยวิธีเปลี่ยนตัวแปรใหม่ ให้ $y = vx$ ซึ่งจะทำให้สมการเอกพันธ์เปลี่ยนรูปเป็นสมการแบบแยกตัวแปรได้ ดังนี้

แต่ $M(x, y)$ และ $N(x, y)$ ต่างก็เป็นฟังก์ชันเอกพันธ์ดีกรีเดียวกัน สมมุติเป็น n ดังนั้น $M(kx, ky) = k^n M(x, y)$ และ $N(kx, ky) = k^n N(x, y)$

ถ้าให้ $k = 1/x$ แล้วเราจะได้

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{M(1, y/x)}{N(1, y/x)} = g(y/x)$$

นั่นคือสมการในรูป $\frac{dy}{dx} = g(y/x)$ สามารถหาคำตอบได้โดยใช้วิธีเดียวกับ**สมการเอกพันธ์**

ให้ $y = vx$, $dy = vdx+xdv$

แทนในสมการ $\frac{dy}{dx} = g(y/x)$ จะได้

$$vdx + xdv = g(v)dx$$

$$(v - g(v))dx + xdv = 0$$

$$\frac{dx}{x} + \frac{dv}{v - g(v)} = 0$$

ซึ่งเป็นสมการแบบแยกตัวแปร สามารถอินทิเกรตหาคำตอบได้

ดังนั้นในการแก้สมการเอกพันธ์เราต้องเปลี่ยนตัวแปรใหม่เป็น $y = vx$ แล้ว**สมการเอกพันธ์**จะเปลี่ยนเป็นสมการแบบแยกตัวแปรแล้วหาคำตอบแบบแยกตัวแปร แต่คำตอบ**ที่ได้มา**จะอยู่ในพจน์ของ v และ x เวลาจะตอบต้องเปลี่ยนกลับไปอยู่ในพจน์ของ x และ y โดยแทนค่า $v = y/x$ (เราอาจจะสมมุติให้ $x = vy$ ก็ได้)

ข้อสังเกต

จาก $M(x, y)\,dx + N(x, y)\,dy = 0$

อาจเขียนเป็น $\frac{dy}{dx} = \frac{M(x, y)}{N(x, y)} = f(x, y)$

ตัวอย่างที่ 4.13 จงแก้สมการ $(y^2 - xy)dx + x^2dy = 0$

วิธีทำ เพราะว่า $M = (y^2 - xy)$ และ $N = x^2$ ต่างเป็นฟังก์ชันเอกพันธ์ดีกรี 2 ดัง**นั้น**สมการที่กำหนดให้เป็นสมการเอกพันธ์

ให้ $y = vx$ แล้ว $dy = vdx + xdv$ แทนค่าในโจทย์จะได้

$$(v^2x^2 - vx^2)dx + x^2(vdx + xdv) = 0$$

$$v^2x^2dx + x^3dv = 0$$

$$v^2dx + xdv = 0$$

แยกตัวแปรได้

$$\frac{dx}{x} + \frac{dv}{v^2} = 0$$

$$\ell n|x| - \frac{1}{v} = c$$

แทนค่ากลับ $v = y/x$ ได้

$$\ln|x| - \frac{1}{y/x} = c$$

$$\ln|x| - \frac{x}{y} = c$$

$$y = \frac{x}{\ln|x| - c}$$

ตัวอย่างที่ 4.14 จงแก้สมการ $\frac{dy}{dx} = \frac{y}{x} + \frac{y^2}{x^2}$ เมื่อ $x = 1, y = 1$

วิธีทำ จากโจทย์จะสังเกตพบว่าเป็นสมการเอกพันธ์ที่มีดีกรี 0 ให้ $y = vx$

$$vdx + xdv = \left(\frac{vx}{x} + \frac{v^2x^2}{x^2}\right)dx$$

$$vdx + xdv = vdx + v^2dx$$

$$\frac{dx}{x} - \frac{dv}{v^2} = 0$$

$$\ln|x| + \frac{1}{v} = c$$

$$\ln|x| + \frac{x}{y} = c$$

เมื่อ $x = 1, y = 1$

$$\ln|1| + 1 = c$$

$$c = 1$$

ดังนั้น $\ln|x| + \frac{x}{y} = 1$

หรือ $y = y\ln|x| + x$

แบบฝึกหัด 4.4

1. จงแสดงว่าฟังก์ชันต่อไปนี้เป็นฟังก์ชันเอกพันธ์และบอกดีกรีด้วย

   1.1 $x^2y + 3xy^2$

   1.2 $4x - 3y$

   1.3 $\frac{x^2e^{x/y}}{y^2}$

2. จงแก้สมการต่อไปนี้

   2.1 $(x+y)\,dx - x\,dy = 0$

   2.2 $(y^2+xy)\,dx - x^2\,dy = 0$

   2.3 $(y^2-x^2)\,dx + xy\,dy = 0$

   2.4 $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{2}\left(\frac{x}{y}+\frac{y}{x}\right)$

   2.5 $\frac{dy}{dx} = \frac{x}{y}+\frac{y}{x}+2$

   2.6 $\frac{dy}{dx} = \frac{y+x}{y-x}$

   2.7 $\frac{dy}{dx}+\frac{3x^2y}{x^3+y^3} = 0$ เมื่อ $x = 1, y = 1$

4.3.3 สมการแบบแน่นอน (Exact equations)

นิยาม 4.9 สมการ $M(x, y)\,dx + N(x, y)\,dy = 0$ จะเรียกว่าเป็น **สมการแบบแน่นอน** ก็ต่อเมื่อมีฟังก์ชัน $u(x, y)$ ซึ่งทำให้

$$d(u(x, y)) = M(x, y)\,dx + N(x, y)\,dy$$

นั่นคือ $d(u(x, y)) = 0$

ดังนั้นคำตอบของสมการคือ $u(x, y) = c$

ตัวอย่างที่ 4.15 สมการ $y\,dx + x\,dy = 0$ เป็นสมการแน่นอนเพราะมีฟังก์ชัน

$$u(x, y) = xy \text{ ซึ่ง}$$

$$\begin{aligned} d(u(x, y)) &= d(xy) \\ &= y\,dx + x\,dy \end{aligned}$$

คำตอบของสมการนี้คือ $xy = c$

จากนิยาม 4.9 ข้างต้น จะพบว่าการจะตรวจสอบว่าสมการเชิงอนุพันธ์ เป็นสมการแน่นอนหรือไม่นั้น ต้องพยายามหาฟังก์ชัน $u(x, y)$ ว่ามีหรือไม่ ที่ $du = M\,dx + N\,dy$ ซึ่งเป็นเรื่องยุ่งยาก ดังนั้นจึงมีทฤษฎีบทที่จะช่วยให้เราตรวจสอบได้ง่ายขึ้น

ทฤษฎีบท 4.1 ถ้า $M(x, y)$ และ $N(x, y)$ เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องใน R แล้ว สมการ $M(x, y)\,dx + N(x, y)\,dy = 0$ เป็นแบบแน่นอนก็ต่อเมื่อ

$$\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}$$

สำหรับการพิสูจน์ทฤษฎีนี้จะไม่กล่าวถึงในที่นี้ ในชั้นนี้จะนำทฤษฎีนี้มาใช้เลย

ข้อสังเกต การหา $\frac{\partial M}{\partial y}$ และ $\frac{\partial N}{\partial x}$ เป็นเรื่องอนุพันธ์ย่อย ซึ่งอธิบายรายละเอียดไว้ในภาคผนวกแล้ว

ตัวอย่างที่ 4.16 จงแก้สมการ $2xydx + x^2dy = 0$

วิธีทำ ในที่นี้

$$M(x, y) = 2xy$$

$$N(x, y) = x^2$$

พิจารณา

$$\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial (2xy)}{\partial y} = 2x$$

$$\frac{\partial N}{\partial x} = \frac{\partial x^2}{\partial x} = 2x$$

ซึ่งจะพบว่า $\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}$

จึงเป็นสมการแน่นอน

ดังนั้นต้องมี $u(x, y)$ แน่ ๆ ซึ่ง $du = Mdx + Ndy$ (ดูภาคผนวก)

แต่ $du = \frac{\partial u}{\partial x}dx + \frac{\partial u}{\partial y}dy$

ทำให้ $\frac{\partial u}{\partial x} = M = 2xy$

$\frac{\partial u}{\partial y} = N = x^2$

จากการสังเกตจะพบว่า $u(x, y) = x^2y$

เพราะฉะนั้นคำตอบสมการคือ $x^2y = c$

ตัวอย่างที่ 4.17 จงแก้สมการ $\sin y\, dx + x \cos y\, dy$

วิธีทำ ในที่นี้ $M(x, y) = \sin y$

$N(x, y) = x \cos y$

พิจารณา $\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y} \sin y = \cos y$

$\frac{\partial N}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}(x \cos y) = \cos y$

ซึ่งจะพบว่า $\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}$

จึงเป็นสมการแน่นอน

ดังนั้นต้องมี $u(x, y)$ แน่ ๆ ซึ่ง $du = Mdx + Ndy$

แต่ $du = \frac{\partial u}{\partial x}dx + \frac{\partial u}{\partial y}dy$

ทำให้ $\frac{\partial u}{\partial x} = M = \sin y$

$\frac{\partial u}{\partial y} = N = x \cos y$

จากการสังเกตจะพบว่า $u(x, y) = x \sin y$

เพราะฉะนั้น คำตอบสมการคือ $x \sin y = c$

แบบฝึกหัด 4.5

1. จงแสดงว่าสมการเชิงอนุพันธ์ต่อไปนี้ข้อใดเป็นสมการแน่นอนและข้อใดไม่เป็น

   1.1 $x^2y\,dx + x^3y^2dy = 0$

   1.2 $y^2dx + 2xydy = 0$

   1.3 $x \cos y\, dx + y \cos x\, dy = 0$

   1.4 $(x^2 + 2xy)dx + (y^2 - 2xy)dy = 0$

   1.5 $\ell n y\, dx + \frac{x}{y}dy = 0$

   1.6 $3x^2 \sin y\, dx + x^3 \cos y\, dy = 0$

   1.7 $2xye^{x^2}\, dx + e^x\, dy = 0$

   1.8 $(2xy^4 + \sin y)dx + (4x^2y^3 + x \cos y)dy = 0$

2. จงหาคำตอบของสมการเชิงอนุพันธ์ต่อไปนี้

   2.1 $4xy\, dx + 2x^2\, dy = 0$

   2.2 $y^2dx + 2xy\, dy = 0$

   2.3 $y \cos x\, dx + \sin x\, dy = 0$

   2.4 $ye^x\, dx + e^x\, dy = 0$

   2.5 $2xy\, dx + (x^2 + 2y)dy = 0$

   2.6 $e^x \sin y\, dx - e^x \cos y\, dy = 0$

4.3.4 สมการเชิงเส้นอันดับหนึ่ง (Linear equation)

ได้แก่สมการที่อยู่ในรูป

$$\frac{dy}{dx} + P(x)\,y = Q(x)$$

โดย $P(x)$ และ $Q(x)$ เป็นฟังก์ชันของ x, ที่ใช้คำว่า "เชิงเส้น" เพราะว่า y และ $\frac{dy}{dx}$ มีกำลังหนึ่งเท่านั้น

ก่อนอื่นมาดูกรณีที่ $Q(x) = 0$ จะได้

$$\frac{dy}{dx} + P(x)\,y = 0$$

ซึ่งสามารถแยกตัวแปรได้เป็น

$$\frac{dy}{y} + P(x)\,dx = 0$$

โดยการอินทิเกรต จะได้

$$\ln|y| = \int P(x)\,dx = \ln C_1$$

หรือ

$$\ln\frac{|y|}{C_1} = \int P(x)\,dx$$

$$\frac{|y|}{C_1} = e^{\int P(x)\,dx}$$

นั่นคือ $$y = Ce^{\int P(x)\,dx}$$

เป็นคำตอบที่ต้องการ

สำหรับกรณีที่ $Q \neq 0$ สมการ

$$\frac{dy}{dx} + P(x)\,y = Q(x)$$

ในทางทฤษฎีบทสามารถหาคำตอบได้โดยการคูณตลอดด้วยแฟกเตอร์ $e^{\int P(x)\,dx}$ (ซึ่งในที่นี้จะไม่กล่าวถึงที่มา แต่ นศ. จะพบได้ในกระบวนวิชา MA 216)

จะได้ $$e^{\int P(x)\,dx}\frac{dy}{dx} + e^{\int P(x)dx}P(x)\,y = e^{\int P(x)\,dx}Q(x)$$

ซ้ายมือสามารถจัดให้อยู่ในรูป $\frac{d}{dx}[e^{\int P(x)\,dx}\cdot y]$ ได้.

นั่นคือ $\frac{d}{dx}[e^{\int P(x)\,dx}\cdot y] = e^{\int P(x)\,dx}Q(x)$

ซึ่งสามารถอินทิเกรตหาคำตอบได้

ตัวอย่างที่ 4.18 จงแก้สมการ $xy' + 2y = x^2$

วิธีทำ จัดรูปได้เป็น $$\frac{dy}{dx} + \frac{2y}{x} = x$$

ซึ่งเป็นสมการเชิงเส้น โดย $P(x) = \frac{2}{x}$, $Q(x) = x$

ดังนั้น $e^{\int P(x)\,dx} = e^{\int \frac{2}{x}dx} = e^{2\ln x} = e^{\ln x^2} = x^2$

นำไปคูณตลอดสมการโจทย์ จะได้

$$x^2 \cdot \frac{dy}{dx} + 2xy = x^3$$

หรือ $$\frac{d}{dx}(x^2y) = x^3$$

อินทิเกรตจะได้คำตอบ คือ

$$x^2y = \frac{x^4}{4} + C$$

หรือ $$y = \frac{x^2}{4} + \frac{c}{x^2}$$

ตัวอย่างที่ 4.19 จงแก้สมการ $\frac{dy}{dx} + y = \cos x$

วิธีทำ จะเห็นว่าเป็นสมการเชิงเส้นมี $P(x) = 1$ และ $Q(x) = \cos x$
ดังนั้น $e^{\int P(x)\,dx} = e^x$ นำไปคูณตลอดสมการโจทย์ จะได้

$$e^x \cdot \frac{dy}{dx} + e^x y = e^x \cos x$$

หรือ $$\frac{d}{dx}(e^x y) = e^x \cos x$$

อินทิเกรต จะได้

$$e^x y = \int e^x \cos x\,dx + C$$

ซึ่งขวามืออินทิเกรต โดยใช้อินทิเกรตทีละส่วนสองครั้ง

นั่นคือ $$e^x y = \frac{1}{2}e^x(\cos x + \sin x) + C$$

หรือ $$y = \frac{1}{2}(\cos x + \sin x) + Ce^{-x}$$

แบบฝึกหัด 4.6

1. จงแสดงว่าสมการเชิงอนุพันธ์ต่อไปนี้ข้อใดเป็นสมการเชิงเส้น และข้อใดไม่เป็น

1.1 $(1-2x)dx+(1+2y)dy = 0$

1.2 $\frac{dy}{dx} = \frac{x^2+y^2}{2xy}$

1.3 $\frac{dy}{dx}+\frac{1}{x}y = x^2+1$

1.4 $(2x-y+1)dx+(2y-x-1)dy = 0$

1.5 $x(x-1)y'+y = x^2(2x-1)$

1.6 $y'-y\tan x = \frac{1}{\cos^3 x}$

2. จงหาคำตอบของสมการเชิงอนุพันธ์ต่อไปนี้

2.1 $y'+2xy = 2xe^{-x^2}$

2.2 $y'+2y = e^{-x}$

2.3 $y'\cos x - y\sin x = 2x,\ y(0) = 0$

2.4 $y'+y\cos x = \cos x,\ y(0) = 1$