แบบฝึกหัด 1.6

จงหาค่าอินทิกรัลต่อไปนี้

1. $\int x \sin x \, dx$
2. $\int xe^x \, dx$
3. $\int x^2 \ell n \, x \, dx$
4. $\int x\sqrt{1+x} \, dx$
5. $\int \sec^3 x \, dx$
6. $\int x^2 \sin x \, dx$
7. $\int x^3 e^{2x} \, dx$
8. $\int x \cos x \, dx$
9. $\int x \sec^2 3x \, dx$
10. $\int \arccos 2x \, dx$
11. $\int \arctan x \, dx$
12. $\int \frac{xe^x}{(1+x)^2} dx$
13. $\int x \arctan x \, dx$
14. $\int x^2 e^{-3x} \, dx$
15. $\int x^3 \sin x \, dx$
16. $\int x \arcsin x^2 \, dx$
17. $\int \sin x \sin 3x \, dx$
18. $\int \sin (\ell nx) \, dx$
19. $\int e^{ax} \cos bx \, dx$
20. $\int e^{ax} \sin bx \, dx$

จงแสดงวิธีการกระจายสูตรลดรูป (reduction formula) ต่อไปนี้

21. $\int u^n e^{au} \, du = \frac{1}{a} u^n e^{au} - \frac{n}{a} \int u^{n-1} e^{au} \, du$

22. $\int u^n \cos bu \, du = \frac{u^n}{b} \sin bu - \frac{n}{b} \int u^{n-1} \sin bu \, du$

จงหาค่าอินทิกรัลจำกัดเขตต่อไปนี้

23. $\int_1^e \ell n \, x \, dx$

24. $\int_0^{\frac{\pi}{3}} x^2 \sin 3x \, dx$

25. $\int_0^{\sqrt{2}} x^3 e^{x^2} \, dx$

1.7 การอินทิเกรตฟังก์ชันตรรกยะของฟังก์ชันตรีโกณ

ในตอนนี้จะกล่าวถึงการหาค่า $\int R(\sin u, \cos u)\,dx$ เมื่อ $R(\sin u, \cos u)$ เป็นฟังก์ชันตรรกยะของ $\sin u$ และ $\cos u$ โดยที่ u เป็นฟังก์ชันของตัวแปร x ซึ่งมีวิธีการดังต่อไปนี้

(1) ให้ $$z = \tan\frac{x}{2}$$

จะได้ $\sin x, \cos x$ และ $\frac{dz}{dx}$ เป็นฟังก์ชันเศษส่วนของ z

เพราะว่า
$$\begin{aligned} dz &= \frac{1}{2}\sec^2\frac{x}{2}\,dx \\ &= \frac{1}{2}\left(\tan^2\frac{x}{2}+1\right)dx \\ &= \frac{z^2+1}{2}\,dx \end{aligned}$$

(2) ดังนั้น $$dx = \frac{2}{z^2+1}\,dz$$

สำหรับ $\cos x$ จะได้ว่า

$$\begin{aligned} \cos x &= \cos^2\frac{x}{2} - \sin^2\frac{x}{2} \\ &= 2\cos^2\frac{x}{2} - 1 \\ &= \frac{2}{\sec^2\frac{x}{2}} - 1 \\ &= \frac{2}{1+\tan^2\frac{x}{2}} - 1 \\ &= \frac{2}{1+z^2} - 1 \\ &= \frac{1-z^2}{1+z^2} \end{aligned}$$

(3) ดังนั้น $$\cos x = \frac{1-z^2}{1+z^2}$$

สำหรับ $\sin x$ จะได้ว่า

$$\begin{aligned} \sin x &= 2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2} \\ &= 2\frac{\sin\frac{x}{2}}{\cos\frac{x}{2}}\cos^2\frac{x}{2} \end{aligned}$$

$$= 2\tan\frac{x}{2}\cdot\frac{1}{\sec^2\frac{x}{2}}$$

$$= 2\tan\frac{x}{2}\cdot\frac{1}{1+\tan^2\frac{x}{2}}$$

$$= \frac{2z}{1+z^2}$$

(4) ดังนั้น $\quad \sin x = \dfrac{2z}{1+z^2}$

เมื่อนำ (2), (3) และ (4) ไปแทนในตัวถูกอินทิเกรตที่เป็นฟังก์ชันตรรกยะของ $\sin x$, $\cos x$ แล้วจะได้ตัวถูกอินทิเกรตเป็นฟังก์ชันตรรกยะของตัวแปร z เพียงตัวเดียวซึ่งสะดวกในการอินทิเกรตต่อไป

พิจารณาตัวอย่างการอินทิเกรตต่อไปนี้

ตัวอย่างที่ 1.53 จงหาค่าของ $\int \dfrac{dx}{2+\sin x}$

วิธีทำ โดยการสมมุติ $z = \tan\dfrac{x}{2}$ และใช้ผลที่ได้คือ $\sin x = \dfrac{2z}{1+z^2}$

$\cos x = \dfrac{1-z^2}{1+z^2}$ เพื่อเปลี่ยนตัวแปรในรูป z

ให้ $\quad z = \tan\dfrac{x}{2}$

ดังนั้น

$$\int\frac{dx}{2+\sin x} = \int\frac{\frac{2dz}{1+z^2}}{2+\frac{2z}{1+z^2}}$$

$$= \int\frac{dz}{z^2+z+1}$$

$$= \int\frac{dz}{\left(z+\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2}$$

$$= \frac{2}{\sqrt{3}}\tan^{-1}\frac{2z+1}{\sqrt{3}}+C$$

$$= \frac{2}{\sqrt{3}}\tan^{-1}\left(\frac{1+2\tan\frac{x}{2}}{\sqrt{3}}\right)+C$$

ตัวอย่างที่ 1.54 จงหาค่าของ $\int \frac{1}{3\sin x + 4\cos x}\,dx$

วิธีทำ โดยการสมมุติ $z = \tan\frac{x}{2}$ และใช้ผลที่ได้คือ $\sin x = \frac{2z}{1+z^2}$ $\cos x = \frac{1-z^2}{1+z^2}$ เพื่อเปลี่ยนตัวแปรในรูป z

ให้ $$z = \tan\frac{x}{2},$$

$$dx = \frac{2}{1+z^2}dz$$

ดังนั้น $$\int \frac{1}{3\sin x + 4\cos x}\,dx = \int \frac{1}{3\left(\frac{2z}{1+z^2}\right) + 4\left(\frac{1-z^2}{1+z^2}\right)} \frac{2}{1+z^2}dz$$

$$= \int \frac{2dz}{6z+4-4z^2}$$

$$= -\int \frac{dx}{2z^2-3z-2}$$

$$= -\int \frac{dz}{(2z+1)(z-2)}$$

ใช้วิธีการแยกเศษส่วนย่อยจะได้ $$= -\int\left(\frac{-2/5}{2z+1} + \frac{1/5}{z-2}\right)dz$$

$$= \frac{1}{5}\ln|2z+1| - \frac{1}{5}\ln|z-2| + C$$

$$= \frac{1}{5}\ln\left|2\tan\frac{x}{2}+1\right| - \frac{1}{5}\ln\left|\tan\frac{x}{2}-2\right| + C$$

ตัวอย่างที่ 1.55 จงหาค่าของ $\int \frac{a\sin x\,dx}{b + c\sin x}$, $b > c > 0$

วิธีทำ ทำอาศัยวิธีการเช่นเดียวกันกับตัวอย่างที่ 1.53, 1.54

ให้ $$z = \tan\frac{x}{2}$$

ดังนั้น $dx = \frac{2}{1+z^2}dz$, $\cos x = \frac{1-z^2}{1+z^2}$ และ $\sin x = \frac{2z}{1+z^2}$

เพราะฉะนั้น $$\int \frac{a\sin x\,dx}{b+c\sin x} = a\int \frac{\left(\frac{2z}{1+z^2}\right)\frac{2dz}{1+z^2}}{b + c\frac{2z}{1+z^2}}$$

$$= 4a\int \frac{zdz}{(1+z^2)(b+2cz+bz^2)}$$

โดยใช้วิธีการแยกเศษส่วนย่อย จะได้ว่า

$$= \frac{2a}{c}\int\frac{dz}{1+z^2} - \frac{2ab}{c}\int\frac{dz}{bz^2+2cz+b}$$

$$= \frac{2a}{c}\tan^{-1}z - \frac{2a}{c}\int\frac{dz}{\left(z+\frac{c}{b}\right)^2+1-\frac{c^2}{b^2}}$$

$$= \frac{2a}{c}\tan^{-1}z - \frac{2a}{c}\frac{1}{\sqrt{1-\frac{c^2}{b^2}}}\tan^{-1}\frac{z+c/b}{\sqrt{1-\frac{c^2}{b^2}}} + C$$

$$= \frac{a}{c}x - \frac{2ab}{c\sqrt{b^2-c^2}}\tan^{-1}\left(\frac{c+b\tan\frac{x}{2}}{\sqrt{b^2-c^2}}\right) + C$$

หมายเหตุ โจทย์อินทิเกรตแต่ละข้ออาจมีวิธีการแก้ปัญหาได้หลายวิธี แต่อย่างไรก็ตาม ฟังก์ชันบางฟังก์ชันก็ไม่สามารถหาค่าอินทิกรัลได้ซึ่งการอินทิเกรตฟังก์ชันเหล่านี้ ถ้าเป็นอินทิกรัลจำกัดเขตจะได้ค่าประมาณซึ่งอาจแก้ปัญหาได้โดยการเปลี่ยนฟังก์ชัน ในรูปอนุกรมยกกำลัง (power series) ซึ่งจะหาดูได้จากแคลคูลัสขั้นสูง

แบบฝึกหัด 1.7

จงหาค่าอินทิกรัลต่อไปนี้

1. $\int \frac{dx}{\sin x + \tan x}$
2. $\int \frac{dx}{1 + \sin 6x + \cos 6x}$
3. $\int \frac{d\theta}{5 + 4\cos 2\theta}$
4. $\int \frac{dx}{4\cos x - 3\sin x}$
5. $\int \frac{dx}{2 + 2\sin x + \cos x}$
6. $\int \frac{d\theta}{5\sec\theta - 3}$
7. $\int \frac{2 - \cos\theta}{2 + \cos\theta}\, d\theta$
8. $\int \frac{d\theta}{\cos\theta - 3\sin\theta + 3}$
9. $\int \frac{\sec\theta\, d\theta}{3\sec\theta + 2\tan\theta + 2}$
10. $\int \frac{\sin x\, dx}{\sin x + \cos x}$

1.8 อินทิกรัลไม่ตรงแบบ (Improper Integral)

ในนิยามของอินทิกรัลจำกัดเขต กล่าวว่า อินทิกรัล

$$\int_a^b f(x)\,dx$$

หาค่าได้เมื่อ f(x) เป็นฟังก์ชันที่มีขอบเขตบนช่วงปิด [a, b] หรือ กล่าวอีกนัยหนึ่ง คือ f(x) ต่อเนื่องสำหรับทุก ๆ ค่า x เมื่อ x เป็นสมาชิกของ [a, b] แต่ถ้า f(x) ไม่มีขอบเขต แล้วเรียก

$$\int_a^b f(x)\,dx$$

ว่าอินทิกรัลไม่ตรงแบบ (improper integrals)

นิยาม 1.1 $\int_a^b f(x)\,dx$ เรียกว่า อินทิกรัลไม่ตรงแบบ (improper integral) ก็ต่อเมื่อ

(1) ตัวถูกอินทิเกรต f(x) มีจุดที่ไม่ต่อเนื่อง อย่างน้อย 1 ชุด บน [a, b]

หรือ (2) ลิมิตของการอินทิเกรตเป็นอนันต์

(1) ตัวถูกอินทิเกรตไม่ต่อเนื่อง (discontinuons integration)

กำหนด f(x) เป็นฟังก์ชันนิยามบน [a, b] แบ่ง f(x) ที่ไม่ต่อเนื่องออกได้เป็น 3 แบบ ด้วยกัน คือ

(1) ไม่ต่อเนื่องที่ $x = a$

(2) ไม่ต่อเนื่องที่ $x = b$

(3) ไม่ต่อเนื่องที่ $x = c$ เมื่อ $a<c<b$

ซึ่งจะนิยามอินทิกรัลไม่ตรงแบบ แบบต่าง ๆ ดังนี้

นิยาม 1.2 ถ้า f(x) ต่อเนื่องสำหรับทุก ๆ x ซึ่ง $a \leqslant x < b$ แต่ไม่ต่อเนื่องที่ $x = b$ แล้ว นิยามอินทิกรัลไม่ตรงแบบ

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{\epsilon \to 0^+} \int_a^{b-\epsilon} f(x)\,dx$$

หมายเหตุ อินทิกรัลหาค่าได้ก็ต่อเมื่อลิมิตหาค่าได้ ถ้าอินทิกรัลหาค่าได้เรียกว่า อินทิกรัลลู่เข้า (converge) แต่ถ้าหาค่าไม่ได้ เรียกว่า อินทิกรัลลู่ออก (diverge)

นิยาม 1.3 ถ้า f(x) ต่อเนื่องสำหรับทุก ๆ x ซึ่ง $a < x \leqslant b$ แต่ไปต่อเนื่องที่ $x = a$ แล้ว นิยามอินทิกรัลไม่ตรงแบบ

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{\epsilon \to 0^+} \int_{a+\epsilon}^{b} f(x)\,dx$$

นิยาม 1.4 ถ้า f(x) ต่อเนื่องสำหรับทุก ๆ ค่าบนช่องปิด [a, b] ยกเว้นที่ $x = c, a<c<b$ แล้วนิยามอินทิกรัลไม่ตรงแบบ

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{\epsilon_1 \to 0^+}\int_a^{c-\epsilon_1} f(x)\,dx + \lim_{\epsilon_2 \to 0^+}\int_{c+\epsilon_2}^{b} f(x)\,dx$$

ในกรณีนี้อินทิกรัลลู่เข้าเมื่อลิมิตหาค่าได้ทั้ง 2 พจน์

ตัวอย่างที่ 1.56 จงหาค่าของ $\int_0^3 \frac{dx}{\sqrt{9-x^2}}$

วิธีทำ อินทิกรัลแบบนี้จะใช้สูตรหาค่าโดยตรงเลยไม่ได้ เพราะว่าตัวถูกอินทิเกรตไม่ต่อเนื่องที่ $x = 3$ ดังนั้นจึงใช้อินทิกรัลไม่ตรงแบบ ในรูป

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{\epsilon \to 0^+}\int_a^{b-\epsilon} f(x)\,dx \text{ ดังนั้น}$$

$$\begin{aligned}
\int_0^3 \frac{dx}{\sqrt{9-x^2}} &= \lim_{\epsilon \to 0^+}\int_0^{3-\epsilon} \frac{dx}{\sqrt{9-x^2}} \\
&= \lim_{\epsilon \to 0^+} \arcsin \frac{x}{3}\Big|_0^{3-\epsilon} \\
&= \lim_{\epsilon \to 0^+}\left(\arcsin \frac{3-\epsilon}{3} - 0\right) \\
&= \lim_{\epsilon \to 0^+} \arcsin \frac{3-\epsilon}{3} \\
&= \arcsin 1 \\
&\frac{\pi}{2}
\end{aligned}$$

เพราะฉะนั้น $\int_0^3 \frac{dx}{\sqrt{9-x^2}}$ หาค่าได้ และมีค่าเท่ากับ $\frac{\pi}{2}$

ตัวอย่างที่ 1.57 จงหาค่าของ $\int_0^2 \frac{dx}{2-x}$

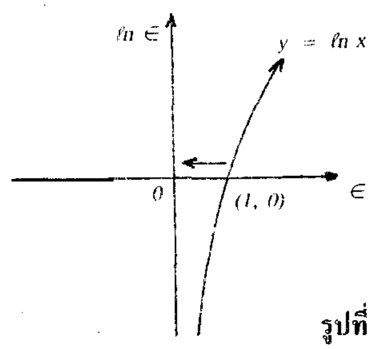
วิธีทำ ตัวถูกอินทิเกรตไม่ต่อเนื่องที่ $x = 2$ ใช้วิธีการเดียวกันกับตัวอย่างที่ 1.56

$$\int_0^2 \frac{dx}{2-x} = \lim_{\epsilon \to 0^+} \int_0^{2-\epsilon} \frac{dx}{2-x}$$

$$= -\lim_{\in \to 0^+} \int_0^{2-\in} \frac{1}{2-x} d(2-x)$$

$$= -\lim_{\in \to 0^+} \ell n|2-x| \Big|_0^{2-\in}$$

$$= -\lim_{\in \to 0^+} (\ell n \in - \ell n\ 2)$$



รูปที่ 1.1

จากรูปที่ 1.1 เมื่อ $\in \to 0^+$ $\ell n \in \to -\infty$

ดังนั้น $\int_0^2 \frac{dx}{2-x}$ ลู่ออก (diverge)

ตัวอย่างที่ 1.58 พิจารณาดูว่า $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}} dx$ หาค่าได้หรือไม่ ถ้าหาค่าได้จะมีค่าเท่าใด

วิธีทำ ตัวถูกอินทิเกรตไม่ต่อเนื่องที่ $x = 0$ ดังนั้นต้องใช้วิธีการของอินทิกรัลไม่ตรงแบบในรูป

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{\in \to 0^+} \int_{a+\in}^b f(x)\,dx$$

ดังนั้น
$$\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}} dx = \lim_{\in \to 0^+} \int_{\in}^1 \frac{1}{\sqrt{x}} dx$$

$$= \lim_{\in \to 0^+} 2\sqrt{x} \Big|_{\in}^1$$

$$= \lim_{\in \to 0^+} (2 - 2\sqrt{\in})$$

$$= 2$$

เพราะฉะนั้น $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}} dx$ ลู่เข้า (converge) และมีค่าเท่ากับ 2

ตัวอย่างที่ 1.59 จงแสดงว่า $\int_0^4 \frac{1}{(x-1)^2}dx$ ลู่ออก (diverge)

วิธีทำ ตัวถูกอินทิเกรตไม่ต่อเนื่องที่ $x = 1$ ซึ่งเป็นค่าที่อยู่ระหว่าง 0 กับ 4 ดังนั้นจึงต้องแบ่งการอินทิเกรตออกเป็น 2 ตอนคือ จาก 0 ถึง 1 กับจาก 1 ถึง 4 และใช้วิธีการของอินทิกรัลไม่ตรงแบบ ตามแบบ

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{\epsilon_1 \to 0^+}\int_a^{c-\epsilon_1} f(x)\,dx + \lim_{\epsilon_2 \to 0^+}\int_{c+\epsilon_1}^{b} f(x)\,dx$$

ดังนั้นจะได้ว่า

$$\int_0^4 \frac{1}{(x-1)^2}dx = \lim_{\epsilon_1 \to 0^+}\int_a^{1-\epsilon_1} \frac{1}{(x-1)^2}dx + \lim_{\epsilon_2 \to 0^+}\int_{1+\epsilon_2}^{4} \frac{1}{(x-1)^2}dx$$

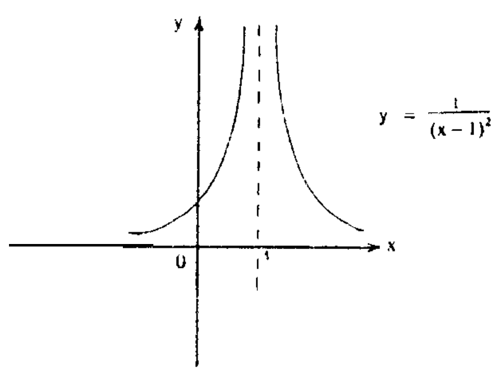
$$= \lim_{\epsilon_1 \to 0^+}\left(-\frac{1}{(x-1)}\right)\Bigg|_0^{1-\epsilon_1} + \lim_{\epsilon_2 \to 0^+}\left(-\frac{1}{(x-1)}\right)\Bigg|_{1-\epsilon_2}^{4}$$

$$= \lim_{\epsilon_1 \to 0^+}\left(\frac{1}{\epsilon_1}-1\right) + \lim_{\epsilon_2 \to 0^+}\left(-\frac{1}{3}+\frac{1}{\epsilon_2}\right)$$

$\lim_{\epsilon_1 \to 0^+}\left(\frac{1}{\epsilon_1}-1\right)$ หาค่าไม่ได้ $(+\infty)$ และ

แต่ $\lim_{\epsilon_2 \to 0^+}\left(-\frac{1}{3}+\frac{1}{\epsilon_2}\right)$ หาค่าไม่ได้ $(+\infty)$

ดังนั้น $\int_0^4 \frac{1}{(x-1)^2}dx$ ลู่ออก (diverge)



รูปที่ 1.2

ตัวอย่างที่ 1.60 จงหาค่าของ $\int_0^4 \frac{dx}{\sqrt[3]{x-1}}$

วิธีทำ เป็นอินทิกรัลไม่ตรงแบบ แบบเดียวกับตัวอย่างที่ 1.59 ใช้รูปแบบ

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{\epsilon_1 \to 0^+} \int_a^{c-\epsilon_1} f(x)\,dx + \lim_{\epsilon_2 \to 0^+} \int_{c+\epsilon_2}^{b} f(x)\,dx$$

เพราะว่าตัวถูกอินทิเกรตไม่ต่อเนื่องที่ $x = 1$

เพราะฉะนั้น

$$\int_0^4 \frac{dx}{\sqrt[3]{x-1}} = \lim_{\epsilon_1 \to 0^+} \int_0^{1-\epsilon_1} \frac{dx}{\sqrt[3]{x-1}} + \lim_{\epsilon_2 \to 0^+} \int_{1+\epsilon_2}^{4} \frac{dx}{\sqrt[3]{x-1}}$$

$$= \lim_{\epsilon_1 \to 0^+} \frac{3}{2}(x-1)^{2/3}\Big|_0^{1-\epsilon_1} + \lim_{\epsilon_2 \to 0^+} \frac{3}{2}(x-1)^{2/3}\Big|_{1+\epsilon_2}^{4}$$

$$= \lim_{\epsilon_1 \to 0^+} \frac{3}{2}\left((-\epsilon_1)^{2/3} - 1\right) + \lim_{\epsilon_2 \to 0^+} \frac{3}{2}\left(\sqrt[3]{9} - (\epsilon_2)^{2/3}\right)$$

$$= -\frac{3}{2} + \frac{3}{2}\sqrt[3]{9}$$

$$= \frac{3}{2}(\sqrt[3]{9} - 1)$$

เพราะฉะนั้น

$$\int_0^4 \frac{dx}{\sqrt[3]{x-1}} = \frac{3}{2}(\sqrt[3]{9} - 1)$$

(2) ลิมิตของการอินทิเกรตเป็นอนันต์ (infinite limits of integration)

ลักษณะของอินทิกรัลที่มีลิมิตเป็นอนันต์มีพิจารณาอยู่ 3 แบบ คือ

(1) ลิมิตบนเป็นอนันต์ : $\int_a^{\infty} f(x)\,dx$

(2) ลิมิตล่างเป็นอนันต์ : $\int_{-\infty}^{b} f(x)\,dx$

(3) ลิมิตบน-ล่างเป็นอนันต์ : $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx$

ซึ่งจะนิยามอินทิกรัลไม่ตรงแบบ เมื่อลิมิตของอินทิกรัลเป็นอนันต์ได้ดังนี้

นิยาม 1.5 ถ้า $f(x)$ ต่อเนื่องบนช่วง $a \leq x \leq b$ แล้วนิยาม

$$\int_a^{\infty} f(x)\,dx = \lim_{b \to \infty} \int_a^b f(x)\,dx$$

นิยาม 1.6 ถ้า f(x) ต่อเนื่องบนช่วง $a \leqslant x \leqslant b$ แล้วนิยาม

$$\int_{-\infty}^{b} f(x)\,dx = \lim_{a \to -\infty} \int_{a}^{b} f(x)\,dx$$

นิยาม 1.7 ถ้า f(x) ต่อเนื่องบนช่วง $a \leqslant x \leqslant b$ แล้วนิยาม

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = \lim_{a \to -\infty} \int_{a}^{c} f(x)\,dx + \lim_{b \to \infty} \int_{c}^{b} f(x)\,dx$$

หมายเหตุ สำหรับนิยามของอินทิกรัลไม่ตรงแบบที่ลิมิตบน-ล่างเป็นอนันต์ บางครั้งนิยมเขียนนิยามโดยให้ $c = 0$ นั่นคือ จะได้ว่า

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = \lim_{a \to -\infty} \int_{a}^{0} f(x)\,dx + \lim_{b \to \infty} \int_{0}^{b} f(x)\,dx$$

ตัวอย่างที่ 1.61 จงหาค่าของ $\int_{0}^{+\infty} \frac{dx}{4+x^2}$

วิธีทำ ลิมิตของการอินทิเกรตข้างบนเป็นอนันต์ ดังนั้นในการหาค่าต้องใช้อินทิกรัลไม่ตรงแบบในรูป

$$\int_{0}^{+\infty} f(x)\,dx = \lim_{b \to \infty} \int_{0}^{b} f(x)\,dx$$

ดังนั้นจะได้ว่า

$$\int_{0}^{+\infty} \frac{dx}{4+x^2} = \lim_{b \to +\infty} \int_{0}^{b} \frac{dx}{4+x^2}$$

$$= \lim_{b \to +\infty} \frac{1}{2} \arctan \frac{x}{2} \Big|_{0}^{b}$$

$$= \frac{1}{2} \lim_{b \to +\infty} \left(\arctan \frac{b}{2} - \arctan 0 \right)$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{2} - 0 \right)$$

$$= \frac{\pi}{4}$$

เพราะฉะนั้น

$$\int_{0}^{+\infty} \frac{dx}{4+x^2} = \frac{\pi}{4}$$

ตัวอย่างที่ 1.62 จงแสดงว่า $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt{x}}$ ลู่ออก (diverge)

วิธีทำ อินทิกรัลข้างบนเป็นลักษณะของอินทิกรัลไม่ตรงแบบที่มีลิมิตบนของการอินทิเกรตเป็นอนันต์ ใช้นิยามแบบเดียวกับตัวอย่างที่ 1.61 **ดังนั้นจะได้ว่า**

$$\int_1^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt{x}} = \lim_{b \to +\infty} \int_1^{b} \frac{dx}{\sqrt{x}}$$

$$= \lim_{b \to +\infty} 2\sqrt{x}\Big|_1^b$$

$$= \lim_{b \to +\infty} (2\sqrt{b} - 2)$$

แต่ลิมิตหาค่าไม่ได้ (does not exist)

เพราะฉะนั้น $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt{x}}$ ลู่ออก (diverge)

ตัวอย่างที่ 1.63 จงหาค่าของ $\int_{-\infty}^{0} e^{2x}\, dx$

วิธีทำ เพราะว่าเป็นอินทิกรัลไม่ตรงแบบที่ลิมิตของการอินทิเกรตเป็นอนันต์ข้างล่าง ดังนั้นหาค่าอินทิเกรตโดยใช้รูปแบบ

$$\int_{-\infty}^{b} f(x)\, dx = \lim_{a \to -\infty} \int_a^b f(x)\, dx$$

ดังนั้นจะได้ว่า

$$\int_{-\infty}^{0} e^{2x}\, dx = \lim_{a \to -\infty} \int_a^0 e^{2x}\, dx$$

$$= \lim_{a \to -\infty} \frac{1}{2} e^{2x}\Big|_a^0$$

$$= \lim_{a \to -\infty} \left(\frac{1}{2} e^{0} - \frac{1}{2} e^{a} \right)$$

$$\frac{1}{2} - 0$$

$$= \frac{1}{2}$$

เพราะฉะนั้น $\int_{-\infty}^{0} e^{2x}\, dx = \frac{1}{2}$

ตัวอย่างที่ 1.64 จงหาค่าของ $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{x^2+1}$

วิธีทำ เป็นอินทิกรัลไม่ตรงแบบซึ่งลิมิตของการอินทิเกรตเป็นอนันต์ทั้งบนและล่าง ดังนั้นหาค่าอินทิกรัลได้โดยรูปแบบ

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = \lim_{a\to-\infty}\int_a^0 f(x)\,dx + \lim_{b\to\infty}\int_0^b f(x)\,dx$$

ดังนั้นจะได้ว่า

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{x^2+1} = \lim_{a\to-\infty}\int_a^0 \frac{dx}{x^2+1} + \lim_{b\to\infty}\int_0^b \frac{dx}{x^2+1}$$

$$= \lim_{a\to-\infty} \arctan x\Big|_a^0 + \lim_{b\to\infty} \arctan x\Big|_0^b$$

$$= \lim_{a\to-\infty} (\text{O-arc tan } a) + \lim_{b\to\infty} (\text{arc tan } b\text{-}0)$$

$$= -\left(-\frac{\pi}{2}\right) + \frac{\pi}{2}$$

$$= \pi$$

เพราะฉะนั้น

$$\int_{\infty}^{\infty} \frac{dx}{x^2+1} = \pi$$

ตัวอย่างที่ 1.65 จงหาค่าของ $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{e^x+e^{-x}}$.

วิธีทำ ใช้นิยามอินทิกรัลไม่ตรงแบบ แบบเดียวกันกับตัวอย่างที่ 1.64 แต่ก่อนอื่นเปลี่ยนตัวถูกอินทิเกรตเสียก่อน คือ

$$\frac{1}{e^x+e^{-x}} = \frac{e^x}{e^{2x}+1}$$

ดังนั้นจะได้ว่า

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{e^x+e^{-x}} = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^x dx}{e^{2x}+1}$$

$$= \lim_{a\to-\infty}\int_a^0 \frac{e^x dx}{e^{2x}+1} + \lim_{b\to\infty}\int_0^b \frac{e^x dx}{e^{2x}+1}$$

$$= \lim_{a\to-\infty} \arctan e^x \Big|_a^0 + \lim_{b\to\infty} \arctan e^x \Big|_0^b$$

$$= \lim_{a \to -\infty}\left(\frac{\pi}{4} - \text{arc }\tan e^{a}\right) + \lim_{b \to \infty}\left(\text{arc }\tan e^{b} - \frac{\pi}{4}\right)$$

$$= \left(\frac{\pi}{4} - 0\right) + \left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4}\right)$$

$$\frac{\pi}{2}$$

ดังนั้น $$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{e^{x} + e^{-x}} = \frac{\pi}{2}$$

หมายเหตุ ในการหาค่าอินทิเกรตโดยทั่วไปผู้ที่แก้ปัญหามักจะมองข้ามความสำคัญของตัวถูกอินทิเกรตไป คือ เมื่อเห็นโจทย์จะนึกถึงเพียงแต่สูตรที่ใช้เท่านั้น โดยไม่ได้มองว่าเป็นอินทิกรัลไม่ตรงแบบหรือไม่ ตัวอย่างเช่น

$$\int_{-1}^{1} \frac{1}{x}\,dx = \ell n|x|\Big|_{-1}^{1}$$

$$= \ell n(1) - \ell n(1)$$

$$= 0$$

ซึ่งเป็นการแก้ปัญหาที่ไม่ถูกต้อง

แบบฝึกหัด 1.8

ข้อต่อไปนี้ข้อใดเป็นอินทิกรัลไม่ตรงแบบ (Improper integral)

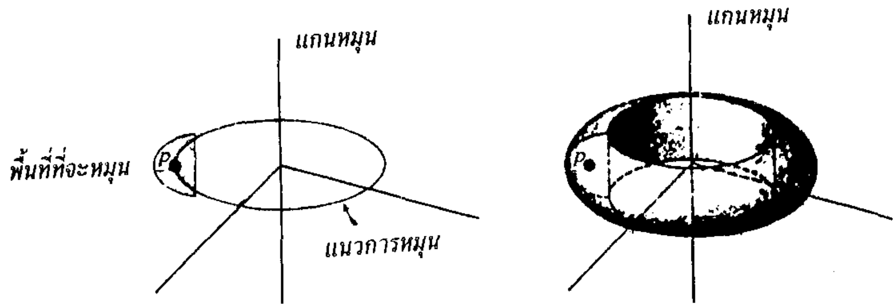
1. $\int_0^6 \frac{dx}{x-5}$
2. $\int_0^1 x \ln x \, dx$
3. $\int_0^1 \frac{\sin x}{x} dx$
4. $\int_{-1}^1 \frac{\sin x}{x} dx$
5. $\int_0^\pi \frac{1-\cos x}{x^2} dx$
6. $\int_0^\infty \frac{\cos x \, dx}{1+\sin x}$

จงหาค่าของอินทิกรัลต่อไปนี้ เพื่อพิจารณาว่ามีค่าลู่เข้า (converge) หรือลู่ออก (diverge)

7. $\int_0^8 \frac{dx}{\sqrt[3]{x}}$
8. $\int_0^{\pi/2} \frac{dx}{\cos x}$
9. $\int_0^3 \frac{dx}{(x-1)^{2/3}}$
10. $\int_0^{\pi/2} \frac{\cos x \, dx}{\sqrt{1-\sin x}}$
11. $\int_0^3 \frac{dx}{\sqrt{9-x^2}}$
12. $\int_0^1 \frac{x \, dx}{\sqrt{1-x^2}}$
13. $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$
14. $\int_0^4 \frac{x \, dx}{(x^2-4)^3}$
15. $\int_1^\infty \frac{dx}{\sqrt{x}}$
16. $\int_1^\infty \frac{dx}{x^3}$
17. $\int_0^\infty e^{-x} \cos x \, dx$
18. $\int_0^\infty \frac{dx}{4+x^4}$
19. $\int_0^\infty \frac{dx}{1+x^2}$
20. $\int_0^\infty x^3 e^{-x^2} dx$
21. $\int_{-\infty}^\infty e^{x-e^x} dx$
22. $\int_0^\infty x^5 e^{-x} dx$
23. $\int_0^{\pi/2} \frac{dx}{1-\sin x}$
24. $\int_{-\infty}^b e^{x-e^x} dx$

1.9 การหาปริมาตรของรูปทรงตัน

การหาปริมาตรทรงตันที่จะได้กล่าวต่อไปนี้เป็นการหาปริมาตรทรงตันที่ได้จากการหมุนพื้นที่ ดังรูปที่ 1.3

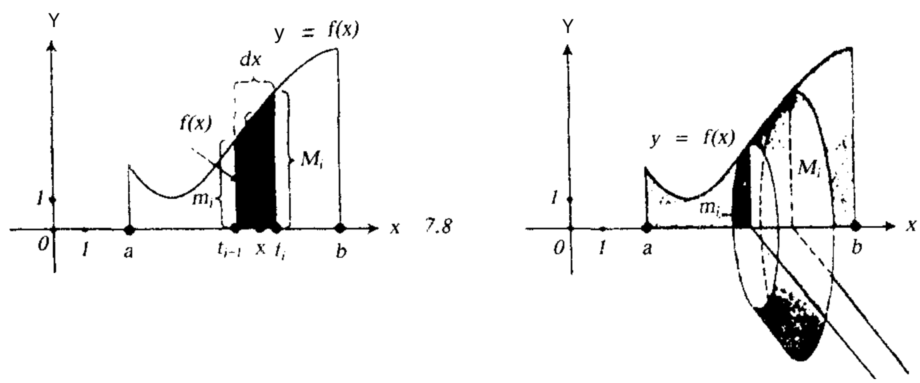


รูปที่ 1.3

สำหรับการหาปริมาตรของรูปทรงตันที่ได้จากการหมุนพื้นที่ มีได้ 2 วิธี คือ

(1) **วิธีที่ 1** โดยการแบ่งออกเป็นพื้นที่แผ่นเล็ก ๆ ในแนวตั้งได้ฉากกับแกนหมุน เรียกว่า Disk Method

แกนหมุนที่ใช้ในการพิจารณามี 2 แกน คือแกน x กับแกน y



รูปที่ 1.4

จากรูปความหนาของแผ่นบาง ๆ คือ

$$\frac{b-a}{n} = dx$$

(ในที่นี้สมมุติแบ่งพื้นที่ออกเป็น n ส่วนเท่า ๆ กัน)

ให้ V_i แทนปริมาตรทรงตันของแผ่นบาง ๆ ที่ได้จากการหมุนรอบแกน x

จะได้ $\pi m_i^2\left(\frac{b-a}{n}\right) \leqslant V_i \leqslant \pi M_i^2\left(\frac{b-a}{n}\right)$

ดังนั้น $\frac{b-a}{n}\left(\sum_{i=1}^{n} \pi m_i^2\right) \leqslant \sum_{i=1}^{n} V_i \leqslant \frac{b-a}{n}\left(\sum_{i=1}^{n} \pi M_i^2\right)$

ให้ $\sum_{i=1}^{n} V_i$ แทนปริมาตรทรงตัน V ดังนั้นเมื่อ $n \to \infty$ จะได้

$$V = \int_a^b \pi\, f(x)^* \, dx$$

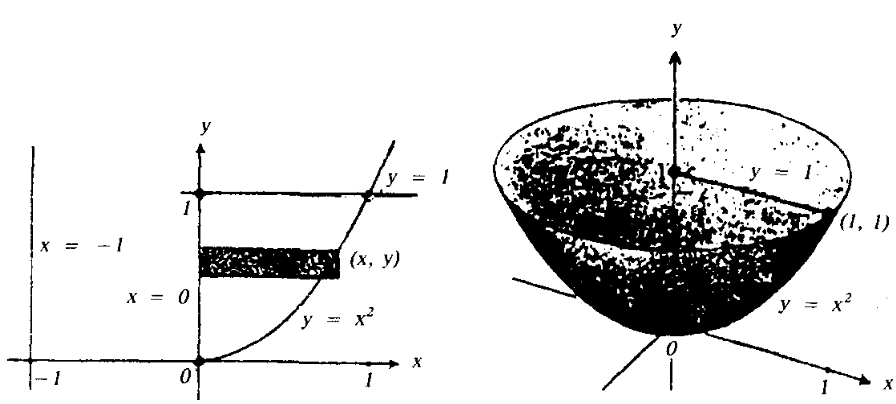
$$= \pi \int_a^b f(x)^2 \, dx$$

ในทำนองเดียวกัน เมื่อหมุนรอบแกน y จะได้

$$V = \pi \int_c^d f(y)^2 \, dy$$

ตัวอย่างที่ 1.66 กำหนดพื้นที่ปิดล้อมด้วยเส้นโค้ง $y = x^2$, $x = 0$ และ $y = 1$ จงหาปริมาตรทรงตันที่ได้จากการหมุนพื้นที่รอบแกน y

วิธีทำ



รูปที่ 1.5

$$V = \pi\int_0^1 (\sqrt{y})^2\,dy$$

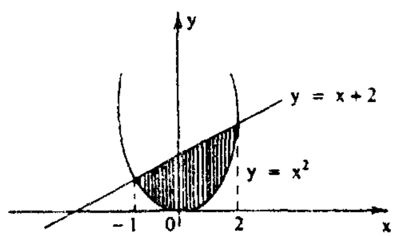
$$= \pi\int_0^1 y\,dy$$

$$= \pi\frac{y^2}{2}\Big|_0^1$$

$$= \frac{\pi}{2}$$

ตัวอย่างที่ 1.67 จงหาปริมาตรรูปทรงตันที่เกิดจากการหมุน พื้นที่ที่ปิดล้อมด้วยเส้นตรง $y = x+2$ และเส้นโค้ง $y = x^2$ รอบแกน x

วิธีทำ



รูปที่ 1.6

โดยการหาจุดตัดพบว่าจากรูปที่ 1.6 ปริมาตรรูปทรงตันที่เกิดจากการหมุนรอบแกน x มีค่าเท่ากับ $V_2 - V_1$ โดยที่

V_2 เกิดจากการหมุนพื้นที่ $R_2 = \{(x, y) | -1 \leqslant x \leqslant 2,\ 0 \leqslant y \leqslant x+2\}$ และ

V_1 เกิดจากการหมุนพื้นที่ $R_1 = \{(x, y) | -1 \leqslant x \leqslant 2,\ 0 \leqslant y \leqslant x^2\}$

เพราะฉะนั้นจะได้

$$V = V_2 - V_1$$

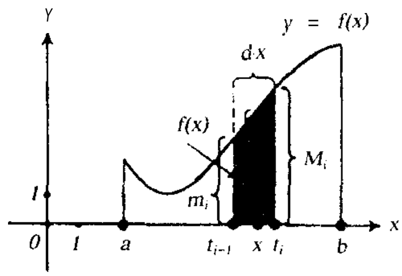
$$= \pi\int_{-1}^{2} (x+2)^2\,dx - \pi\int_{-1}^{2} (x^2)^2\,dx$$

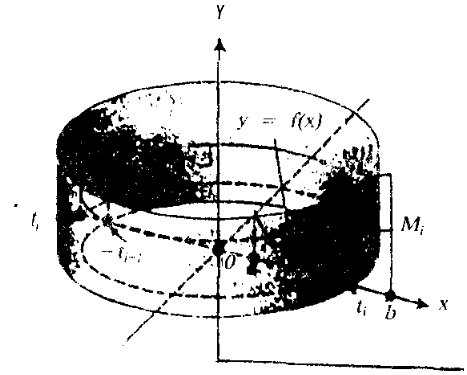
$$= \pi\left[\frac{(x+2)^3}{3} - \frac{x^5}{5}\right]_{-1}^{2}$$

$$= \pi\left[\left(\frac{64}{3} - \frac{32}{5}\right) - \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{5}\right)\right]$$

$$= \frac{72}{5}\pi$$

(2) **วิธีที่ 2** โดยการแบ่งพื้นที่ออกเป็นแผ่นเล็ก ๆ ขนานกับแกนหมุน เรียกว่า Shell Method





รูปที่ 1.7

จากรูปที่ 1.7 สมมุติแบ่งพื้นที่ที่ปิดล้อมด้วยเส้นโค้ง $y = f(x)$ แกน x และเส้นตรง $x = a, x = b$ ต้องการหมุนพื้นที่รอบแกน y แบ่งพื้นที่ออกเป็นแผ่นเล็ก ๆ ขนานกับแกน y เป็นจำนวน n ช่วงเท่า ๆ กัน

พิจารณาช่วง $[t_{i-1}, t_i]$ จะได้ว่า

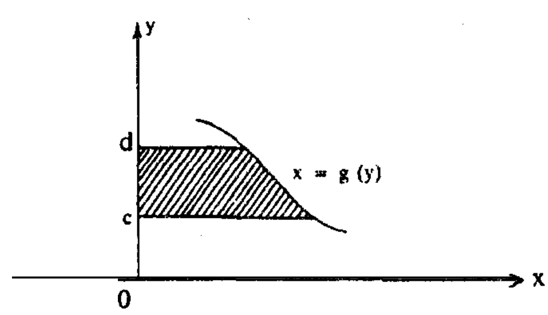
$$2\pi\, t_{i-1}\left(\frac{b-a}{n}\right)m_i \leqslant V_{\text{วงแหวน}} \leqslant 2\pi\, t_i\left(\frac{b-a}{n}\right)M_i$$

จะได้

$$V = \int_a^b 2\pi\, x\cdot f(x)\, dx$$

$$= 2\pi\int_a^b x\, f(x)\, dx$$

ถ้ากราฟอยู่ในรูปต่อไปนี้

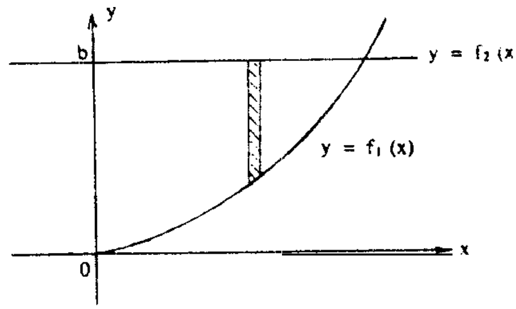


รูปที่ 1.8

ปริมาตรของรูปทรงตันที่เกิดจากการหมุนรอบแกน x กำหนดโดย

$$V = 2\pi \int_c^d y\, g(y)\, dy$$

แต่ถ้าพื้นที่ที่ปิดล้อมด้วยเส้นโค้งมากกว่า 1 เส้น ดังรูปที่ 1.9 เราก็หาปริมาตรทรงตันได้เช่นเดียวกันดังนี้



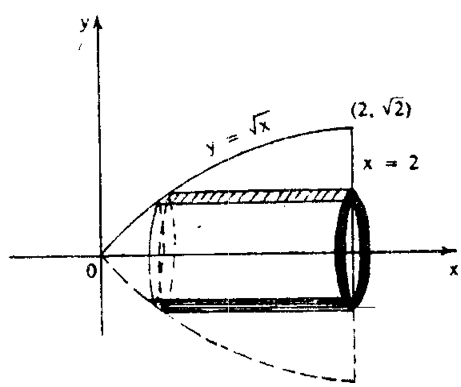
รูปที่ 1.9

จะได้ V รอบแกน y คือ

$$V_y = 2\pi \int_0^b x[f_2(x) - f_1(x)]dx$$

ตัวอย่างที่ 1.68 จงหาปริมาตรทรงตันที่เกิดจากการหมุนพื้นที่ที่ปิดล้อมด้วยแกน x เส้นโค้ง $y = \sqrt{x}$ และเส้นตรง $x = 0, x = 2$ รอบแกน x โดยวิธีการ shell

วิธีทำ เขียนรูปประกอบ



รูปที่ 1.10

$$V_x = 2n\int_0^{\sqrt{2}} y(2 - y^2)\, dy$$

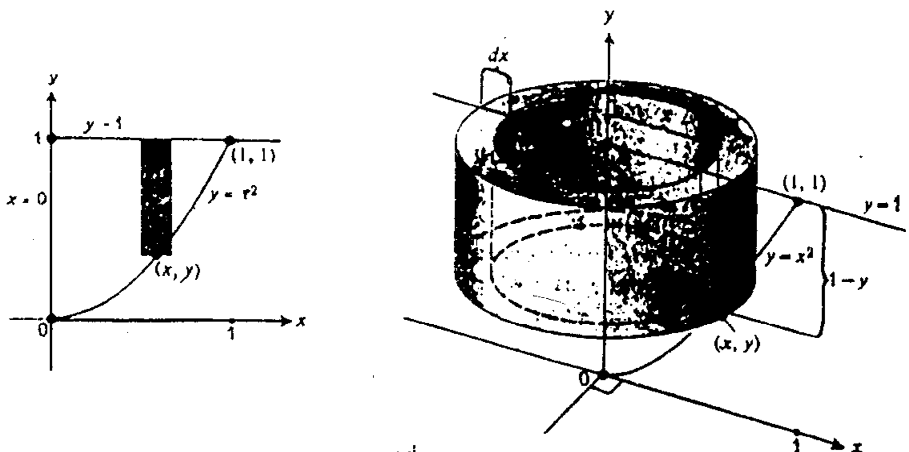
$$= 2n\left| y^2 - \frac{y^4}{4} \right| \Bigg|_0^{\sqrt{2}}$$

$$= 2\pi(2 - 1)$$

$$= 2\pi$$

ตัวอย่างที่ 1.69 จงหาปริมาตรรูปทรงตันที่ได้จากการหมุนพื้นที่ที่ปิดล้อมด้วยแกน y เส้นโค้ง $y = x^2$ และเส้นตรง $y = 1$ รอบแกน y

วิธีทำ เขียนรูปประกอบ



รูปที่ 1.11

$$V_y = 2\pi\int_0^1 x(1 - x^2)dx$$

$$= 2\pi\left(\frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{4}\right)\Bigg|_0^1$$

$$= \frac{\pi}{2}$$

แบบฝึกหัด 1.9

จงหาปริมาตรรูปทรงตันที่เกิดจากการหมุนพื้นที่ในข้อต่อไปนี้รอบแกนที่กำหนดให้โดยใช้

(1) Disk Method

(2) Shell Method

1. R $= \{(x, y) : 0 \leq x \leq y^2, 0 \leq y \leq 2\}$

   R หมุนรอบแกน y

2. R ล้อมรอบโดย $y = x^3$, $y = 0$ และ $x = 1$

   R หมุนรอบแกน y

3. R เหมือนข้อ 1 แต่ R หมุนรอบแกน x

4. R $= \{(x, y) : 0 \leq x \leq \pi, 0 \leq y \leq \sin x\}$

   R หมุนรอบแกน y

5. R ถูกปิดล้อมโดย $y = 0$, $x = 3$, $y = \frac{x}{\sqrt{4-x}}$

   R หมุนรอบแกน y

6. R $= \{(x, y) : y^2 \leq x \leq 8-y^2, 0 \leq y \leq 2\}$

   R หมุนรอบแกน y

7. R ถูกปิดล้อมโดย $y = \sqrt{x}$ and $y = x^3$

   R หมุนรอบแกน y

8. R ถูกปิดล้อมโดย $x = 0$ และ $x + y^2 - 4y = 0$

   R หมุนรอบ แกน y

9. จงหาปริมาตรของรูปทรงตันเมื่อบริเวณ R ถูกปิดล้อมโดย $y = 0$ และส่วนโค้งของ $y = \sin x$ ระหว่าง 0 ถึง π หมุนรอบเส้น $y = -1$

10. จงหาปริมาตรเมื่อ R เหมือนข้อ 9 แต่ R หมุนรอบเส้น $x = -1$

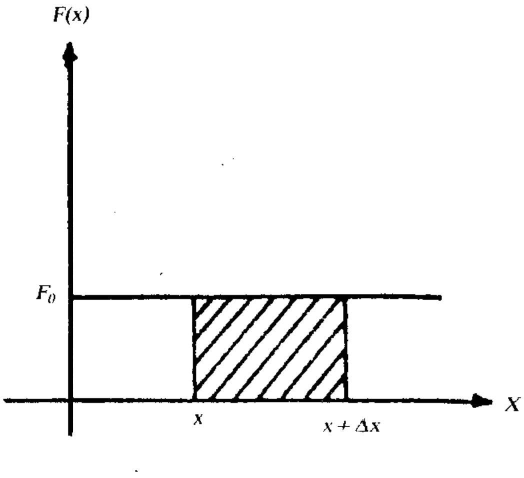
1.10 งาน (Work)

งาน (W) เป็นปริมาณซึ่งมีค่าเท่ากับแรงที่กระทำกับวัตถุในทิศที่วัตถุเคลื่อนที่ คูณกับระยะทาง (S) ที่วัตถุเคลื่อนที่ได้

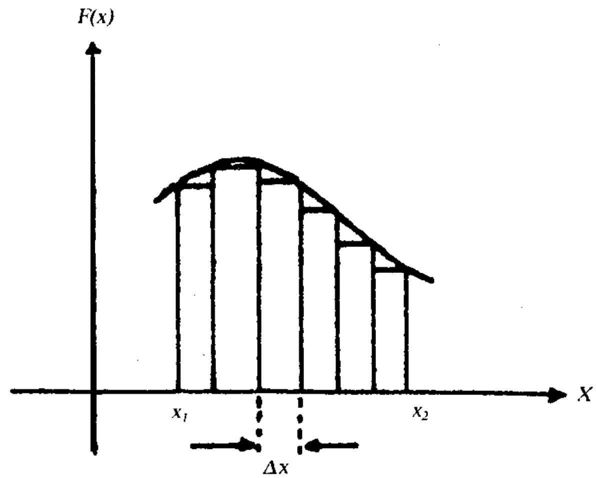
ตัวอย่างเช่น ถ้าออกแรง 20 ปอนด์ ผลักให้วัตถุเคลื่อนที่ไปได้ระยะทาง 10 ฟุต ปริมาณงานที่ได้

$W = F \times S = 20 \times 10 = 200$ ฟุต-ปอนด์

แรงที่กระทำต่อวัตถุ (F) อาจมีค่าคงที่หรือไม่คงที่ (แปรตามตำแหน่ง) ก็ได้ ดังรูปที่ 1.12



รูปที่ 1.12



รูปที่ 1.13

ถ้าให้ W แทนงานที่ทำโดยแรงคงที่ F_0 จากจุด x ไปยังจุด $x+\Delta x$ ในรูปที่ 1.12

ดังนั้นจะได้ว่า $W = F_0 \times \Delta x$ .....(1)

สำหรับแรงในรูปที่ 1.13 เป็นแรงที่ไม่คงที่มีการแปรตามตำแหน่งของ x ดังนั้นถ้าให้ W แทนงานที่กระทำโดยแรง F(x) จากจุด x_1 ไปยังจุด x_2 จะได้ว่า

$$W = \lim_{\Delta x \to 0} \sum_{i=1}^{n} F(x_i)\Delta x \quad \text{เมื่อ} \quad n = \frac{x_2 - x_1}{\Delta x}$$

$$= \int^{x_2} F(x)\,dx \qquad \ldots(2)$$

ตัวอย่างที่ 1.70 จงหางานที่เกิดจากแรง $F(x) = \alpha x^2 - \beta$ กระทำต่อวัตถุจากจุด x_1 ไปยังจุด x_2 กำหนดว่า $\alpha = 3$ นิวตันต่อ (เมตร)^2 $\beta = 2$ นิวตัน $x_1 = 1$ เมตร และ $x_2 = 3$ เมตร

วิธีทำ จากสูตรงาน

$$W = \int_{x_1}^{x_2} F(x)\,dx$$

$$= \int_1^3 (\alpha x^2 - \beta)\,dx$$

$$= \int_1^3 (3x^2 - 2)\,dx$$

$$= \left[x^3 - 2x\right]_1^3$$

$$= (27 - 6) - (1 - 2)$$

$$= 21 - (-1)$$

$$= 22 \text{ จูล}$$

ข้อสังเกต จากตัวอย่างนี้ จะใช้สูตรที่ (1) หางานไม่ได้ เพราะแรงที่กระทำต่อวัตถุ

$F(x) = 3x^2 - 2$ มีค่าไม่คงที่ (แปรตาม x) ดังนั้นจึงต้องใช้สูตรที่ (2)

$$W = \int_{x_1}^{x_2} F(x)\,dx$$

และสูตรนี้สามารถใช้หางาน เมื่อ $F(x)$ มีค่าคงที่หรือไม่ก็ได้

การประยุกต์เกี่ยวกับงานที่รู้จักกันแพร่หลายคือ งานที่ได้จากการยืดสปริง ซึ่งปัญหาเกี่ยวกับสปริง Robert Hook นักวิทยาศาสตร์ชาวอังกฤษ (ค.ศ. 1635-1703) ได้ค้นพบกฎของฮุก ซึ่งกล่าวว่า "ขนาดของแรงที่ใช้ในการดึงหรือกดสปริง จะเป็นสัดส่วนกับระยะทางที่สปริงนั้นยืดออกหรือหดเข้าไป"

ให้ $F(x)$ เป็นแรงที่กระทำต่อสปริง

x เป็นระยะทางที่สปริงยืดออกหรือหดเข้าไป

จากกฎของฮุคจะได้ว่า

$$F(x) \propto x$$

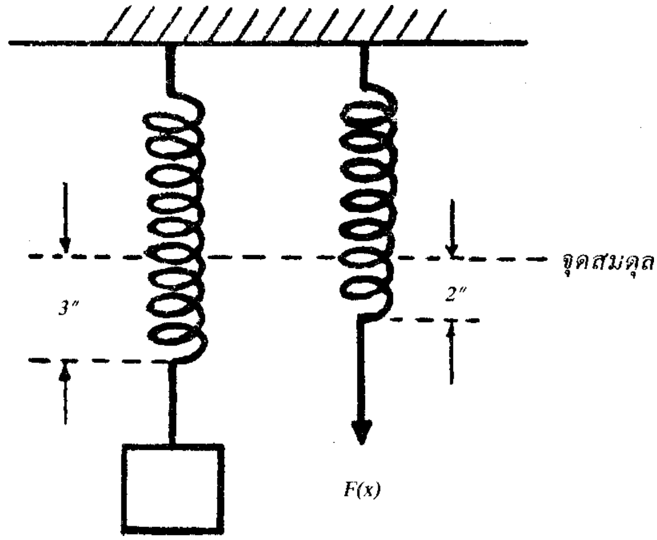
หรือ $F(x) = kx$

เมื่อ k เป็นค่าคงที่สปริง (spring constant)

นั่นคือ แรงที่กระทำมีค่าไม่คงที่ ดังนั้นงานที่ทำมีค่าเป็น

$$W = \int^{x_2} F(x)\,dx$$

ตัวอย่างที่ 1.71 จงหางาน เมื่อดึงสปริงให้ยืดจากจุดสมดุลเป็นระยะ 2 นิ้ว กำหนดว่า เมื่อแขวนน้ำหนัก 40 ปอนด์ สปริงจะยืดออกจากจุดสมดุลเป็นระยะ 3 นิ้ว



รูปที่ 1.14

วิธีทำ โจทย์ข้อนี้ จะต้องหาค่าคงที่สปริงก่อน จากเงื่อนไข

$$40 = k(3)$$

$$k = \frac{40}{3}$$

จากกฎของฮุค $F(x) = kx$

นั่นคือ $F(x) = \frac{40}{3}x$

ดังนั้นงานที่ใช้ในการดึงสปริงให้ยืดออก 2 นิ้ว คือ

$$W = \int_0^2 \left(\frac{40}{3}x\right) dx$$

$$= \frac{40}{3} \cdot \frac{x^2}{2}\Big|_0^2$$

$$= \frac{40}{3}(2)$$

$$= \frac{80}{3} \text{ นิ้ว-ปอนด์}$$

แบบฝึกหัด 1.10

1. อนุภาคอันหนึ่งเคลื่อนที่ไปตามแกน x จาก a ถึง b ตามกฎของแรง เมื่อกำหนด $F(x)$ เป็นแรงที่กำหนดให้ จงหางานที่ทำ เมื่อ

   (1) $F(x) = x^3 - 2x^2 + 6x + 4,\ a = 0,\ b = 3$

   (2) $F(x) = x^4 + 2x + 7,\ a = -1,\ b = 2$

   (3) $F(x) = x\sqrt{1 - x^2},\ a = 1,\ b = 3$

2. สปริงอันหนึ่งยาว 8 นิ้ว เมื่อใช้แรง 20 ปอนด์ ดึงสปริงจะยืดออก $\frac{1}{2}$ นิ้ว จงหางานที่ทำเมื่อดึงสปริงให้ยืดออกจาก 8 นิ้วเป็น 1 นิ้ว

3. สปริงอันหนึ่งยาว 6 นิ้ว เมื่อใช้แรง 500 ปอนด์ ดึงสปริงจะยืดออก $\frac{1}{4}$ นิ้ว จงหางานที่ทำเมื่อดึงสปริงให้ยืดออกจากเดิม 1 นิ้ว

4. สปริงอันหนึ่งเดิมยาว 10 นิ้ว เมื่อเอาน้ำหนัก 30 ปอนด์ แขวนสปริงจะยืดออกเป็น $11\frac{1}{2}$ นิ้ว จงหางานที่ทำในการดึงสปริง

   (ก) จาก 10 นิ้ว เป็น 12 นิ้ว

   (ข) จาก 12 นิ้ว เป็น 14 นิ้ว

5. สปริงอันหนึ่งยาว 6 นิ้ว เมื่อใช้แรง 12,000 ปอนด์ กดสปริงจะหดเข้า $\frac{1}{2}$ นิ้ว จงหางานที่ทำในการกดสปริงอันนี้จาก 6 นิ้วเป็น 5 นิ้ว