บทที่ 2
เรขาคณิตวิเคราะห์

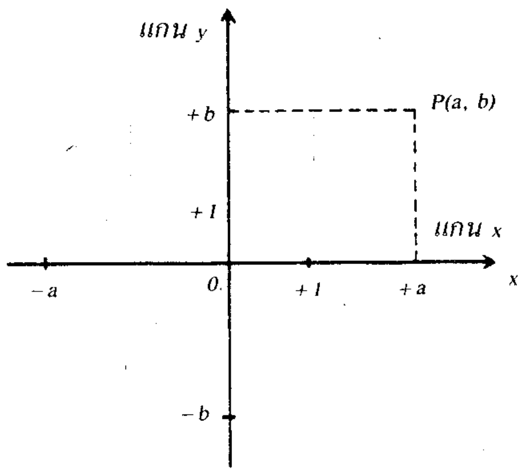
ในการเรียนคณิตศาสตร์เราอาจจะเรียนวิชาพีชคณิตและวิชาเรขาคณิตในระนาบแยกเป็นสองวิชา โดยไม่ได้คิดถึงความสัมพันธ์ของทั้งสองวิชาเลย ในอดีตก็เช่นเดียวกัน จนกระทั่งในปี ค.ศ. 1637 นักคณิตศาสตร์ชาวฝรั่งเศสชื่อ René Descartes (1596 – 1650) ได้นำเอาหลักเกณฑ์ของทั้งสองวิชามารวมกัน เกิดเป็นวิชาใหม่เรียกว่า เรขาคณิตวิเคราะห์ (Analytic Geometry) เขาพบว่าการกำหนดจุดต่าง ๆ ในระนาบด้วยเลขจำนวนจริง จะสามารถอธิบายรูปทรงเรขาคณิตหลายรูปในแบบพีชคณิตได้ และในทางกลับกันถ้ามีสมการพีชคณิตจะเขียนแทนได้ด้วยรูปทรงเรขาคณิต ดังนั้น ในวิชาเรขาคณิตวิเคราะห์ จะพิจารณาปัญหา 2 ข้อคือ

1. กำหนดสมการพีชคณิตให้ จะทำอย่างไรจึงจะแทนได้ด้วยรูปทรงเรขาคณิต
2. กำหนดรูปทรงเรขาคณิตให้ จะอธิบายได้ด้วยสมการพีชคณิตอย่างไร

2.1 ระบบพิกัดฉาก (The Rectangular Coordinate System)

การนำเอาวิชาทั้งสองมาเกี่ยวข้องกันในเรขาคณิตวิเคราะห์อย่างแรกคือ การกำหนดจุดในระนาบด้วยคู่อันดับ (x, y) ของเลขจำนวนจริง ซึ่งจะใช้ระบบพิกัด (Coordinate system) ในการกำหนดจุดได้หลายแบบ แบบที่ใช้กันมาก คือ ระบบพิกัดฉาก ซึ่งเริ่มต้นด้วย

กำหนดเส้นตรงเส้นหนึ่งแนวนอนในระนาบ ซึ่งสามารถต่อออกไปทางขวาหรือทางซ้ายได้อย่างไม่สิ้นสุด เรียกเส้นตามแนวนอนนี้ว่า **แกน** x (x – axis หรือ axis of abscissas) ดังรูป 2.1



รูปที่ 2.1

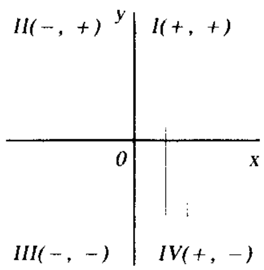
เลือกจุด ๆ หนึ่งบนแกน x เรียกว่า จุดกำเนิด O (origin) ให้ศูนย์อยู่ที่จุด O และกำหนดความยาว 1 หน่วย ซึ่งจะเป็นตัวแบ่งแกนนี้ด้วยสเกลนี้ ดังนั้นจำนวน +a คือจุดที่อยู่ทางขวาของ O บนแกน x โดยห่างจาก O เท่ากับ a หน่วย และจำนวน −a คือจุดทางซ้ายของ O ห่างจาก O เท่ากับ a หน่วย ดังนั้นจุดต่าง ๆ บนแกน x สามารถแทนได้ด้วยเลขจำนวนจริง

ที่จุด O ลากเส้นแนวดิ่งให้ตั้งฉากกับแกน x และสามารถต่อขึ้นไปข้างบนหรือลงข้างล่างได้อย่างไม่สิ้นสุด เส้นแนวดิ่งนี้เรียกว่า **แกน y** (y – axis หรือ axis of ordinates) และกำหนดความยาว 1 หน่วยบนแกน y เช่นเดียวกับบนแกน x แต่ไม่จำเป็นต้องเท่ากับ 1 หน่วยบนแกน x ถ้ากำหนดจำนวน +b บนแกน y ก็หมายถึงจุด b จะอยู่บนแกน y เหนือจุด O ไป b หน่วย และ −b คือจุดบนแกน y ต่ำกว่าจุด O ลงไป b หน่วย

การกำหนดจุดใด ๆ บนระนาบ ถ้าลากเส้นตรงตั้งฉากกับแกน x ผ่านจุด a และเส้นตรงอีกเส้นหนึ่งตั้งฉากกับแกน y ผ่านจุด b จุดตัดกันของเส้นตรงทั้งสองที่จุด P เขียนแทนด้วย (a, b) เรียกคู่อันดับ (ordered pair) (a, b) ว่าเป็นพิกัด (coordinates) ของจุด P โดยที่ x – coordinate ของ P มีค่าเท่ากับ a และ y – coordinate ของ P คือ b

ดังนั้นระบบพิกัดฉากทำให้เกิดการสมนัยชนิดหนึ่งต่อหนึ่ง (one-to-one correspondence) ระหว่างจุดในระนาบกับคู่อันดับของเลขจำนวน (x, y) ใด ๆ นั่นคือแต่ละจุดในระนาบจะถูกกำหนดด้วย 1 คู่อันดับ (x, y) เท่านั้น และแต่ละค่าของคู่อันดับ (x, y) ก็จะแทนได้ด้วยจุด ๆ หนึ่งในระนาบ

จะเห็นว่าแกน x และแกน y จะแบ่งระนาบออกเป็น 4 จตุภาค (quadrant) เรียกว่า จตุภาคที่ 1, 2, 3, 4 ตามรูปที่ 2.2 ซึ่งแต่ละจตุภาคจะมีเครื่องหมายต่างกัน



รูปที่ 2.2

ระบบพิกัดฉากสามารถใช้สร้างความสัมพันธ์ระหว่างสมการพีชคณิตและรูปเรขาคณิต ถ้าเรากำหนดจุดต่าง ๆ ในระนาบด้วยพิกัดซึ่งคล้องตามสมการ จะได้ทางเดินของจุดในระนาบ ซึ่งทางเดินหรือเส้นโค้ง (curve) นั้นหมายถึง **กราฟ (graph)** ของสมการนั่นเอง กราฟที่สำคัญซึ่งใช้ประยุกต์ในสาขาวิชาอื่น ๆ คือ เส้นตรง ซึ่งได้ศึกษาอย่างละเอียดแล้วใน MA 111 ในที่นี้จะพิจารณาถึงกราฟของฟังก์ชันอื่นซึ่งไม่เป็นเส้นตรง

2.2 การเขียนกราฟของฟังก์ชันไม่เป็นเชิงเส้น (Graphs of non linear functions)

ฟังก์ชันซึ่งกราฟไม่เป็นเส้นตรง เรียกว่า ฟังก์ชันไม่เป็นเชิงเส้น (nonlinear function) ดังได้กล่าวแล้วว่าเรขาคณิตวิเคราะห์ รวมวิชาพีชคณิตและเรขาคณิตไว้ด้วยกัน ดังนั้นจึงต้องศึกษาถึงลักษณะของกราฟทางเรขาคณิตเมื่อกำหนดสมการให้ การเขียนกราฟของฟังก์ชัน $y = f(x)$ โดยการกำหนดจุดหลาย ๆ จุดแล้วลากเส้นต่อระหว่างจุดอาจทำได้สำหรับสมการที่ทราบลักษณะของกราฟมาบ้าง แต่สำหรับสมการของเส้นโค้งบางรูป การกำหนดจุดอย่างเดียวอาจทำให้รูปกราฟบางส่วนขาดหายไป ดังนั้นจึงมีวิธีสังเกตและหลักเกณฑ์อื่น ๆ ช่วยในการเขียนกราฟ นอกเหนือจากการใช้เรื่องความเว้า จุดเปลี่ยนเว้าที่ผ่านมา ซึ่งได้แก่

1. ส่วนตัดแกน (intercept)
2. สมมาตร (symmetry)
3. ขอบเขต (extent)
4. เส้นกำกับ (asymptote)

ส่วนตัดแกน

ส่วนตัดแกน คือ ระยะจากจุดกำเนิดถึงจุดที่เส้นโค้งตัดแกนทั้งสอง ถ้ากราฟตัดแกน x เรียกว่า **ส่วนตัดแกน x (x-intercept)** และถ้ากราฟตัดแกน y เรียกว่า **ส่วนตัดแกน y (y-intercept)** ดังนั้น ค่าของส่วนตัดแกนจะมีเครื่องหมายบวกหรือลบแล้วแต่ว่าส่วนที่ตัดอยู่บนส่วนที่เป็นบวกหรือลบของแกน

จะเห็นว่าส่วนตัดแกน x ค่า y จะมีค่าเป็นศูนย์ และส่วนตัดแกน y ค่า x จะมีค่าเป็นศูนย์

ดังนั้น การหาส่วนตัดแกน หาได้ดังนี้

1. ส่วนตัดแกน x หาโดยแทนค่า $y = 0$ ในสมการที่กำหนดให้ค่า x ที่ได้คือส่วนตัดแกน x

2. ส่วนตัดแกน y หาได้โดยแทนค่า $x = 0$ ในสมการที่กำหนดให้ ค่า y ที่ได้คือส่วนตัดแกน y

ตัวอย่างที่ 2.1 จงหาส่วนตัดแกนของกราฟ $y = \dfrac{x^2-9}{x^2+9}$

วิธีทำ ให้ $y = 0$ จะได้ $x = \pm 3$

ให้ $x = 0$ จะได้ $y = -1$

ดังนั้นส่วนตัดแกน x คือ 3 และ -3

และส่วนตัดแกน y คือ -1

ตัวอย่างที่ 2.2 จงหาส่วนตัดแกนของกราฟ $xy = 1$

วิธีทำ จะเห็นว่า เมื่อแทนค่า $x = 0$ หรือ $y = 0$ จะทำให้สมการที่กำหนดให้อยู่ในรูปของ $0 = 1$ ซึ่งไม่มีคำตอบ

ดังนั้น แสดงว่ากราฟไม่ตัดแกน x และไม่ตัดแกน y

ตัวอย่างที่ 2.3 จงหาส่วนตัดแกนของกราฟ $x^2 - y^2 = 4$

วิธีทำ ให้ $y = 0$ จะได้ $x = \pm 2$

ให้ $x = 0$ จะได้ $y^2 = -4$ ซึ่งไม่สามารถหาค่า y ที่เป็นจำนวนจริงได้

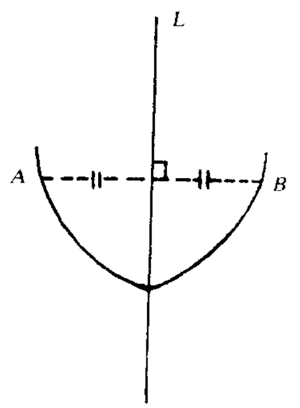
ดังนั้น แสดงว่ากราฟไม่ตัดแกน y และส่วนตัดแกน x คือ 2 และ -2

สมมาตร

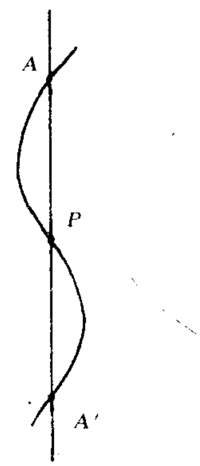
นิยาม 2.1 จุด 2 จุดใด ๆ มี **สมมาตรกับเส้นตรง** เส้นหนึ่ง ถ้าเส้นตรงเส้นนั้นแบ่งครึ่งและตั้งฉากกับเส้นที่ต่อจุดปลายทั้งสอง

และจุด 2 จุดใด ๆ มีสมมาตรกับจุดที่ 3 ถ้าจุดที่ 3 เป็นจุดกึ่งกลางของเส้นตรงที่ต่อจุดปลายทั้งสองนั้น

นิยาม 2.2 เส้นโค้งใด ๆ มี **สมมาตรกับเส้นตรง** เส้นหนึ่ง ถ้าจากจุดใด ๆ บนเส้นโค้งลากเส้นตั้งฉากกับเส้นตรงแล้วต่อออกไปเป็นระยะเท่ากัน จะพบจุดอีกจุดหนึ่งบนเส้นโค้งเสมอ และเส้นตรงนี้เรียกว่า **แกนสมมาตร (axis of symmetry)** ดังรูปที่ 2.3 เส้นโค้ง AB มีสมมาตรกับเส้นตรง L



รูปที่ 2.3



รูปที่ 2.4

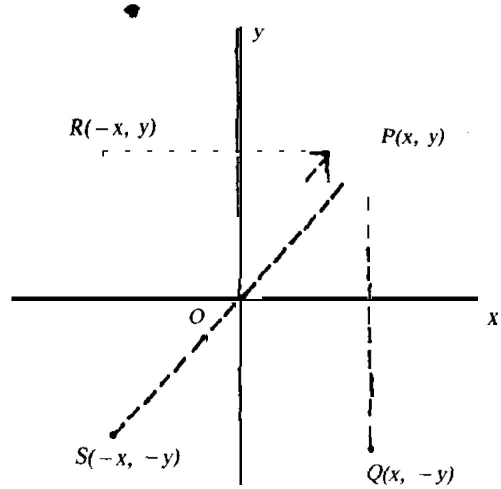
นิยาม 2.3 เส้นโค้งใด ๆ มี **สมมาตรกับจุด ๆ หนึ่ง** ถ้าจากจุดใด ๆ บนเส้นโค้งลากเส้นไปยังจุดนั้นแล้วต่อออกไปเป็นระยะทางเท่ากัน จะพบจุดอีกจุดหนึ่งบนเส้นโค้งเสมอ จุดที่มีสมมาตรกับเส้นโค้งเรียกว่า **จุดสมมาตร *(point of symmetry)*** ดังรูปที่ 2.4 เส้นโค้ง AA′ มีสมมาตรกับจุด P

ในการเขียนกราฟ จะพิจารณาว่าเส้นโค้งสมมาตรกับแกน x แกน y และจุดกำเนิดหรือไม่ โดยใช้นิยามดังกล่าวข้างต้นจะเห็นว่า

1. ถ้าจุด$P(x, y)$ เป็นจุดใด ๆ บนเส้นโค้งแล้ว เส้นโค้งนี้จะสมมาตรกับแกน x เมื่อจุด $Q(x, -y)$ อยู่บนเส้นโค้งด้วยดังรูป 2.5

2. ถ้าจุด $P(x, y)$ เป็นจุดใด ๆ บนเส้นโค้งแล้ว เส้นโค้งนี้จะสมมาตรกับแกน y เมื่อจุด $R(-x, y)$ อยู่บนเส้นโค้งด้วยดังรูป 2.5

3. ถ้าจุด $P(x, y)$ เป็นจุดใด ๆ บนเส้นโค้งแล้ว เส้นโค้งนี้จะสมมาตรกับจุดกำเนิด เมื่อจุดกำเนิดเป็นจุดกึ่งกลางของเส้นตรงที่เชื่อมจุด $P(x, y)$ และ $S(-x, -y)$ ดังรูป 2.5 ดังนั้น จุด $S(-x, -y)$ จะต้องอยู่บนเส้นโค้งด้วย



รูปที่ 2.5

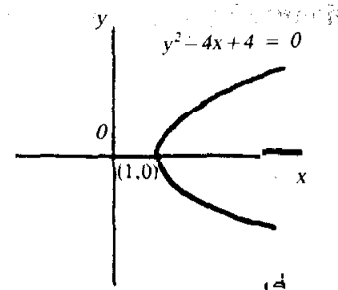
ดังนั้น การพิจารณาสมมาตรของเส้นโค้งทำได้ดังนี้

1. ถ้าแทน y ด้วย −y ในสมการเส้นโค้งแล้วสมการคงเดิม จะได้ว่าเส้นโค้งมีสมมาตรกับแกน x

2. ถ้าแทน x ด้วย −x ในสมการเส้นโค้งแล้วสมการคงเดิม จะได้ว่าเส้นโค้งมีสมมาตรกับแกน y

3. ถ้าแทน x ด้วย −x และ y ด้วย −y ทั้งคู่ในสมการเส้นโค้งแล้วสมการคงเดิม จะได้ว่าเส้นโค้งมีสมมาตรกับจุดกำเนิด

ตัวอย่างที่ 2.4 จงพิจารณาสมมาตรของกราฟ $y^2-4x+4 = 0$



วิธีทำ จากสมการของเส้นโค้ง $y^2-4x+4 = 0$

แทน y ด้วย $-y$ สมการคงเดิม

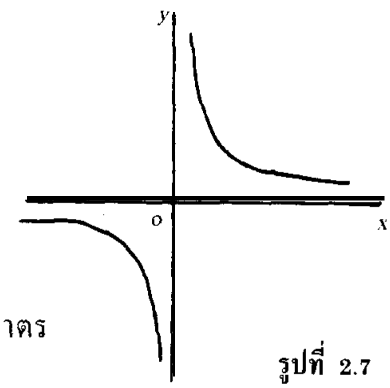
แทน x ด้วย $-x$ สมการเปลี่ยน

แทน x ด้วย $-x$ และ y ด้วย $-y$ สมการเปลี่ยน

รูปที่ 2.6

ดังนั้น เส้นโค้งมีสมมาตรกับแกน x แต่ไม่สมมาตรกับแกน y และจุดกำเนิด

ตัวอย่างที่ 2.5 จงพิจารณาสมมาตรของกราฟ $xy = 1$



วิธีทำ จากสมการของเส้นโค้ง $xy = 1$

แทน y ด้วย $-y$ สมการเปลี่ยน

แทน x ด้วย $-x$ สมการเปลี่ยน

แทน x ด้วย $-x$ และ y ด้วย $-y$ สมการคงเดิม

ดังนั้น เส้นโค้งมีสมมาตรกับจุดกำเนิด แต่ไม่สมมาตรกับแกน x และแกน y

รูปที่ 2.7

ข้อสังเกต ถ้าเส้นโค้งมีสมมาตรกับแกน x และแกน y แล้ว เส้นโค้งจะมีสมมาตรกับจุดกำเนิดด้วย แต่บทกลับไม่จริงดังตัวอย่าง 2.5

ขอบเขต (Extent)

การหาขอบเขตเพื่อพิจารณาลักษณะขอบเขตของเส้นโค้งว่าควรจะอยู่ในช่วงใด ดังนั้น การหาขอบเขตจึงพิจารณาจากค่าจริง x และ y ซึ่งทำให้ (x, y) คล้องตามสมการที่กำหนดให้ นั่นคือการหาโดเมนและเรนจ์ของฟังก์ชันนั่นเอง

ดังได้ทราบแล้วว่า ถ้า r เป็นความสัมพันธ์จากเซต A ไปยังเซต B

โดเมน $= \{x|x \varepsilon A, (x, y) \varepsilon r\}$

และ เรนจ์ $= \{y|y \varepsilon B, (x, y) \varepsilon r\}$

ดังนั้น การหาโดเมนก็คือการพิจารณาค่า x ทั้งหลายที่ทำให้ y มีค่าจริง จึงควรจัดสมการที่กำหนดให้ใหม่โดยจัด y ให้อยู่ในเทอมของ x และการหาเรนจ์หาได้โดยจัด x ให้อยู่ในเทอมของ y แล้วพิจารณาค่า y ทั้งหลายที่ทำให้ x มีค่าจริง ดังตัวอย่าง

ตัวอย่างที่ 2.6 จงหาขอบเขตของเส้นโค้ง $y^2 + x = 4$

วิธีทำ $y = \pm\sqrt{4-x}$ และ $x = 4 - y^2$

จะเห็นว่า $x \leqslant 4$ จึงจะทำให้ y มีค่าจริง

และ y เป็นจำนวนจริงใด ๆ ก็ได้ ทำให้ x มีค่าจริงเสมอ

ดังนั้น ขอบเขตของ x คือ $(-\infty, 4]$ และขอบเขตของ y คือ R

ตัวอย่างที่ 2.7 จงหาขอบเขตของเส้นโค้ง $x^2 - y^2 = 1$

วิธีทำ จัดสมการใหม่ดังนี้

$$y = \pm\sqrt{x^2-1}$$

และ $$x = \pm\sqrt{1+y^2}$$

จะเห็นว่า y มีค่าจริง เมื่อ $x^2 - 1 \geqslant 0$ นั่นคือ $x \leqslant -1$ หรือ $x \geqslant 1$

และ x มีค่าจริง สำหรับทุกค่าจริงของ y

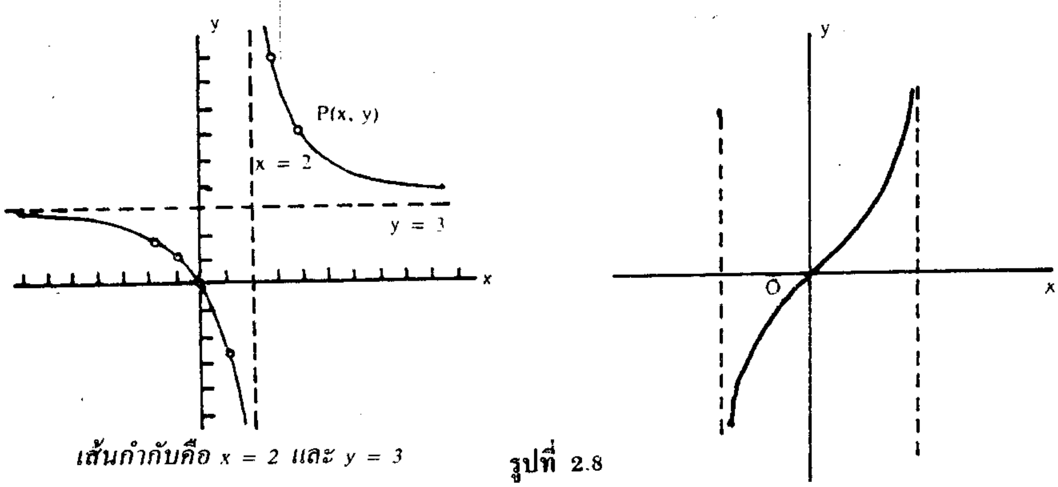
ดังนั้น ขอบเขตของ $x = (-\infty, -1] \cup [1, \infty)$

และ ขอบเขตของ $y = R$

เส้นกำกับ (Asymptotes)

เส้นกำกับมีประโยชน์ในการเขียนกราฟเพื่อบอกให้ทราบว่า เส้นกราฟที่เราเขียนเมื่อต่อปลายออกไปจะโค้งเข้าหาเส้นตรงใด

นิยาม 2.4 เส้นตรง ℓ เป็นเส้นกำกับของเส้นโค้ง C เมื่อให้ P(x, y) เป็นจุดใด ๆ บนเส้นโค้ง C และให้จุด P เคลื่อนไปตามโค้ง C ระยะทางตั้งฉากจากจุด P ไปยังเส้นตรง ℓ จะลดลง และมีค่าเข้าใกล้ศูนย์เข้าไปทุกขณะ ดังรูป



เส้นกำกับคือ x = 2 และ y = 3

รูปที่ 2.8

ในที่นี้จะพิจารณาเส้นกำกับในแนวระดับ (horizontal asymptote) และเส้นกำกับในแนวดิ่ง (vertical asymptote) เท่านั้น

ถ้าสมการเส้นโค้งอยู่ในรูปของ

$$y = \frac{N(x)}{D(x)} \qquad \text{..........(2.1)}$$

เมื่อ N(x) และ D(x) เป็นโพลิโนเมียล (Polynomial) ที่ไม่มีตัวประกอบร่วม

การหาเส้นกำกับในแนวดิ่ง ของ (2.1) โดยหาค่า x ซึ่งทำให้ $D(x) = 0$

ดังนั้น ถ้า $D(k) = 0$ จะได้ว่าเส้นตรง $x = k$ เป็นเส้นกำกับในแนวดิ่ง ถ้าไม่สามารถหาค่า x ที่เป็นจำนวนจริงที่ทำให้ $D(x) = 0$ ได้ จะกล่าวว่ากราฟนั้นไม่มีเส้นกำกับในแนวดิ่ง

ตัวอย่างที่ 2.8 จงหาเส้นกำกับในแนวดิ่งของ

$$y = \frac{2x^2+5}{x^2-9}$$

วิธีทำ จะเห็นว่า เมื่อ $x^2-9 = 0$ จะได้ $x = 3$ และ $x = -3$

ดังนั้น เส้นกำกับในแนวดิ่งของกราฟมี 2 เส้นคือ $x = 3$ และ $x = -3$

การหาเส้นกำกับในแนวระดับ วิธีที่ง่ายที่สุดของการหาเส้นกำกับในแนวระดับ ซึ่งกราฟคือฟังก์ชันอยู่ในรูป (2.1) โดยการเอาเทอมที่มีกำลังสูงที่สุดของ x ซึ่งปรากฏในฟังก์ชันนั้นหารทั้ง N(x) และ D(x) ถ้าผลลัพธ์เข้าใกล้เลขจำนวนจริง c เมื่อ x มีค่ามาก ($x \to \infty$ (infinity)) จะได้ว่า $y = c$ คือ เส้นกำกับในแนวระดับ แต่ถ้า y ไม่เข้าใกล้เลขจำนวนจริงค่าใดค่าหนึ่ง เมื่อ x เข้าใกล้ ∞ จะกล่าวว่าไม่มีเส้นกำกับในแนวระดับ

ดังนั้น จากตัวอย่าง 2.8 จะเห็นว่า

$$y = \frac{2x^2+5}{x^2-9}$$

ในที่นี้ x มีกำลังสูงสุดเป็น 2 ดังนั้น เอา x^2 หารทั้งเศษและส่วน

$$y = \frac{2+5/x^2}{1-9/x^2}$$

เมื่อ $x \to \infty$ จะได้ว่า $5/x^2$ และ $9/x^2$ เข้าใกล้ศูนย์ และ y เข้าใกล้ 2

ดังนั้น เส้นกำกับในแนวระดับ คือ $y = 2$

ตัวอย่างที่ 2.9 จงหาเส้นกำกับของ $y = \dfrac{x^3+4}{3x+2}$

วิธีทำ เมื่อ $3x+2 = 0$ จะได้ $x = -\dfrac{2}{3}$

และเอา x^3 หารทั้งเศษและส่วนจะได้

$$y = \frac{1+4/x^3}{3/x^2+1/x^3}$$

เมื่อ $x \to \infty$, $\dfrac{3}{x^2}$ และ $\dfrac{1}{x^3}$ เข้าใกล้ศูนย์ ดังนั้น ไม่มีเลขจำนวนจริงที่ทำให้ y เป็นจริง

ดังนั้น เส้นกำกับในแนวดิ่งคือ $x = -\dfrac{2}{3}$

และไม่มีเส้นกำกับในแนวระดับ

เมื่อเราได้ทราบหลักเกณฑ์ต่าง ๆ ของการเขียนกราฟแล้ว เราจะวิเคราะห์และเขียนกราฟจากกฎเกณฑ์เหล่านี้

ตัวอย่างที่ 2.10 จงวิเคราะห์และเขียนกราฟของ $y = \dfrac{4x}{x^2-4}$

วิธีทำ **ส่วนตัดแกน**

แทนค่า $y = 0$ จะได้ $x = 0$

แทนค่า $x = 0$ จะได้ $y = 0$

ดังนั้น ส่วนตัดแกน x คือ 0 และส่วนตัดแกน y คือ 0

สมมาตร

แทน y ด้วย $-y$ สมการเปลี่ยน

แทน x ด้วย $-x$ สมการเปลี่ยน

แทน x ด้วย $-x$ และ y ด้วย $-y$ สมการคงเดิม

ดังนั้น กราฟมีสมมาตรกับจุดกำเนิดอย่างเดียว

ขอบเขต

ค่า x ที่ทำให้ y เป็นจริง คือ $x^2-4 \neq 0$ นั่นคือ $x \neq \pm 2$

ค่า y ทุกค่าทำให้ x มีค่าจริง

ดังนั้น ขอบเขตของ x คือ $\{x|x \neq \pm 2\}$

ขอบเขตของ y คือ R

เส้นกำกับ

ให้ $x^2-4 = 0$ จะได้ $x = \pm -2$

ดังนั้น เส้นกำกับในแนวดิ่ง คือ $x = 2$ และ $x = -2$

จาก $y = \frac{4x}{x^2-4}$

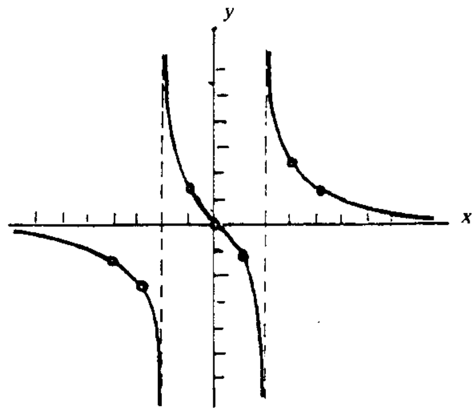
เอา x^2 หารทั้งเศษและส่วน

$$y = \frac{4/x}{1-4/x^2}$$

จะเห็นว่า เมื่อ $x \to \infty$ y จะเข้าใกล้ศูนย์

ดังนั้น เส้นกำกับในแนวระดับคือ $y = 0$

จากข้อมูลทั้งหมดสามารถเขียนกราฟได้ดังนี้



รูปที่ 2.9

ตัวอย่างที่ 2.11 จงวิเคราะห์และเขียนกราฟของ $x^2y - x^2 - 4y + 25 = 0$

วิธีทำ จากสมการที่กำหนดให้ $y = \frac{x^2-25}{x^2-4}$

ส่วนตัดแกน

ส่วนตัดแกน x คือ ± 5

ส่วนตัดแกน y คือ $\frac{25}{4}$

สมมาตร

กราฟมีสมมาตรกับแกน y แต่ไม่มีสมมาตรกับแกน x และจุดกำเนิด

ขอบเขต

ขอบเขตของ x คือ $\{x|x \neq \pm 2\}$

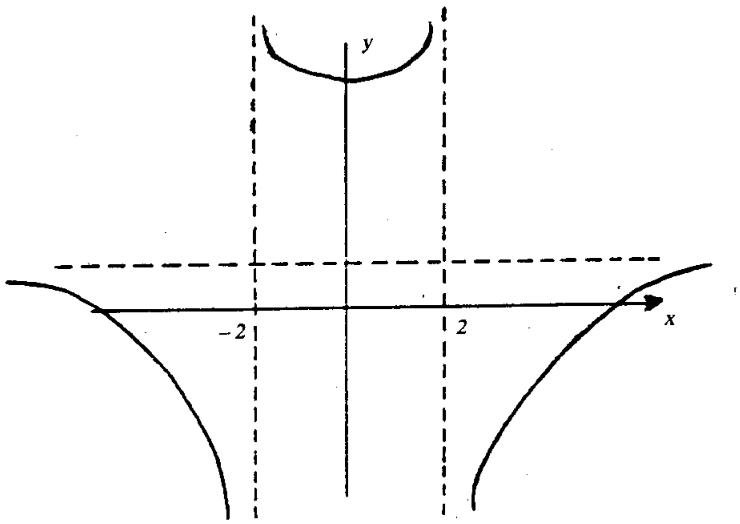
ขอบเขตของ y คือ $\left\{y|y \geq \frac{25}{4} \text{ หรือ } y < 1\right\}$

เส้นกำกับ

เส้นกำกับในแนวดิ่ง คือ $x = \pm 2$

เส้นกำกับในแนวระดับ $y = \dfrac{1-25/x^2}{1-4/x^2}$

ดังนั้น เส้นกำกับในแนวระดับคือ $y = 1$ รูปกราฟเขียนได้ดังนี้



รูปที่ 2.10

แบบฝึกหัด 2.1

จงวิเคราะห์และเขียนกราฟของสมการต่อไปนี้โดยพิจารณาจาก

1. ส่วนตัดแกน
2. สมมาตร
3. ขอบเขต
4. เส้นกำกับ

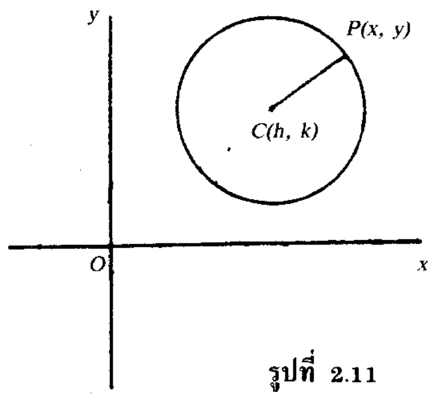
1. $y = x^3$
2. $y = x^2 + 4$
3. $y = \sqrt{x-2}$
4. $y = -\frac{1}{x}$
5. $y^2 + 4y = x - 6$
6. $y = \frac{3x}{x-2}$
7. $y = \frac{5}{4-x^2}$
8. $y = \frac{x}{x^2-9}$
9. $x^2 + y^2 = 9$
10. $2x^2 + 3y^2 = 18$
11. $y = \frac{3}{x^2 - 9x}$
12. $\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{20} = 1$

2.3 วงกลม (Circle)

นิยาม 2.5 วงกลมคือ เซตของจุดทั้งหลายในระนาบ ซึ่งอยู่ห่างจากจุดตรึงจุดหนึ่งเป็นระยะทางคงที่

จุดตรึง เรียกว่า **จุดศูนย์กลาง (center)** ของวงกลม และ
ระยะทางคงที่ เรียกว่า **รัศมี (radius)** ของวงกลม

สมการวงกลมซึ่งมีจุดศูนย์กลางที่ C(h, k) และรัศมี r



รูปที่ 2.11

ให้ P(x, y) เป็นจุดใด ๆ บนวงกลม ระยะทางจากจุด C(h, k) ถึง P(x, y) คือรัศมีของวงกลม

ดังนั้น $|CP| = r$

$$\sqrt{(x-h)^2+(y-k)^2} = r$$

$$(x-h)^2+(y-k)^2 = r^2 \qquad \text{..........(2.2)}$$

ดังนั้น (2.2) คือ สมการวงกลมซึ่งมีจุดศูนย์กลางที่ (h ,k) และรัศมี r

ถ้าจุดศูนย์กลางของวงกลมอยู่ที่จุดกำเนิด (origin) และมีรัศมี r จะได้สมการ

$$x^2+y^2 = r^2$$

ตัวอย่างที่ 2.12 จงหาสมการวงกลมซึ่งมีจุดศูนย์กลางที่ (−2, 3) และมีรัศมี 5

วิธีทำ จากสมการ (2.2) $(x-h)^2+(y-k)^2 = r^2$

ในที่นี้ $h = -2,\ k = 3,\ r = 5$

แทนค่า $(x-(-2))^2+(y-3)^2 = 5^2$

$$(x+2)^2+(y-3)^2 = 25$$

หรือ $x^2+y^2+4x-6y = 12$

ตัวอย่างที่ 2.13 จงหาจุดศูนย์กลางและรัศมีของวงกลม ซึ่งมีสมการ $x^2+y^2+6x-2y = 6$

วิธีทำ จัดสมการที่กำหนดให้ โดยทำเทอม x และ y ให้อยู่ในรูปกำลังสองสมบูรณ์

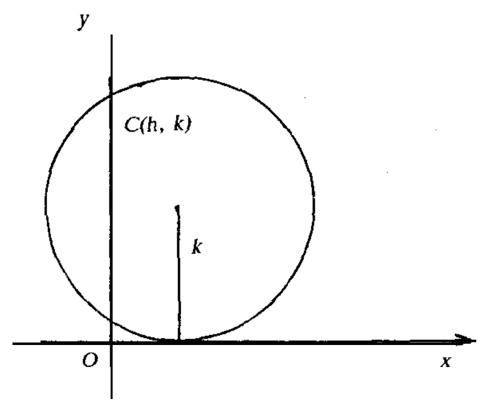
จะได้ $(x^2+6x+9)+(y^2-2y+1) = 6+9+1$

$$(x+3)^2+(y-1)^2 = 6$$

ดังนั้น จุดศูนย์กลางของวงกลมอยู่ที่ $(-3, 1)$ และรัศมี 4

ตัวอย่างที่ 2.14 จงหาสมการวงกลมที่มีจุดศูนย์กลางที่ $(3,-2)$ และสัมผัสแกน x

วิธีทำ วงกลมสัมผัสแกน x ดูจากรูปดังนี้



จะเห็นว่ารัศมีจะเท่ากับ k สมการวงกลมคือ

$$(x-h)^2+(y-k)^2 = k^2$$

แทนค่า $(x-3)^2+(y+2)^2 = (-2)^2$

$$x^2-6x+9+y^2+4y+4 = 4$$

$$x^2+y^2-6x+4y+9 = 0$$

สมการทั่วไปของวงกลม

ถ้ากระจายสมการ $(x-h)^2+(y-k)^2 = r^2$ จะได้สมการ

$$x^2+y^2-2hx-2ky+h^2+k^2-r^2 = 0$$

ซึ่งเขียนอยู่ในรูปทั่ว ๆ ไปดังนี้

$$x^2+y^2+Dx+Ey+F = 0 \qquad \text{..........(2.3)}$$

เมื่อ $D = -2h,\ E = -2k,\ F = h^2+k^2-r^2$

(2.3) คือ สมการทั่วไปของวงกลม

ในทางกลับกัน สมการใด ๆ ที่อยู่ในรูป (2.3) สามารถจัดสมการใหม่ โดยวิธีกำลังสองสมบูรณ์เหมือนตัวอย่างได้ดังนี้

$$\left(x^2+Dx+\left(\frac{D}{2}\right)^2\right)+\left(y^2+Ey+\left(\frac{E}{2}\right)^2\right) = -F+\left(\frac{D}{2}\right)^2+\left(\frac{E}{2}\right)^2$$

$$\left(x+\frac{D}{2}\right)^2+\left(y+\frac{E}{2}\right)^2 = \frac{D^2+E^2-4F}{4} \qquad \text{..........(2.4)}$$

จะเห็นว่า (2.4) จะเป็นสมการของวงกลมหรือไม่ขึ้นอยู่กับค่า $\frac{D^2+E^2-4F}{4}$ ดังนั้น จึงแบ่งการพิจารณาออกเป็น 3 กรณี

กรณีที่ 1 $D^2+E^2-4F > 0$

จะได้ว่า $\sqrt{D^2+E^2-4F}$ มีค่าเป็นเลขจำนวนจริง ดังนั้น (2.4) เป็นสมการของวงกลม ซึ่งมีจุดศูนย์กลางที่ $\left(-\frac{D}{2}, -\frac{E}{2}\right)$ และมีรัศมี $\frac{1}{2}\sqrt{D^2+E^2-4F}$

กรณีที่ 2 $D^2+E^2-4F = 0$

(2.4) คือ $\left(x+\frac{D}{2}\right)^2+\left(y+\frac{E}{2}\right)^2 = 0$

จะเห็นว่ามีค่า x และ y เพียงค่าเดียวที่คล้องตามสมการคือ $x = -\frac{D}{2}$ และ $y = -\frac{E}{2}$ ดังนั้น กราฟของวงกลมนี้คือจุด $\left(-\frac{D}{2}, -\frac{E}{2}\right)$ เพียงจุดเดียว ซึ่งเรียกว่า **วงกลมจุด (point circle)**

กรณีที่ 3 $D^2+E^2-4F < 0$

จาก (2.4) จะเห็นว่าไม่สามารถหาค่าจริงของ x และ y ที่คล้องตามสมการได้ ในกรณีนี้สมการจึงไม่มีกราฟ

ข้อสังเกต สมการซึ่งอยู่ในรูปของ

$$Ax^2+Ay^2+Dx+Ey+F = 0 \quad \text{เมื่อ } A \neq 0 \qquad \text{..........(2.5)}$$

ซึ่งเป็นกรณีพิเศษของสมการกำลังสองทั่วไป

$$Ax^2+Bxy+Cy^2+Dx+Ey+F = 0 \quad \text{เมื่อ } A = C \text{ และ } B = 0$$

(2.5) สามารถเขียนให้อยู่ในรูปของ (2.4) ได้โดยหารตลอดด้วย $A \neq 0$ จะได้

$$x^2+y^2+\frac{D}{A}x+\frac{E}{A}y+\frac{F}{A} = 0$$

ซึ่งเราทราบแล้วว่า กราฟของสมการเป็นวงกลม วงกลมจุด หรือไม่มีกราฟ

ตัวอย่างที่ 2.15 จงหาสมการของวงกลมซึ่งผ่านจุด $(-2, 4)$ และมีจุดศูนย์กลางร่วมกันกับวงกลม $x^2+y^2-2x+4y-4 = 0$

วิธีทำ ทำเทอมที่มี x และ y ให้อยู่ในรูปกำลังสองสมบูรณ์

$$(x^2-2x)+(y^2+4y) = 4$$
$$(x^2-2x+1)+(y^2+4y+4) = 4+1+4$$
$$(x-1)^2+(y+2)^2 = 9$$

จุดศูนย์กลางของวงกลมนี้คือ $(1, -2)$ และมีรัศมี 3

จุดศูนย์กลางของวงกลมที่ต้องการคือ $(1, -2)$

สมการวงกลมที่ต้องการ คือ

$$(x-1)^2+(y+2)^2 = r^2$$

เนื่องจากวงกลมผ่านจุด $(-2, 4)$ ดังนั้น จะได้

$$(-2-1)^2+(4+2)^2 = r^2$$
$$r^2 = 45$$

ดังนั้น สมการของวงกลมที่ต้องการคือ

$$(x-1)^2+(y+2)^2 = 45$$

ตัวอย่างที่ 2.16 จงหาค่า k ซึ่งทำให้ $x^2+y^2+6x-8y+k$ เป็นสมการวงกลม

วิธีทำ จากสมการ $x^2+y^2+6x-8y+k = 0$

$$(x^2+6x+9)+(y^2-8y+16) = -k+9+16$$
$$(x+3)^2+(y-4)^2 = 25-k$$

สมการนี้จะเป็นวงกลมก็ต่อเมื่อ $25-k > 0$

นั่นคือ $k < 25$

ตัวอย่างที่ 2.17 จงหาสมการของวงกลม ซึ่งมีจุดศูนย์กลางที่ $(-1, 0)$ และสัมผัสกับเส้นตรง ℓ ซึ่งมีสมการเป็น $2x-y = 3$

วิธีทำ จากสมการเส้นตรง ℓ; $2x-3 = 3$

$$y = 2x-3$$

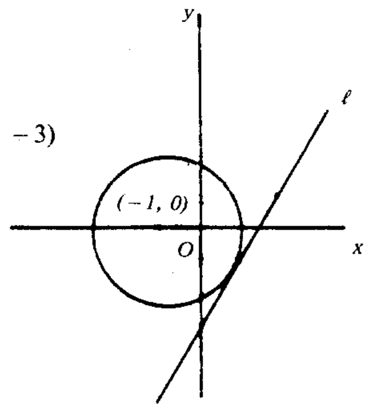
ความชันของเส้นตรง $\ell = 2$

เนื่องจากรัศมีของวงกลมจะตั้งฉากกับเส้นสัมผัสวงกลมที่จุดสัมผัส

ดังนั้น ความชันของรัศมี $r = -\frac{1}{2}$

ให้พิกัดที่จุดสัมผัสเป็น (x_1, y_1)

เนื่องจาก (x_1, y_1) อยู่บนเส้นสัมผัส ℓ ดังนั้น $y_1 = 2x_1 - 3$



รูปที่ 2.12

ความชันของรัศมี ที่ผ่านจุด $(-1, 0)$ และ $(x_1, 2x_1 - 3)$

$$\frac{((2x_1-3)-0)}{x_1-(-1)} = \frac{2x_1-3}{x_1+1}$$

ดังนั้น
$$\frac{2x_1-3}{x_1+1} = -\frac{1}{2}$$

$$x_1 = 1$$

$$y_1 = 2-3 = -1$$

จุดสัมผัส คือ $(1, -1)$

และรัศมี $r = \sqrt{(1-(-1))^2+(-1-0)^2} = \sqrt{4+1} = \sqrt{5}$

ดังนั้น สมการวงกลมที่ต้องการคือ

$$(x+1)^2+y^2 = 5$$

หรือ $x^2+y^2+2x-4 = 0$

หมายเหตุ จากเรื่องสมการเส้นตรง เราอาจจะใช้สูตรระยะทางจากจุดภายนอก (x_0, y_0) ไปยังเส้นตรง ซึ่งมีสมการ $Ax+By+C = 0$

ให้ d เป็นระยะทางจากจุด (x_0, y_0) ไปยังเส้นตรง $Ax+By+C = 0$

ดังนั้น
$$d = \frac{|Ax_0+By_0+C|}{\sqrt{A^2+B^2}}$$

จากตัวอย่างจะเห็นว่า ในที่นี้ $r = d$

นั่นคือ ระยะทางจากจุด $(-1, 0)$ ไปยังเส้นตรง $2x-y-3 = 0$ คือ

$$r = \frac{|2(-1)-(0)-3|}{\sqrt{2^2+(-1)^2}}$$

$$= \frac{|-5|}{\sqrt{5}} = \frac{5}{\sqrt{5}}$$

$$= \sqrt{5}$$

สมการวงกลมคือ

$$(x+1)^2+y^2 = (\sqrt{5})^2$$

$$x^2+y^2+2x-4 = 0$$

ตัวอย่างที่ 2.18 จงหาสมการวงกลมซึ่งผ่านจุด P(3, −1), Q(1, 1) และ R(−1, −2)

วิธีทำ จากสมการทั่วไปของวงกลม $x^2+y^2+Dx+Ey+F = 0$

เนื่องจากจุด P, Q, R อยู่บนวงกลม

ดังนั้น
$$9+1+3D-E+F = 0$$
$$1+1+D+E+F = 0$$
$$1+4-D-2E+F = 0$$

หรือ
$$3D-E+F = -10$$
$$D+E+F = -2$$
$$-D-2E+F = -5$$

แก้สมการทั้งสาม จะได้

$$D = -\frac{9}{5},\ E = \frac{11}{5},\ F = -\frac{12}{5}$$

ดังนั้น สมการของวงกลมคือ

$$5x^2+5y^2-9x+11y-12 = 0$$

ตัวอย่างที่ 2.19 จงหาสมการของเส้นสัมผัสวงกลม $x^2+y^2+6x-8y+20 = 0$ ที่จุด (−6, 5)

วิธีทำ
$$(x^2+6x)+(y^2-8y) = -20$$
$$(x^2+6x+9)+(y^2-8y+16) = -20+9+16$$
$$(x+3)^2+(y-4)^2 = 5$$

จุดศูนย์กลางของวงกลมคือ (−3, 4)

ความชันของเส้นตรงที่ต่อจุด (−3, 4) และ (−6, 5) คือ

$$\frac{5-4}{-6-(-3)} = -\frac{1}{3}$$

ดังนั้น ความชันของเส้นสัมผัสวงกลมที่จุด (−6, 5) คือ 3

สมการของเส้นสัมผัสวงกลมที่จุด (−6, 5) และมีความชัน 3 คือ

$$y-5 = 3(x+6)$$

หรือ
$$3x-y+23 = 0$$

แบบฝึกหัด 2.2

1. จงหาสมการวงกลมซึ่งมีคุณสมบัติดังนี้
   1.1 จุดศูนย์กลางอยู่ที่ $(3, -4)$ และรัศมี 5 หน่วย
   1.2 จุดศูนย์กลางอยู่ที่ $(-5, 2)$ และสัมผัสเส้นตรง $x = 5$
   1.3 จุดปลายของเส้นผ่าศูนย์กลางคือ $(-2, 1)$ และ $(4, 3)$
   1.4 จุดศูนย์กลางอยู่บนเส้นตรง $x = 3$ รัศมีเท่ากับ $\sqrt{13}$ และผ่านจุด $(6, 5)$
   1.5 จุดศูนย์กลางอยู่ที่ $(-1, 1)$ และสัมผัสกับเส้นตรง $x+2y = 4$
   1.6 ผ่านจุด 3 จุดคือ $A(2, 3)$, $B(3, 2)$ และ $C(-4, 3)$
2. จงหาจุดศูนย์กลางและรัศมีของวงกลม
   2.1 $x^2+y^2+2x-4y+9 = 0$
   2.2 $2x^2+2y^2+16x+8y+22 = 0$
   2.3 $4x^2+4y^2-4x+12y+50 = 0$
   2.4 $x^2+y^2-6x-2y-6 = 0$
3. จงหาสมการของวงกลมซึ่งผ่านจุด $(-2, 2)$, $(5, 1)$ และมีจุดศูนย์กลางอยู่บนเส้นตรง $x+2y+3 = 0$
4. จงหาสมการวงกลมซึ่งมีจุดศูนย์กลางร่วมกับวงกลม $x^2+y^2-4x+8y = 1$ และสัมผัสเส้นตรง $x+y+3 = 0$
5. จงหาสมการเส้นสัมผัสวงกลม $x^2+y^2-3x+10y = 15$ ที่จุด $(4, -11)$
6. จงหาสมการวงกลมซึ่งผ่านจุด $(3, 2)$, $(5, -7)$ และสัมผัสแกน y
7. จงหาสมการเส้นสัมผัสวงกลม $x^2+y^2-4x+2y+1 = 0$ และขนานกับเส้นตรง $3x-4y+5 = 0$
8. จงหาสมการวงกลมซึ่งสัมผัสเส้นตรง $2x-3y-5 = 0$ ที่จุด $(1, -1)$ และวงกลมผ่านจุด $(-3, 7)$
9. จงหาค่า k ที่ทำให้สมการ $x^2+y^2+6x-4y+8-k = 0$ เป็น
   9.1 วงกลม　　9.2 วงกลมจุด　　9.3 ไม่มีกราฟ

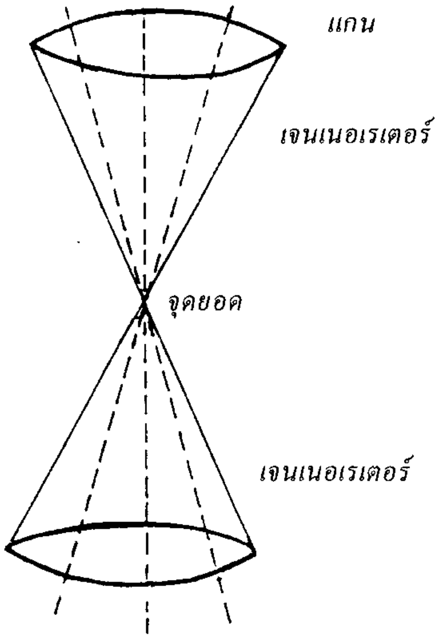
2.4 ภาคตัดกรวย (The Conic Sections)

เส้นโค้งซึ่งเกิดจากการเอาระนาบตัดกับกรวยกลม (right circular cone) เรียกว่า **ภาคตัดกรวย** ซึ่งมีอยู่ 3 ชนิดคือ วงรี พาราโบลา และไฮเพอร์โบลา ก่อนจะศึกษาลักษณะต่าง ๆ ของเส้นโค้งทั้ง 3 ชนิด ควรจะทราบนิยามของกรวยก่อนดังนี้

กรวย คือ พื้นที่ผิวที่เกิดจากการหมุนเส้นตรงผ่านจุดคงที่จุดหนึ่ง และให้เส้นตรงนั้นเคลื่อนไปตามเส้นโค้งที่กำหนดให้ในระนาบ โดยที่เส้นโค้งนั้นไม่ได้ผ่านจุดคงที่นั้น

เรียกจุดคงที่ที่กำหนดให้ว่า **จุดยอดของกรวย (vertex)** และเรียกเส้นโค้งที่กำหนดให้ว่า **ไดเรกตริกซ์ (directrix)** เส้นตรงที่เคลื่อนที่ไปเรียกว่า **เจนเนอเรเตอร์ (generator)**

กรวยกลม คือ กรวยซึ่งมีไดเรกตริกซ์เป็นวงกลม และไดเรกตริกซ์ตั้งได้ฉากกับเส้นที่ต่อจุดศูนย์กลางของวงกลมนี้กับจุดยอด ดังรูป จะเห็นว่ามี 2 ซีกคือซีกบนและซีกล่าง

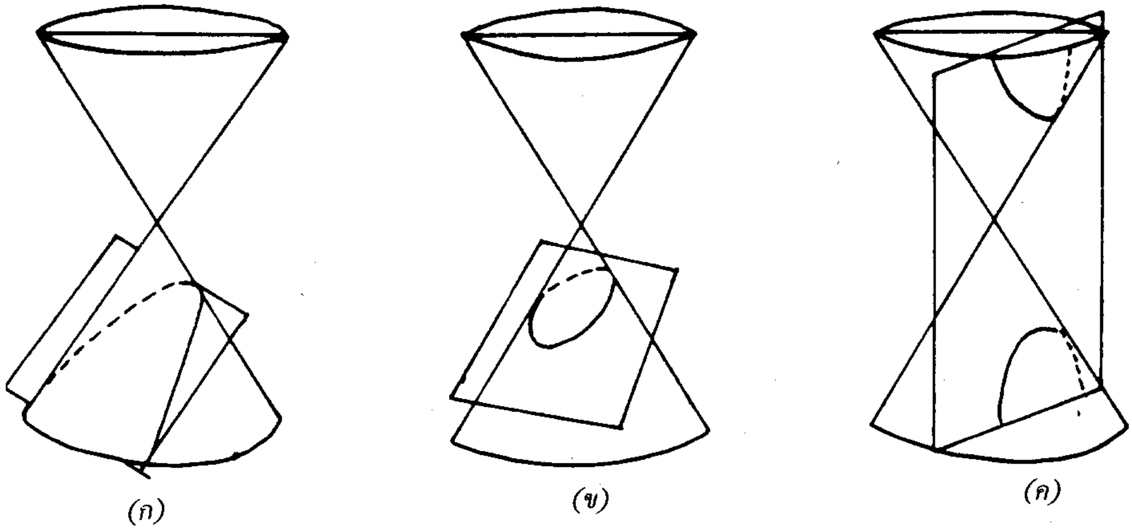


รูปที่ 2.13

ดังได้กล่าวแล้วว่าภาคตัดกรวยคือ เส้นโค้งที่เกิดจากเอาระนาบตัดกับกรวยกลม ซึ่งมีได้ 3 ลักษณะ

1. **พาราโบลา (Parabola)** เป็นเส้นโค้งเกิดจากระนาบตัดกรวยกลมโดยที่ระนาบขนานกับเจนเนอเรเตอร์เพียงเจนเนอเรเตอร์เดียว คือ ระนาบตัดเพียงซีกใดซีกหนึ่งของกรวยเท่านั้น

ถ้าระนาบผ่านจุดยอดของกรวย จะได้เส้นตรง 1 เส้น เรียกว่า **พาราโบลาลดรูป (degenerate parabola)**



รูปที่ 2.14

2. **วงรี (Ellipse)** เป็นเส้นโค้งเกิดจากระนาบตัดกรวยกลมโดยที่ระนาบไม่ขนานกับเจนเนอเรเตอร์ใด ๆ และไม่ขนานกับแกนของกรวย คือ ระนาบตัดกรวยเพียงซีกเดียวและเป็นเส้นโค้งปิด ดังรูป 2.14(ข)

ถ้าระนาบตัดตั้งได้ฉากกับแกนของกรวยกลม เส้นโค้งที่เกิดขึ้นเรียกว่า **วงกลม (circle)** ถ้าระนาบผ่านจุดยอดของกรวยกลม จะได้จุด ๆ หนึ่งเรียกว่า **วงรีลดรูป (degenerate ellipse)**

3. **ไฮเพอร์โบลา (Hyperbola)** เป็นเส้นโค้งที่เกิดจากระนาบตัดกับกรวยกลม โดยขนานกับแกนของกรวยกลม ดังรูป 2.14(ค)

ถ้าระนาบผ่านจุดยอดจะได้เส้นตรง 2 เส้นตัดกันเรียกว่า **ไฮเพอร์โบลาลดรูป (degenerate hyperbola)**

ดังได้กล่าวแล้วว่าเรขาคณิตวิเคราะห์ศึกษาถึงความสัมพันธ์ระหว่างพีชคณิตและเรขาคณิต ดังนั้น หัวข้อต่อไปนี้จะศึกษาถึงการสร้างสมการพีชคณิตซึ่งแทนภาคตัดกรวย

2.5 พาราโบลา (Parabola)

นิยาม 2.6 พาราโบลา คือ เซตของจุดในระนาบซึ่งอยู่ห่างจากจุดตรึงจุดหนึ่ง และเส้นที่ถูกตรึงเส้นหนึ่งเป็นระยะทางเท่ากัน

จุดตรึงเรียกว่า **โฟกัส (focus)** ของพาราโบลา และเส้นตรงที่ถูกตรึงเรียกว่า **ไดเรกตริกซ์ (directrix)** เส้นตรงที่ผ่านจุดโฟกัสและตั้งได้ฉากกับไดเรกตริกซ์เรียกว่า **แกน (axis)** ของพาราโบลา จากนิยามจุดกึ่งกลางระหว่างจุดโฟกัสและเส้นไดเรกตริกซ์จะอยู่บนกราฟ-พาราโบลา จุดนี้เรียกว่า **จุดยอด (vertex)**

ถ้าจุดโฟกัส F อยู่บนเส้นไดเรกตริกซ์ L จากนิยาม จะได้พาราโบลาเป็นเส้นตรงที่ผ่าน F และตั้งได้ฉากกับ L ซึ่งเรียกว่า พาราโบลาลดรูป

ถ้าจุดโฟกัส F ไม่อยู่บนเส้นไดเรกตริกซ์ L เราจะเลือกระบบพิกัดฉากโดยให้แกน x หรือแกน y ผ่าน F และตั้งฉากกับ L

สมการของพาราโบลา

1. **แกนของพาราโบลาคือแกน x** จุดยอดอยู่ที่จุดกำเนิด โฟกัสอยู่ที่จุด F(a, 0) และสมการเส้นไดเรกตริกซ์ L คือ $x = -a$

สมการของพาราโบลาหาได้โดยกำหนดจุด P(x, y) เป็นจุดใด ๆ บนกราฟ จากนิยาม จุด P(x, y) อยู่บนพาราโบลาก็ต่อเมื่อ P อยู่ห่างจาก F และเส้นไดเรกตริกซ์เป็นระยะทางเท่ากัน ระยะห่างระหว่าง P และเส้นไดเรกตริกซ์ เป็นระยะตั้งฉากจาก P ไปยัง L ถ้า Q เป็นจุดปลายเส้นตั้งฉากบน L Q จะมีพิกัดเป็น $(-a, y)$

ดังนั้น P จะอยู่บนพาราโบลาก็ต่อเมื่อ

$$|PF| = |PQ|$$

เนื่องจาก

$$|PF| = \sqrt{(x-a)^2 + y^2}$$

$$|PQ| = \sqrt{(x+a)^2 + (y-y)^2}$$

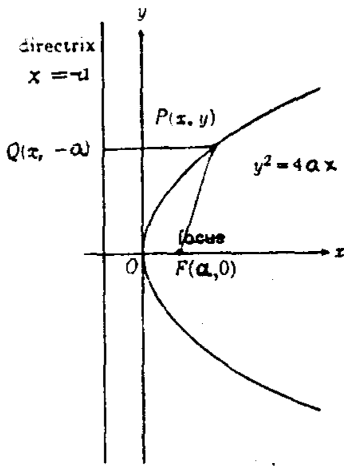
ดังนั้น

$$\sqrt{(x-a)^2 + y^2} = \sqrt{(x+a)^2}$$

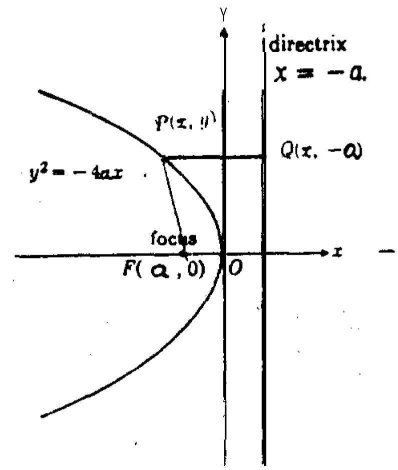
$$x^2 - 2ax + a^2 + y^2 = x^2 + 2ax + a^2$$

$$y^2 = 4ax \qquad \text{..........(2.6)}$$

(2.6) เป็นสมการของพาราโบลา ซึ่งมีจุดโฟกัสที่ (a, 0) และสมการไดเรกตริกซ์เป็น $x = -a$ ดังรูป



รูปที่ 2.15



รูปที่ 2.16

จากสมการ $y^2 = 4ax$, a อาจจะมีค่าบวกหรือลบก็ได้

ถ้า $a > 0$ จะได้รูปพาราโบลาเปิดทางขวา ดังรูป 2.15

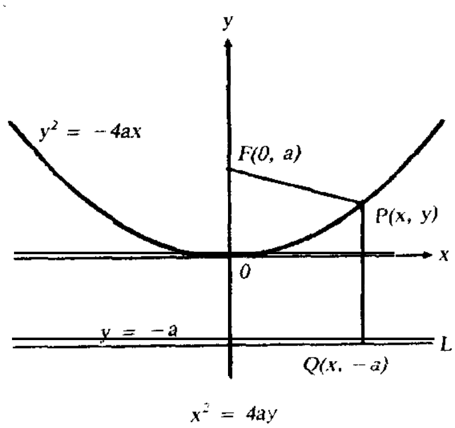
ถ้า $a < 0$ จะได้รูปพาราโบลาเปิดทางซ้าย ดังรูป 2.16

2. **แกนของพาราโบลาคือแกน y** จุดยอดอยู่ที่จุดกำเนิด โฟกัสอยู่ที่จุด F(0, a) และสมการเส้นไดเรกตริกซ์ L คือ $y = -a$ ในทำนองเดียวกับข้อ 1 จะได้สมการของพาราโบลาคือ

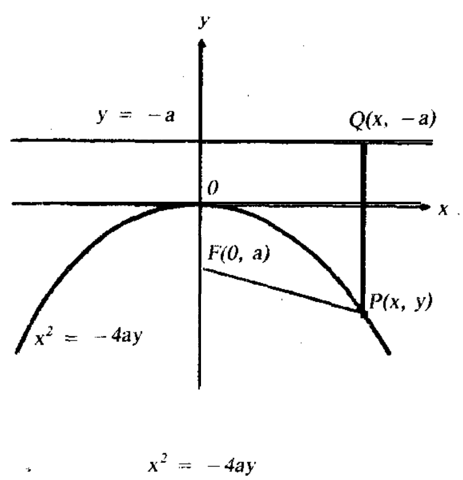
$$x^2 = 4ay \qquad \text{..........(2.7)}$$

ถ้า $a > 0$ จะได้รูปพาราโบลาหงายขึ้นดังรูป 2.17

ถ้า $a < 0$ จะได้รูปพาราโบลาคว่ำลง ดังรูป 2.18



รูปที่ 2.17



รูปที่ 2.18

นิยาม 2.7 ส่วนของเส้นตรงที่ผ่านโฟกัสและตั้งฉากกับแกน และถูกตัดโดยพาราโบลา **เลตัสเรกตัม (Latus rectum)**

และความยาวของเลตัสเรกตัม ของพาราโบลา = $|4a|$

จุดปลายของเลตัสเรกตัมจะช่วยในการเขียนกราฟให้ถูกต้องมากยิ่งขึ้น เช่นสำหรับสมการ $y^2 = 4ax$ จุดปลายของเลตัสเรกตัมคือ $(a, 2a)$ และ $(a, -2a)$

ตัวอย่างที่ 2.20 จงหาสมการของพาราโบลา ซึ่งมีโฟกัสที่ $(-2, 0)$ และมีสมการไดเรกตริกซ์เป็น $x = 2$ พร้อมทั้งหาความยาวของเลตัสเรกตัม และเขียนรูปด้วย

วิธีทำ จากจุดโฟกัสที่กำหนดให้ เราทราบว่าจุดโฟกัสอยู่บนแกน x ในที่นี้ $a = -2 < 0$ ดังนั้น เป็นพาราโบลาเปิดทางซ้าย

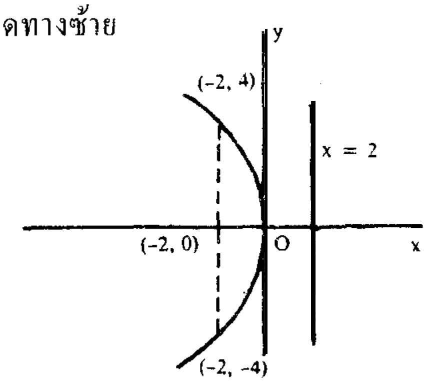
สมการพาราโบลาคือ

$$y^2 = 4ax$$

แทนค่า a

$$y^2 = -8x$$

ความยาวของเลตัสเรกตัม $= |4(-2)| = 8$



รูปที่ 2.19

ตัวอย่างที่ 2.21 กำหนดสมการของพาราโบลาคือ $x^2 = 5y$ จงหาพิกัดของโฟกัส สมการไดเรกตริกซ์ และจุดปลายของเลตัสเรกตัม พร้อมทั้งเขียนรูป

วิธีทำ จากสมการ $x^2 = 4ay$

ดังนั้น $4a = 5$

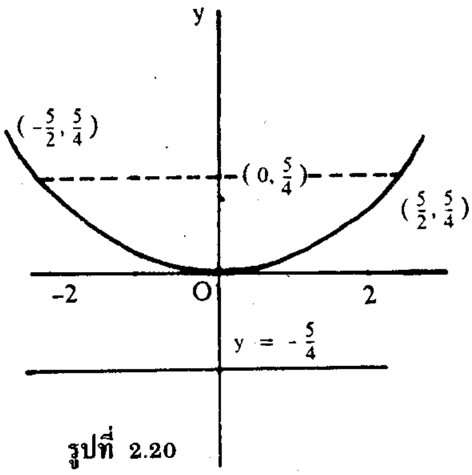
$$a = \frac{5}{4}$$

เราทราบจากรูปของสมการว่า แกนของพาราโบลาคือแกน y

จุดโฟกัสอยู่ที่ $\left(0, \frac{5}{4}\right)$ และมีสมการไดเรกตริกซ์เป็น $y = -\frac{5}{4}$

ความยาวเลตัสเรกตัม $= \left|4\left(-\frac{5}{4}\right)\right| = 5$

จุดปลายของเลตัสเรกตัม คือ $\left(-\frac{5}{2}, \frac{5}{4}\right)$ และ $\left(\frac{5}{2}, \frac{5}{4}\right)$



รูปที่ 2.20

ตัวอย่างที่ 2.22 จงหาสมการของพาราโบลา ซึ่งผ่านจุด (2, 3) และแกนทับแกน y

วิธีทำ เนื่องจากแกนของพาราโบลาทับแกน y

ดังนั้น สมการพาราโบลา คือ $x^2 = 4ay$

จุด (2, 3) อยู่บนกราฟ ดังนั้น $(2)^2 = 4a(3)$

$$a = \frac{1}{3}$$

สมการที่ต้องการ คือ $x^2 = \frac{4}{3}y$

หรือ $3x^2 = 4y$

ตัวอย่างที่ 2.23 จงหาสมการพาราโบลาที่มีจุดยอดที่จุดกำเนิด ความยาวเลตัสเรกตัมเท่ากับ 12 และกราฟเปิดทางซ้าย

วิธีทำ เนื่องจากกราฟเปิดทางซ้าย ดังนั้น สมการพาราโบลาอยู่ในรูป

$$y^2 = 4ax, \quad a < 0$$

ความยาวเลตัสเรกตัม $= 12$

นั่นคือ $|4a| = 12$

$$4|a| = 12$$

$$|a| = 3$$

$$a = \pm 3$$

แต่ $a < 0$ ดังนั้น $a = -3$

แทนค่า จะได้ $y^2 = 4(-3)x$

$$y^2 = -12x$$

แบบฝึกหัด 2.3

จงหาพิกัดของโฟกัส สมการไดเรกตริกซ์ พร้อมทั้งเขียนกราฟ

1. $2x^2 = 5y$
2. $y^2 = 8x$
3. $x^2 = -24y$
4. $y^2 + 16x = 0$
5. $y + 2x^2 = 0$

จงเขียนกราฟและหาสมการพาราโบลา ซึ่งมีจุดยอดที่จุดกำเนิด และมีคุณสมบัติดังต่อไปนี้

6. โฟกัสอยู่ที่ $(0, 2)$
7. โฟกัสอยู่ที่ $(-10, 0)$
8. สมการไดเรกตริกซ์ คือ $x = -\frac{3}{2}$
9. สมการไดเรกตริกซ์ คือ $y = \frac{4}{3}$
10. ผ่านจุด $(2, 4)$ และแกนทับแกน x
11. โฟกัสอยู่บนแกน y และความยาวเลตัสเรกตัมเท่ากับ 6
12. ผ่านจุด $(-3, 5)$ และแกนทับแกน y

2.6 วงรี (Ellipse)

นิยาม 2.8 วงรีคือ เซตของจุดในระนาบ ซึ่งผลบวกของระยะห่างจากจุดใด ๆ ในเซตไปยังจุดตรึงสองจุดในระนาบเป็นค่าคงที่

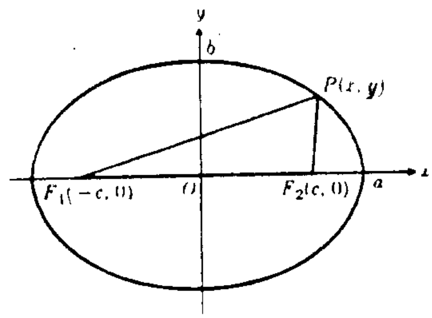
จุดตรึงทั้งสองเรียกว่า **โฟกัส (focus)** ของวงรี จุดกึ่งกลางของเส้นตรงที่ผ่านโฟกัสทั้งสองเรียกว่า **จุดศูนย์กลาง (center)** และเส้นตรงที่ผ่านโฟกัสเรียกว่า **แกน (axis)** ของวงรี จุดตัดของวงรีกับแกนเรียกว่า **จุดยอด (vertex)**

สมการของวงรี

การหาสมการทั่วไปของวงรี ทำเช่นเดียวกับการหาสมการของพาราโบลา คือจะเลือกให้โฟกัสทั้งสองอยู่บนแกน x หรือแกน y และจุดศูนย์กลางอยู่ที่จุดกำเนิด

1. แกนของวงรีคือแกน x

ให้จุด $F_1(-c, 0)$ และ $F_2(c, 0)$ เมื่อ $c > 0$ เป็นโฟกัสทั้งสอง และ $P(x, y)$ เป็นจุดใด ๆ บนวงรี และผลบวกของระยะจากจุด P ถึงโฟกัสเท่ากับ 2a เมื่อ 2a เป็นค่าคงที่



$(x^2/a^2) + (y^2/b^2) = 1,\ a > b.$

รูปที่ 2.21

$$(x^2/a^2)+(y^2/b^2) = 1, \quad a > b$$

จากนิยามของวงรี จะได้ $|PF_1|+|PF_2| = 2a$

$$\sqrt{(x+c)^2+y^2} + \sqrt{(x-c)^2+y^2} = 2a$$

$$\sqrt{(x-c)^2+y^2} = 2a-\sqrt{(x+c)^2+y^2}$$

ยกกำลังสองทั้งสองข้าง

$$(x-c)^2+y^2 = 4a^2-4a\sqrt{(x+c)^2+y^2} + (x+c)^2+y^2$$

$$a\sqrt{(x+c)^2+y^2} = a^2+cx$$

ยกกำลังสองทั้งสองข้าง

$$a^2\{(x+c)^2+y^2\} = a^4+2a^2cx+c^2x^2$$

$$(a^2-c^2)x^2+a^2y^2 = a^2(a^2-c^2) \qquad ....(2.8)$$

จากรูปสามเหลี่ยม PF_1F_2 ผลบวกของด้านสองด้านของสามเหลี่ยมย่อมยาวกว่าด้านที่ 3 ดังนั้น

$$|PF_1|+|PF_2| > |F_1F_2|$$

$$2a > 2c < 0$$

$$a > c > 0$$

ดังนั้น $a^2-c^2 > 0$ ให้ $a^2-c^2 = b^2$

แทนค่า b^2 ใน (2.8) จะได้

$$b^2x^2+a^2y^2 = a^2b^2$$

หารตลอดด้วย a^2b^2

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2} = 1; \quad a > b \qquad ....(2.9)$$

(2.9) คือ สมการทั่วไปของวงรี ซึ่งมีโฟกัสทั้งสองอยู่บนแกน x และจุดศูนย์กลางอยู่ที่จุดกำเนิด

จะเห็นว่า (2.9) มีกราฟสมมาตรกับแกน x, แกน y และจุดกำเนิด จุดตัดบนแกน x คือ (a, 0) และ (−a, 0) จุดตัดบนแกน y คือ (0, b) และ (0, −b) ส่วนของเส้นตรงที่ต่อจุดยอดทั้งสองเรียกว่า **แกนเอก (major axis)** และส่วนของเส้นตรงที่ตั้งฉากกับแกนเอกที่จุดศูนย์กลาง และมีจุดปลายอยู่บนวงรีเรียกว่า **แกนโท (minor axis)**

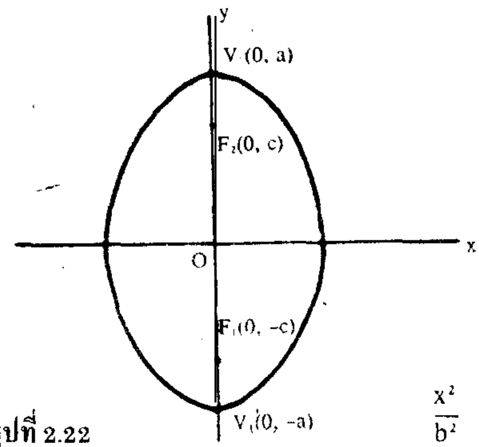
ดังนั้น แกนเอกยาว = 2a เรียก a ว่าครึ่งแกนเอก

และ แกนโทยาว = 2b เรียก b ว่าครึ่งแกนโท

2. แกนของวงรีคือแกน y

ให้จุดโฟกัสทั้งสองคือ $F_1(0, -c)$ และ $F_2(0, c)$ ในทำนองเดียวกับข้อ 1 จะได้สมการวงรี คือ

$$\frac{x^2}{b^2}+\frac{y^2}{a^2} = 1, \quad a > b \qquad ....(2.10)$$



รูปที่ 2.22 $\frac{x^2}{b^2} + \frac{y^2}{a^2} = 1,\ a > b$

ดังนั้น ถ้ากำหนดสมการวงรีใด ๆ ให้ สามารถบอกได้ทันทีว่าแกนเอกทับแกน x หรือแกน y โดยดูค่าของส่วนที่หาร x^2 และ y^2 ถ้าตัวหาร x^2 มีค่ามากกว่าตัวหาร y^2 จะได้ว่าแกนเอกทับแกน x และถ้าตัวหาร y^2 มีค่ามากกว่าตัวหาร x^2 จะได้ว่าแกนเอกทับแกน y เช่นสมการ $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} = 1$

จะเห็นว่า $9 = 3^2 > 2^2 = 4$

ในที่นี้แกนเอกทับแกน y โดยที่ $a = 3,\ b = 2$

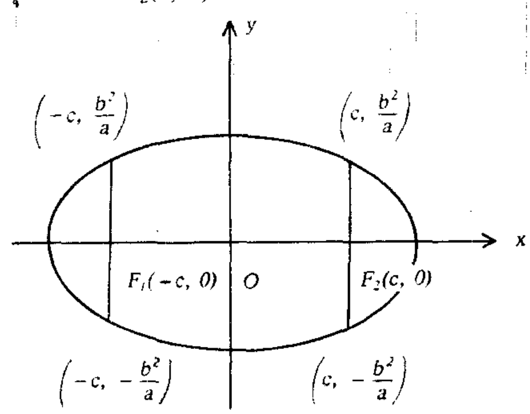
ในการเขียนรูปวงรีถ้าทราบเพียงจุดตัดบนแกน x, แกน y อาจจะเขียนรูปได้ไม่ถูกต้อง ถ้าทราบจุดปลายเลตัสเรกตัม ดังเช่นสมการพาราโบลาจะทำให้การเขียนรูปถูกต้องยิ่งขึ้น

นิยาม 2.9 เลตัสเรกตัมของวงรี คือ เส้นตรงที่ลากผ่านจุดโฟกัสและตั้งฉากกับแกนเอกไปพบเส้นกราฟ

เลตัสเรกตัมของวงรีมีค่าเท่ากับ $\frac{2b^2}{a}$ เสมอ

การหาความยาวเลตัสเรกตัม

สมการ $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ ที่จุดโฟกัส $F_2(c, 0)$ แทนค่า



รูปที่ 2.23

$x = c$ ในสมการ $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$

$$\frac{c^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

$$\frac{y^2}{b^2} = 1 - \frac{c^2}{a^2}$$

$$= \frac{a^2 - c^2}{a^2}$$

$$= \frac{b^2}{a^2}$$

$$y^2 = \frac{b^4}{a^2}$$

$$y = \pm\frac{b^2}{a}$$

ดังนั้น จุดปลายเลตัสเรกตัมที่ผ่าน $(c, 0)$ คือ $\left(c, \frac{b^2}{a}\right)$ และ $\left(c, \frac{b}{a}\right)$

$$\text{ความยาวเลตัสเรกตัม} = \frac{2b^2}{a}$$

ในทำนองเดียวกัน ความยาวเลตัสเรกตัมที่ผ่าน $(-c, 0) = \frac{2b^2}{a}$

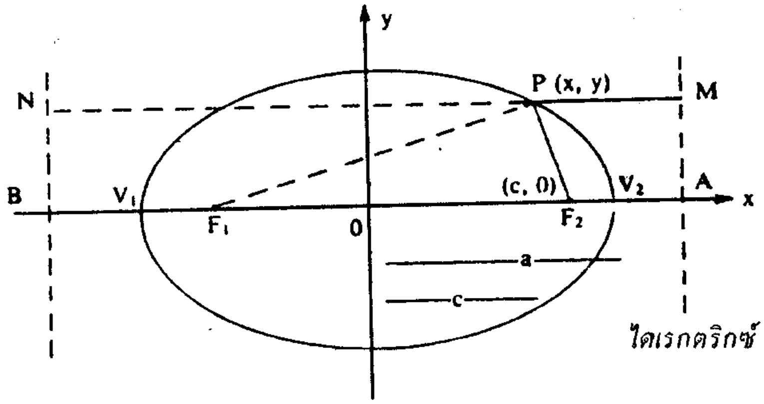
สำหรับสมการ $\frac{x^2}{b^2} + \frac{y^2}{a^2} = 1$ จะได้ความยาวเลตัสเรกตัมเท่ากันคือ $\frac{2b^2}{a}$

นอกจากนิยามวงรีในรูปผลบวกของระยะทางเท่ากับ 2a แล้วเรายังนิยามวงรีได้อีกแบบหนึ่ง โดยใช้ค่าความเยื้องศูนย์กลาง (eccentricity) ดังนี้

นิยาม 2.10 วงรีเป็นเซตของจุดทั้งหลายที่ระยะทางจากจุดนั้นไปยังจุดคงที่จุดหนึ่ง (focus) และไปยังเส้นตรงคงที่ (directrix) มีอัตราส่วนคงที่ เรียกอัตราส่วนคงที่นี้ว่า ค่าความเยื้องศูนย์กลาง (eccentricity) เขียนแทนด้วย e

สำหรับวงรี $e < 1$

สำหรับสมการมาตรฐานของวงรีจะได้ว่า $e = \frac{c}{a}$



รูปที่ 2.24

ต้องการแสดงว่า $e = \dfrac{|PF_2|}{|PM|} = \dfrac{|PF_1|}{|PN|} = \dfrac{c}{a}$

พิสูจน์ ให้ P(x, y) เป็นจุดใด ๆ บนวงรี

ที่ $V_2(a, 0)$ ในรูป 2.24 จะได้

$$\frac{|V_2A|}{|V_2F_2|} = \frac{|V_2B|}{|V_2F_1|}$$

$$\frac{|V_2A|}{a-c} = \frac{2a+|V_1B|}{a+c}$$

แต่ $|V_2A| = |V_1B|$

ดังนั้น $\dfrac{|V_2A|}{a-c} = \dfrac{2a+|V_2A|}{a+c}$

$$(a+c)|V_2A| = (a-c)(2a+|V_2A|)$$

$$(a+c)|V_2A| = 2a(a-c)+(a-c)|V_2A|$$

$$2c|V_2A| = 2a(a-c)$$

$$|V_2A| = \frac{a}{c}(a-c)$$

แต่ $e = \dfrac{|V_2F_2|}{|V_2A|} = \dfrac{(a-c)}{\frac{a}{c}(a-c)} = \dfrac{c}{a}$

แต่รูปสมการของวงรี $a > c$ เสมอ ดังนั้น

$$e = \frac{c}{a} < 1$$

สรุป สมการวงรีมีค่าความเยื้องศูนย์กลาง $e = \dfrac{c}{a}$

เมื่อทราบว่าค่า e ของวงรีคือ $\frac{c}{a}$ ดังนั้น เราจึงสามารถหาสมการของเส้นไดเรกตริกซ์ได้โดยอาศัย e ซึ่งจะได้สมการไดเรกตริกซ์คือ

$$x = \pm\frac{a}{e} \quad \text{สำหรับสมการ } \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2} = 1$$

และ $$y = \pm\frac{a}{e} \quad \text{สำหรับสมการ } \frac{x^2}{b^2}+\frac{y^2}{a^2} = 1$$

พิสูจน์ สมการไดเรกตริกซ์ คือ $x = a+|V_2A|$

แต่ $$|V_2A| = \frac{a}{c}(a-c)$$

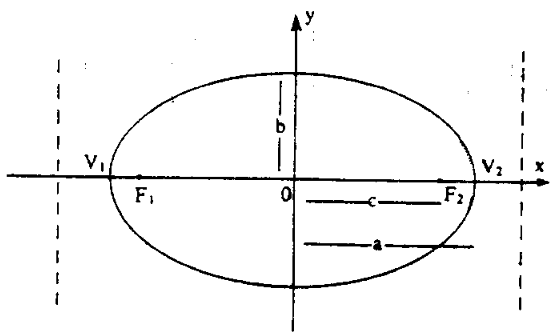
เพราะฉะนั้น
$$x = a+\frac{a}{c}(a-c)$$
$$x = \frac{ac+a^2-ac}{c}$$
$$x = \frac{a^2}{c}$$
$$x = \frac{a}{\frac{c}{a}} = \frac{a}{e} \quad \left(\text{เพราะว่า } e = \frac{c}{a}\right)$$

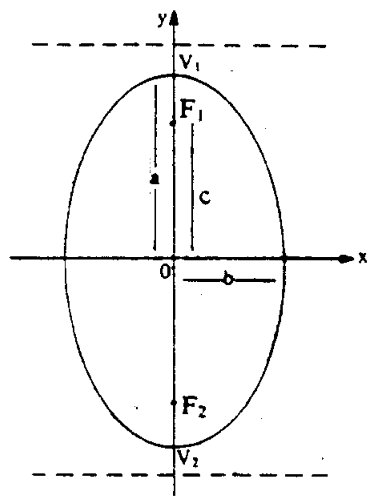
ในทำนองเดียวกันไดเรกตริกซ์ทางด้านซ้ายมือ คือ $x = -\frac{a}{e}$

ดังนั้น สมการไดเรกตริกซ์ คือ $x = \pm\frac{a}{e}$

บทสรุปสำหรับวงรี (a > b) จุดศูนย์กลางที่ C(0, 0)

(1) $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2} = 1$ (2) $\frac{x^2}{b^2}+\frac{y^2}{a^2} = 1$





รูปที่ 2.25

(1) จุดยอด $V_1(-a, 0)$, $V_2(a, 0)$
(2) จุดโฟกัส $F_1(-c, 0)$, $F_2(c, 0)$
(3) แกนเอก คือ แกนที่อยู่บนแกน x
แกนโท คือ แกนที่อยู่บนแกน y
(4) ความยาวแกนเอกเท่ากับ 2a
ความยาวแกนโทเท่ากับ 2b
(5) ความสัมพันธ์ระหว่าง a, b, c

$$b^2 = a^2 - c^2$$

(6) $e = \frac{c}{a}$
(7) สมการไดเรกตริกซ์ $x = \pm\frac{a}{e}$

(1) จุดยอด $V_1(0, a)$, $V_2(0, -a)$
(2) จุดโฟกัส $F_1(0, c)$, $F_2(0, -c)$
(3) แกนเอก คือ แกนที่อยู่บนแกน y
แกนโท คือ แกนที่อยู่บนแกน x
(4) ความยาวแกนเอกเท่ากับ 2a
ความยาวแกนโทเท่ากับ 2b
(5) ความสัมพันธ์ระหว่าง a, b, c

$$b^2 = a^2 - c^2$$

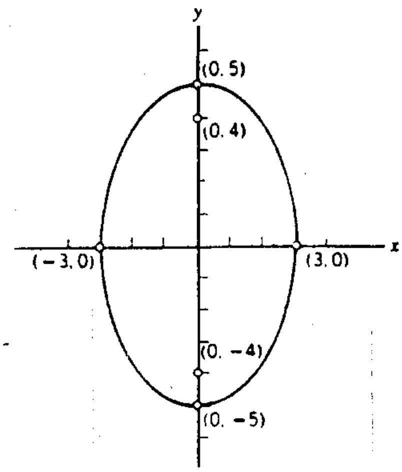
(6) $e = \frac{c}{a}$
(7) สมการไดเรกตริกซ์ $y = \pm\frac{a}{e}$

ตัวอย่างที่ 2.24 จงหาสมการของวงรี ซึ่งมีจุดยอดที่ (0, 5) และ (0, −5) และจุดโฟกัสที่ (0, 4) และ (0, −4)

วิธีทำ จากจุดโฟกัสที่กำหนดให้ จะเห็นว่าแกนเอกทับแกน y และจุดศูนย์กลางอยู่ที่จุดกำเนิด สมการจึงอยู่ในรูปของ

$$\frac{x^2}{b^2} + \frac{y^2}{a^2} = 1 \quad \text{เมื่อ } a > b$$

จุดยอดอยู่ที่ (0, 5) และ (0, −5) ดังนั้น $a = 5$
โฟกัส คือ (0, 4) และ (0, −4) ดังนั้น $c = 4$
เนื่องจาก $b^2 = a^2 - c^2$
$b^2 = 25 - 16 = 9$
ดังนั้น สมการของวงรีที่ต้องการคือ $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{25} = 1$



รูปที่ 2.26

ตัวอย่างที่ 2.25 จงเขียนกราฟของสมการ $4x^2 + 16y^2 = 64$

วิธีทำ เอา 64 หารตลอดจะได้สมการของวงรี คือ

$$\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{4} = 1$$

จากสมการ จะเห็นว่ากราฟของวงรีมีจุดศูนย์กลางที่จุดกำเนิด แกนเอกทับแกน x

$$a = 4 \text{ และ } b = 2$$

จุดยอดอยู่ที่ (4, 0) และ (−4, 0)

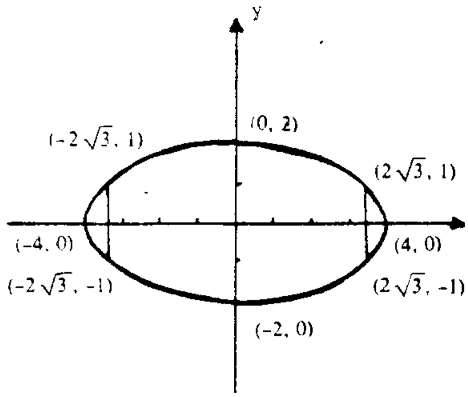
$$c = \sqrt{a^2 - b^2} = \sqrt{16 - 4} = 2\sqrt{3}$$

โฟกัสคือ $(2\sqrt{3}, 0)$ และ $(-2\sqrt{3}, 0)$

ความยาวเลตัสเรกตัม $= \frac{2b^2}{a} = \frac{2(4)}{4} = 2$

จุดปลายของเลตัสเรกตัมที่ผ่านจุด $(2\sqrt{3}, 0)$ คือ $(2\sqrt{3}, -1)$ และ $(2\sqrt{3}, 1)$

จุดปลายของเลตัสเรกตัมที่ผ่านจุด $(-2\sqrt{3}, 0)$ คือ $(-2\sqrt{3}, 1)$ และ $(-2\sqrt{3}, -1)$



รูปที่ 2.27

ตัวอย่างที่ 2.26 จงหาสมการของวงรี โฟกัส ความยาวของแกนเอก ความยาวของแกนโท และความยาวเลตัสเรกตัม เมื่อกำหนดให้วงรีมีจุดศูนย์กลางที่จุดกำเนิด จุดยอดจุดหนึ่งอยู่ที่ $(6, 0)$ และค่าเยื้องศูนย์กลางเท่ากับ $\frac{1}{2}$

วิธีทำ การกำหนดจุดยอดอยู่ที่ $(6, 0)$ ทำให้ทราบว่า แกนเอกของรูป ทับแกน x ดังนั้นสมการของวงรี คือ

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

ในที่นี้ $a = 6$ และ $e = \frac{1}{2}$

$$e = \frac{c}{a} = \frac{1}{2}$$

ดังนั้น $c = \frac{6}{2} = 3$

$$b = \sqrt{a^2 - c^2} = \sqrt{6^2 - 3^2} = 3\sqrt{3}$$

สมการวงรี คือ $\frac{x^2}{36} + \frac{y^2}{27} = 1$

โฟกัส คือ $(\pm 3, 0)$

ความยาวแกนเอก $= 2a = 12$

ความยาวแกนโท $= 2b = 6\sqrt{3}$

ความยาวเลตัสเรกตัม $= \frac{2b^2}{a} = 9$

ตัวอย่างที่ 2.27 จงหาจุดยอด โฟกัส และสมการไดเรกตริกซ์ของวงรี ซึ่งมีสมการ

$$5x^2+2y^2 = 10$$

วิธีทำ เขียนสมการให้อยู่ในรูปทั่วไปของวงรีโดยเอา 10 หารตลอด จะได้

$$\frac{x^2}{2}+\frac{y^2}{5} = 1$$

จากสมการจะเห็นว่า แกนเอกทับแกน y

ดังนั้น $a^2 = 5, b^2 = 2$

$$c = \sqrt{a^2-b^2} = \sqrt{5-2} = \sqrt{3}$$

จุดยอดคือ $(0, \sqrt{5})$ และ $(0, -\sqrt{5})$

จุดโฟกัสคือ $(0, \sqrt{3})$ และ $(0, -\sqrt{3})$

$$e = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{5}}$$

สมการของไดเรกตริกซ์คือ $y = \frac{5}{\sqrt{3}}$ และ $y = -\frac{5}{\sqrt{3}}$

แบบฝึกหัด 2.4

จงหาความยาวของแกนเอก แกนโท พิกัดของโฟกัส จุดยอด และค่า e พร้อมทั้งเขียนกราฟของสมการวงรีต่อไปนี้

1. $25x^2 + 4y^2 = 100$
2. $4x^2 + 9y^2 = 36$
3. $3x^2 + y^2 = 9$
4. $2x^2 + 3y^2 = 24$

จงหาสมการของวงรี ซึ่งมีคุณสมบัติดังนี้

5. จุดยอดอยู่ที่ $(\pm 4, 0)$ แกนโทเท่ากับ 6
6. จุดยอดอยู่ที่ $(0, \pm 5)$ และครึ่งแกนโทเท่ากับ $\frac{3}{2}$
7. แกนเอกเท่ากับ 10 และจุดโฟกัสอยู่ที่ $(\pm 4, 0)$
8. โฟกัสคือ $(0, 4)$, $(0, -4)$ สมการไดเรกตริกซ์คือ $y = -6$ และ $y = 6$
9. จุดโฟกัสอยู่บนแกน y จุดศูนย์กลางอยู่ที่จุดกำเนิด ค่า $e = \frac{3}{4}$ และผ่านจุด $(4, 6)$

2.7 **ไฮเพอร์โบลา (Hyperbola)**

นิยาม 2.11 ไฮเพอร์โบลาคือเซตของจุดในระนาบ ซึ่งผลต่างของระยะห่างจากจุดใด ๆ ในเซตไปยังจุดตรึงสองจุดในระนาบเป็นค่าคงที่

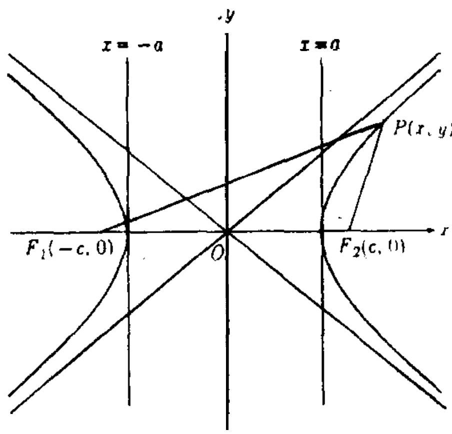
จุดตรึงทั้งสองเรียกว่า **โฟกัส (focus)** ของไฮเพอร์โบลา จุดกึ่งกลางของเส้นตรงที่ผ่านโฟกัสทั้งสองเรียกว่า **จุดศูนย์กลาง (center)** เส้นตรงที่ผ่านโฟกัสทั้งสองเรียกว่า **แกน (axis)** ของไฮเพอร์โบลา จุดตัดของไฮเพอร์โบลากับแกนเรียกว่า **จุดยอด (vertex)** และส่วนของเส้นตรงซึ่งมีจุดยอดทั้งสองเป็นจุดปลายเรียกว่า ***แกนตามขวาง* (transverse axis)**

สมการของไฮเพอร์โบลา

เพื่อให้สมการของไฮเพอร์โบลา อยู่ในรูปง่าย จึงเลือกให้โฟกัสทั้งสองอยู่บแกน x หรือแกน y และจุดศูนย์กลางอยู่ที่จุดกำเนิด

1. **แกนของไฮเพอร์โบลาคือแกน x**

ให้จุด $F_1(-c, 0)$ และ $F_2(c, 0)$ เมื่อ $c > 0$ เป็นโฟกัสทั้งสอง และ $P(x, y)$ เป็นจุดใด ๆ บนไฮเพอร์โบลา ผลต่างของระยะทางจากจุด P ถึงโฟกัสเท่ากับ 2a (เมื่อ $a > 0$)



รูปที่ 2.28

จากนิยามจะได้ $|PF_1| - |PF_2| = 2a$

หรือ $|PF_2| - |PF_1| = 2a$

เขียนรวมกันได้ $|PF_2| - |PF_1| = \pm 2a$

$$\sqrt{(x-c)^2+y^2} - \sqrt{(x+c)^2+y^2} = \pm 2a$$

ย้ายข้างแล้วยกกำลังสองทั้งสองข้าง ทำวิธีเดียวกับการหาสมการวงรีจะได้

$$(a^2-c^2)x^2+a^2y^2 = a^2(a^2-c^2) \qquad \text{..........(2.11)}$$

$|PF_1| - |PF_2|$ คือ ผลต่างของด้านของ ΔPF_1F_2 ซึ่งมีค่าน้อยกว่าด้าน F_1F_2

ดังนั้น $2a < 2c$

$0 < a < c$

$a^2 - c^2 < 0$

ให้ $a^2 - c^2 = -b^2$ เมื่อ $b > 0$

หรือ $b^2 = c^2 - a^2$

แทนค่าลงใน (2.11) จะได้

$$b^2x^2 - a^2y^2 = a^2b^2$$

หารตลอดด้วย a^2b^2

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \qquad \text{..........(2.12)}$$

(2.12) เป็นสมการของไฮเพอร์โบลา จุดศูนย์กลางที่จุดกำเนิด โฟกัสทั้งสองอยู่บนแกน x

จะเห็นว่า (2.12) กราฟของไฮเพอร์โบลา มีจุดตัดบนแกน x คือ (a, 0) และ (−a, 0) แต่กราฟไม่ตัดแกน y กราฟมีสมมาตรกับแกน x แกน y และจุดกำเนิด

ขอบเขต จาก (2.12)

$$y = \pm\frac{b}{a}\sqrt{x^2-a^2}$$

$$x = \pm\frac{a}{b}\sqrt{y^2+b^2}$$

จะเห็นได้ว่า y มีค่าจริงเมื่อ $x^2 - a^2 > 0$ นั่นคือ $x \geqslant a$ หรือ $x \leqslant -a$ และ y มีค่าจริงได้ทุกค่า

ดังนั้น ขอบเขตของ x คือ $(-\infty, -a] \cup [a, \infty)$

ขอบเขตของ y คือ R

ดังนั้น เส้นโค้งจะอยู่ทางซ้ายมือของเส้นตรง $x = -a$ และทางขวามือของ $x = a$ ดังรูป

เส้นกำกับ (Asymptotes)

จาก (2.29) $\left(\frac{x}{a}-\frac{y}{b}\right)\left(\frac{x}{a}+\frac{y}{b}\right) = 1$

หรือ $$\frac{x}{a}-\frac{y}{b} = \frac{ab}{bx+ay}$$

เมื่อ $x \to \infty$ และ $y \to \infty$ ทางขวามือของสมการ เข้าใกล้ศูนย์

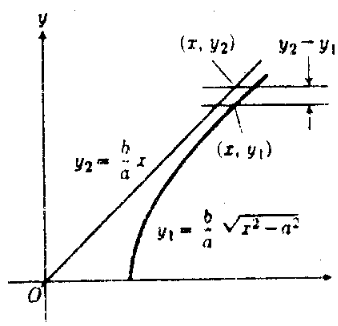
นั่นคือ $$\lim_{\substack{x\to\infty \\ y\to\infty}} \left(\frac{x}{a}-\frac{y}{b}\right) = 0$$

ดังนั้น เส้นตรง $\frac{x}{a}-\frac{y}{b} = 0$ ควรจะเป็นเส้นกำกับของ (2.12)

ให้ $y_1 = \frac{b}{a}\sqrt{x^2-a^2}$ และ $y_2 = \frac{b}{a}x$

จะแสดงว่า $\lim\limits_{x\to\infty}(y_2-y_1) = 0$

$$\begin{aligned}\lim_{x\to\infty}\left(\frac{b}{a}\sqrt{x^2-a^2}-\frac{b}{a}x\right) &= \frac{b}{a}\lim_{x\to\infty}\left[\frac{(\sqrt{x^2-a^2}-x)(\sqrt{x^2-a^2}+x)}{\sqrt{x^2-a^2}+x}\right] \\ &= \frac{b}{a}\lim_{x\to\infty}\frac{-a^2}{\sqrt{x^2-a^2}+x} \\ &= 0\end{aligned}$$



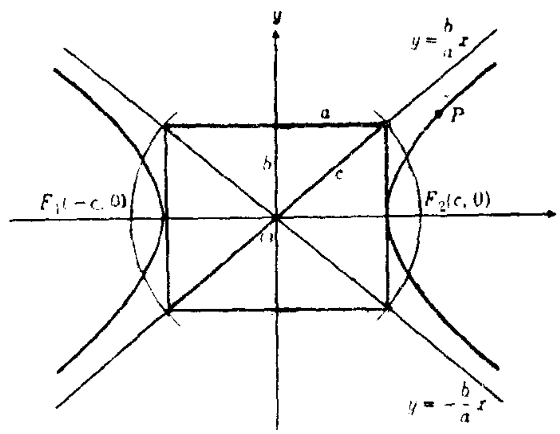
รูปที่ 2.29

ดังนั้น เส้นตรง $y = \frac{b}{a}x$ เป็นเส้นกำกับของกราฟซึ่งมีสมการเป็น $y = \frac{b}{a}\sqrt{x^2 - a^2}$

ในทำนองเดียวกัน $y = -\frac{b}{a}x$ เป็นเส้นกำกับของกราฟ $y = -\frac{b}{a}\sqrt{x^2 - a^2}$

ดังนั้น เส้นกำกับของไฮเพอร์โบลา $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ คือเส้นตรง $y = \pm\frac{b}{a}x$

การเขียนรูปไฮเพอร์โบลา เริ่มโดยกำหนดจุด (a, 0) และ (−a, 0) บนแกน x และจุด (0, b) และ (0, −b) บนแกน y แล้วสร้างรูปสี่เหลี่ยมผืนผ้าโดยให้ด้านผ่านจุดทั้งสี่จุด เมื่อต่อเส้นทแยงมุมของสี่เหลี่ยมผืนผ้าออกไปจะได้เส้นกำกับซึ่งมีความชัน $\pm\frac{b}{a}$ แล้วเขียนเส้นโค้งไฮเพอร์โบลาผ่านจุดยอด ดังรูป 2.30



$(x^2/a^2) - (y^2/b^2) = 1.$

รูปที่ 2.30

ส่วนของเส้นตรงที่ต่อจุด (0, b) และ (0, −b) เรียกว่า **แกนสังยุค (conjugate axis)** ของไฮเพอร์โบลา

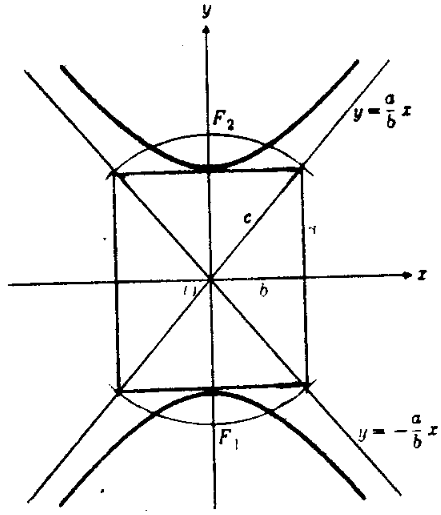
ดังนั้น แกนตามขวางยาว = 2a เรียก a ว่าครึ่งแกนตามขวาง

แกนสังยุคยาว = 2b เรียก b ว่าครึ่งแกนสังยุค

2. แกนของไฮเพอร์โบลาคือแกน y

ให้จุดโฟกัสทั้งสองคือ $F_1(0, -c)$ และ $F_2(0, c)$ ในทำนองเดียวกันกับข้อ 1 จะได้สมการของไฮเพอร์โบลาคือ

$$\frac{y^2}{a^2} - \frac{x^2}{b^2} = 1$$



$(y^2/a^2) - (x^2/b^2) = 1$

รูปที่ 2.31

สมการ $\frac{y^2}{a^2} - \frac{x^2}{b^2} = 1$ เป็นสมการไฮเพอร์โบลา มีแกนตามขวางทับแกน y และแกนสังยุคทับแกน x

สมการเส้นกำกับ คือ $y = \frac{a}{b}x$ และ $y = -\frac{a}{b}x$

นิยามของเลตัสเรกตัมของไฮเพอร์โบลาเหมือนกับวงรี และจะได้ว่าเลตัสเรกตัมยาวเท่ากับ $\frac{2b^2}{a}$

ค่าความเยื้องศูนย์กลาง $e = \frac{c}{a}$ เนื่องจาก $c > a$ ดังนั้น $e > 1$

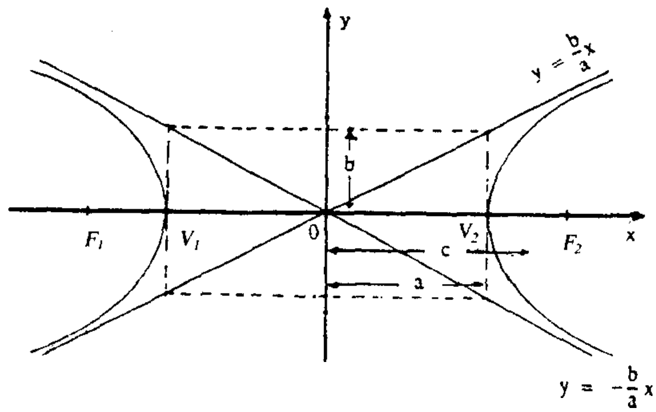
นิยามของไฮเพอร์โบลาอีกอย่างหนึ่งในรูปของค่าความเยื้องศูนย์กลางคือ

นิยาม 2.12 ไฮเพอร์โบลา คือ เซตของจุดในระนาบ ซึ่งอัตราส่วนของระยะจากจุดใด ๆ ในเซตถึงจุดคงที่กับระยะจากจุดนั้นถึงเส้นตรงคงที่เท่ากับค่าคงตัว e

เส้นตรงคงที่ในที่นี้เรียกว่า ไดเรกตริกซ์ คือ $y = \pm\frac{a}{e}$

บทสรุปสำหรับไฮเพอร์โบลาที่มีจุดศูนย์กลางที่ C(0, 0)

(1) สมการอยู่ในรูป $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$



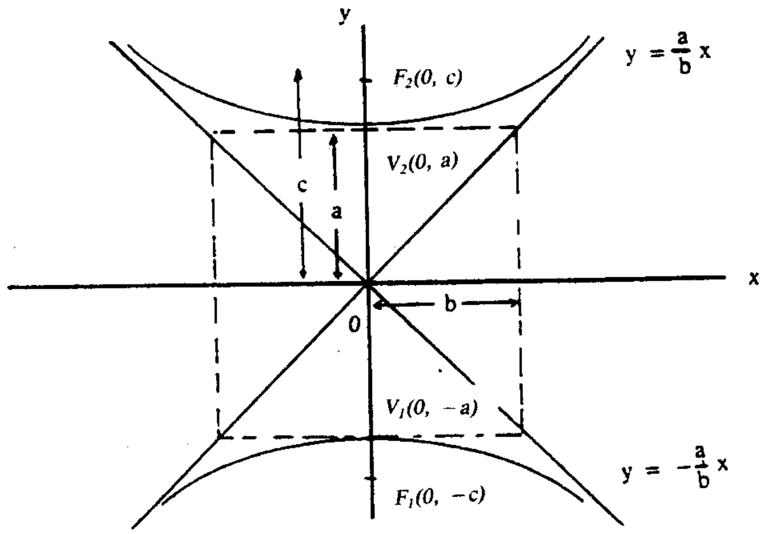
รูปที่ 2.32

(1) กราฟตัดแกน x
(2) จุดยอด คือ $V_2(a, 0)$, $V_1(-a, 0)$
(3) จุดโฟกัส คือ $F_2(c, 0)$, $F_1(-c, 0)$
(4) จุดศูนย์กลาง คือ จุด C(0, 0)
(5) แกนตามขวาง คือ แกนที่กราฟตัด ยาวเท่ากับ 2a : transverse axis
(6) แกนสังยุค คือ แกนที่กราฟไม่ตัดยาวเท่ากับ 2b : conjugate axis
(7) สมการเส้นกำกับ (asymptote) คือ $y = \pm\frac{b}{a}x$
(8) ความยาวเลตัสเรกตัม คือ $\frac{2b^2}{a}$
(9) ค่าความเยื้องศูนย์กลาง (eccentricity) คือ $e = \frac{c}{a}$
(10) สมการไดเรกตริกซ์ คือ $x = \pm\frac{a}{e}$

หมายเหตุ

1. e ของไฮเพอร์โบลามีค่า > 1 เพราะว่า $c > a$ ดังนั้น $\frac{c}{a} > 1$
2. วิธีการหาค่า e และสมการไดเรกตริกซ์ ใช้วิธีการเดียวกันกับในเรื่องวงรี (ให้ทำเป็นแบบฝึกหัด)

(2) สมการอยู่ในรูป $\frac{y^2}{a^2} - \frac{x^2}{b^2} = 1$



รูปที่ 2.33

(1) กราฟตัดแกน y

(2) จุดยอด คือ $V_2(0, a)$, $V_1(0, -a)$

(3) จุดโฟกัส คือ $F_2(0, c)$, $F_1(0, -c)$

(4) จุดศูนย์กลาง คือ $C(0, 0)$

(5) แกนตามขวาง (transverse) ยาวเท่ากับ 2a

(6) แกนสังยุค (conjugate) ยาวเท่ากับ 2b

(7) สมการเส้นกำกับ (asymptote) คือ $y = \pm\frac{a}{b}x$

(8) ความยาวเลตัสเรกตัม คือ $\frac{2b^2}{a}$

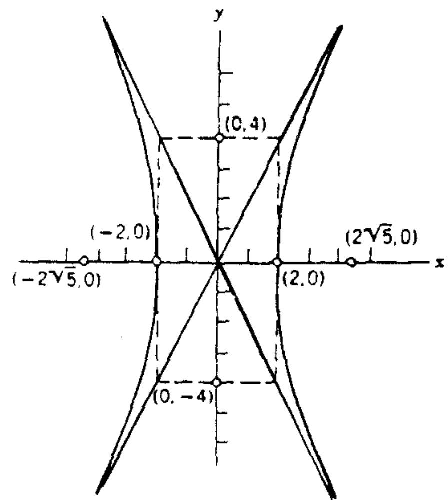
(9) ค่าความเยื้องศูนย์กลาง คือ $e = \frac{c}{a} > 1$

(10) สมการไดเรกตริกซ์ คือ $y = \pm\frac{a}{e}$

ตัวอย่างที่ 2.28 จงเขียนกราฟของสมการ $4x^2 - y^2 = 16$

วิธีทำ จัดสมการใหม่ $\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{16} = 1$

ซึ่งเป็นสมการไฮเพอร์โบลา จุดศูนย์กลางอยู่ที่จุดกำเนิด และแกนขวางทับแกน x



รูปที่ 2.34

ดังนั้น $a^2 = 4,\ b^2 = 16$

จุดยอดอยู่ที่ $(\pm 2, 0)$

จุดโฟกัสหาได้จาก $c = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{4 + 16} = 2\sqrt{5}$

โฟกัสอยู่ที่ $(\pm 2\sqrt{5}, 0)$

ค่าเยื้องศูนย์กลาง $e = \frac{c}{a} = \frac{2\sqrt{5}}{2} = \sqrt{5}$

สมการเส้นกำกับคือ $y = \pm \frac{4}{2} x = \pm 2x$

ตัวอย่างที่ 2.29 จงหาสมการไฮเพอร์โบลาที่มีจุดยอดที่ $(\pm 2, 0)$ จุดโฟกัสที่ $(\pm 3, 0)$

วิธีทำ จากสมการ $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$

ในที่นี้ $a = 2,\ c = 3$

$$\begin{aligned} b &= \sqrt{c^2 - a^2} \\ &= \sqrt{9 - 4} \\ &= \sqrt{5} \end{aligned}$$

สมการคือ $\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{5} = 1$

ตัวอย่างที่ 2.30 จงหาสมการไฮเพอร์โบลา จุดโฟกัส ความยาวแกนตามขวาง แกนสังยุค ค่า e เมื่อกำหนดให้ไฮเพอร์โบลามีจุดยอดที่ (0, ±3) และเส้นโค้งผ่านจุด (2, 7)

วิธีทำ เนื่องจากจุดยอดอยู่บนแกน y ดังนั้น แกนตามขวางจึงทับแกน y

จุดศูนย์กลางที่ (0, 0) สมการไฮเพอร์โบลาคือ

$$\frac{y^2}{a^2} - \frac{x^2}{b^2} = 1$$

ในที่นี้ $a = 3$

และเส้นโค้งผ่าน (2, 7) จากสมการ แทนค่า $x = 2, y = 7$

$$\frac{49}{9} - \frac{4}{b^2} = 1$$

$$b^2 = \frac{9}{10}$$

สมการไฮเพอร์โบลาคือ $y^2 - 10x^2 = 9$

$$c = \sqrt{a^2 + b^2} = 3\sqrt{\frac{11}{10}}$$

$$e = \frac{c}{a} = \frac{3\sqrt{\frac{11}{10}}}{3} = \sqrt{\frac{11}{10}}$$

ดังนั้น จุดโฟกัสอยู่ที่ $\left(0, \pm\sqrt{\frac{11}{10}}\right)$

ความยาวแกนตามขวาง $= 2a = 6$

ความยาวแกนสังยุค $= 2b = \frac{6}{\sqrt{10}}$

ตัวอย่างที่ 2.31 จงหาสมการของเส้นไดเรกตริกซ์ของสมการ $x^2 - 25 = 5y^2$

วิธีทำ เขียนสมการให้อยู่ในรูปของสมการทั่วไปของไฮเพอร์โบลา จะได้

$$\frac{x^2}{25} - \frac{y^2}{5} = 1$$

ดังนั้น แกนตามขวางทับแกน x

สมการไดเรกตริกซ์คือ $x = \pm\frac{a}{e}$

ในที่นี้ $a = 5$

$$c^2 = a^2 + b^2 = 25 + 5$$

$$c = \sqrt{30}$$

$$e = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{30}}{5}$$

ดังนั้น สมการไดเรกตริกซ์ คือ $x = \pm\frac{25}{\sqrt{30}}$

ข้อสังเกต จะเห็นว่านิยามของ พาราโบลา วงรี และไฮเพอร์โบลา อาจให้นิยามอีกอย่างหนึ่งโดยใช้ค่าคงตัว e ได้ ดังนั้น นิยามสำหรับภาคตัดกรวย จึงมีอีกอย่างหนึ่งได้ดังนี้

นิยาม 2.13 ภาคตัดกรวยคือเซตของจุดในระนาบ ซึ่งอัตราส่วนระหว่างจุดใด ๆ ในเซตถึงจุดคงที่กับระยะจากจุดนั้นถึงเส้นตรงคงที่ เท่ากับค่าคงตัว e จุดคงที่เรียกว่า **จุดโฟกัส** เส้นตรงคงที่เรียกว่า **ไดเรกตริกซ์** และค่าคงตัว e เรียกว่า **ค่าเยื้อง-ศูนย์กลาง**

ภาคตัดกรวยจะเป็นรูปพาราโบลา ถ้า $e = 1$
ภาคตัดกรวยจะเป็นรูปวงรี ถ้า $0 < e < 1$
ภาคตัดกรวยจะเป็นรูปไฮเพอร์โบลา ถ้า $e > 1$

แบบฝึกหัด 2.5

จงหาความยาวของแกนตามขวาง แกนสังยุค โฟกัส จุดยอด ค่า e พร้อมทั้งเขียนรูปของ

1. $4y^2 - 25x^2 = 100$
2. $x^2 - 5y^2 = 25$
3. $\frac{y^2}{9} - \frac{x^2}{16} = 1$

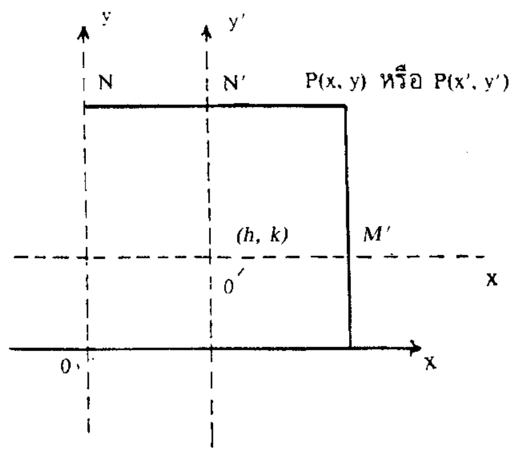
จงหาสมการไฮเพอร์โบลา ซึ่งมีคุณสมบัติดังนี้

4. จุดยอดอยู่ที่ $(\pm 4, 0)$ โฟกัสที่ $(\pm 5, 0)$
5. ความยาวแกนสังยุคเท่ากับ 4 และจุดยอดอยู่ที่ $(0, \pm 1)$
6. จุดยอดอยู่ที่ $(\pm 4, 0)$, $e = \frac{4}{3}$
7. โฟกัสอยู่บนแกน y จุดศูนย์กลางอยู่ที่จุดกำเนิด, $e = \sqrt{5}$ และผ่านจุด $(3, 2)$
8. สมการไดเรกตริกซ์ คือ $y = 4$ และ $y = -4$ เส้นกำกับคือ $y = \frac{3}{2}x$ และ $y = -\frac{3}{2}x$
9. จุดยอดอยู่ที่ $(0, \pm 3)$ และกราฟผ่านจุด $(2, 7)$
10. จงหาสมการไดเรกตริกซ์ของ $4y^2 - x^2 = 9$

2.8 การย้ายแกน (Translation of axes)

เราได้ศึกษาภาคตัดกรวยในระบบพิกัดฉากโดยที่จุดศูนย์กลางของรูปอยู่ที่จุดกำเนิดมาแล้ว ในหัวข้อนี้จะศึกษาถึงการหาสมการภาคตัดกรวยเมื่อจุดศูนย์กลางอยู่ที่จุด (h, k) ใด ๆ และแกนขนานกับแกนพิกัด

ถ้าต้องการย้ายแกนจากเดิมที่จุดกำเนิด O ไปยังจุดกำเนิดในระบบพิกัดใหม่ O′ ซึ่งมีพิกัด (h, k) ในระบบแกนพิกัดเดิม ทำได้โดยที่จุด (h, k) ลากเส้นขนานและให้มีทิศทางเดียวกับแกน x และ y ได้แกนพิกัดใหม่คือแกน x′ และ y′ ดังรูป 2.49



รูปที่ 2.35

พิจารณาจุด P(x, y) ใด ๆ ในระนาบ xy แต่เมื่อเทียบกับแกนชุดใหม่ x′, y′ พิกัดของจุด P คือ (x′, y′) จากจุด P ลากเส้นขนานกับแกน x และแกน y ตัดแกน x และแกน y ที่ M และ N ตามลำดับ และตัดแกน x′ และ y′ ที่ M′ และ N′ ตามลำดับ

ดังนั้น $PN = PN' + NN'$

และ $PM = PM' + MM'$

นั่นคือ $x = x' + h$ และ $y = y' + k$

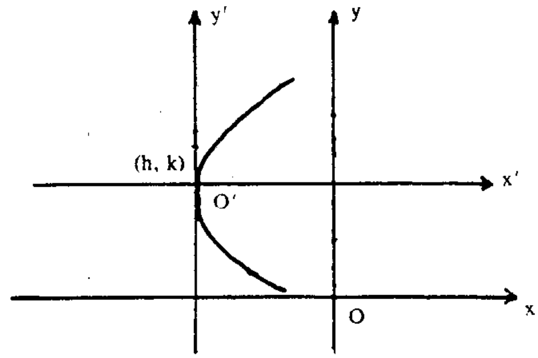
หรือ $x' = x - h$

$y' = y - k$

ดังนั้น ถ้าเราต้องการย้ายแกนจากแกน x, แกน y เดิม ไปสู่แกน x′, แกน y′ ความสัมพันธ์ระหว่างพิกัดของแกนเดิม และแกนใหม่จะเป็นไปดังสมการย้ายแกน

สมการพาราโบลา เมื่อจุดยอดอยู่ที่ (h, k) และแกนขนานกับแกนพิกัด

ให้ O′ เป็นจุดกำเนิดของแกนพิกัดใหม่ ซึ่งขนานกับแกน x และแกน y



รูปที่ 2.36

1. เมื่อแกนของพาราโบลาขนานแกน x

เมื่อเทียบกับแกนใหม่ สมการพาราโบลาคือ

$$y'^2 = 4ax'$$

แต่ $x' = x - h$

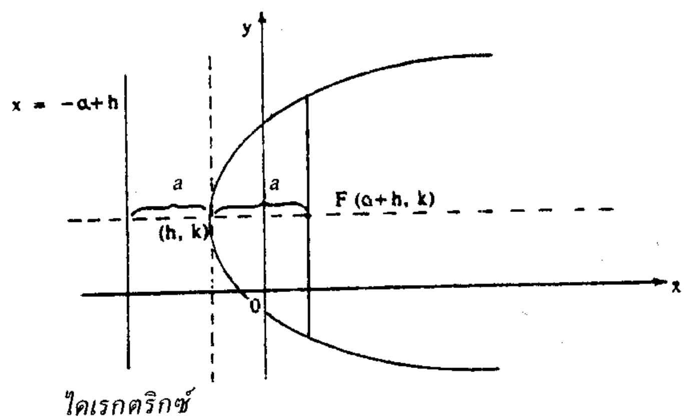
$$y' = y - k$$

ดังนั้น สมการพาราโบลาเทียบกับแกนเดิมคือ

$$(y-k)^2 = 4a(x-h)$$

เมื่อ $a > 0$ พาราโบลาเปิดทางขวา ดังรูป 2.37

$a < 0$ พาราโบลาเปิดทางซ้าย



รูปที่ 2.37

เมื่อ $a > 0$ จะได้

1. จุดยอดคือ (h, k)
2. จุดโฟกัส คือ $(a+h, k)$
3. สมการไดเรกตริกซ์ คือ $x = -a+h$
4. ความยาวเลตัสเรกตัม เท่ากับ $|4a|$

ในทำนองเดียวกัน เมื่อ $a < 0$ จะได้พาราโบลาเปิดทางซ้าย จุดโฟกัส สมการไดเรกตริกซ์ จะได้เหมือนกันทุกประการ

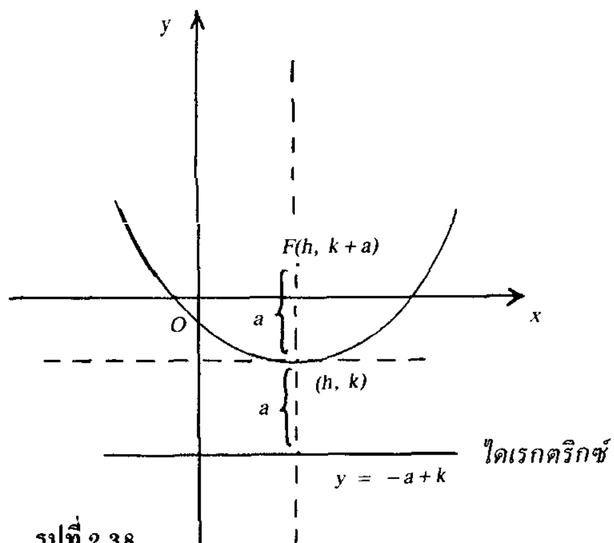
2. เมื่อแกนของพาราโบลาขนานแกน y

สมการพาราโบลาจุดยอดที่ (h, k) คือ

$$(x-h)^2 = 4a(y-k)$$

เมื่อ $a > 0$ พาราโบลาหงายขึ้น ดังรูป 2.38

$a < 0$ พาราโบลาคว่ำลง



รูปที่ 2.38

เมื่อ $a > 0$ จะได้

1. จุดยอดคือ (h, k)
2. จุดโฟกัสคือ $(h, a+k)$
3. สมการไดเรกตริกซ์คือ $y = -a+k$
4. ความยาวเลตัสเรกตัมเท่ากับ $|4a|$

ในทำนองเดียวกันเมื่อ $a < 0$ จะได้พาราโบลารูปคว่ำลง จุดโฟกัส สมการไดเรกตริกซ์ เหมือนกัน