ตัวอย่างที่ 2.32 จงหาสมการของพาราโบลา ซึ่งมีจุดยอดที่ (3, 1) และสมการไดเรกตริกซ์คือ $y = -2$

วิธีทำ จากสมการไดเรกตริกซ์ ทำให้ทราบว่ารูปของสมการพาราโบลาคือ

$$(x-h)^2 = 4a(y-k)$$

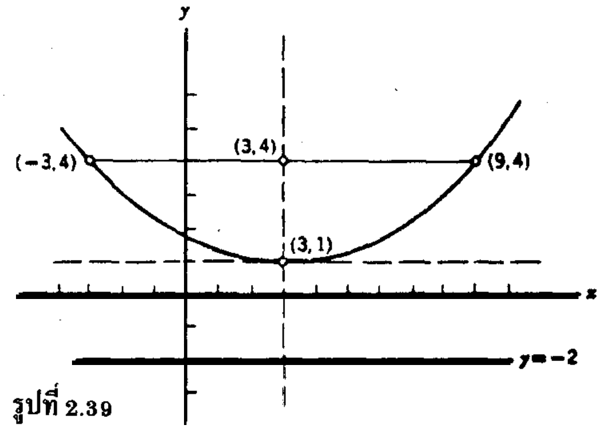
ในที่นี้ $h = 3, k = 1$

ระยะจากจุดยอดถึงเส้นไดเรกตริกซ์ = 3

ดังนั้น $a = 3$

สมการพาราโบลา คือ

$$(x-3)^2 = 12(y-1)$$



รูปที่ 2.39

ตัวอย่างที่ 2.33 จงหาสมการพาราโบลา จุดยอดที่ (−1, 2) แกนของพาราโบลาขนานกับแกน x และกราฟผ่านจุด (3, 4)

วิธีทำ แกนของพาราโบลาขนานแกน x สมการคือ

$$(y-k)^2 = 4a(x-h)$$

จุด (h, k) คือ (-1, 2) สมการคือ

$$(y-2)^2 = 4a(x+1)$$

เพราะว่ากราฟผ่านจุด (3, 4) ดังนั้น

$$(4-2)^2 = 4a(3+1)$$

$$4 = 4a(4)$$

$$a = \frac{1}{4}$$

สมการพาราโบลาคือ $(y-2)^2 = 4\left(\frac{1}{4}\right)(x+1)$

$$(y-2)2 = x+1$$

หรือ $y^2-4y-x+3 = 0$

จากสมการ $(y-k)^2 = 4a(x-h)$

และ $(x-h)^2 = 4a(y-k)$

เมื่อกระจายให้อยู่ในรูปสมการกำลังสองจะได้

$$y^2-2ky-4ax+(k^2+4ak) = 0$$

และ $$x^2-2hx-4ay+(h^2+4ak) = 0$$

หรือเขียนในรูปทั่วไปคือ

$$y^2 + Ay + Bx + C = 0$$

และ $$x^2 + Dx + Ey + F = 0$$

ตัวอย่างที่ 2.34 กำหนดสมการพาราโบลา

$$y^2 + x - 2y = 0$$

จงหาจุดยอด จุดโฟกัส สมการไดเรกตริกซ์ ความยาวเลตัสเรกตัม และเขียนกราฟ

วิธีทำ จัดสมการที่กำหนดให้ ให้อยู่ในรูป $(y-k)^2 = 4a(x-h)$

$$y^2 + x - 2y = 0$$

$$y^2 - 2y + 1 = -x + 1$$

$$(y-1)^2 = -(x-1)$$

ดังนั้น $(h, k) = (1, 1)$

$$4a = -1$$

$$a = -\frac{1}{4} < 0$$

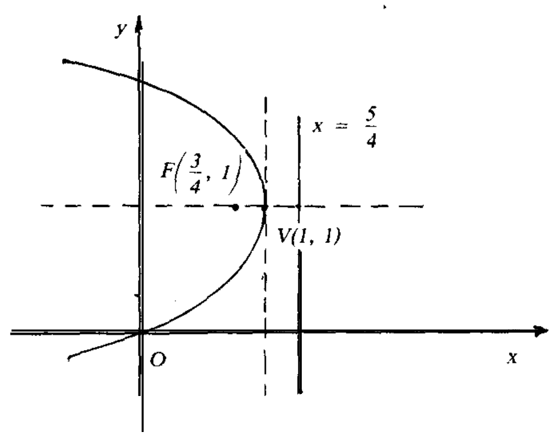
ดังนั้น กราฟพาราโบลาเปิดทางซ้าย

จุดโฟกัส $F(a+h,k)$ คือ $F\left(-\frac{1}{4}+1,\ 1\right)$

หรือ $F\left(\frac{3}{4},\ 1\right)$

สมการไดเรกตริกซ์ $x = -a+h = -\left(-\frac{1}{4}\right)+1$

$$x = \frac{5}{4}$$



รูปที่ 2.40

ตัวอย่างที่ 2.35 จงวิเคราะห์สมการพาราโบลา

$$x^2+8x+4y+2 = 0$$

วิธีทำ จากสมการ $x^2+8x+4y+2 = 0$

$$(x^2+8x+16) = -4y-2+16$$

$$(x+4)^2 = -4y+14$$

$$(x+4)^2 = -4\left(y-\frac{7}{2}\right)$$

เทียบกับสมการ $(x-h)^2 = 4a(y-k)^2$

จะได้ $h = -4,\ k = \frac{7}{2}$ และ $a = -1 < 0$

ดังนั้น กราฟพาราโบลาคว่ำลง

จุดโฟกัสคือ $F(h,\ a+k)$ คือ $F\left(-4,\ -1+\frac{7}{2}\right)$

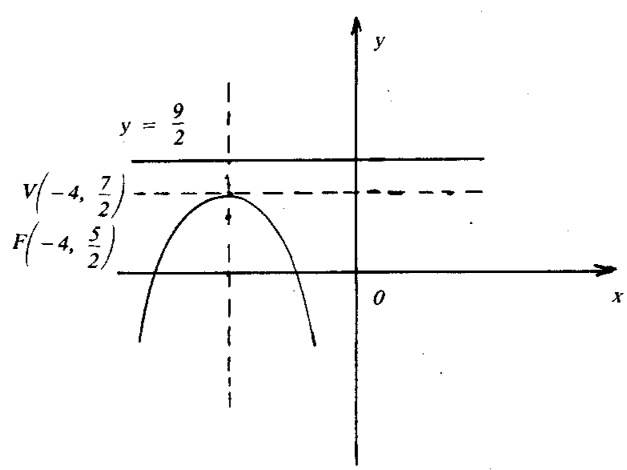
นั่นคือ $F\left(-4,\ \frac{5}{2}\right)$

สมการไดเรกตริกซ์ $y = -a+k$

$$= -(-1)+\frac{7}{2}$$

$$= \frac{9}{2}$$

ความยาวเลตัสเรกตัม $= |4a| = |4(-1)| = 4$

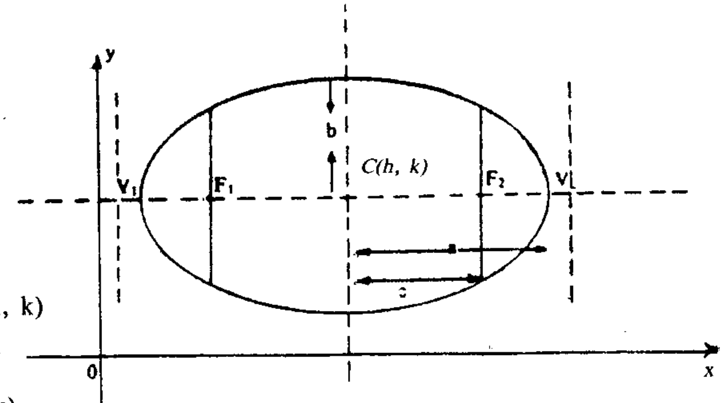


รูปที่ 2.41

สมการวงรีเมื่อจุดยอดอยู่ที่ (h, k) และแกนขนานกับแกนพิกัด

1. แกนของวงรีขนานแกน x สมการคือ

$$\frac{(x-h)^2}{a^2}+\frac{(y-k)^2}{b^2} = 1, \qquad a > b$$



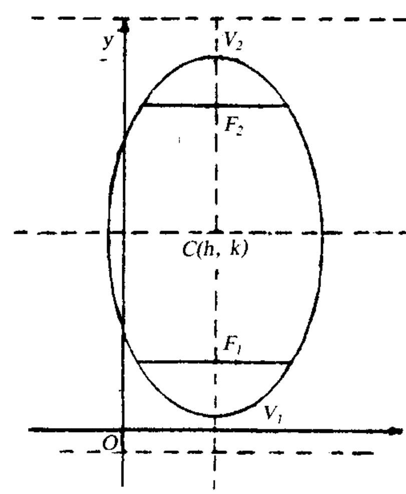
รูปที่ 2.42

สรุปได้ดังนี้

1. จุดศูนย์กลางคือ C(h, k)
2. จุดยอดคือ $(h\pm a, k)$
3. จุดโฟกัสคือ $(h \pm c, k)$
4. สมการไดเรกตริกซ์ $x = h \pm \frac{a}{e}$
5. ค่าความเยื้องศูนย์กลาง $e = \frac{c}{a} < 1$
6. ความยาวเลตัสเรกตัม $= \frac{2b^2}{a}$
7. แกนเอก = 2a, แกนโท = 2b

2. แกนของวงรีขนานแกน y สมการคือ

$$\frac{(x-h)^2}{b^2}+\frac{(y-k)^2}{a^2} = 1, \qquad a > b$$



รูปที่ 2.43

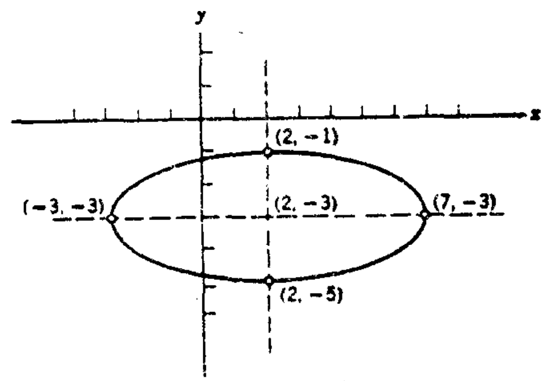
สรุปได้ดังนี้

1. จุดศูนย์กลางคือ (h, k)
2. จุดยอดคือ $(h, k \pm a)$
3. จุดโฟกัสคือ $(h, k \pm c)$
4. สมการไดเรกตริกซ์ $y = k \pm \frac{a}{e}$
5. ค่าความเยื้องศูนย์กลาง $e = \frac{c}{a}$
6. ความยาวเลตัสเรกตัม $= \frac{2b^2}{a}$
7. แกนเอก = 2a แกนโท = 2b

ตัวอย่างที่ 2.36 จงหาสมการวงรี ซึ่งมีแกนโทยาว 4 หน่วย และจุดยอดที่ $(-3, 3)$ และ $(7, -3)$

วิธีทำ แกนโทยาว $= 2b = 4$

$$b = 2$$



รูปที่ 2.44

จุดศูนย์กลางของวงรีคือ จุดกึ่งกลางระหว่างจุดยอดทั้งสอง

ดังนั้น จุดศูนย์กลางอยู่ที่ $\left(\frac{-3+7}{2}, \frac{-3-3}{2}\right) = (2, -3)$

$a =$ ระยะจากจุดศูนย์กลางถึงจุดยอด

ดังนั้น $a = 5$

สมการของวงรี ซึ่งมีแกนเอกขนานกับแกน x คือ

$$\frac{(x-h)^2}{a^2} + \frac{(y-k)^2}{b^2} = 1$$

$$\frac{(x-2)^2}{25} + \frac{(y+3)^2}{4} = 1$$

หรือ $4x^2 + 25y^2 - 16x + 150y + 141 = 0$

ตัวอย่างที่ 2.37 จงหาสมการวงรี ซึ่งมีจุดยอดจุดหนึ่งอยู่ที่ $(-2, 6)$ และจุดโฟกัสซึ่งอยู่ใกล้กับจุดยอดคือ $(-2, 4)$ ถ้าค่า $e = \frac{1}{2}$ จงหาสมการไดเรกตริกซ์

วิธีทำ จากจุดยอดที่ $(-2, 6)$ และจุดโฟกัสที่ $(-2, 4)$ ทำให้ทราบว่าแกนเอกของวงรีขนานกับแกน y ดังนั้น สมการคือ

$$\frac{(x-h)^2}{b^2} + \frac{(y-k)^2}{a^2} = 1$$

เพราะว่าจุดยอดที่ $(-2, 6)$ จุดโฟกัสที่ $(-2, 4)$

ดังนั้น $a-c = 6-4 = 2$

จาก $e = \frac{c}{a} = \frac{1}{2}$

$a = 2c$

แทนค่า $2c-c = 2$

$c = 2$

$a = 4$

จาก $b^2 = a^2-c^2$

$= 16-4 = 12$

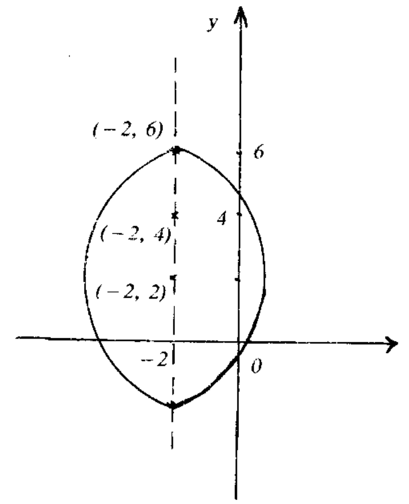
จุดศูนย์กลาง $(h, k) = (-2, 2)$

สมการวงรีคือ $\frac{(x+2)^2}{12}+\frac{(y-2)^2}{16} = 1$

สมการไดเรกตริกซ์คือ $y = k \pm \frac{a}{e}$

$= 2 \pm 8$

นั่นคือ $y = 10$ และ $y = -6$



รูปที่ 2.45

หมายเหตุ ในทำนองเดียวกับสมการพาราโบลา เมื่อกระจายสมการ

$$\frac{(x-h)^2}{a^2}+\frac{(y-k)^2}{b^2} = 1$$

หรือ $$\frac{(x-h)^2}{b^2}+\frac{(y-k)^2}{a^2} = 1$$

จะได้สมการรูปทั่วไปคือ

$$Ax^2+By^2+Cx+Dy+E = 0$$

เมื่อ $A \neq B$ และ $AB > 0$

ตัวอย่างที่ 2.38 จงเขียนกราฟและวิเคราะห์สมการ

$$4x^2+9y^2-8x-32 = 0$$

วิธีทำ จากสมการ $4x^2+9y^2-8x-32 = 0$ จัดสมการ

$$4(x^2-2x)+9y^2 = 32$$

$$4(x^2-2x+1)+9y^2 = 32+4$$

$$4(x-1)^2+9y^2 = 36$$

$$\frac{(x-1)^2}{9}+\frac{y^2}{4} = 1$$

จะเห็นว่าเป็นสมการวงรี จุดศูนย์กลางที่ (1, 0) แกนเอกขนานแกน x

ในที่นี้ $a = 3, b = 2$

$$c = \sqrt{a^2 - b^2} = \sqrt{5}$$

จุดยอดคือ $(h \pm a, k) = (1 \pm 3, 0)$

นั่นคือ $V_1(4, 0)$ และ $V_2(-2, 0)$

จุดโฟกัสคือ $(h \pm c, k) = (1 \pm \sqrt{5}, 0)$

นั่นคือ $F_1(1 + \sqrt{5}, 0)$ และ $F_2(1 - \sqrt{5}, 0)$

ค่า $e = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{5}}{3} \approx 0.75$

แกนเอก $= 2a = 6$

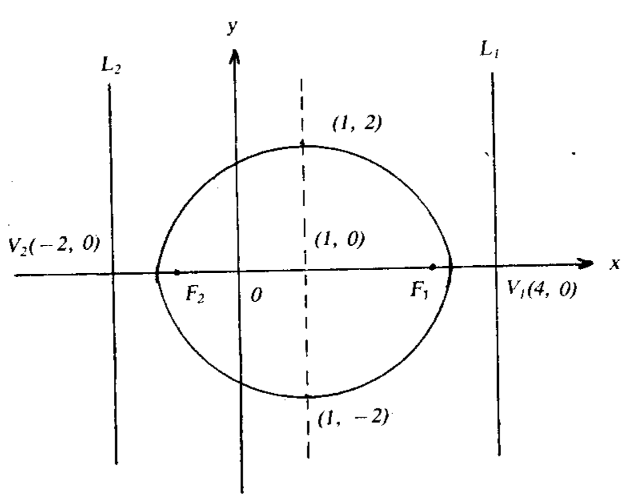
แกนโท $= 2b = 4$

ความยาวเลตัสเรกตัม$' = \frac{2b^2}{a} = \frac{2(2^2)}{3} = \frac{8}{3}$

สมการไดเรกตริกซ์คือ $x = h \pm \frac{a}{e}$

$$\frac{a}{e} = \frac{3}{\frac{\sqrt{5}}{3}} = \frac{9}{\sqrt{5}}$$

สมการคือ $x = 1 + \frac{9}{\sqrt{5}}$ และ $x = 1 - \frac{9}{\sqrt{5}}$

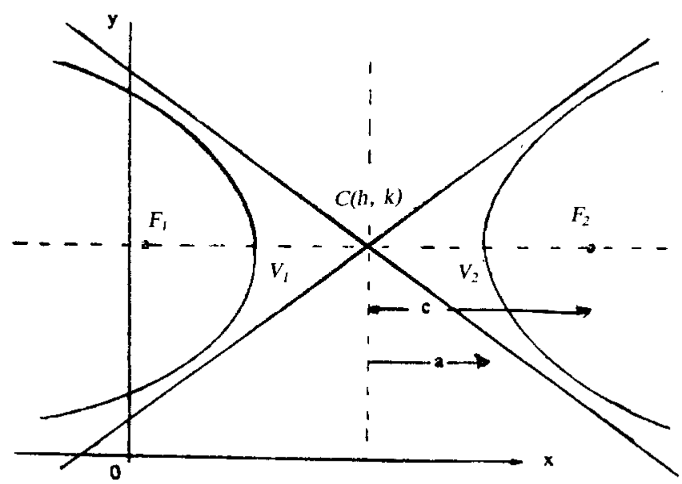


รูปที่ 2.46

สมการไฮเพอร์โบลา เมื่อจุดยอดอยู่ที่ (h, k) และแกนขนานกับแกนพิกัด

1. แกนตามขวางขนานแกน x สมการคือ

$$\frac{(x-h)^2}{a^2} - \frac{(y-k)^2}{b^2} = 1$$



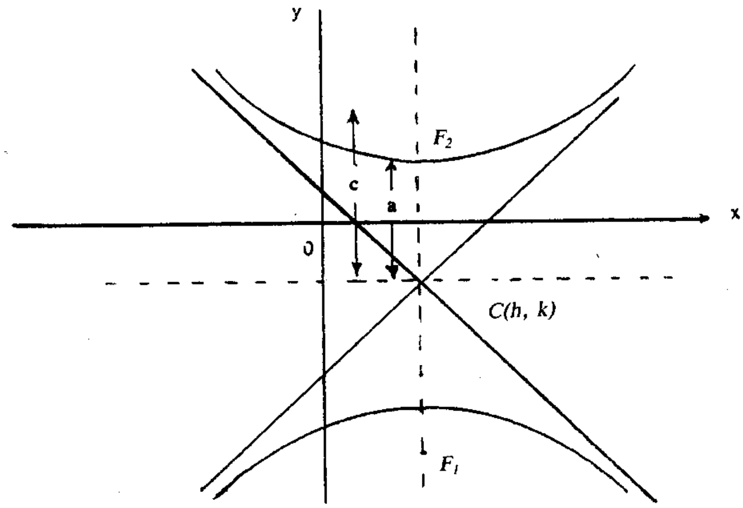
รูปที่ 2.47

สรุปได้ดังนี้

1. จุดศูนย์กลางคือ C(h, k)
2. จุดยอดคือ $(h \pm a, k)$
3. จุดโฟกัสคือ $(h \pm c, k)$
4. สมการไดเรกตริกซ์ $x = h \pm \frac{a}{e}$
5. ค่าความเยื้องศูนย์กลาง $e = \frac{c}{a} > 1$
6. ความยาวเลตัสเรกตัม $= \frac{2b^2}{a}$
7. แกนตามขวาง $= 2a$ แกนสังยุค $= 2b$
8. สมการเส้นกำกับ $y - k = \pm\frac{b}{a}(x-h)$

2. แกนตามขวางขนานแกน y สมการคือ

$$\frac{(y-k)^2}{a^2} - \frac{(x-h)^2}{b^2} = 1$$



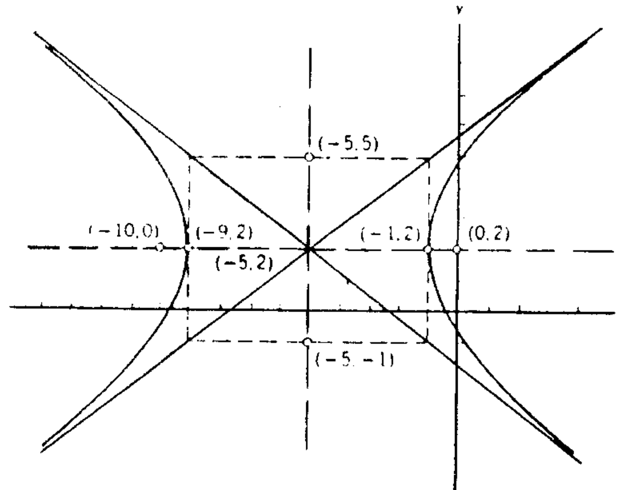
รูปที่ 2.48

สรุปได้ดังนี้

1. จุดศูนย์กลางคือ C(h, k)
2. จุดยอดคือ $(h, k \pm a)$
3. จุดโฟกัสคือ $(h, k \pm c)$
4. สมการไดเรกตริกซ์ $y = k \pm \frac{a}{e}$
5. ค่าความเยื้องศูนย์กลาง $e = \frac{c}{a} > 1$
6. ความยาวเลตัสเรกตัม $= \frac{2b^2}{a}$
7. แกนตามขวาง $= 2a$ แกนสังยุค $= 2b$
8. สมการเส้นกำกับ $y - k = \pm \frac{a}{b}(x - h)$

ตัวอย่างที่ 2.39 จงหาสมการไฮเพอร์โบลา ซึ่งมีจุดยอดที่ $(-9, 2)$ และ $(-1, 2)$ จุดโฟกัสที่ $(-10, 2)$ และ $(0, 2)$

วิธีทำ เนื่องจากแกนตามขวางขนานกับแกน x



รูปที่ 2.49

ดังนั้น สมการคือ $\frac{(x-h)^2}{a^2} - \frac{(y-k)^2}{b^2} = 1$

จุดศูนย์กลางอยู่ที่ $\left(\frac{-9+(-1)}{2}, \frac{2+2}{2}\right) = (-5, 2)$

a = ระยะห่างจากจุดศูนย์กลางถึงจุดยอด = 4

c = ระยะห่างจากจุดศูนย์กลางถึงจุดโฟกัส = 5

$$b^2 = c^2 - a^2 = 25 - 16 = 9$$

ดังนั้น สมการคือ $\frac{(x+5)^2}{16} - \frac{(y-2)^2}{9} = 1$

หรือ $9x^2 - 16y^2 + 90x + 64y + 17 = 0$

ตัวอย่างที่ 2.40 จงหาสมการไฮเพอร์โบลา และสมการเส้นกำกับ ซึ่งมีจุดยอดจุดหนึ่งอยู่ที่ $(2, -2)$ จุดศูนย์กลางอยู่ที่ $(2, -5)$ และมีค่า $e = \frac{5}{3}$

วิธีทำ จุดยอดอยู่ที่ $(2, -2)$ จุดศูนย์กลาง $(2, -5)$ ทำให้ทราบว่าทั้งสองจุดอยู่บนเส้นตรงที่ขนานแกน y ดังรูป

สมการคือ $\frac{(y-k)^2}{a^2} - \frac{(x-h)^2}{b^2} = 1$

ในที่นี้ $(h, k) = (2, -5)$

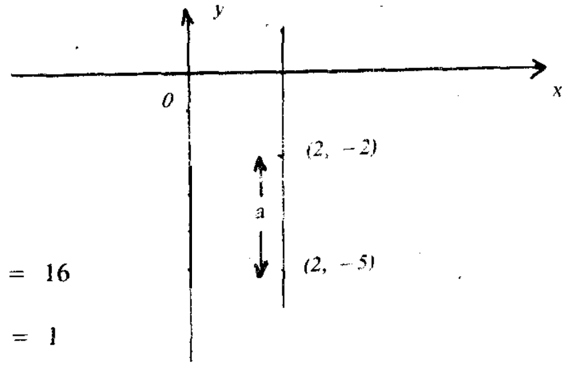
$$a = 3$$

$$e = \frac{c}{a} = \frac{5}{3}$$

ดังนั้น $c = 5$

$$b^2 = c^2 - a^2 = 25 - 9 = 16$$

ดังนั้น สมการคือ $\frac{(y+5)^2}{9} - \frac{(x-2)^2}{16} = 1$



รูปที่ 2.50

สมการเส้นกำกับ หาได้จาก

$$\frac{(y+5)^2}{9} - \frac{(x-2)^2}{16} = 0$$

$$(y+5)^2 = \frac{9}{16}(x-2)^2$$

$$y+5 = \pm\frac{3}{4}(x-2)$$

สมการเส้นกำกับคือ $4y - 3x + 26 = 0$ และ

$$3x + 4y + 14 = 0$$

หมายเหตุ เมื่อกระจายสมการ $\frac{(x-h)^2}{a^2} - \frac{(y-k)^2}{b^2} = 1$

หรือ $\frac{(y-k)^2}{a^2} - \frac{(x-h)^2}{b^2} = 1$

จะได้สมการรูปทั่วไปคือ

$$Ax^2 + By^2 + Cx + Dy + E = 0$$

เมื่อ $AB < 0$

ตัวอย่างที่ 2.41 จงวิเคราะห์สมการ $16x^2 - 9y^2 - 32x - 54y - 209 = 0$

วิธีทำ จัดสมการที่กำหนดให้โดยทำให้เป็นกำลังสองสมบูรณ์

$$16(x^2 - 2x) - 9(y^2 + 6y) = 209$$

$$16(x^2 - 2x + 1) - 9(y^2 + 6y + 9) = 209 + 16 - 81$$

$$16(x-1)^2 - 9(y+3)^2 = 144$$

$$\frac{(x-1)^2}{9} - \frac{(y+3)^2}{16} = 1$$

จะเห็นว่าสมการนี้เป็นสมการไฮเพอร์โบลา จุดศูนย์กลางที่ $(1, -3) = (h, k)$ แกนตามขวางขนานกับแกน x

$$a = 3,\ b = 4$$

$$c = \sqrt{a^2+b^2} = \sqrt{9+16} = 5$$

จุดยอดคือ $(h \pm a, k) = (1 \pm 3, -3)$

$$V_1(4, -3) \text{ และ } V_2(-2, -3)$$

จุดโฟกัสคือ $(h \pm c, k) = (1 \pm 5, -3)$

$$F_1(6, -3) \text{ และ } F_2(-4, -3)$$

แกนตามขวางยาว $2a = 6$ แกนสังยุคยาว $2b = 8$

ค่าความเยื้องศูนย์กลาง $e = \frac{c}{a} = \frac{5}{3}$

สมการไดเรกตริกซ์ $x = h \pm \frac{a}{e}$

$$\frac{a}{e} = \frac{3}{\frac{5}{3}} = \frac{9}{5}$$

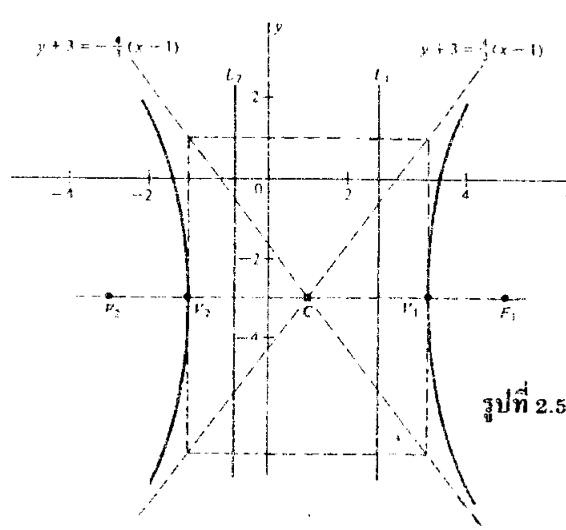
$$x = 1 \pm \frac{9}{5}$$

ให้ $L_1 : x = \frac{14}{5}$, $L_2 : x = -\frac{4}{5}$

สมการเส้นกำกับ $y - k = \pm \frac{b}{a}(x-h)$

$$y+3 = \pm \frac{4}{3}(x-1)$$

$$\frac{(x-1)^2}{9} - \frac{(y+3)^2}{16} = 1$$



รูปที่ 2.51

2.9 สมการทั่วไปกำลังสอง (The General Second Degree Equation)

สมการทั่วไปกำลังสองจะอยู่ในรูปของ

$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0 \qquad \text{..........(2.13)}$$

เมื่อ A, B, C, D, E และ F คือค่าคงที่

สมการภาคตัดกรวย ซึ่งแกนของรูปขนานกับแกนพิกัด เมื่อกระจายจะได้สมการอยู่ในรูปของ

$$Ax^2 + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0 \qquad \text{..........(2.14)}$$

ซึ่งไม่มีเทอม $xy(B = 0)$ แต่ในทางกลับกัน ถ้ามีสมการใดอยู่ในรูป (2.14) อาจจะไม่ใช่สมการภาคตัดกรวยก็ได้ ดังนั้น จึงต้องอาศัยวิธีกำลังสองสมบูรณ์ ทำสมการที่กำหนดให้ให้อยู่ในรูปมาตรฐาน เราจะทราบชนิดของสมการภาคตัดกรวยได้จากทฤษฎีต่อไปนี้

ทฤษฎีบทที่ 2.1 สมการดีกรีสองของ x และ y ในรูปของ

$$Ax^2 + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0 \quad \text{และ}$$

1. ถ้า $AC = 0$ แล้วกราฟเป็นพาราโบลา หรือเส้นตรงสองเส้นขนานกัน หรือเป็นเส้นตรง 1 เส้น หรือไม่มีกราฟ
2. ถ้า $AC > 0$ แล้วกราฟเป็นวงรี (ถ้า $A \neq C$) หรือเป็นวงกลม (ถ้า $A = C$) เป็นจุด ๆ หนึ่ง หรือไม่มีกราฟ
3. ถ้า $AC < 0$ แล้วกราฟเป็นไฮเพอร์โบลา หรือเส้นตรงสองเส้นตัดกัน

พิสูจน์ จัดสมการ $Ax^2 + Cy^2 + Dx + Ey + F = O$

ให้อยู่ในรูปของ $A(x-h)^2 + C(y-k)^2 = K$

หรือ

$$\frac{(x-h)^2}{1/A} + \frac{(y-k)^2}{1/C} = K \qquad \text{..........(2.15)}$$

1) ถ้า $AC = 0$

1.1 ถ้า $A = 0$ และ $C \neq 0$ (2.14) คือ

$$Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$$

ซึ่งจะเห็นว่า ถ้า $D \neq 0$ สมการจะอยู่ในรูปของ $(y-k)^2 = 4a(x-h)$ ซึ่งเป็นสมการของพาราโบลา

แต่ถ้า $D = 0$ จะได้สมการ

$$Cy^2 + Ey + F = 0$$

ซึ่งเป็นสมการของกราฟเส้นตรง 2 เส้นขนานกัน (ถ้า $y = \pm k$ ค่าคงที่) หรือเป็นเส้นตรง 1 เส้น (ถ้า y มีรากซ้ำ)

หรือไม่มีกราฟ (ถ้า y หาค่าจริงไม่ได้)

1.2 ถ้า $A \neq 0$ และ $C = 0$ พิสูจน์ในทำนองเดียวกับข้อ 1.1

2) ถ้า $AC > 0$ (A และ C มีเครื่องหมายเหมือนกัน)

2.1 ถ้า $A = C$ กราฟของ (2.15) เป็นวงกลม วงกลมจุด หรือไม่มีกราฟ

2.2 ถ้า $A \neq C$ และมีเครื่องหมายเหมือนกัน และเหมือนกับเครื่องหมายของ K (2.15) จะอยู่ในรูปของ

$$\frac{(x-h)^2}{a^2}+\frac{(y-k)^2}{b^2} = 1 \quad \text{หรือ}$$

$$\frac{(x-h)^2}{b^2}+\frac{(y-k)^2}{a^2} = 1 \quad \text{ซึ่งเป็นกราฟของวงรี}$$

2.3 ถ้า A และ C มีเครื่องหมายเหมือนกัน แต่ต่างจากเครื่องหมายของ K จะเห็นว่าไม่สามารถหาค่าจริงของ x และ y ที่คล้องตาม (2.15) ได้ ดังนั้น จึงไม่มีกราฟ

2.4 ถ้า $K = 0$ จะได้ว่า $x = h$ และ $y = k$ เท่านั้น ซึ่งจะได้กราฟเป็นจุด เรียกว่า point ellipse

3) ถ้า $AC < 0$ (A และ C มีเครื่องหมายต่างกัน)

3.1 ถ้า $K \neq 0$ (2.15) จะอยู่ในรูปของ

$$\frac{(x-h)^2}{a^2}-\frac{(y-k)^2}{b^2} = 1$$

$$\text{หรือ } \frac{(y-k)^2}{a^2}-\frac{(x-h)^2}{b^2} = 1 \quad \text{ซึ่งเป็นกราฟของไฮเพอร์โบลา}$$

3.2 ถ้า $K = 0$ (2.15) จะอยู่ในรูปของ

$$\frac{(x-h)^2}{a^2}-\frac{(y-k)^2}{b^2} = 0$$

$$\text{หรือ } \frac{(y-k)^2}{a^2}-\frac{(x-h)^2}{b^2} = 0$$

ซึ่งเป็นสมการของเส้นตรงสองเส้น

ตัวอย่างที่ 2.42 จงเขียนกราฟของสมการ $2y^2-2y+x-1 = 0$ หาจุดยอด โฟกัส และเลตัส-เรกตัม

วิธีทำ

$$2y^2-2y = -x+1$$

$$y^2-y+\frac{1}{4} = -\frac{x}{2}+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}$$

$$\left(y-\frac{1}{2}\right)^2 = -\frac{1}{2}\left(x-\frac{3}{2}\right)$$

สมการนี้คือ พาราโบลา จุดยอดอยู่ที่จุด $\left(\frac{3}{2}, \frac{1}{2}\right)$

และรูปเปิดด้านซ้าย

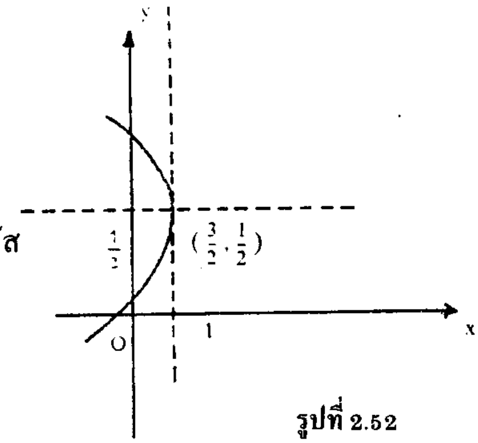
$$4a = -\frac{1}{2}$$

$$a = -\frac{1}{8}$$

a = ระยะจากจุดยอดถึงจุดโฟกัส

จุดโฟกัสคือ $\left(\frac{3}{2}-\frac{1}{8}, \frac{1}{2}\right) = \left(\frac{11}{8}, \frac{1}{2}\right)$

ความยาวเลตัสเรกตัม $= 4\left(\frac{1}{8}\right) = \frac{1}{2}$



รูปที่ 2.52

ตัวอย่างที่ 2.43 โดยการย้ายแกน จงบอกชื่อของภาคตัดกรวย ซึ่งมีสมการ

$$x^2 - 4y^2 + 6x + 24y - 43 = 0$$

แล้วหาโฟกัส, จุดยอด

วิธีทำ จากสมการทั่วไป (2.14) ในที่นี้ A = 1, C = −4 ดังนั้น $AC < 0$ กราฟควรจะเป็นไฮเพอร์โบลา หรือสมการเส้นตรง 2 เส้น

โดยวิธีกำลังสองสมบูรณ์

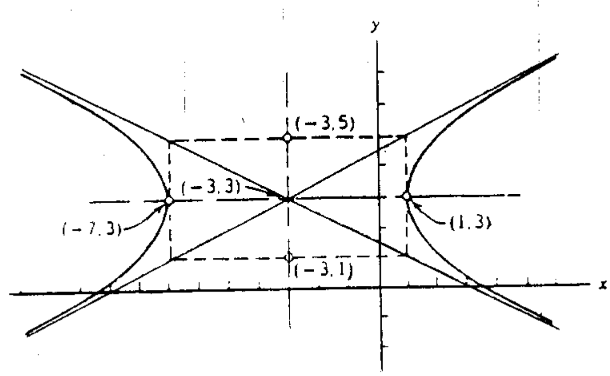
$$(x^2+6x) - 4(y^2-6y) = 43$$

$$(x^2+6x+9) - 4(y^2-6y+9) = 43+9-36$$

$$(x+3)^2 - 4(y-3)^2 = 16$$

$$\frac{(x+3)^2}{16} - \frac{(y-3)^2}{4} = 1$$

สมการนี้คือ ไฮเพอร์โบลา จุดศูนย์กลางอยู่ที่ (−3, 3) แกนตามขวางขนานกับแกน x



รูปที่ 2.53

$a^2 = 16$ ดังนั้น $a = 4$

$b^2 = 4,\ b = 2$

จุดยอดอยู่ที่ $(1, 3)$ และ $(-7, 3)$

จุดปลายของแกนสังยุคคือ $(-3, 3+2)$ และ $(-3, 3-2)$

คือ $(-3, 5)$ และ $(-3, 1)$

$$c = \sqrt{a^2+b^2} = \sqrt{16+4} = 2\sqrt{5}$$

โฟกัส คือ $(-3+2\sqrt{5}, 3)$ และ $(-3-2\sqrt{5}, 3)$

ตัวอย่างที่ 2.44 จงวิเคราะห์สมการ $9x^2+4y^2+36x-8y+4 = 0$ ว่าเป็นภาคตัดกรวยชนิดใด และหาจุดศูนย์กลาง จุดยอด สมการไดเรกตริกซ์

วิธีทำ ในที่นี้ $A = 9, C = 4$ ดังนั้น $AC > 0$

กราฟควรจะเป็นวงรี จุด หรือไม่มีกราฟ

โดยวิธีกำลังสองสมบูรณ์

$$9(x^2+4x)+4(y^2-2y) = -4$$

$$9(x^2+4x+4)+4(y^2-2y+1) = -4+36+4$$

$$9(x+2)^2+4(y-1)^2 = 36$$

$$\frac{(x+2)^2}{4}+\frac{(y-1)^2}{9} = 1$$

ดังนั้น สมการที่กำหนดให้เป็นสมการวงรี ซึ่งมีแกนเอกขนานกับแกน y และจุดศูนย์กลางใหม่ คือ $(-2, 1)$

$a^2 = 9$ ดังนั้น $a = 3$

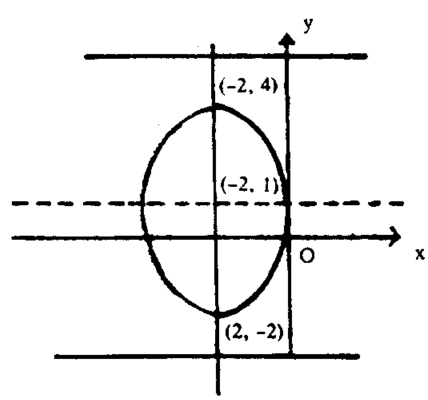
$b^2 = 4,\quad b = 2$

จุดยอดอยู่ที่ $(-2, 4)$ และ $(-2, -2)$

$$c = \sqrt{a^2-b^2} = \sqrt{9-4} = \sqrt{5}$$

$$e = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{5}}{3}$$

สมการไดเรกตริกซ์ คือ $y = \pm\frac{a}{e} = \pm\frac{9}{\sqrt{5}}$



รูปที่ 2.54

ตัวอย่างที่ 2.45 จงวิเคราะห์สมการ $x^2+3y^2-4x+30y+79 = 0$

วิธีทำ

$$(x^2-4x)+3(y^2+10y) = -79$$
$$(x^2-4x+4)+3(y^2+10y+25) = -79+4+75$$
$$(x-2)^2+3(y+5)^2 = 0$$

สมการนี้จะเป็นจริง เมื่อ $x = 2$ และ $y = -5$ เท่านั้น
ดังนั้น กราฟของสมการ คือ จุด $(2, -5)$ เพียงจุดเดียว

แบบฝึกหัด 2.6

จงหาพิกัดของจุดยอด โฟกัส สมการของไดเรกตริกซ์ พร้อมทั้งเขียนกราฟของสมการพาราโบลา ซึ่งกำหนดดังนี้

1. $x^2 - 6x - 3y = 0$
2. $y^2 - 2x - 4y + 10 = 0$
3. $2y^2 + 3x - 8y + 9 = 0$

จงหาพิกัดของจุดศูนย์กลาง แกนเอก แกนโท จุดยอด โฟกัส และค่าเยื้องศูนย์กลาง พร้อมทั้งเขียนกราฟของ

4. $4x^2 + 9y^2 + 16x - 18y - 11 = 0$
5. $5x^2 + 3y^2 - 15x + 15y = 0$
6. $25x^2 + 9y^2 - 100x + 54y - 44 = 0$

จงหาพิกัดของจุดศูนย์กลาง จุดยอด แกนตามขวาง แกนสังยุค โฟกัส ค่าเยื้องศูนย์กลาง พร้อมทั้งเขียนกราฟของ

7. $4y^2 - x^2 + 4x = 0$
8. $3x^2 - 12y^2 - 16x - 40y - 120 = 0$
9. $5x^2 - 4y^2 + 20x + 8y = 4$
10. จงหาสมการพาราโบลา ซึ่งมีจุดยอดที่ (3, 1) และโฟกัสที่ (5, 1)
11. จงหาสมการพาราโบลา ซึ่งมีสมการไดเรกตริกซ์ $y = 2$ และจุดยอดที่ (1, −1)
12. จงหาสมการพาราโบลา ซึ่งจุดปลายของเลตัสเรกตัมคือ (−1, −1) และ (5, −1) และกราฟหงายขึ้น
13. จงหาสมการของวงรี และเขียนกราฟ ของรูปซึ่งมี
    13.1 แกนเอกยาว 8 หน่วย โฟกัสอยู่ที่ (5, 1) และ (−1, 1)
    13.2 จุดยอดอยู่ที่ (−6, 3) และ (−2, 3) และโฟกัสอยู่ที่ (−5, 3) และ (−3, 3)
    13.3 จุดศูนย์กลางอยู่ที่ (1, −3) แกนเอกยาว 10 หน่วย แกนโทยาว 6 หน่วย และแกนของรูปขนานกับแกน y
    13.4 จุดศูนย์กลางอยู่ที่ (−4, −2) จุดโฟกัสจุดหนึ่งอยู่ที่ (0, −2) และค่า $e = \frac{3}{5}$
14. จงเขียนรูป และหาสมการไฮเพอร์โบลา ซึ่งมีคุณสมบัติดังนี้
    14.1 จุดศูนย์กลางอยู่ที่ (−1, 2) แกนตามขวางยาว 7 หน่วย และแกนสังยุคยาว 8 หน่วย แกนของรูปขนานกับแกน y
    14.2 จุดยอดที่ (5, 1) และ (−1, 1) และจุดโฟกัสอยู่ที่ (6, 1), (−2, 1)
    14.3 จุดยอดอยู่ที่ (−4, 2) และ (0, −2) และความชันของเส้นกำกับคือ $m = \pm\frac{1}{2}$

14.4 จุดศูนย์กลางอยู่ที่ $(-4, 2)$ จุดยอดจุดหนึ่งอยู่ที่ $(-4, -4)$ และ $e = \frac{3}{2}$

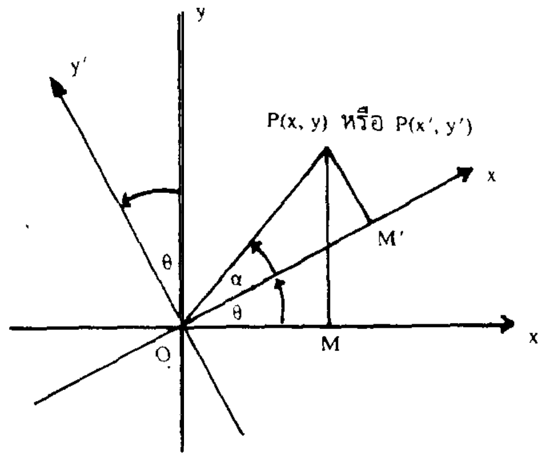
14.5 จุดศูนย์กลางอยู่ที่โฟกัสของ $y^2 = 8x$ และจุดยอดอยู่ที่ $(2, 4)$ และ $e = \frac{7}{4}$

14.6 จุดยอดจุดหนึ่งอยู่ที่ $(5, -1)$ ค่า $e = \frac{3}{2}$ และสมการเส้นกำกับคือ

$2y - \sqrt{5}x + (2 + 3\sqrt{5}) = 0$ และ $\sqrt{5}x + 2y + (2 - 3\sqrt{5}) = 0$

2.10 การหมุนแกน (Rotation of axes)

การที่แกน x และแกน y ในระนาบ หมุนรอบจุดกำเนิดไปในทิศทางทวนเข็มนาฬิกา เป็นมุม θ ไปยังแกน x' และ y' เรากล่าวว่ามีการหมุนแกนดังรูป 2.55



รูปที่ 2.55

ถ้า (x, y) เป็นพิกัดของจุด P ในระบบ xy และ (x', y') เป็นพิกัดของ P ในระบบ x'y' ถ้าหมุนแกน **x** และแกน **y** ในระนาบเป็นมุม θ ในทิศทางทวนเข็มนาฬิกา

ดังนั้น $x = OM = OP\cos(\theta+\alpha)$ ....(2.16)

$y = MP = OP\sin(\theta+\alpha)$

และ $x' = OM' = OP\cos\alpha$

$y' = M'P = OP\sin\alpha$ ....(2.17)

แทนค่า $\cos(\theta+\alpha) = \cos\theta\cos$ a-sin $\theta\sin\alpha$

และ $\sin(\theta+\alpha) = \sin\theta\cos\alpha+\cos\theta\sin\alpha$ ใน (2.16)

จะได้ $x = OP\cos\alpha\cos\theta - OP\sin\alpha\sin\theta$

$y = OP\cos a\sin\theta + OP\sin a\cos\theta$

นั่นคือ สมการการหมุนแกน คือ

$x = x'\cos\theta - y'$ sin8 ....(2.18)

$y = x'\sin\theta + y'\cos\theta$

หรือ $x' = x\cos\theta + y\sin\theta$

$y' = -x\sin\theta + y\cos\theta$

ตัวอย่างที่ 2.46 กำหนดให้เส้นโค้งมีสมการเป็น $x^2+xy+y^2 = 3$ จงหาสมการของเส้นโค้งในระนาบ $x'y'$ เมื่อแกนหมุนไปจากเดิม $\frac{\pi}{4}$

วิธีทำ $\theta = \frac{\pi}{4}$ แทนค่าใน (2.18) จะได้

$$x = \frac{1}{\sqrt{2}}x' - \frac{1}{\sqrt{2}}y'$$

$$y = \frac{1}{\sqrt{2}}x' + \frac{1}{\sqrt{2}}y'$$

แทนค่า x, y ในสมการที่กำหนดให้

$$\left(\frac{x'}{\sqrt{2}} - \frac{y'}{\sqrt{2}}\right)^2 + \left(\frac{x'}{\sqrt{2}} - \frac{y'}{\sqrt{2}}\right)\left(\frac{x'}{\sqrt{2}} + \frac{y'}{\sqrt{2}}\right) + \left(\frac{x'}{\sqrt{2}} + \frac{y'}{\sqrt{2}}\right) = 3$$

หรือ $3(x')^2+(y')^2 = 6$

$$\frac{(x')^2}{2} + \frac{(y')^2}{6} = 1$$

ซึ่งเป็นสมการของวงรี ซึ่งมีโฟกัสอยู่บนแกน y'

จากตัวอย่างนี้จะเห็นว่า ถ้าเราหมุนแกนไปเป็นมุม θ ที่เหมาะสม จะทำให้สมการในระบบ $x'y'$ ไม่มีเทอม $x'y'$

สำหรับสมการทั่วไปกำลังสอง

$$Ax^2+Bxy+Cy^2+Dx+Ey+F = 0 \qquad \text{..........(2.19)}$$

เมื่อ A, B, C เป็นค่าคงที่ไม่เป็นศูนย์พร้อมกัน เราจะแสดงให้เห็นว่าควรจะเลือก θ อย่างไร เพื่อทำให้ไม่มีเทอม $x'y'$ ในระบบ $x'y'$ และสมการทั่วไปกำลังสองอยู่ในรูปของ

$$A'x'^2+C'y'^2+D'x'+E'y+F' = 0 \qquad \text{..........(2.20)}$$

เมื่อ A', C' ไม่เป็นศูนย์พร้อมกัน

วิธีหา θ หมุนแกน x และแกน y เป็นมุม θ

แทนค่า $x = x' \cos\theta - y' \sin\theta$

$y = x' \sin\theta + y' \cos\theta$ ในสมการ (2.19)

จะได้สมการ

$$A'x'^2+B'x'y'+C'y'^2+D'x'+E'y'+F' = 0$$

เมื่อ $A' = A\cos^2\theta + B\sin\theta\cos\theta + C\sin^2\theta$

$B' = 2(C-A)\sin\theta\cos\theta + B(\cos^2\theta - \sin^2\theta)$

$C' \doteq A\sin^2\theta - B\sin\theta\cos\theta + C\cos^2\theta$

$D' = D\cos\theta + E\sin\theta$

$$E' = -D\sin\theta + E\cos\theta$$
$$F' = F$$

เราต้องการหา θ เพื่อให้ $x'y'$ หมดไป ดังนั้น ให้ $B' = 0$

นั่นคือ $2(C-A)\sin\theta\cos\theta + B(\cos^2\theta - \sin^2\theta) = 0$

$$(C-A)\sin 2\theta + B\cos 2\theta = 0$$

เมื่อ $B \neq 0$ จะได้ $\cot 2\theta = \frac{A-C}{B}, \quad 0 < \theta < \frac{\pi}{2}$

สรุปเป็นทฤษฎีได้ดังนี้

ทฤษฎีบทที่ 2.2 สมการทั่วไปกำลังสอง

$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$ เมื่อ $B \neq 0$, A และ C ไม่เป็นศูนย์พร้อมกัน จะเปลี่ยนเป็นสมการ

$A'x'^2 + C'y'^2 + D'x' + E'y' + F' = 0$ เมื่อ A', C' ไม่เป็นศูนย์พร้อมกัน โดยหมุนแกนพิกัดเป็นมุม θ เมื่อ $\cot 2\theta = \frac{A-C}{B}$

นอกจากนี้ $\sin\theta$ และ $\cos\theta$ ในสมการหมุนแกน หาได้จาก

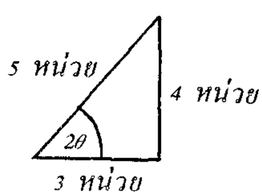
$$\sin\theta = \sqrt{\frac{1-\cos 2\theta}{2}} \quad \text{และ} \quad \cos\theta = \sqrt{\frac{1+\cos 2\theta}{2}}$$

หมายเหตุ ค่า $\cos 2\theta$ หาได้จาก $\cot 2\theta$ โดยการเขียนรูป

ตัวอย่างที่ 2.47 จงหาค่า θ และสมการใหม่ที่ไม่มีเทอม $x'y'$ ของสมการ

$$2x^2 + 8xy - 4y^2 - 7 = 0$$

วิธีทำ ในที่นี้ $A = 2, B = 8, C = -4$



$$\cot 2\theta = \frac{A-C}{B} = 2-(-4)8 = \frac{6}{8} = \frac{3}{4}$$

จากรูป $\cos 2\theta = \frac{3}{5}$

จาก $\quad \sin\theta = \sqrt{\frac{1-\cos 2\theta}{2}}, \quad \cos\theta = \sqrt{\frac{1+\cos 2\theta}{2}}$

$$\sin\theta = \sqrt{\frac{1-3/5}{2}} = \frac{1}{\sqrt{5}}$$

$$\cos\theta = \sqrt{\frac{1+3/5}{2}} = \frac{2}{\sqrt{5}}$$

$$x = x' \cos\theta - y' \sin 0 = \frac{2}{\sqrt{5}}x', -\frac{1}{\sqrt{5}}y'$$

$$y = x' \sin\theta + y' \cos\theta = \frac{1}{\sqrt{5}}x' + \frac{2}{A}y'$$

แทนค่า x, y ในสมการที่กำหนดให้

$$2\left(\frac{2}{\sqrt{5}}x' - \frac{1}{\sqrt{5}}y'\right)^2 + 8\left(\frac{2}{\sqrt{5}}x' - \frac{1}{\sqrt{5}}y'\right)\left(\frac{1}{\sqrt{5}}x' + \frac{2}{\sqrt{5}}y'\right) - 4\left(\frac{1}{\sqrt{5}}x' + \frac{2}{\sqrt{5}}y'\right)^2 = 7$$

$$4x'^2 - 6y'^2 = 7$$

$$\cot 2\theta = \frac{3}{4} = 0.75$$

$$20 = 53"$$

$$\theta = \frac{53^\circ}{2} = 26.5^\circ$$

2.11 Invariants and The Discriminant

จากสมการกำลังสอง

$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0 \qquad \text{..........(2.21)}$$

เมื่อหมุนแกนไปเป็นมุม θ จะได้สมการ

$$A'x'^2 + B'x'y' + C'y'^2 + D'x' + E'y' + F' = 0 \qquad \text{..........(2.22)}$$

เมื่อ $A' = A\cos^2\theta + B\sin\theta\cos\theta + C\sin^2\theta$

$B' = 2(C - A)\sin\theta\,\text{Cos}\,\theta + B(\cos^2\theta - \sin^2\theta)$

$C' = A\sin^2\theta - B\sin\theta\cos\theta + C\cos^2\theta$

จะได้ $A' + C' = A + C$

และ $A' - C' = A(\cos^2\theta - \sin^2\theta) \quad C(\cos^2\theta - \sin^2\theta) + B\sin 28$

หรือ $A' - C' = (A-C)\,\text{cbs}\,2\theta + B\sin 28$ ....(2.23)

$B' = -(A-C)\sin 2\theta + B\cos 28$ ....(2.24)

$(2.23)^2 + (2.24)^2;\ (A' - C')^2 + B'^2 = (A - C)^2 + B^2$

$[(A' + C')^2 - 4A'C'] + B'^2 = [(A + C)^2 - 4AC] + B^2$

แต่ $A + C = A' + C'$

ดังนั้น $B'^2 - 4A'C' = B^2 - 4AC$

พจน์ $A + C$ และ $B^2 - 4AC$ เรียกว่ามีคุณสมบัติ invariant ภายใต้การหมุนแกน ซึ่งเป็นพจน์ที่ไม่เปลี่ยนแปลงถึงแม้จะเกิดการหมุนแกน

นอกจากนั้น จะเรียกพจน์ B^2-4AC ว่า discriminant ของสมการกำลังสอง

$$\text{Discriminant} = B^2-4AC$$

จากสมการกำลังสอง เราทราบแล้วว่า ถ้า $B = 0$ จะบอกชนิดของภาคตัดกรวยได้โดยพิจารณาจากค่า AC ในทำนองเดียวกัน จาก (2.22) ถ้าเราหมุนแกนไปเป็นมุม θ ตามทฤษฎีบทที่ 2.2 จะทำให้ $B' = 0$ ได้

ดังนั้น โดยทฤษฎีที่ 2.1 ถ้ากราฟของ (2.22) เป็นภาคตัดกรวย ภาคตัดกรวยนั้นเป็นพาราโบลา เมื่อ $A'C' = 0$ เป็นวงรีเมื่อ $A'C' > 0$ และเป็นไฮเพอร์โบลา เมื่อ $A'C' < 0$

เนื่องจาก $B^2-4AC = B'^2-4A'C'$

เมื่อ $B' = 0$ ดังนั้น $B^2-4AC = -4A'C'$

เนื่องจากกราฟของ (2.21) และ (2.22) เหมือนกัน และ $B^2-4AC = -4A'C'$

ดังนั้น จึงสามารถบอกชนิดของสมการกำลังสองทั่วไปจากเทอม B^2-4AC ได้ดังนี้

ทฤษฎีบทที่ 2.3 สมการทั่วไป $Ax^2+Bxy+Cy^2+Dx+Ey+F = 0$

1) ถ้า $B^2-4AC = 0$ แล้วกราฟเป็นพาราโบลา เส้นตรง 2 เส้นขนานกัน หรือเส้นตรง 1 เส้น หรือไม่มีกราฟ

2) ถ้า $B^2-4AC < 0$ แล้วกราฟเป็นวงรี วงกลม จุด หรือไม่มีกราฟ

3) ถ้า $B^2-4AC > 0$ แล้วกราฟเป็นไฮเพอร์โบลา หรือเส้นตรง 2 เส้นตัดกัน

ตัวอย่างที่ 2.48 จงทำสมการให้อยู่ในรูปง่ายขึ้นโดยการหมุนแกน และเขียนกราฟของสมการ

$$6x^2-12xy+y^2 = 30$$

วิธีทำ จากสมการทั่วไป $Ax^2+Bxy+Cy^2+Dx+Ey+F = 0$

ในที่นี้ $A = 6,\ B = -12,\ C = 1,\ F = 30$

$$B^2-4AC = 144-24 > 0$$

สมการควรจะเป็นไฮเพอร์โบลา

ถ้าหมุนแกนไปเป็นมุม θ

$$\cot 2\theta = \frac{A-C}{B} = \frac{6-1}{-12} = \frac{-5}{12}$$

$0 < 2\theta < \pi$

ดังนั้น $\cos 2\theta = \dfrac{-5}{13}$

เนื่องจาก $0 < \theta < \dfrac{\pi}{2}$

และจาก $\sin\theta = \sqrt{\dfrac{1-\cos 2\theta}{2}}$ และ $\cos\theta = \sqrt{\dfrac{1+\cos 2\theta}{2}}$

จะได้ $\sin\theta = \frac{3}{\sqrt{13}}, \cos\theta = \frac{2}{\sqrt{13}}$

จาก $x = x'\cos\theta - y'\sin\theta = \frac{2}{\sqrt{13}}x' - \frac{3}{\sqrt{13}}y'$

$y = x'\sin\theta + y'\cos\theta = \frac{3}{\sqrt{13}}x' + \frac{2}{\sqrt{13}}y'$

แทนค่า x, y ในสมการที่กำหนดให้

$$\frac{6}{13}(2x'-3y')^2 - \frac{12}{13}(2x'-3y')(3x'+2y') + \frac{1}{13}(3x'+2y')^2 = 30$$

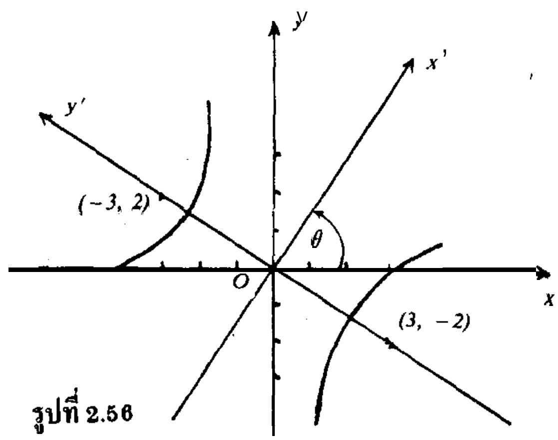
$$-39x'^2 + 130y'^2 = 390$$

$$\frac{y'^2}{3} - \frac{x'^2}{10} = 1$$

ดังนั้น กราฟเป็นไฮเพอร์โบลา ครึ่งแกนตามขวาง $= \sqrt{3}$

ครึ่งแกนสังยุค $= \sqrt{10}$

เมื่อเทียบกับแกนใหม่ พิกัดของจุดยอดคือ $(0, \sqrt{3}), (0, -\sqrt{3})$



รูปที่ 2.56

$c = \sqrt{a^2+b^2} = \sqrt{3+10} = \sqrt{13}$

โฟกัสคือ $(0, \sqrt{13}), (0, -\sqrt{13})$

โดยใช้สูตร $x = x'\cos\theta - y'\sin\theta$

$y = x'\sin\theta + y'\cos\theta$

จุดยอดเทียบกับแกนเดิม คือ แทนค่า $x' = 0$ และ $y' = \sqrt{3}$ จะได้จุดยอดที่

$$\left(\frac{-3\sqrt{3}}{\sqrt{13}}, \frac{2\sqrt{3}}{\sqrt{13}}\right)$$

และแทน $x' = 0, y' = -\sqrt{3}$ จะได้จุดยอดที่ $\left(\frac{3\sqrt{3}}{\sqrt{13}}, \frac{-2\sqrt{3}}{\sqrt{13}}\right)$

จุดโฟไซเทียบกับแกนเดิมคือ $(-3, 2)$ และ $(3, -2)$

ตัวอย่างที่ 2.49 จงพิจารณาว่าสมการ $x^2-4xy+4y^2-5x+10y-6 = 0$ มีกราฟเป็นรูปอะไร

วิธีทำ ในที่นี้ $A = 1, B = -4, C = 4$

$$B^2-4AC = 16-16 = 0$$

กราฟอาจจะเป็นพาราโบลาหรือเส้นตรง

วิธีที่ 1 $(x^2-4xy+4y^2)-5(x-2y)-6 = 0$

$$(x-2y)^2-5(x-2y)-6 = 0$$

$$\{(x-2y)-6\}\{(x-2y)+1\} = 0$$

กราฟจะเป็นเส้นตรง 2 เส้นขนานกัน มีสมการเป็น

$$x-2y-6 = 0$$

และ $x-2y+1 = 0$

วิธีที่ 2 โดยการหมุนแกนไปเป็นมุม θ

$$\cot 2\theta = \frac{A-C}{B} = \frac{1-4}{-4} = \frac{3}{4}$$

$$\cos 2\theta = \frac{3}{5}$$

$$\sin \theta = \sqrt{\frac{1-\cos 2\theta}{2}} = \frac{1}{\sqrt{5}}$$

$$\cos 2\theta = \sqrt{\frac{1+\cos 2\theta}{2}} = \frac{2}{\sqrt{5}}$$

ดังนั้น $x = \frac{2}{\sqrt{5}}x' - \frac{y'}{\sqrt{5}}$

$$y = \frac{1}{\sqrt{5}} + \frac{2}{\sqrt{5}}y'$$

แทนค่า x, y ในสมการ จะได้

$$\left(\frac{2}{\sqrt{5}}x' - \frac{y'}{\sqrt{5}}\right)^2 - 4\left(\frac{2}{\sqrt{5}}x' - \frac{y'}{\sqrt{5}}\right)\left(\frac{1}{\sqrt{5}}x' + \frac{2}{\sqrt{5}}y'\right) + 4\left(\frac{1}{\sqrt{5}}x' + \frac{2}{\sqrt{5}}y'\right)^2 - 5\left(\frac{2}{\sqrt{5}}x' - \frac{y'}{\sqrt{5}}\right) + 10\left(\frac{1}{\sqrt{5}}x' + \frac{2}{\sqrt{5}}y'\right) - 6 =$$

$$5y'^2 + 5\sqrt{5}y' - 6 = 0$$

$$(\sqrt{5}y' + 6)(\sqrt{5}y' \quad 1) = 0$$

กราฟคือเส้นตรง 2 เส้น $y' = \frac{-6}{\sqrt{5}}$ และ $y' = -\frac{1}{\sqrt{5}}$

$$y' = -x \sin \theta + y \cos \theta$$

ดังนั้น $\frac{-6}{\sqrt{5}} = \frac{-x}{\sqrt{5}}+\frac{2}{\sqrt{5}}y$ หรือ $x-2y-6 = 0$

และ $\frac{1}{\sqrt{5}} = \frac{-x}{\sqrt{5}}+\frac{2}{\sqrt{5}}y$ หรือ $x-2y+1 = 0$

ตัวอย่างที่ 2.50 จงวิเคราะห์และเขียนกราฟของสมการ $x^2+4xy+4y^2-5x-6 = 0$

วิธีทำ $B^2-4AC = 0$

ดังนั้น กราฟเป็นพาราโบลา หรือเส้นตรง

โดยการหมุนแกนไปเป็นมุม θ ซึ่งมี

$$\cot 2\theta = \frac{A-C}{B} = \frac{1-4}{4} = -\frac{3}{4}$$

ดังนั้น 2θ อยู่ในควอดรันท์ 2

$$\cos 2\theta = -\frac{3}{5}$$

$$\sin \theta = \sqrt{\frac{1-\cos 2\theta}{2}} = \frac{2}{\sqrt{5}}$$

$$\cos \theta = \sqrt{\frac{1+\cos 2\theta}{2}} = \frac{1}{\sqrt{5}}$$

$$x = \frac{1}{\sqrt{5}}x' - \frac{2}{\sqrt{5}}y' = \frac{x'-2y'}{\sqrt{5}}$$

$$y = \frac{2}{\sqrt{5}}x' + \frac{1}{\sqrt{5}}y' = \frac{2x'+y'}{\sqrt{5}}$$

แทนค่า x, y ในสมการที่กำหนดให้

$$\frac{1}{5}(x'-2y')^2+\frac{4}{5}(x'-2y')(2x'+y')+\frac{4}{5}(2x'+y')^2-\frac{5}{\sqrt{5}}(x'-2y') = 6$$

$$5x'^2-\sqrt{5}x'+2y' = 6$$

$$5\left(x'^2-\frac{1}{\sqrt{5}}x'\right) = 6-2\sqrt{5}y'$$

$$5\left(x'-\frac{1}{2\sqrt{5}}\right)^2 = 6-2\sqrt{5}y'+\frac{1}{4}$$

$$= \frac{25}{4}-2\sqrt{5}y'$$

$$= -2\sqrt{5}\left(y'-\frac{5\sqrt{5}}{8}\right)$$

$$\left(x'-\frac{1}{2\sqrt{5}}\right)^2 = \frac{-2}{\sqrt{5}}\left(y'-\frac{5\sqrt{5}}{8}\right)$$

โดยการย้ายแกน ให้ $x'' = x' - \frac{1}{2\sqrt{5}}$

$$y'' = y' - \frac{5\sqrt{5}}{8}$$

ดังนั้น จะได้สมการพาราโบลา $x''^2 = \frac{-2}{\sqrt{5}}y''$ ในระบบ $x''y''$

โดยมี $a = \frac{-1}{2\sqrt{5}}$ แกนของพาราโบลาคือแกน y''

จุดยอดอยู่ที่จุดกำเนิด โฟกัสคือ $\left(0, \frac{-1}{2\sqrt{5}}\right)$

สมการไดเรกตริกซ์ คือ $y'' = \frac{1}{2\sqrt{5}}$

ในระบบ $x'y'$

หา x', y' ได้จาก

$$x' = x'' + h$$

$$y' = y'' + k$$

จุดยอด คือ $\left(0 + \frac{1}{2\sqrt{5}}, 0 + \frac{5\sqrt{5}}{8}\right)$ หรือ $\left(\frac{1}{2\sqrt{5}}, \frac{5\sqrt{5}}{8}\right)$

โฟกัส คือ $\left(0 + \frac{1}{2\sqrt{5}}, \frac{-1}{2\sqrt{5}} + \frac{5\sqrt{5}}{7}\right)$ หรือ $\left(\frac{1}{2\sqrt{5}}, \frac{21}{8\sqrt{5}}\right)$

สมการไดเรกตริกซ์ คือ $y' = \frac{8}{2\sqrt{5}} + \frac{1}{2\sqrt{5}} = \frac{1}{\sqrt{5}}$

ในระบบ xy จาก $x = x' \cos\theta - y' \sin\theta$

$$y = x' \sin\theta + y' \cos\theta$$

จุดยอด $x' = \frac{1}{2\sqrt{5}}$, $y' = \frac{5\sqrt{5}}{8}$, $\sin\theta = \frac{2}{\sqrt{5}}$, $\cos\theta = \frac{1}{\sqrt{5}}$

$$x = \left(\frac{1}{2\sqrt{5}}\right)\left(\frac{1}{\sqrt{5}}\right) - \left(\frac{5\sqrt{5}}{8}\right)\left(\frac{2}{\sqrt{5}}\right) = \frac{-23}{20}$$

$$y = \left(\frac{1}{2\sqrt{5}}\right)\left(\frac{2}{\sqrt{5}}\right) + \left(\frac{5\sqrt{5}}{8}\right)\left(\frac{1}{\sqrt{5}}\right) = \frac{33}{40}$$

จุดยอดคือ $\left(-\frac{23}{20}, \frac{33}{40}\right)$

จุดโฟกัส $x' = \frac{1}{2\sqrt{5}}$, $y' = \frac{21}{8\sqrt{5}}$

$$x = \left(\frac{1}{2\sqrt{5}}\right)\left(\frac{1}{\sqrt{5}}\right) - \left(\frac{21}{8\sqrt{5}}\right)\left(\frac{2}{\sqrt{5}}\right) = -\frac{19}{20}$$

$$y = \left(\frac{1}{2\sqrt{5}}\right)\left(\frac{2}{\sqrt{5}}\right) + \left(\frac{21}{8\sqrt{5}}\right)\left(\frac{1}{\sqrt{5}}\right) = \frac{29}{40}$$

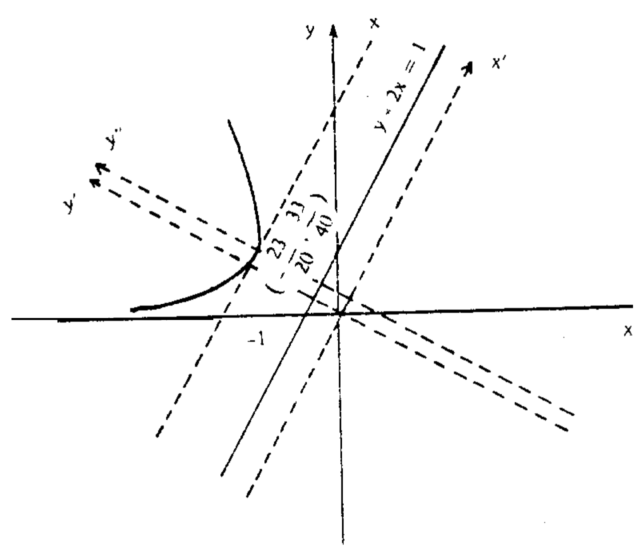
โฟกัส คือ $\left(-\frac{19}{20}, \frac{29}{40}\right)$

สมการไดเรกตริกซ์หาได้จาก $y' = -x \sin\theta + y\cos\theta$

$$\frac{1}{\sqrt{5}} = \frac{-2x}{\sqrt{5}} + \frac{y}{\sqrt{5}}$$

$$1 = -2x + y$$

สมการไดเรกตริกซ์ คือ $y - 2x = 1$



รูปที่ 2.57

แบบฝึกหัด 2.7

1. จงหาสมการใหม่ในระบบ $x'y'$ เมื่อหมุนแกน x และแกน y ไปเป็นมุมที่กำหนดให้

   1.1 $x^2 - y^2 = a^2$, $45°$

   1.2 $x^2 + 2\sqrt{3}xy - y^2 = 2$, $30°$

จงหาสมการและเขียนกราฟของเส้นโค้งในระบบ $x'y'$ โดยการหมุนแกน x และแกน y ของสมการในระบบ xy ถ้ากราฟเป็นพาราโบลา จงหาพิกัดของโฟกัส และสมการไดเรกตริกซ์ ถ้ากราฟเป็นวงรีหรือไฮเพอร์โบลา จงหาพิกัดของจุดยอด ถ้ากราฟเป็นเส้นตรง จงหาสมการเส้นตรงในระบบ xy

2. $xy = 2$
3. $x^2 + xy + y^2 = 1$
4. $x^2 + 4xy + 4y^2 = 9$
5. $x^2 - 3xy + y^2 = 5$
6. $x^2 + 2xy + y^2 - 8x + 8y = 0$
7. $x^2 - 4xy + 4y^2 - 40x - 20y = 0$

จงบอกชนิดของสมการ โดยการหมุนและย้ายแกน จงเขียนกราฟ ถ้ากราฟเป็นพาราโบลา จงหาโฟกัส จุดยอด และสมการไดเรกตริกซ์ ถ้ากราฟเป็นวงรี หรือไฮเพอร์โบลา จงหาพิกัดของโฟกัส และสมการไดเรกตริกซ์ ถ้ากราฟเป็นเส้นตรง จงหาสมการเส้นตรง

8. $4x^2 - 4xy + y^2 - 6x + 3y + 2 = 0$
9. $4x^2 - 12xy + 9y^2 - 52x + 26y + 81 = 0$
10. $x^2 + y^2 + xy + x - y = 3$
11. $12x^2 + 24xy + 19y^2 - 12x - 40y + 31 = 0$
12. $2x^2 - y^2 + 4xy - 2x + 3y = 6$