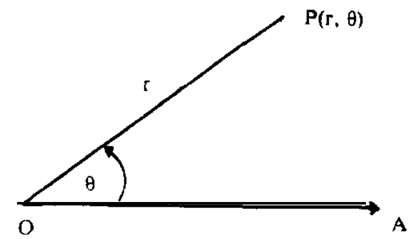
บทที่ 3
ระบบพิกัดเชิงขั้ว

ในการกำหนดจุดในระนาบ โดยใช้ระบบพิกัดฉากอาจจะไม่สะดวกสำหรับเส้นโค้งบางชนิด มีระบบพิกัดอีกระบบหนึ่งซึ่งมีประโยชน์คือ ระบบพิกัดเชิงขั้ว ในบทนี้จะศึกษาถึงความสัมพันธ์ระหว่างพิกัดฉากและพิกัดเชิงขั้ว การเขียนกราฟ และสมการของภาคตัดกรวย ตลอดจนกราฟอื่น ๆ ในระบบพิกัดเชิงขั้ว

3.1 พิกัดเชิงขั้ว (Polar coordinate)

เริ่มด้วยการกำหนดจุดคงที่จุดหนึ่งที่ O เรียกว่า **ขั้ว (pole)** และเส้นตรงคงที่ที่มีทิศทาง OA ซึ่งเรียกว่า **แกนเชิงขั้ว (polar axis)**



รูปที่ 3.1

จุด P ใด ๆ เขียนแทนด้วย (r, θ)

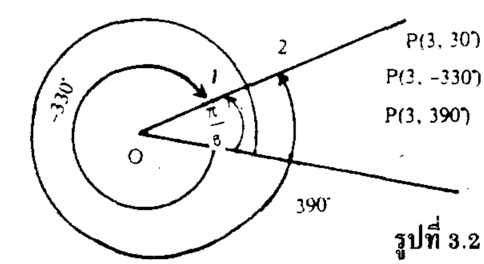
เมื่อ r = ระยะที่กำหนดทิศทางจาก O ไปยัง P

θ = มุมที่ OP ทำกับแกนเชิงขั้ว OA

ด้าน OP เรียกว่า **ด้านสิ้นสุด (terminal side)** และด้าน OA ทับแกนเชิงขั้วเรียกว่า **ด้านเริ่มต้น (initial side)** ของมุม θ

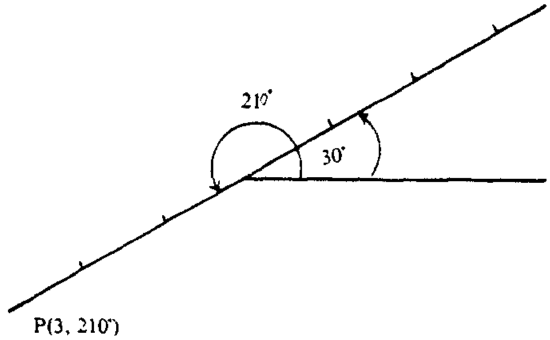
การวัดมุม θ

มุม θ เป็นบวกถ้าวัดมุมจากแกนเชิงขั้วทวนเข็มนาฬิกา และเป็นลบถ้าวัดมุมตามเข็มนาฬิกา *แต่มุม θ ที่ r ค่าหนึ่งอาจจะมีหลายค่า* เช่น $r = 3$, $\theta = 30^\circ$ จะได้จุด $P(3, 30^\circ)$ ในขณะเดียวกัน ก็จะมีจุด $P(3, -330^\circ)$ หรือ $P(3, 390^\circ)$ ได้ ซึ่งทั้ง 3 จุดนี้คือจุดเดียวกัน ดังรูป 3.2



รูปที่ 3.2

ดังนั้น พิกัดเชิงขั้ว $(3, 30° + 2n\pi)$ เมื่อ n เป็นจำนวนเต็มจะเป็นจุด ๆ เดียวกับ (3, 30°) ถ้าจุด P(3, 210°) จะอยู่ตรงข้าม ดังรูป 3.3

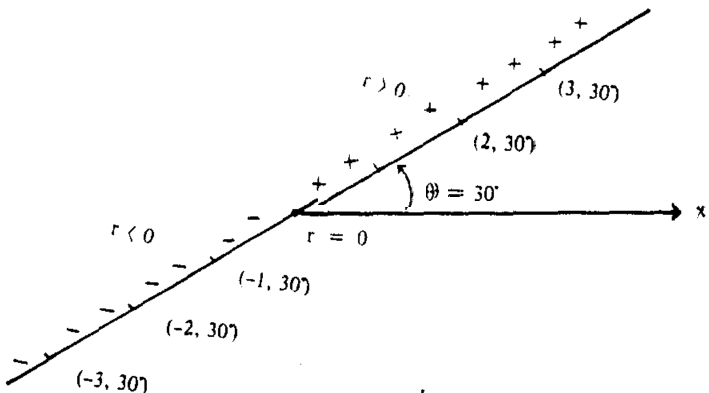


รูปที่ 3.3

การวัดระยะ r

r เป็นระยะที่กำหนดทิศทางจาก O ไปยัง P ดังนั้น จะกำหนดว่า r มีเครื่องหมายบวกเมื่อวัดจากขั้วไปตามด้านสิ้นสุดถึงจุด P และมีเครื่องหมายลบเมื่อวัดในทิศทางตรงข้าม (คือวัดตามเส้นที่ต่อจากจุด O ไปในทิศทางตรงข้ามกับ OP)

ดังนั้น การกำหนดจุด P ถ้า $\theta = 30°$ จะเห็นได้จากรูป 3.4



รูปที่ 3.4

ดังนั้น จุด P เมื่อ $\theta = \alpha$ จะมีพิกัดเชิงขั้ว (r, α) เมื่อ $r > 0$ แต่เมื่อ $r \leqslant 0$ มุม θ จะเท่ากับ $\alpha + 180°$

เมื่อ $r = 0$ และ θ เป็นจำนวนจริงใด ๆ จะได้พิกัดของขั้ว คือ $(0, \theta)$

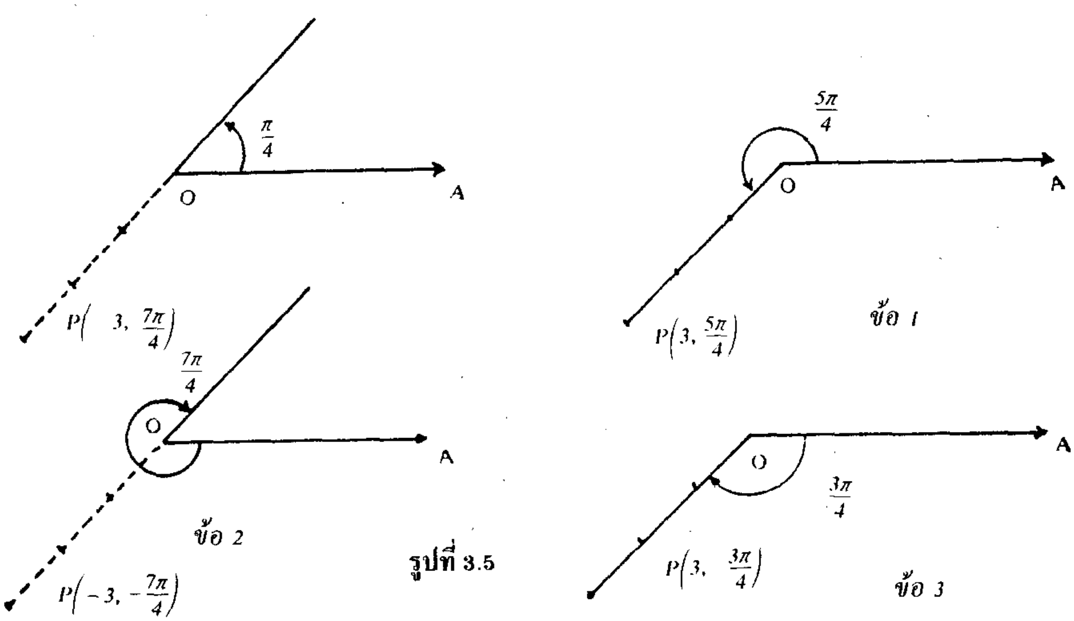
ดังนั้นโดยทั่ว ๆ ไป ถ้า P มีพิกัดเชิงขั้ว (r, θ) P จะมีพิกัดเชิงขั้วในรูป $((-1)^n r, \theta + 2n\pi)$ เมื่อ n เป็นจำนวนเต็ม

จะเห็นว่าเมื่อกำหนดจุดให้ 1 จุด ในระบบพิกัดเชิงขั้ว พิกัดเชิงขั้วที่บอกตำแหน่งของจุดมีจำนวนไม่จำกัด ซึ่งแตกต่างจากการกำหนดจุดในระบบแกนตั้งฉาก แต่ถ้ากำหนดว่า $r > 0$ และ $0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi$ พิกัดเชิงขั้วของ P จะมีค่าเดียว

ตัวอย่างที่ 3.1 จงกำหนดจุด $\left(-3, \frac{\pi}{4}\right)$ และหาพิกัดเชิงขั้วแบบอื่น ๆ ของจุดนี้ ถ้า

1) r เป็นบวก และ $0 < \theta < 2\pi$
2) r เป็นลบ และ $-2\pi < \theta < 0$
3) r เป็นบวก และ $-2\pi < \theta < 0$

วิธีทำ สร้างมุม $\theta = \frac{\pi}{4}$ กับแกนเชิงขั้วก่อน เนื่องจาก $r = -3 < 0$
ดังนั้น P จึงอยู่บนด้านที่ต่อจากจุด O ไปในทิศทางตรงข้าม ดังรูป 3.5



รูปที่ 3.5

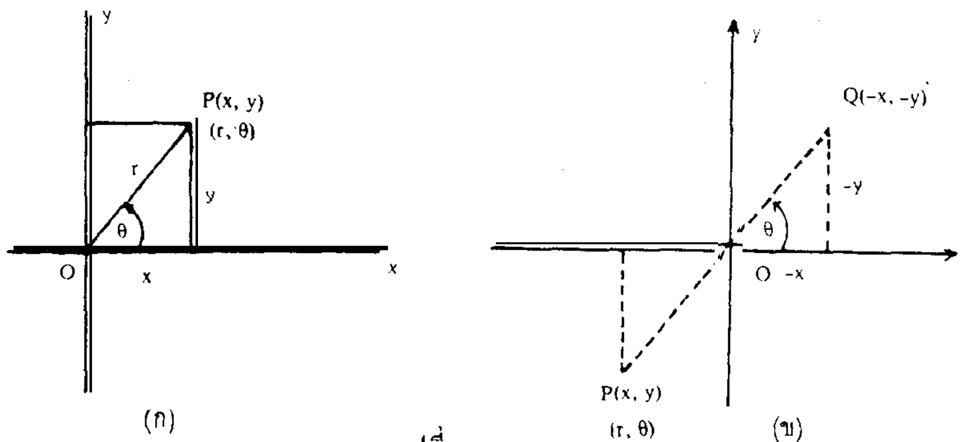
พิกัดเชิงขั้วของจุด $P\left(-3, \frac{\pi}{4}\right)$ แบบอื่นคือ

1. $P\left(3, \frac{5\pi}{4}\right)$ 2. $P\left(-3, -\frac{7\pi}{4}\right)$ 3. $P\left(3, -\frac{3\pi}{4}\right)$

3.2 ความสัมพันธ์ระหว่างระบบพิกัดฉากและระบบพิกัดเชิงขั้ว

การหาความสัมพันธ์ของทั้งสองระบบเริ่มด้วยการใช้จุดกำเนิดและขั้วทับกัน ให้แกนเชิงขั้วทับแกน x ที่เป็นบวก และให้ด้านสิ้นสุดของมุม $\theta = \frac{\pi}{2}$ ทับบนแกน y ที่เป็นบวก

ให้ P เป็นจุดใด ๆ ในระนาบ มีพิกัดในระบบตั้งฉากเป็น (x, y) และพิกัดในระบบเชิงขั้วเป็น (r, θ)



รูปที่ 3.6

ถ้า r > 0 จุด P จะอยู่บนด้านสิ้นสุด ของมุม θ ดังนั้น $r = |OP|$ ดังรูป 3.6(ก)

$$\cos\theta = \frac{x}{|OP|} = \frac{x}{r}$$

$$\sin\theta = \frac{y}{|OP|} = \frac{y}{r}$$

ดังนั้น $x = r\cos\theta$

และ $y = r\sin\theta$

ถ้า r < 0 จุด P จะอยู่บนส่วนต่อของด้านสิ้นสุดของมุม θ และ $r = -|OP|$ ดังรูป 3.6(ข)

$$\cos\theta = \frac{-x}{|OQ|} = \frac{-x}{|OP|} = \frac{-x}{-r} = \frac{x}{r}$$

$$\sin\theta = \frac{-y}{|OQ|} = \frac{-y}{|OP|} = \frac{-y}{-r} = \frac{y}{r}$$

ดังนั้น $x = r\cos\theta$

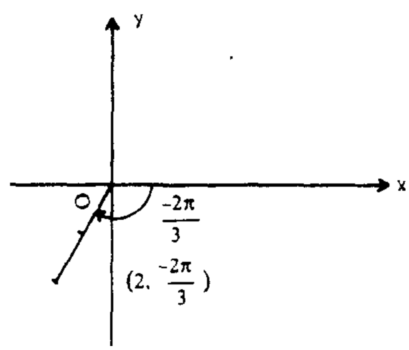
$y = r\sin\theta$

สูตรนี้ใช้ได้ในทุกกรณี ถ้าทราบพิกัดเชิงขั้ว จะสามารถหาพิกัดฉากได้ ในทางกลับกัน ถ้าต้องการหาพิกัดเชิงขั้ว เมื่อกำหนดพิกัดฉากให้ โดยการแก้สมการจะได้

$$
\begin{aligned}
\text{จาก} \quad x &= r\cos\theta \\
y &= r\sin\theta \\
x^2+y^2 &= r^2(\cos^2\theta+\sin^2\theta) \\
x^2+y^2 &= r^2 \\
r &= \sqrt{x^2+y^2} \\
\frac{y}{x} &= \frac{\sin\theta}{\cos\theta} \\
\tan\theta &= \frac{y}{x}
\end{aligned}
$$

ตัวอย่างที่ 3.2 จงหาพิกัดของจุด $\left(2, -\frac{2\pi}{3}\right)$ ในระบบพิกัดฉาก

วิธีทำ



รูปที่ 3.7

$$x = r\cos\theta = 2\cos\left(-\frac{2\pi}{3}\right) = 2\cos\left(\frac{2\pi}{3}\right) = \frac{2}{-2} = -1$$

$$y = r\sin\theta = 2\sin\left(-\frac{2\pi}{3}\right) = (2)\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = -\sqrt{3}$$

พิกัดฉากของจุดนี้คือ $(-1, -\sqrt{3})$

ตัวอย่างที่ 3.3 จงหาพิกัดของจุด $(2\sqrt{3}, -2)$ ในระบบพิกัดเชิงขั้ว ถ้า $r > 0$ และ $0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi$

วิธีทำ เนื่องจาก $r > 0$

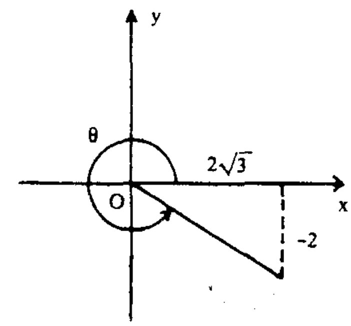
ดังนั้น $r = \sqrt{x^2+y^2}$

$$r = \sqrt{12+4} = 4$$

$$\tan\theta = \frac{y}{x} = \frac{-2}{2\sqrt{3}} = -\frac{1}{\sqrt{3}}$$

$$\theta = \frac{11\pi}{6}$$

ดังนั้น พิกัดเชิงขั้วของจุดนี้คือ $\left(4, \frac{11\pi}{6}\right)$



รูปที่ 3.8

ตัวอย่างที่ 3.4 จงหาสมการในระบบพิกัดเชิงขั้วของวงกลมซึ่งมีสมการในระบบพิกัดฉากเป็น $x^2+y^2 = a^2$

วิธีทำ จาก $x = r\cos\theta$

$$y = r\sin\theta$$

แทนค่า x, y ในสมการที่กำหนดให้

$$r^2(\cos^2\theta+\sin^2\theta) = a^2$$

$$r^2 = a^2$$

สมการในระบบพิกัดเชิงขั้วคือ $r = a$

การเปลี่ยนสมการจากระบบพิกัดเชิงขั้วเป็นระบบพิกัดฉาก ใช้ความสัมพันธ์

$$r = \sqrt{x^2+y^2}$$

$$\sin\theta = \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} \text{ และ } \cos\theta = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

ตัวอย่างที่ 3.5 จงแสดงว่า $r = \frac{1}{1-\cos\theta}$ เป็นสมการระบบพิกัดเชิงขั้วของพาราโบลารูปหนึ่ง

วิธีทำ จากสมการที่กำหนดให้

$$r(1-\cos\theta) = 1$$

แทนค่า $r\cos\theta$

$$\sqrt{x^2+y^2}\left(1-\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\right) = 1$$

$$\sqrt{x^2+y^2} - x = 1$$

$$\sqrt{x^2+y^2} = x+1$$

ยกกำลังสองทั้ง 2 ข้าง

$$x^2+y^2 = x^2+2x+1$$

$$y^2 = 2\left(x+\frac{1}{2}\right)$$

ซึ่งเป็นสมการพาราโบลาจุดยอดที่ $\left(-\frac{1}{2}, 0\right)$

แบบฝึกหัด 3.1

1. จงลงจุด $\left(3, -\frac{2\pi}{3}\right)$ และหาพิกัดเชิงขั้วแบบอื่น ๆ ของจุดนี้ ถ้า

   1.1 r เป็นลบ และ $0 < \theta < 2\pi$

   1.2 r เป็นบวก และ $0 < \theta < 2\pi$

   1.3 r เป็นลบ และ $-2\pi < \theta < 0$

2. จงหาพิกัดของจุดในระบบพิกัดฉาก เมื่อกำหนดจุดในระบบพิกัดเชิงขั้วไว้ แล้วลงจุด

   2.1 $\left(3, \frac{\pi}{4}\right)$, $\left(-3, \frac{\pi}{4}\right)$, $\left(3, -\frac{\pi}{4}\right)$

   2.2 $(-1, 0)$, $\left(2, -\frac{\pi}{6}\right)$, $\left(4, -\frac{\pi}{3}\right)$, $\left(-3, \frac{3\pi}{4}\right)$, $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$

3. จงหาพิกัดของจุดในระบบพิกัดเชิงขั้ว เมื่อกำหนดจุดในระบบแกนตั้งฉากให้ แล้วลงจุด

   3.1 $(-3, -3)$, $(-4, 0)$, $(\sqrt{3}, 1)$, $(-\sqrt{3}, -1)$, $(0, 2)$

   3.2 $(-2, 2)$, $(5, -5)$, $(-\sqrt{3}, 1)$, $(2\sqrt{3}, 2)$, $(2, 2\sqrt{3})$

4. จงหาสมการของกราฟในระบบพิกัดเชิงขั้ว เมื่อกำหนดสมการของกราฟในระบบแกนตั้งฉากให้

   4.1 $x = 5$
   4.2 $y = -3$
   4.3 $y = x$
   4.4 $2x + 3y = 6$
   4.5 $x^2 = 4y$
   4.6 $x^2 + y^2 - 4x = 0$
   4.7 $x^2 - y^2 = 4$
   4.8 $x^2 + y^2 - 4x + 4y + 4 = 0$

5. จงหาสมการของกราฟในระบบพิกัดฉาก เมื่อกำหนดสมการของกราฟในระบบพิกัดเชิงขั้วให้

   5.1 $r = 5$
   5.2 $\theta = \frac{\pi}{6}$
   5.3 $r = \cos\theta$
   5.4 $r = 10\sin\theta$
   5.5 $r\cos\theta = 2$
   5.6 $r\sin\theta = -1$
   5.7 $r = \frac{5}{1 + \cos\theta}$
   5.8 $r = 2(\sin\theta - \cos\theta)$
   5.9 $r^2 \sin 2\theta = 2$
   5.10 $r^2 = \cos 2\theta$
   5.11 $r = a\sin 3\theta$
   5.12 $r\cos\left(\theta - \frac{\pi}{3}\right) = 3$
   5.13 $r\sin\left(\frac{\pi}{4} - \theta\right) = \sqrt{2}$
   5.14 $r = a(1 - \sin\theta)$
   5.15 $r(1 - 2\cos\theta) = 2$

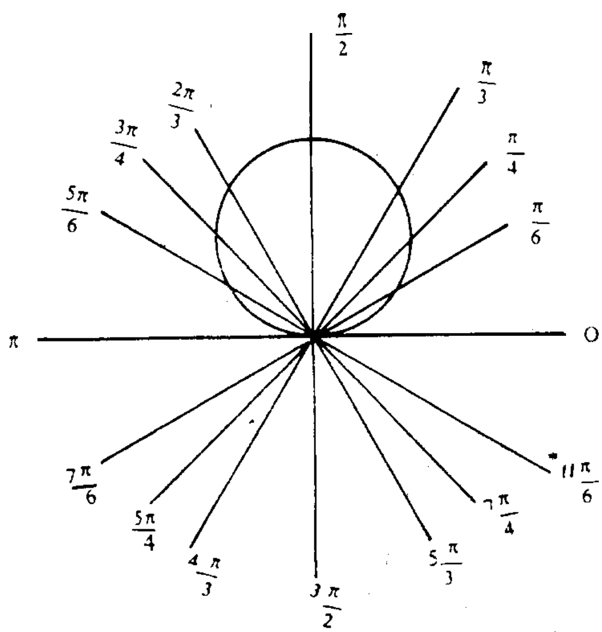
3.3 การเขียนกราฟของสมการในระบบพิกัดเชิงขั้ว

สมการในระบบพิกัดเชิงขั้วสามารถเขียนกราฟในระนาบเชิงขั้วได้ เช่นเดียวกับสมการในระบบพิกัดฉาก การเขียนกราฟอาจทำได้โดยการกำหนดค่า θ แล้วหาค่า r ที่คล้องตามค่า θ แล้วลงจุดทีละจุด

ตัวอย่างที่ 3.6 จงเขียนกราฟของ $r = 4 \sin \theta$

วิธีทำ โดยการกำหนดค่า θ แล้วหาค่า r ให้คล้องตามสมการที่กำหนดให้

θ	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{6}$	π
r	0	2	$2\sqrt{2}$	$2\sqrt{3}$	4	$2\sqrt{3}$	$2\sqrt{2}$	2	0



รูปที่ 3.9

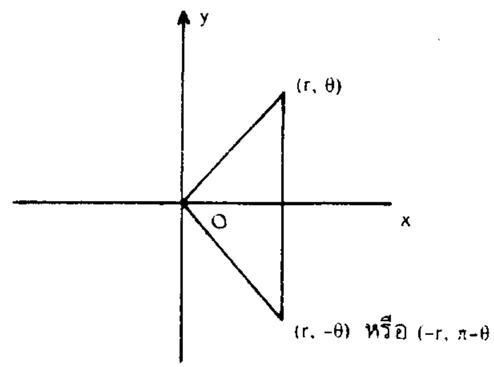
จะเห็นว่ากราฟของสมการจะเป็นวงกลมจุดศูนย์กลางที่ (0, 2) รัศมี 2

ข้อสังเกต จะเห็นว่าถ้าเรากำหนด $\pi < \theta \leqslant 2\pi$ ก็จะได้ค่า r เป็นลบ ซึ่งทำให้ได้จุด (r, θ) ซ้ำกันกับเมื่อกำหนด $0 \leqslant \theta \leqslant \pi$

ดังนั้น เพื่อให้เขียนกราฟได้ง่ายและรวดเร็ว จึงควรวิเคราะห์สมการหาสมมาตร หาค่าสูงสุดหรือต่ำสุดของ $|r|$ หา θ ที่ทำให้ r หาค่าได้ และหาสมการของเส้นสัมผัสกับกราฟที่ขั้ว

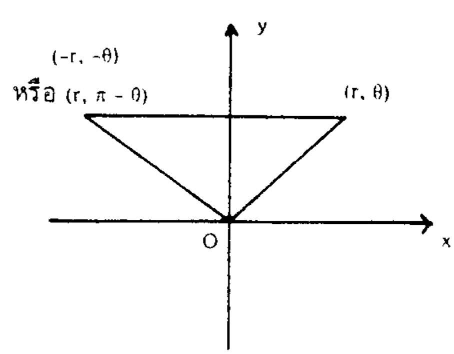
ดังได้ให้นิยามของจุด 2 จุดมีสมมาตรเทียบกับเส้นตรง และจุด 2 จุดมีสมมาตรเดียวกับจุดที่ 3 แล้ว ในหัวข้อการหาสมมาตรของกราฟในระบบพิกัดฉาก

ดังนั้นจะเห็นว่า



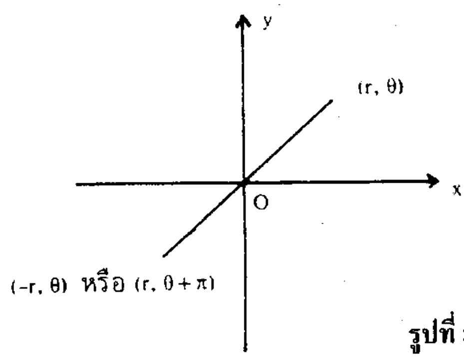
รูปที่ 3.10

รูปที่ 3.10 (r, θ) มีสมมาตรกับจุด $(r, -\theta)$ หรือ $(-r, \pi-\theta)$ โดยเทียบกับแกนเชิงขั้ว (แกน x)



รูปที่ 3.11

รูปที่ 3.11 (r, θ) มีสมมาตรกับจุด $(-r, -\theta)$ หรือ $(r, \pi-\theta)$ โดยเทียบกับเส้นตรง $\theta = \frac{\pi}{2}$ (แกน y)



รูปที่ 3.12

รูปที่ 3.12 (r, θ) มีสมมาตรกับจุด $(-r, \theta)$ หรือ $(r, \theta+\pi)$ โดยเทียบกับขั้ว

จงสรุปเป็นกฎการพิจารณาสมมาตรสำหรับสมการในระบบเชิงขั้วดังนี้

1. กราฟมีสมมาตรกับแกนเชิงขั้ว ถ้าสมการคงเดิม เมื่อแทนค่า

   1.1 θ ด้วย $-\theta$ หรือ

   1.2 r ด้วย $-r$ และแทน θ ด้วย $\pi-\theta$

2. กราฟมีสมมาตรตรงกับเส้น $\theta = \frac{\pi}{2}$ ถ้าสมการคงเดิม เมื่อแทนค่า

   2.1 r ด้วย $-r$ และ θ ด้วย $-\theta$ หรือ

   3.2 θ ด้วย $\pi-\theta$

3. กราฟมีสมมาตรกับขั้ว ถ้าสมการคงเดิม เมื่อแทนค่า

   3.1 r ด้วย $-r$ หรือ

   3.2 θ ด้วย $\pi+\theta$

การทดสอบสมมาตรทั้งในข้อ 1, 2, 3 ถ้าทดสอบโดยวิธีข้อย่อย 1 แล้วสมการเปลี่ยน ต้องทดสอบโดยข้อย่อย 2 ด้วย ถ้าข้อย่อย 2 สมการคงเดิมจะสรุปว่ากราฟมีสมมาตร

ตัวอย่างที่ 3.7 จงวิเคราะห์การมีสมมาตรของสมการ $r = 4\cos 3\theta$

วิธีทำ 1. สมการกับแกนเชิงขั้ว

แทน θ ด้วย $-\theta$ ดังนั้น $r = 4\cos 3(-\theta) = 4\cos 3\theta$

สมการคงเดิม ดังนั้น กราฟมีสมมาตรกับแกนเชิงขั้ว

2. สมมาตรกับเส้นตรง $\theta = \frac{\pi}{2}$

แทน θ ด้วย $\pi-\theta$

$$\begin{aligned} r &= 4\cos 3(\pi-\theta) \\ &= -4\cos 3\theta \end{aligned}$$

สมการเปลี่ยน ต้องตรวจสอบโดยใช้ข้อย่อย 2

แทน r ด้วย $-r$ และ θ ด้วย $-\theta$

$$-r = 4\cos 3(-\theta)$$

$$-r = 4\cos 3\theta \text{ สมการเปลี่ยน}$$

ดังนั้น กราฟไม่มีสมมาตรกับเส้นตรง $\theta = \frac{\pi}{2}$

3. สมมาตรกับขั้ว

แทน r ด้วย $-r$

$$-r = 4\cos 3\theta$$

สมการเปลี่ยน

แทน θ ด้วย $\pi+\theta$

$$\begin{aligned} r &= 4\cos 3(\pi+\theta) \\ &= 4\cos(3\pi+3\theta) \\ &= -4\cos 3\theta \end{aligned}$$

สมการเปลี่ยน ดังนั้นกราฟไม่มีสมมาตรกับขั้ว

ดังนั้น กราฟของ $r = 4\cos 3\theta$ มีสมมาตรกับแกนเชิงขั้ว แต่ไม่มีสมมาตรกับ $\theta = \frac{\pi}{2}$ และขั้ว

สมการเส้นสัมผัสกับกราฟที่ขั้ว เพื่อช่วยให้การเขียนกราฟทำได้ง่ายขึ้น

จากความสัมพันธ์ $x = r\cos\theta$

และ $y = r\sin\theta$

ให้ $r = f(\theta)$ เป็นสมการของกราฟในระบบเชิงขั้ว

ในที่นี้จะหาสูตรความชันของเส้นสัมผัสกับเส้นโค้งที่จุด (r, θ)

ถ้าให้ α เป็นความเอียงของเส้นสัมผัส

ดังนั้น $m = \tan\alpha$ เป็นความชันของเส้นสัมผัส

$$\frac{dx}{d\theta} = \cos\theta\frac{dr}{d\theta} - r\sin\theta$$

$$\frac{dy}{d\theta} = \sin\theta\frac{dr}{d\theta} + r\cos\theta$$

และ $$\tan\infty = \frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{d\theta}}{\frac{dx}{d\theta}} = \frac{\sin\theta\frac{dr}{d\theta} + r\cos\theta}{\cos\frac{dr}{d\theta} - r\sin\theta}$$

หรือ $$\tan \alpha = \frac{\tan \theta \frac{dr}{d\theta} + r}{\frac{dr}{d\theta} - r \tan \theta} \qquad \text{..........(3.1)}$$

ดังนั้น (3.1) คือสูตรความชันของเส้นสัมผัสกับเส้นโค้งเมื่อกำหนดสมการ $r = f(\theta)$ ให้สมการเส้นสัมผัสของกราฟที่ขั้วคือ ให้ $r = 0$ แทนในสูตร (3.1)

ดังนั้น $$\tan \alpha = \tan \theta \quad \text{เมื่อ } \frac{dr}{d\theta} \neq 0 \qquad \text{..........(3.2)}$$

จะเห็นว่า ค่า θ เมื่อ $0 \leqslant \theta \leqslant \pi$ ใน (3.2) มีค่าเท่ากับ α ซึ่งคือความเอียงของเส้นสัมผัสกับกราฟที่ขั้ว

ดังนั้น ถ้า $\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_k$ เป็นความเอียงของกราฟที่ขั้ว

สมการของเส้นสัมผัสกับกราฟที่ขั้ว คือ

$$\theta = \theta_1, \theta = \theta_2, \ldots, \theta = \theta_k$$

ดังนั้น ในการหาสมการของเส้นสัมผัสกับกราฟที่ขั้ว ทำได้โดยให้ $r = 0$ ค่า θ ที่ได้คือสมการที่ต้องการ

ตัวอย่างที่ 3.8 จงเขียนกราฟของสมการ $r = 1 - 2\cos\theta$

วิธีทำ พิจารณาสมมาตรของกราฟ

1. แทน θ ด้วย $-\theta$

$$r = 1 - 2\cos(-\theta) = 1 - 2\cos\theta$$

กราฟมีสมมาตรกับแกนเชิงขั้ว

2. แทน θ ด้วย $\pi - \theta$

$$r = 1 - 2\cos(\pi - \theta) = 1 + 2\cos\theta$$

สมการเปลี่ยน

แทน r ด้วย $-r$ และ θ ด้วย $-\theta$

$$-r = 1 - 2\cos(-\theta)$$

$$r = 1 - 2\cos\theta \text{ สมการเปลี่ยน}$$

ดังนั้น กราฟไม่มีสมการกับเส้นตรง $\theta = \frac{\pi}{2}$

3. แทน r ด้วย $-r$

$$-r = 1 - 2\cos\theta \text{ สมการเปลี่ยน}$$

แทน θ ด้วย $\pi + \theta$

$$r = 1 - 2\cos(\pi + \theta) = 1 + 2\cos\theta \text{ สมการเปลี่ยน}$$

ดังนั้น กราฟไม่มีสมมาตรกับขั้ว

เส้นสัมผัสกับโค้งที่ขั้ว

ให้ $r = 0$

ดังนั้น $1 - 2\cos\theta = 0$

$$\cos\theta = \frac{1}{2}$$

$$\theta = \frac{\pi}{3} \text{ และ } \frac{5\pi}{3}$$

ดังนั้น $\theta = \frac{\pi}{3}$ และ $\theta = \frac{5\pi}{3}$ เป็นเส้นสัมผัสโค้งที่ขั้ว

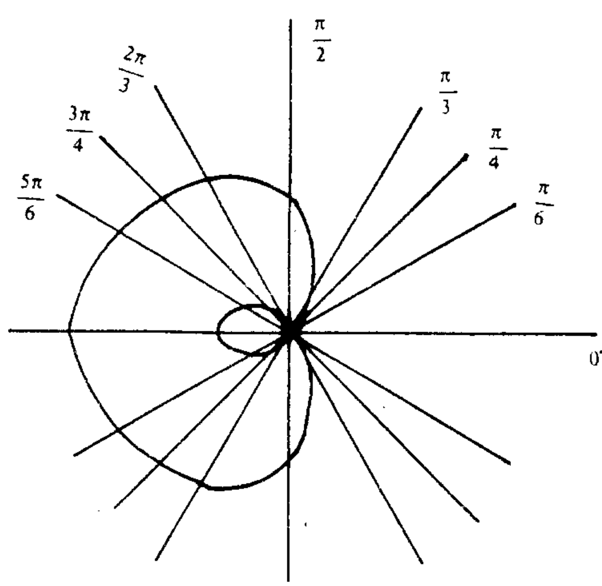
ค่าสูงสุดและต่ำสุดของ $|r|$ พิจารณาจากสมการ $r = 1 - 2\cos\theta$ จะเห็นว่า

เมื่อ $\cos\theta = -1$ หรือ $\theta = \pi$ จะทำให้ $|r|$ มีค่าสูงสุด $= 3$

เมื่อ $\cos\theta = 1$ หรือ $\theta = 0$ จะทำให้ $|r|$ มีค่าต่ำสุด $= 0$

เนื่องจากกราฟสมมาตรกับแกนเชิงขั้ว จึงสมมุติค่า θ จาก 0 ถึง π

θ	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{6}$	π
r	-1	$1-\sqrt{3}$	$1-\sqrt{2}$	0	1	2	$1+\sqrt{2}$	$1+\sqrt{3}$	3



รูปที่ 3.13

กราฟรูปที่ 3.13 เรียกว่า **ลิมาคอน (limacon)**

ตัวอย่างที่ 3.9 จงเขียนกราฟของ $r = 1+\cos\theta$

วิธีทำ แทน θ ด้วย $-\theta$ สมการคงเดิม ดังนั้น มีสมมาตรกับแกนเชิงขั้ว

แทน θ ด้วย $\pi-\theta$ สมการเปลี่ยน แทน r ด้วย $-r$ และ θ ด้วย $-\theta$ สมการเปลี่ยน

กราฟไม่มีสมมาตรกับเส้นตรง $\theta = \frac{\pi}{2}$

และแทน r ด้วย $-r$ สมการเปลี่ยน แทน θ ด้วย $\pi+\theta$ สมการก็เปลี่ยน

ดังนั้น กราฟไม่มีสมมาตรกับขั้ว

เส้นสัมผัสกราฟที่ขั้ว ให้ $r = 0$

$$\cos\theta = -1$$

$$\theta = \pi$$

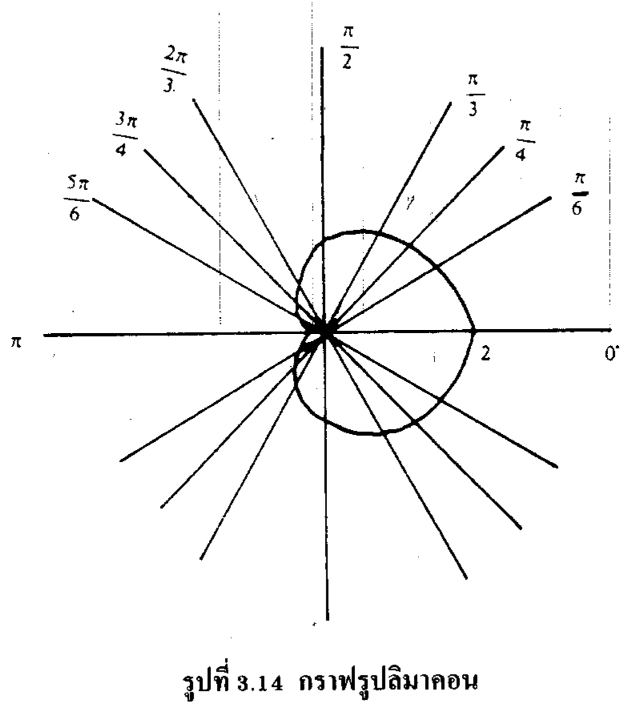
ค่าสูงสุดต่ำสุดของ $|r|$

เมื่อ $\cos\theta = 1$ หรือ $\theta = 0$ $|r|$ มีค่าสูงสุด $= 2$

เมื่อ $\cos\theta = -1$ หรือ $\theta = \pi$ $|r|$ มีค่าต่ำสุด $= 0$

เนื่องจากกราฟสมมาตรกับแกนเชิงขั้ว จึงสมมุติค่า θ จาก 0 ถึง π

θ	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{6}$	π
r	2	1.87	1.71	1.5	1	0.5	0.29	0.13	0



รูปที่ 3.14 กราฟรูปลิมาคอน

กราฟของสมการที่อยู่ในรูป $r = a \pm b\cos\theta$ หรือ $r = a \pm b\sin\theta$ มีชื่อเฉพาะว่า ลิมาคอน (limacon)

ถ้า $b > a$ ดังตัวอย่างที่ 3 ลิมาคอนมีบ่วง (loop) อยู่ข้างใน

ถ้า $b = a$ ดังตัวอย่างที่ 4 ลิมาคอนคือ คาดิออยด์ (cardioid)

ถ้า $b < a$ ลิมาคอนจะไม่มีเส้นสัมผัสกับกราฟที่ขั้ว

ตัวอย่างที่ 3.10 จงวิเคราะห์และเขียนกราฟของสมการ $r = a\sin 2\theta$ เมื่อ $0 \leqslant \theta < 2\pi$ a เป็นค่าคงที่บวก

วิธีทำ **สมมาตร** แทน θ ด้วย $-\theta$ สมการเปลี่ยน แต่แทน r ด้วย $-r$ และ θ ด้วย $\pi-\theta$ สมการคงเดิม ดังนั้น กราฟมีสมมาตรกับแกนเชิงขั้ว

แทน r ด้วย $-r$ และ θ ด้วย $-\theta$ สมการคงเดิม ดังนั้น กราฟมีสมมาตรกับเส้นตรง $\theta = \frac{\pi}{2}$

แทน r ด้วย $-r$ สมการเปลี่ยน แต่แทน θ ด้วย $\pi+\theta$ สมการคงที่ ดังนั้นกราฟมีสมมาตรกับขั้ว

เส้นสัมผัสกับกราฟที่ขั้ว

แทน $r = 0$ จะได้ $\sin 2\theta = 0 \quad 0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi$

ดังนั้น $2\theta = 0, \pi, 2\pi, 3\pi, 4\pi$

$$\theta = 0, \frac{\pi}{2}, \pi, \frac{3\pi}{2}, 2\pi$$

สมการเส้นสัมผัสกราฟที่ขั้วคือ $\theta = 0, \theta = \frac{\pi}{2}$

ค่าสูงสุดและต่ำสุดของ $|r|$

$|r|$ มีค่าสูงสุด $= a$ เมื่อ $\sin 2\theta = \pm 1$

$$\text{หรือ } 2\theta = \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}, \frac{5\pi}{2}, \frac{7\pi}{2}$$

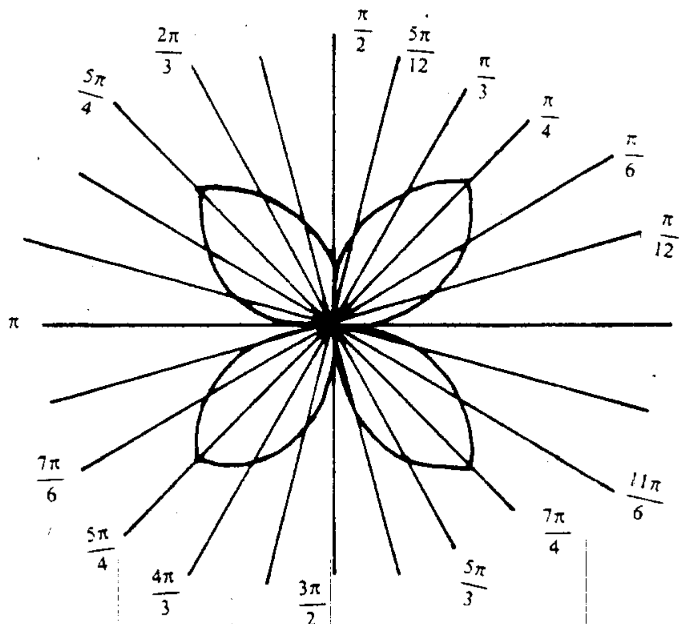
$$\theta = \frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}, \frac{7\pi}{4}$$

$|r|$ มีค่าต่ำสุด $= 0$ เมื่อ $\sin 2\theta = 0$

$$\theta = 0, \frac{\pi}{2}, \pi$$

ดังนั้น จึงกำหนดค่า θ จาก 0 ถึง $\frac{\pi}{2}$

θ	0	$\frac{\pi}{12}$	$\frac{\pi}{\theta}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{5\pi}{12}$	$\frac{\pi}{2}$
r	0	0.5a	0.87a	a	0.87a	0.5a	a



รูปที่ 3.15

ตัวอย่างที่ 3.11 จงเขียนกราฟของสมการ $r = 4\cos 3\theta$

วิธีทำ จากสมการ $r = 4\cos 3\theta$

สมมาตรของกราฟได้พิจารณาแล้ว

เส้นสัมผัสกับกราฟที่ขั้ว

ให้ $r = 0$

$$\cos 3\theta = 0 \quad \text{เมื่อ } 0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi$$

$$3\theta = \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}, \frac{5\pi}{2}, \frac{7\pi}{2}, \frac{9\pi}{2}, \frac{11\pi}{2}$$

$$\theta = \frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{2}, \frac{5\pi}{6}, \frac{7\pi}{6}, \frac{3\pi}{2}, \frac{11\pi}{6}$$

สมการเส้นสัมผัสกับเส้นโค้งคือ $\theta = \frac{\pi}{6}, \theta = \frac{\pi}{2}, \theta = \frac{5\pi}{6}$

$|r|$ มีค่าสูงสุด $= 4\cos 3\theta = \pm 1$

$$3\theta = 0, \pi, 2\pi, 4\pi, 6\pi$$

$$\theta = 0, \frac{\pi}{3}, \frac{2\pi}{3}, \frac{4\pi}{3}, 2\pi$$

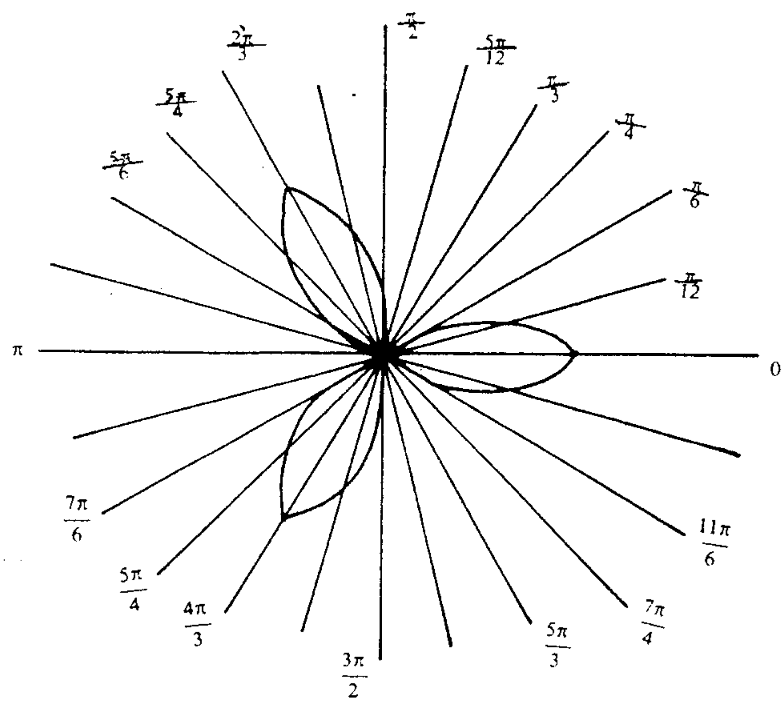
$|r|$ มีค่าต่ำสุด $= 0$ เมื่อ $\cos 3\theta = 0$

$$\theta = \frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{2}, \frac{5\pi}{6}$$

การกำหนดค่า θ จะกำหนดจาก 0 ถึง $\frac{\pi}{2}$

θ	0	$\frac{\pi}{12}$	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{5\pi}{12}$	$\frac{\pi}{2}$
r	4	2.82	0	– 2.82	– 4	– 2.82	0

ดังรูปที่ 3.16



รูปที่ 3.16

จะเห็นว่ากราฟของสมการซึ่งอยู่ในรูปของ $r = a\cos n\theta$ หรือ $r = a\sin n\theta$ เป็นรูปกลีบกุหลาบ

ถ้า n เป็นจำนวนคี่ กราฟที่ได้จะมี n กลีบ ถ้า n เป็นจำนวนคู่ กราฟจะมี 2n กลีบ

ตัวอย่างที่ 3.12 จงวิเคราะห์และเขียนกราฟของ $r^2 = a^2 \cos 2\theta$ ถ้า a เป็นค่าคงที่บวก

วิธีทำ กราฟจะมีสมมาตรกับแกนเชิงขั้ว เส้นตรง $\theta = \frac{\pi}{2}$ และขั้ว

เส้นสัมผัสกับเส้นโค้งที่ขั้ว

ให้ $r = 0$

$$\cos 2\theta = 0 \text{ ดังนั้น } 2\theta = \frac{\pi}{2} \text{ หรือ } -\frac{\pi}{2}$$

$$\theta = \frac{\pi}{4} \text{ หรือ } -\frac{\pi}{4}$$

สมการเส้นสัมผัสกราฟที่ขั้ว คือ $\theta = \frac{\pi}{4}$ และ $0 = -\frac{\pi}{4}$

ค่าสูงสุดและต่ำสุดของ $|r|$

$|r|$ มีค่าสูงสุด $= a$ เมื่อ $\cos 2\theta = 1$

$$\theta = 0, \pi$$

$|r|$ มีค่าต่ำสุด $= 0$ เมื่อ $\cos 2\theta = 0$

$$\theta = \frac{\pi}{4}, -\frac{\pi}{4}$$

จากสมการที่กำหนดให้ $r = \pm a\sqrt{\cos 2\theta}$

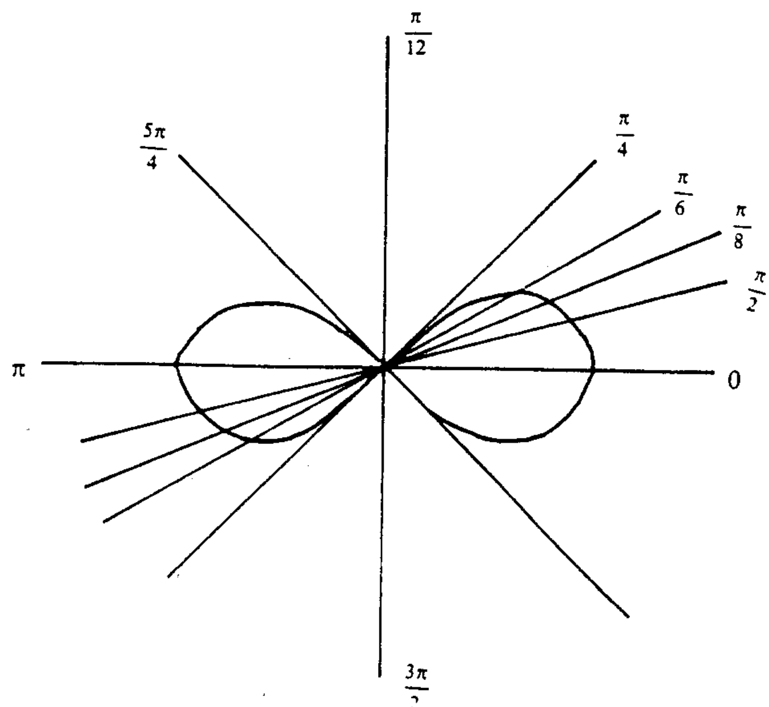
ดังนั้น r จะหาค่าได้เมื่อ $\cos 2\theta \geqslant 0$

หรือเมื่อ $-\frac{\pi}{2} \leqslant 2\theta \leqslant \frac{\pi}{2}, 2\pi - \frac{\pi}{2} \leqslant 2\theta \leqslant 2\pi + \frac{\pi}{2}$

นั่นคือ $-\frac{\pi}{4} \leqslant \theta \leqslant \frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4} \leqslant \theta \leqslant \frac{5\pi}{4}$

เนื่องจากกราฟมีสมมาตรกับแกนเชิงขั้วและเส้นตรง $\theta = \frac{\pi}{2}$ **จึงสมมุติค่า θ จาก 0** ถึง $\frac{\pi}{4}$

θ	0	$\frac{\pi}{12}$	$\frac{\pi}{8}$	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$
r	$\pm a$	$\pm 0.93a$	$\pm 0.84a$	$\pm 0.71a$	0



รูปที่ 3.17

แบบฝึกหัด 3.2

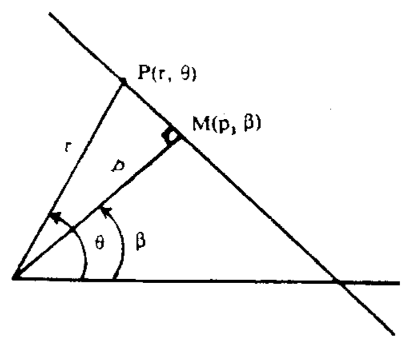
จงวิเคราะห์และเขียนกราฟของสมการ

1. $r = 2$
2. $r = -2$
3. $\theta = -\frac{\pi}{6}$
4. $\theta = \frac{2\pi}{3}$
5. $r = 2 \sin \theta$
6. $r = 4 \cos \theta$
7. $r = \sin 2\theta$
8. $r = 4 \cos 2\theta$
9. $r = 4 \sin 3\theta$
10. $r = 4 \cos 5\theta$
11. $r = 2 - 2 \cos \theta$
12. $r = 1 + 2 \cos \theta$
13. $r = 3 - 2 \sin \theta$
14. $r^2 = \sin \theta$
15. $r = \cos^2 2\theta$
16. $r^2 = a^2 \sin 2\theta$

3.4 สมการเส้นตรงในระบบพิกัดเชิงขั้ว

ในการหาสมการของกราฟต่าง ๆ ในระบบเชิงขั้ว โดยการกำหนดจุด $P(r, \theta)$ เป็นจุดใด ๆ บนกราฟ แล้วหาความสัมพันธ์ของ r, θ โดยใช้คุณสมบัติทางเรขาคณิตช่วย ซึ่งทำให้ $P(r, \theta)$ อยู่บนกราฟนั้น เหมือนการหาสมการในระบบแกนตั้งฉาก

ให้ ℓ เป็นเส้นตรงซึ่งไม่ผ่านขั้ว M เป็นจุดปลายเส้นตั้งฉาก จาก O ไปยัง ℓ $P(r, \theta)$ เป็นจุดใด ๆ บนเส้นตรง ℓ



รูปที่ 3.18

ให้ $|OM| = p$

β เป็นมุมที่วัดทวนเข็มนาฬิกาจากแกนเชิงขั้วถึง OM

จะเห็นว่า $\cos(\theta - \beta) = \frac{p}{r}$

ดังนั้น $r \cos(\theta - \beta) = p$ ....(3.3)

สมการ (3.3) เป็นสมการของเส้นตรง ℓ ในระบบเชิงขั้ว

ถ้า $\beta = 0$ หรือ $\beta = \pi$ (3.3) คือ

$r \cos \theta = p$ หรือ $r \cos \theta = -p$ ....(3.4)

ซึ่งเป็นสมการเส้นตรงที่ตั้งฉากกับแกนเชิงขั้ว

ถ้า $\beta = \frac{\pi}{2}$ หรือ $\beta = \frac{3\pi}{2}$ (3.3) คือ

$r \sin \theta = p$ หรือ $r \sin \theta = -p$ ....(3.5)

ซึ่งเป็นสมการเส้นตรงที่ขนานกับแกนเชิงขั้ว

และจาก (3.3) กระจายจะได้

$$r \cos \theta \cos \beta + r \sin \theta \sin \beta = p$$

แทนค่า $x = r \cos \theta$, $y = r \sin \theta$ ดังนั้นจะได้

$x \cos \beta + y \sin \beta = p$ ....(3.6)

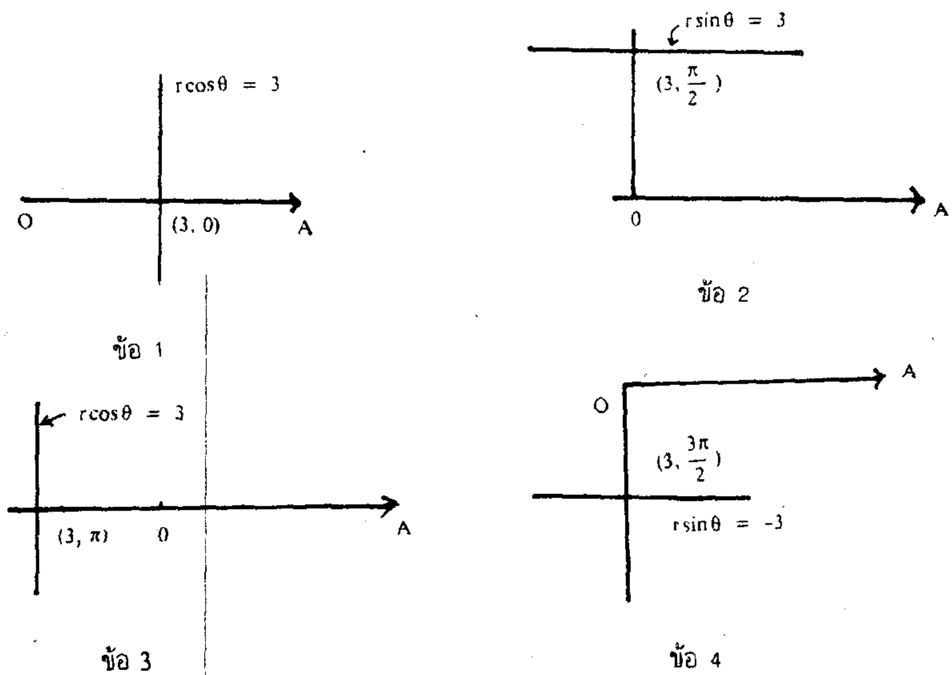
(3.6) เป็นสมการของเส้นตรงในระบบตั้งฉาก (สมการเส้นตรงแบบนอร์มอล)

กราฟของสมการ $\theta = k$ เมื่อ k เป็นค่าคงที่ คือเส้นตรงที่ผ่านขั้ว และทำมุมกับแกนเชิงขั้วเท่ากับ k เรเดียน

ตัวอย่างที่ 3.13 จงเขียนกราฟของสมการ

1. $r \cos \theta = 3$
2. $r \sin e = 3$
3. $r \cos \theta = -3$
4. $r \sin e = -3$

วิธีทำ กราฟของสมการจะเป็นเส้นตรง



รูปที่ 3.19

จะเห็นว่า ถ้าเปลี่ยนสมการในระบบเชิงขั้วเป็นระบบแกนตั้งฉาก จะได้

1. $x = 3$
2. $y = 3$
3. $x = -3$
4. $y = -3$

ตัวอย่างที่ 3.14 จงหาสมการของเส้นตรงในระบบเชิงขั้ว ซึ่งมี $p = 3, \beta = \frac{\pi}{3}$

วิธีทำ จากสมการเส้นตรงในระบบเชิงขั้ว

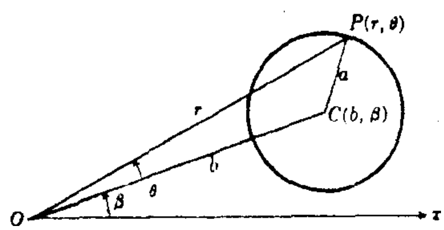
$$r \cos(\theta - \beta) = p$$

แทนค่า $p = 3, \beta = \frac{\pi}{3}$

ดังนั้น สมการคือ $r \cos\left(\theta - \frac{\pi}{3}\right) = 3$

3.5 สมการวงกลมในระบบพิกัดเชิงขั้ว

ให้ $P(r, \theta)$ เป็นจุดใด ๆ บนวงกลม ซึ่งมี $C(b, \beta)$ เป็นจุดศูนย์กลาง และรัศมี a ดังรูป 3.20



รูปที่ 3.20

จากกฎของโคซายน์ จะได้

$$a^2 = b^2 + r^2 - 2br\cos(\theta - \beta) \qquad \text{.........(3.7)}$$

(3.7) คือ สมการของวงกลมจุดศูนย์กลางที่ (b, β) และรัศมี a

ถ้าแทน $b = 0$ ใน (2.58)

$$a^2 = r^2$$

นั่นคือ $r = a$ หรือ $r = -a$ ....(3.8)

(3.8) เป็นสมการของวงกลม จุดศูนย์กลางอยู่ที่ขั้ว

ถ้าแทน $b = a$ และ $\beta = 0$ ใน (3.7)

จะได้ $a^2 = a^2 + r^2 - 2ar\cos\theta$

$$r = 2a\cos\theta \qquad \text{.........(3.9)}$$

(3.9) เป็นสมการของวงกลม จุดศูนย์กลางอยู่ที่ $(a, 0)$

แทน $b = a, \beta = \pi$ ใน (3.7)

จะได้ $a^2 = r^2 + a^2 - 2ar\cos(\theta - \pi)$

$$r = -2a\cos\theta \qquad \text{.........(3.10)}$$

(3.10) เป็นสมการของวงกลม จุดศูนย์กลางอยู่ที่ (a, π)

ในทำนองเดียวกันถ้าจุดศูนย์กลางอยู่ที่ $\left(a, \frac{\pi}{2}\right)$ หรือ $\left(a, \frac{3\pi}{2}\right)$ สมการของวงกลม คือ

$$r = 2a \sin \theta \text{ หรือ } r = -2a\sin\theta$$

ตัวอย่างที่ 3.15 จงหาสมการของวงกลมในระบบพิกัดเชิงขั้ว ซึ่งมีจุดศูนย์กลางอยู่ที่ $(5, \pi)$ และรัศมี 2

วิธีทำ จาก (3.7)

$$a^2 = b^2+r^2-2br\cos(\theta-\beta)$$

แทนค่า ในที่นี้ $a = 2$, $b = 5$, $\beta = \pi$

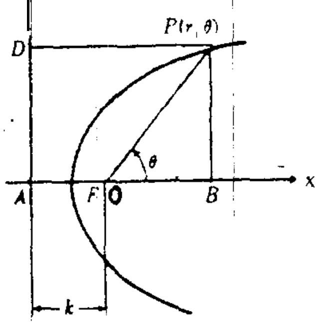
$$4 = 25+r^2-10r\cos(\theta-\pi)$$

$$r^2+10r\cos\theta+21 = 0$$

3.6 สมการของภาคตัดกรวยในระบบพิกัดเชิงขั้ว

พิจารณาสมการภาคตัดกรวยในระบบพิกัดเชิงขั้วที่ง่ายที่สุดโดยกำหนดให้จุดโฟกัสอยู่ที่ขั้ว และแกนของรูปทับแกนเชิงขั้ว

ให้ e เป็นค่าเยื้องศูนย์กลาง ไดเรกตริกซ์อยู่ทางซ้ายมือของโฟกัส และมีสมการ $x = -k$ ดังรูป



รูปที่ 3.21

ให้ $P(r, \theta)$ เป็นจุดใด ๆ บนภาคตัดกรวย จากนิยามของภาคตัดกรวยจะได้ว่า

$$|PF| = e\cdot|PD| \qquad \text{..........(3.11)}$$

แต่ $|PF| = r$

และ $|PD| = |AB|$

$$|AB| = |AF|+|FB| = k+r\cos\theta$$

ดังนั้น แทนค่าใน (3.11) จะได้

$$r = e(k+r\cos\theta)$$

$$r = \frac{ke}{1-e\cos\theta} \qquad \text{..........(3.12)}$$

ซึ่ง (3.12) เป็นสมการของภาคตัดกรวยในระบบพิกัดเชิงขั้ว ซึ่งมีโฟกัสที่ขั้ว ไดเรกตริกซ์ ตั้งฉากกับแกนเชิงขั้ว (ที่ต่อออกไป) และอยู่ห่างจากขั้วไปทางซ้ายมือเป็นระยะ k หน่วย e เป็นค่าเยื้องศูนย์กลาง

ในทำนองเดียวกัน สมการของภาคตัดกรวยในระบบพิกัดเชิงขั้ว ซึ่งมีโฟกัสที่ขั้ว ไดเรกตริกซ์ ตั้งฉากกับแกนเชิงขั้ว และอยู่ห่างไปทางขวามือ เป็นระยะ k หน่วย e เป็นค่าเยื้องศูนย์กลางคือ

$$r = \frac{ke}{1+e\cos\theta} \qquad \text{..........(3.13)}$$

และสมการของภาคตัดกรวย ซึ่งโฟกัสอยู่ที่ขั้ว e เป็นค่าเยื้องศูนย์กลาง และไดเรกตริกซ์ ขนานกับแกนเชิงขั้ว และอยู่เหนือขั้วหรือใต้ขั้ว k หน่วย คือ

$$r = \frac{ke}{1+e\sin\theta} \text{ หรือ } r = \frac{ke}{1-e\sin\theta} \qquad \text{..........(3.14)}$$

ถ้า $e = 1$ ภาคตัดกรวยคือพาราโบลา

$0 < e < 1$ ภาคตัดกรวยคือวงรี

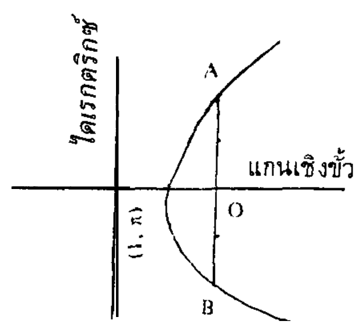
$e > 1$ ภาคตัดกรวยคือไฮเพอร์โบลา

ตัวอย่างที่ 3.16 จงวิเคราะห์ และเขียนกราฟของสมการ $r = \frac{2}{1-\cos\theta}$

วิธีทำ จากสมการ $r = \frac{ke}{1-e\cos\theta}$

ในที่นี้จะได้ $e = 1,\ k = 2$

ดังนั้น กราฟคือพาราโบลา โฟกัสอยู่ที่ขั้ว ไดเรกตริกซ์ที่สมนัยกับโฟกัสอยู่ทางซ้ายมือของขั้ว และห่างขั้ว 2 หน่วย



รูปที่ 3.22

เมื่อ $\theta = 0$ r หาค่าไม่ได้

เมื่อ $\theta = \pi$ ค่าน้อยที่สุดของ r คือ 1

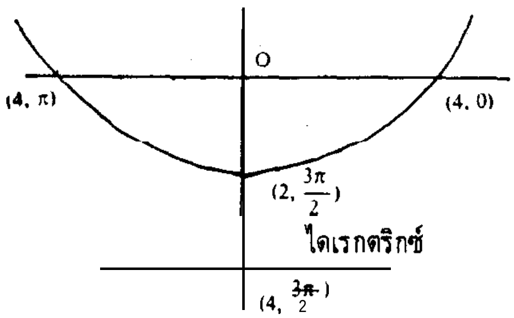
จุดยอดคือจุดกึ่งกลางระหว่างโฟกัสและไดเรกตริกซ์ คือจุด $(1, \pi)$

เลตัสเรกตัม คือ $|AB| = 4$

ตัวอย่างที่ 3.17 จงหาสมการของพาราโบลา และสมการไดเรกตริกซ์ ในระบบพิกัดเชิงขั้ว เมื่อพาราโบลามีโฟกัสอยู่ที่ขั้ว จุดยอดคือ $\left(2, \frac{3\pi}{2}\right)$

วิธีทำ เนื่องจากจุดยอด คือ $\left(2, \frac{3\pi}{2}\right)$ ดังนั้น แกนของรูปทับเส้นตรง $\theta = \frac{\pi}{2}$ จุดยอดอยู่ใต้ขั้ว เส้นไดเรกตริกซ์อยู่ใต้ขั้ว สมการคือ

รูปที่ 3.23



$$r = \frac{k}{1 - \sin\theta}$$

ระยะจากจุดยอดถึงจุดโฟกัส $= \frac{k}{2} = 2$

ดังนั้น $k = 4$

สมการพาราโบลา คือ $r = \dfrac{4}{1 - \sin\theta}$

สมการไดเรกตริกซ์ คือ $y = -4$

$r\sin\theta = -4$

ตัวอย่างที่ 3.18 จงวิเคราะห์และเขียนกราฟของสมการ $r = \dfrac{3}{2 - \cos\theta}$

วิธีทำ เขียนสมการใหม่ $r = \dfrac{\frac{3}{2}}{1 - \frac{1}{2}\cos\theta}$

เทียบกับสมการ $r = \dfrac{ke}{1 - e\cos\theta}$

จะได้ $e = \frac{1}{2} < 1,\ k = 3$

ดังนั้น กราฟเป็นวงรี โฟกัสอยู่ที่ขั้ว และไดเรกตริกซ์อยู่ทางซ้ายมือของขั้ว

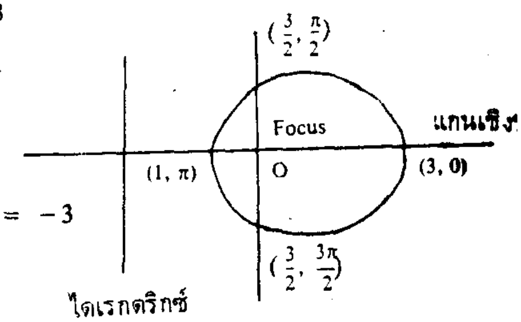
เมื่อ $\theta = 0$ จะได้ r มีค่าสูงสุด $= 3$

เมื่อ $\theta = \pi$ r มีค่าต่ำสุด $= 1$

จุด $(3, 0)$ และ $(1, \pi)$ เป็นจุดยอดของรูป ดังรูป 3.24

จุด $(1, \pi)$ จะใกล้โฟกัสมากกว่า

สมการไดเรกตริกซ์ที่สมนัยกับโฟกัสที่ขั้วคือ $r\cos\theta = -3$



รูปที่ 3.24

ตัวอย่างที่ 3.19 จงหาสมการของวงรี ซึ่งมีโฟกัสอยู่ที่ขั้ว จุดยอดอยู่ที่ $\left(1, \frac{\pi}{2}\right)$ และ $\left(4, \frac{3\pi}{2}\right)$

วิธีทำ จุดยอดอยู่ที่ $\left(1, \frac{\pi}{2}\right)$ และ $\left(4, \frac{3\pi}{2}\right)$ ดังนั้น เราทราบว่าแกนเอกของวงรี กับเส้นตรง $\theta = \frac{\pi}{2}$ และไดเรกตริกซ์สมนัยกับโฟกัสที่ขั้วจะอยู่เหนือโฟกัส

สมการจะอยู่ในรูปของ $r = \dfrac{ke}{1+e\sin\theta}$

กราฟผ่านจุดยอดทั้ง 2 ดังนั้น $1 = \dfrac{ke}{1+e}$ และ $4 = \dfrac{ke}{1-e}$

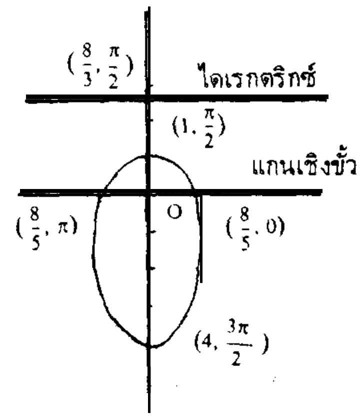
$$e = \frac{3}{5},\ k = \frac{8}{3}$$

ดังนั้น สมการของวงรี คือ $r = \dfrac{\frac{3}{5}\cdot\frac{8}{3}}{1+\frac{3}{5}\sin\theta}$

หรือ $r = \dfrac{8}{5+3\sin\theta}$

สมการไดเรกตริกซ์ คือ $r\sin\theta = \dfrac{8}{3}$

หรือ $3r\sin\theta = 8$



รูปที่ 3.25

ตัวอย่างที่ 3.20 จงหาสมการไฮเพอร์โบลา ที่มีสมการไดเรกตริกซ์เป็น $r\cos\theta = 4$ และสมนัยกับโฟกัสที่ขั้ว $e = \frac{3}{2}$

วิธีทำ ไดเรกตริกซ์ตั้งฉากกับแกนเชิงขั้ว และอยู่ทางขวามือ ห่างจากขั้ว 4 หน่วย

สมการไฮเพอร์โบลา คือ $r = \dfrac{ke}{1+e\cos\theta}$

$$k = 4,\ e = \frac{3}{2}$$

สมการที่ต้องการ คือ $r = \dfrac{12}{2+3\cos\theta}$

แบบฝึกหัด 3.3

จงหาสมการเส้นตรงในระบบเชิงขั้ว ซึ่งมีคุณสมบัติดังนี้

1. ขนานกับแกนเชิงขั้ว และอยู่เหนือแกนเชิงขั้วเป็นระยะทาง 5 หน่วย
2. ขนานกับแกนเชิงขั้ว และอยู่ใต้แกนเชิงขั้วเป็นระยะทาง 3 หน่วย
3. ขนานกับเส้นตรง $\theta = \frac{\pi}{2}$ และอยู่ทางซ้ายมือของเส้นตรง $\theta = \frac{\pi}{2}$ 4 หน่วย
4. ขนานกับเส้นตรง $\theta = \frac{\pi}{2}$ และอยู่ทางขวามือของเส้นตรง $\theta = \frac{\pi}{2}$ 6 หน่วย
5. $p = 4, \beta = \frac{\pi}{6}$
6. $p = 2, \beta = \frac{5\pi}{3}$
7. $p = 5, \beta = \frac{\pi}{4}$

จงหาสมการของวงกลมในระบบเชิงขั้ว ซึ่งมีคุณสมบัติดังนี้

8. จุดศูนย์กลางอยู่ที่ $(4, 0)$ และรัศมี 4
9. จุดศูนย์กลางอยู่ที่ $(3, \pi)$ และรัศมี 5
10. จุดศูนย์กลางอยู่ที่ $\left(2, \frac{5\pi}{3}\right)$ และรัศมี 3
11. จุดศูนย์กลางอยู่ที่ $\left(2\sqrt{3}, \frac{\pi}{2}\right)$ และรัศมี 2

จงหาสมการภาคตัดกรวย ซึ่งมีโฟกัสที่ขั้ว เมื่อกำหนดค่า e ไดเรกตริกซ์ที่สมนัยกับโฟกัสที่ขั้ว

12. ไดเรกตริกซ์ผ่านจุด $\left(3, \frac{3\pi}{2}\right)$; $e = 1$ ไดเรกตริกซ์ขนานกับ $\theta = \frac{\pi}{2}$
13. ไดเรกตริกซ์ผ่านจุด $(2, \pi)$; $e = \frac{1}{2}$ ไดเรกตริกซ์ขนานกับแกนเชิงขั้ว
14. ไดเรกตริกซ์ผ่านจุด $\left(5, \frac{3\pi}{2}\right)$; $e = 4$ ไดเรกตริกซ์ขนานกับ $\theta = \frac{\pi}{2}$
15. จงหาสมการของวงรีซึ่งมีจุดยอดอยู่ที่ $(5, 0)$, $(2, \pi)$ โฟกัสอยู่ที่ขั้ว และหาสมการไดเรกตริกซ์และเขียนกราฟด้วย
16. จงหาสมการและเขียนกราฟของพาราโบลา จุดโฟกัสที่ขั้วจุดยอดที่ $(4, \pi)$ และหาสมการไดเรกตริกซ์ในระบบเชิงขั้ว

17. จงหาสมการ จุดยอด และเขียนกราฟของไฮเพอร์โบลา ซึ่งมีแกนตามขวางทับแกนเชิงขั้ว (หรือส่วนต่อออกไป) ไดเรกตริกซ์อยู่ทางซ้ายมือของขั้ว $e = 3$ และไฮเพอร์โบลาผ่านจุด $\left(2, \frac{2\pi}{3}\right)$

จงบอกชื่อ และเขียนกราฟของสมการต่อไปนี้

18. $r \cos\theta = -3$

19. $r \sin\theta = 5$

20. $r = 4$

21. $r = \dfrac{2}{2-\cos\theta}$

22. $r = \dfrac{6}{2-3\sin\theta}$

23. $r = \dfrac{2}{1+\sin\theta}$

23. $r = \dfrac{6}{1-2\cos\theta}$