บทที่ 7
จำนวนเชิงซ้อน

สรุปจำนวนเชิงซ้อน

1. **รูปมาตรฐาน (รูปพีชคณิต)**

$$z = a+bi \ , \quad i = \sqrt{-1}$$

a = ส่วนจริง

b = ส่วนจินตภาพ

2. **การเท่ากัน**

$$z_1 = a_1 + b_1 i$$

$$z_2 = a_2 + b_2 i$$

$$z_1 = z_2 \leftrightarrow a_1 = a_2 \text{ และ } b_1 = b_2$$

3. **จำนวนเชิงซ้อนสังยุค**

$$z = a+bi$$

จำนวนเชิงซ้อนสังยุคคือ $\bar{z} = a-bi$

ก) $z+\bar{z} = 2a$

ข) $z\cdot\bar{z} = a^2+b^2 = |z|^2$

4. **การกระทำพื้นฐาน**

$$z_1 = a_1 + b_1 i$$

$$z_2 = a_2 + b_2 i$$

ผลบวก ; $z_1 + z_2 = (a_1+a_2) + (b_1+b_2)i$

ผลต่าง ; $z_1 - z_2 = (a_1-a_2) + (b_1-b_2)i$

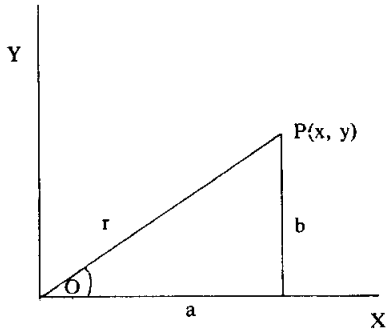
ผลคูณ ; $z_1 z_2 = (a_1a_2 - b_1b_2) + (b_1a_2 + a_1b_2)i$

ผลหาร ; $\frac{1}{z} = \frac{1}{z}\cdot\frac{\bar{z}}{\bar{z}} = \frac{a-bi}{a^2+b^2} = \left(\frac{a}{a^2+b^2}\right) - \left(\frac{b^2}{a^2+b^2}\right)i$

ข้อสังเกต

$$i^{4n} = 1$$
$$i^{4n+1} = i$$
$$i^{4n+2} = -1$$
$$i^{4n+3} = -i$$
$$n = 0, 1, 2, \ldots$$

5. รูปเชิงขั้ว



$$a = r\cos\theta$$
$$b = r\sin\theta$$
$$z = r(\cos\theta + i\sin\theta) = r\,\mathrm{cis}\,\theta$$
$$r = \sqrt{a^2+b^2}$$
$$\tan\theta = \frac{b}{a}$$

6. การกระทำพื้นฐานในรูปเชิงขั้ว

$$z_1 = r_1(\cos\theta_1 + i\sin\theta_1)$$
$$z_2 = r_2(\cos\theta_2 + i\sin\theta_2)$$
$$z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$$
$$z_1z_2 = r_1r_2[\cos(\theta_1+\theta_2) + i\sin(\theta_1+\theta_2)]$$
$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2}[\cos(\theta_1-\theta_2) + i\sin(\theta_1-\theta_2)]$$
$$z^n = r^n(\cos n\theta + i\sin n\theta)$$
$$z^n + \frac{1}{z^n} = 2\cos n\theta$$
$$z^n - \frac{1}{z^n} = 2i\sin n\theta$$
$$\cos^n\theta = \frac{1}{2^n}\left(z+\frac{1}{z}\right)^n$$
$$\sin^n\theta = \frac{1}{(2i)^n}\left(z-\frac{1}{z}\right)^n$$

7. ราก

$$z_k = \sqrt[n]{\rho}\left[\cos\left(\frac{\alpha}{n}+\frac{2\pi}{n}k\right) + i\sin\left(\frac{\alpha}{n}+\frac{2\pi}{n}k\right)\right], \quad k = 0, 1, 2, \ldots, n-1$$

สูตรของออยเลอร์

$$e^{ix} = \cos x + i\sin x$$

เฉลยแบบฝึกหัด 7.1

1. จงหาส่วนจริง, ส่วนจินตภาพ และจำนวนเชิงซ้อนสังยุคของจำนวนเชิงซ้อนต่อไปนี้

1.1) 2 1.2) i 1.3) $3-4i$

1.4) $-2-7i$ 1.5) $-11i$ 1.6) $4+2i$

วิธีทำ

1.1) $z = 2 = 2+0i$

ดังนั้น $\mathrm{Re}(z) = 2$, $\mathrm{Im}(z) = 0$

และ $\bar{z} = 2-0i = 2$

1.2) $z = i = 0+1i$

ดังนั้น $\mathrm{Re}(z) = 0$, $\mathrm{Im}(z) = 1$

และ $\bar{z} = 0-1i = -i$

1.3) $z = 3-4i = 3+(-4)i$

ดังนั้น $\mathrm{Re}(z) = 3$, $\mathrm{Im}(z) = -4$

และ $\bar{z} = 3-(-4)i = 3+4i$

1.4) $z = -2-7i = -2+(-7)i$

ดังนั้น $\mathrm{Re}(z) = -2$, $\mathrm{Im}(z) = -7$

และ $\bar{z} = -2-(-7)i = -2+7i$

1.5) $z = -11i = 0+(-11)i$

ดังนั้น $\mathrm{Re}(z) = 0$, $\mathrm{Im}(z) = -11$

และ $\bar{z} = 0-(-11)i = 11i$

1.6) $z = 4+2i$

ดังนั้น $\mathrm{Re}(z) = 4$, $\mathrm{Im}(z) = 2$

และ $\bar{z} = 4-2i$

2. จงหาค่า x และ y จากสมการต่อไปนี้

2.1) $2x-3yi = 0$

2.2) $-x+7yi = 0$

2.3) $x+yi = i$

2.4) $9x+6yi-3 = 0$

2.5) $8x-4yi-16i = 0$

วิธีทำ

2.1) จาก $2x+3yi = 0 = 0+0i$

ใช้คุณสมบัติการเท่ากันของจำนวนเชิงซ้อน จะได้

$2x = 0$ และ $3y = 0$

นั่นคือ $x = 0$ และ $y = 0$

2.2) จาก $-x+7yi = 0 = 0+0i$

ใช้คุณสมบัติการเท่ากันของจำนวนเชิงซ้อน จะได้

$-x = 0$ และ $7y = 0$

นั่นคือ $x = 0$ และ $y = 0$

2.3) จาก $x+yi = i = 0+1i$

ใช้คุณสมบัติการเท่ากันของจำนวนเชิงซ้อน จะได้

$x = 0$ และ $y = 1$

2.4) จาก $9x+6yi-3 = 0 = 0+0i$

หรือ $9x-3+6yi = 0+0i$

ใช้คุณสมบัติการเท่ากันของจำนวนเชิงซ้อน จะได้

$9x-3 = 0$ และ $6y = 0$

นั่นคือ $x = \frac{1}{3}$ และ $y = 0$

2.5) จาก $8x-4yi-16i = 0 = 0+0i$

หรือ $8x+(-4y-16)i = 0+0i$

ใช้คุณสมบัติการเท่ากันของจำนวนเชิงซ้อน จะได้

$8x = 0$ และ $-4y-16 = 0$

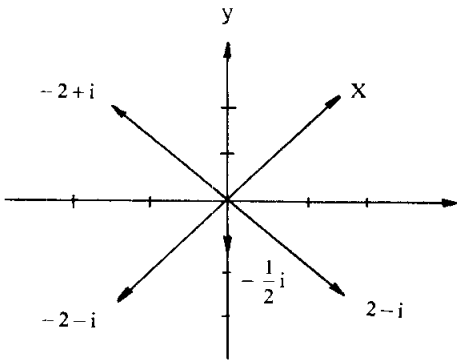
นั่นคือ $x = 0$ และ $y = -4$

3. จงเขียนจำนวนเชิงซ้อนเหล่านี้ ในระนาบเชิงซ้อนเดียวกัน

3.1) $-2+i$ 3.2) $-2-i$ 3.3) $2-i$

3.4) $2+i$ 3.5) $-\frac{1}{2}i$

วิธีทำ



เฉลยแบบฝึกหัด 7.2

1. จงหามอดุลัสของ

1.1) $4+3i$ 1.2) $-5+2i$

1.3) i 1.4) $\cos(-\theta) + i\sin(-\theta)$

วิธีทำ

1.1) $4+3i$

จาก $|z| = |a+bi| = \sqrt{a^2+b^2}$

ดังนั้น $|4+3i| = \sqrt{16+9} = 5$

1.2) $-5+2i$

จาก $|z| = |a+bi| = \sqrt{a^2+b^2}$

ดังนั้น $|-5+2i| = \sqrt{25+4} = \sqrt{29}$

1.3) i

จาก $|z| = |a+bi| = \sqrt{a^2+b^2}$

ดังนั้น $|i| = \sqrt{0+1} = 1$

1.4) $\cos(-\theta) + i\sin(-\theta)$

จาก $|z| = |a+bi| = \sqrt{a^2+b^2}$

ดังนั้น $|\cos(-\theta) + i\sin(-\theta)| = \sqrt{\cos^2(-\theta) + \sin^2(-\theta)}$

$= 1$

2. จงหาค่าหลักของอาร์กิวเมนต์ ของ

2.1) $\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{2}}i$ 2.2) $\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i$

2.3) $-\frac{1}{\sqrt{2}}-\frac{1}{\sqrt{2}}i$ 2.4) $-\frac{25}{2}+\frac{25\sqrt{3}}{2}i$

2.5) -1

วิธีทำ

2.1) $\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{2}}i$

ในที่นี้ $a = \frac{1}{\sqrt{2}}, \quad b = \frac{1}{\sqrt{2}}$

ดังนั้น $\theta = \tan^{-1}\frac{b}{a}$

$= \tan^{-1} 1$

$= \frac{\pi}{4}$

ซึ่ง $z = \frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{2}}i$ อยู่ในจตุภาคที่ 1 และตรงกับค่า θ ที่ได้

เนื่องจาก $-\pi < \frac{\pi}{4} \leqslant \pi$ ดังนั้น $\theta = \frac{\pi}{4}$ เป็นคำหลักของอาร์กิวเมนต์

2.2) $\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i$

ในที่นี้ $a = \frac{1}{2}, \quad b = -\frac{\sqrt{3}}{2}$

ดังนั้น $\theta = \tan^{-1}\frac{b}{a}$

$= \tan^{-1} -\sqrt{3}$

หรือ $\tan\theta = -\sqrt{3}$

$= -\tan\frac{\pi}{3}$

$= \tan\left(-\frac{\pi}{3}\right)$

$\theta = -\frac{\pi}{3}$

ซึ่ง $z = \frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i$ อยู่ในจตุภาคที่ 4 และตรงกับค่า θ ที่ได้

เนื่องจาก $-\pi < -\frac{\pi}{3} \leqslant \pi$ ดังนั้น $\theta = -\frac{\pi}{3}$ เป็นค่าหลักอาร์กิวเมนต์

2.3) $-\frac{1}{\sqrt{2}}-\frac{1}{\sqrt{2}}i$

ในที่นี้ $a = -\frac{1}{\sqrt{2}}, \quad b = -\frac{1}{\sqrt{2}}$

ดังนั้น $\theta = \tan^{-1}\frac{b}{a}$

$= \tan^{-1} 1$

$= \frac{\pi}{4}$ (เป็นมุมในจตุภาคที่ 1)

แต่ a และ b เป็นลบ จำนวนเชิงซ้อน $z = -\frac{1}{\sqrt{2}}-\frac{1}{\sqrt{2}}i$ อยู่ในจตุภาคที่ 3 จึงต้องหามุมให้สอดคล้องกัน (คืออยู่ในจตุภาคที่ 3)

จาก $\theta = \tan^{-1} 1$

$$\tan\theta = 1$$
$$= \tan\frac{\pi}{4}$$
$$= \tan\left(\pi + \frac{\pi}{4}\right)$$
$$= \tan\frac{5\pi}{4}$$
$$\theta = \frac{5\pi}{4}$$

เนื่องจาก มุม $\frac{5\pi}{4}$ ตรงกับมุม $-\frac{3\pi}{4}$ โดย $-\pi < -\frac{3\pi}{4} \leqslant \pi$

ดังนั้น $\theta = -\frac{3\pi}{4}$ เป็นค่าหลักอาร์กิวเมนต์

2.4) $-\frac{25}{2} + \frac{25\sqrt{3}}{2}i$

ในที่นี้ $a = -\frac{25}{2}$, $b = \frac{25\sqrt{3}}{2}$

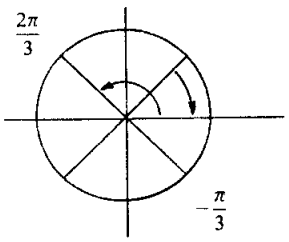
ดังนั้น $\theta = \tan^{-1}\frac{b}{a}$

$$= \tan^{-1} -\sqrt{3}$$

หรือ $\tan\theta = -\sqrt{3}$

$$= -\tan\frac{\pi}{3}$$
$$= \tan\left(-\frac{\pi}{3}\right)$$
$$\theta = -\frac{\pi}{3}$$ (เป็นมุมในจตุภาคที่ 4)

แต่ $z = -\frac{25}{2} + \frac{25\sqrt{3}}{2}i$ อยู่ในจตุภาคที่ 2 จึงต้องหามุมให้สอดคล้องกัน (คือ อยู่ในจตุภาคที่ 2) โดยใช้วิธีดูรูปข้างล่างนี้



$\tan\theta = -\sqrt{3}$ (ค่าเป็นลบ)

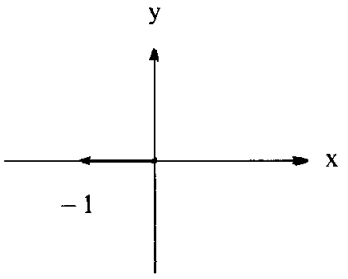
ค่า tangent ที่เป็นลบ จะอยู่ในจตุภาคที่ 4 และ 2

ค่าที่ตรงกับ $-\frac{\pi}{3}$ ก็คือ $\frac{2\pi}{3}$

โดย $-\pi < \frac{2\pi}{3} \leqslant \pi$ ดังนั้น $\theta = \frac{2\pi}{3}$ เป็นค่าหลักของอาร์กิวเมนต์

2.5) -1

นำ $z = -1$ มาเขียนในระนาบเชิงซ้อน จะได้ดังรูป



ดังนั้น $\theta = \pi$

หรือ $\theta = -\pi$

ดังนั้น $\theta = \pi$ เป็นค่าหลักของอาร์กิวเมนต์

3. จงเขียนจำนวนเชิงซ้อนต่อไปนี้ให้อยู่ในรูปเชิงขั้ว

3.1) $2+2\sqrt{3}\,i$ 3.2) $-5+5i$

3.3) $-\sqrt{6}-\sqrt{2}\,i$ 3.4) $-3i$

วิธีทำ

3.1) $2+2\sqrt{3}\,i$

ในที่นี้ $a = 2, \quad b = 2\sqrt{3}$

จาก $r = \sqrt{a^2+b^2}$

$= \sqrt{4+12} = 4$

และจาก $\theta = \tan^{-1}\dfrac{b}{a}$

$= \tan^{-1}\sqrt{3}$

$= \dfrac{\pi}{3}$ (อยู่ในจตุภาคที่ 1)

ซึ่ง $z = 2+2\sqrt{3}\,i$ อยู่ในจตุภาคที่ 1 ตรงกับ θ ที่ได้

เพราะว่า $a+bi = r(\cos\theta + i\sin\theta)$

ดังนั้น $2+2\sqrt{3}\,i = 4\left(\cos\dfrac{\pi}{3} + i\sin\dfrac{\pi}{3}\right)$

3.2) $-5+5i$

ในที่นี้ $a = -5, \quad b = 5$

จาก $r = \sqrt{a^2+b^2}$

$= \sqrt{25+25} = 5\sqrt{2}$

และจาก $\theta = \tan^{-1}\frac{b}{a}$

$= \tan^{-1} -1$

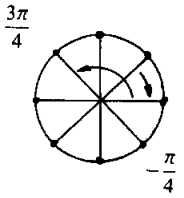
$\tan\theta = -1$

$= -\tan\frac{\pi}{4}$

$= \tan\left(-\frac{\pi}{4}\right)$

$\theta = -\frac{\pi}{4}$ (อยู่ในจตุภาคที่ 4)

แต่ $z = -5+5i$ อยู่ในจตุภาคที่ 2 ดังนั้นค่า $\tan\theta$ ที่เป็นลบที่ต้องการ คือ



$\theta = \frac{3\pi}{4}$ (ดูรูป)

เพราะว่า $a+bi = r(\cos\theta + i\sin\theta)$

ดังนั้น $-5+5i = 5\sqrt{2}\left(\cos\frac{3\pi}{4} + i\sin\frac{3\pi}{4}\right)$

3.3) $-\sqrt{6}-\sqrt{2}i$

ในที่นี้ $a = -\sqrt{6}, \quad b = -\sqrt{2}$

จาก $r = \sqrt{a^2+b^2}$

$= \sqrt{6+2} = 2\sqrt{2}$

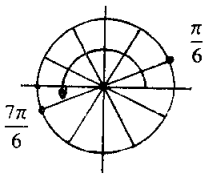
และจาก $\theta = \tan^{-1}\frac{b}{a}$

$= \tan^{-1}\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{6}}$

$= \tan^{-1}\frac{1}{\sqrt{3}}$

$= \frac{\pi}{6}$ (อยู่ในจตุภาคที่ 1)

แต่ $z = -\sqrt{6}-\sqrt{2}i$ อยู่ในจตุภาคที่ 3 ดังนั้น ค่า $\tan\theta$ ที่เป็นบวกที่ต้องการคือ



$\theta = \frac{7\pi}{6}$ (ดูรูป)

เพราะว่า $a+bi = r(\cos\theta + i\sin\theta)$

ดังนั้น $-\sqrt{6}-\sqrt{2}\,i = 2\sqrt{2}\left(\cos\frac{7\pi}{6} + i\sin\frac{7\pi}{6}\right)$

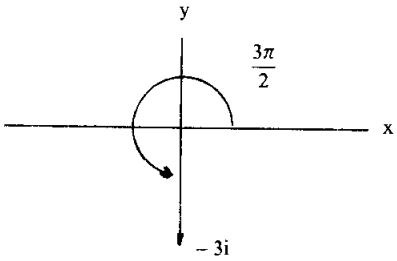
3.4) $-3i$

ในที่นี้ $a = 0,\ b = -3$

จาก $r = \sqrt{a^2+b^2}$

$= \sqrt{0+9} = 3$

หาอาร์กิวเมนต์ได้จากรูป



นั่นคือ $\theta = \frac{3\pi}{2}$

เพราะว่า $a+bi = r(\cos\theta + i\sin\theta)$

ดังนั้น $-3i = 3\left(\cos\frac{3\pi}{2} + i\sin\frac{3\pi}{2}\right)$

เฉลยแบบฝึกหัด 7.3

1. จงหาค่าของ z_1+z_2 , z_1z_2 , z_1-z_2 และ $\frac{z_1}{z_2}$ ถ้า

1.1) $z_1 = 2+5i$, $z_2 = 1-7i$

1.2) $z_1 = \sqrt{2}-\sqrt{3}\,i$, $z_2 = \sqrt{2}+\sqrt{3}\,i$

วิธีทำ

1.1) จาก $z_1+z_2 = (a_1+b_1i) + (a_2+b_2i) = (a_1+a_2) + (b_1+b_2)i$

ดังนั้น $(2+5i)+(1-7i) = (2+1)+(5-7)i$

$= 3-2i$

จาก $z_1z_2 = (a_1+b_1i)\cdot(a_2+b_2i) = (a_1a_2-b_1b_2) + (b_1a_2+a_1b_2)i$

ดังนั้น $(2+5i)\cdot(1-7i) = \{2(1)-5(-7)\} + \{5(1)+2(-7)\}i$

$= \{2+35\} + \{5-14\}i$

$= 37-9i$

จาก $z_1-z_2 = (a_1+b_1i) - (a_2+b_2i) = (a_1-a_2) + i(b_1-b_2)$

ดังนั้น $(2+5i)-(1-7i) = (2-1)+i(5+7)$

$= 1+12i$

จาก $\frac{z_1}{z_2} = \frac{a_1+ib_1}{a_2+ib_2} = \frac{a_1a_2+b_1b_2}{a_2^2+b_2^2} + i\frac{(a_2b_1-a_1b_2)}{a_2^2+b_2^2}$

ดังนั้น $\frac{2+5i}{1-7i} = \frac{2(1)+5(-7)}{1^2+(-7)^2} + i\frac{(1(5)-2(-7))}{1^2+(-7)^2}$

$= \frac{2-35}{50} + i\frac{(5+14)}{50}$

$= -\frac{33}{50} + \frac{19}{50}i$

1.2) จาก $z_1+z_2 = (a_1+b_1i)+(a_2+b_2i) = (a_1+a_2)+(b_1+b_2)i$

ดังนั้น $(\sqrt{2}-\sqrt{3}\,i)+(\sqrt{2}+\sqrt{3}\,i) = (\sqrt{2}+\sqrt{2})+(-\sqrt{3}+\sqrt{3})i$

$= 2\sqrt{2}$

จาก $z_1\cdot z_2 = (a_1+b_1i)\cdot(a_2+b_2i) = (a_1a_2-b_1b_2)+(b_1a_2+a_1b_2)i$

ดังนั้น $(\sqrt{2}-\sqrt{3}\,i)\cdot(\sqrt{2}+\sqrt{3}\,i) = (\sqrt{2}\cdot\sqrt{2}-(-\sqrt{3})\sqrt{3})+\{-\sqrt{3}(\sqrt{2})+\sqrt{2}\cdot\sqrt{3}\}i$

$= (2+3)+(-\sqrt{6}+\sqrt{6})\,i$

$= 5$

จาก $z_1 - z_2 = (a_1 + b_1 i) - (a_2 + b_2 i) = (a_1 - a_2) + i(b_1 - b_2)$

ดังนั้น $(\sqrt{2} - \sqrt{3}\,i) - (\sqrt{2} + \sqrt{3}\,i) = (\sqrt{2} - \sqrt{2}) + i(-\sqrt{3} - \sqrt{3})$

$$= -2\sqrt{3}\,i$$

จาก $\dfrac{z_1}{z_2} = \dfrac{a_1 + ib_1}{a_2 + ib_2} = \dfrac{a_1a_2 + b_1b_2}{a_2^2 + b_2^2} + i\dfrac{(a_2b_1 - a_1b_2)}{a_2^2 + b_2^2}$

ดังนั้น $\dfrac{\sqrt{2} - \sqrt{3}\,i}{\sqrt{2} + \sqrt{3}\,i} = \dfrac{\sqrt{2}\cdot\sqrt{2} + (-\sqrt{3})\sqrt{3}}{2+3} + i\dfrac{(\sqrt{2}(-\sqrt{3}) - \sqrt{2}\cdot\sqrt{3})}{2+3}$

$$= \frac{2-3}{5} + i\frac{(-\sqrt{6} - \sqrt{6})}{5}$$

$$= -\frac{1}{5} - \frac{2\sqrt{6}}{5}i$$

2. จงหาค่าของ x และ y ที่เป็นจำนวนจริงจากสมการ

2.1) $3x + 2iy - ix + 5y = 7 + 5i$

2.2) $(3 + 4i)^2 - 2(x - yi) = x + yi$

2.3) $\left(\dfrac{1+i}{1-i}\right)^2 + \dfrac{1}{x + yi} = 1 + i$

2.4) $(3 - 2i)(x + yi) = 2(x - 2yi) + 2i - 1$

2.5) $3x - 3yi + 4xi - 2y - 5 - 10i = (x + y + z) - (y - x + 3)i$

วิธีทำ

2.1)
$$3x + 2iy - ix + 5y = 7 + 5i$$
$$(3x + 5y) + (2y - x)i = 7 + 5i$$

ใช้คุณสมบัติการเท่ากันของจำนวนเชิงซ้อน จะได้

$$3x + 5y = 7 \qquad \text{..... (1)}$$
$$2y - x = 5 \qquad \text{..... (2)}$$

$(2) \times 3$; $\quad 6y - 3x = 15 \qquad$ ..... (3)

$(1) + (3)$; $\quad 11y = 22$

$$y = 2$$

แทนค่า y ใน (2) จะได้

$$x = -1$$

2.2)
$$(3+4i)^2-2(x-yi) = x+yi$$
$$(3+4i)\cdot(3+4i)-2x+2yi = x+yi$$
$$\{3.3-4.4+i(4.3+3.4)\}-2x+2yi = x+yi$$
$$-7+24i-2x+2yi = x+yi$$
$$-7-2x+(24+2y)i = x+yi$$

ใช้คุณสมบัติการเท่ากันของจำนวนเชิงซ้อน จะได้

$$-7-2x = x \qquad \text{..... (1)}$$
$$24+2y = y \qquad \text{..... (2)}$$

จาก (1) ; $x = -\frac{7}{3}$

จาก (2) ; $y = -24$

2.3)
$$\left(\frac{1+i}{1-i}\right)^2+\frac{1}{x+yi} = 1+i$$
$$\frac{(1+i)(1+i)}{(1-i)(1-i)}+\frac{1}{x+yi} = 1+i$$
$$\frac{\{1-1+(1+1)i\}}{\{1-1+(-1-1)i\}}+\frac{1}{x+yi} = 1+i$$
$$-1+\frac{1}{x+yi} = 1+i$$
$$\frac{1}{x+yi} = 2+i$$
$$x+yi = \frac{1}{2+i}$$
$$= \frac{(2-i)}{(2+i)(2-i)}$$
$$= \frac{2-i}{4+1+(2-2)i}$$
$$= \frac{2-i}{5}$$
$$= \frac{2}{5}-\frac{1}{5}i$$

ใช้คุณสมบัติการเท่ากันของจำนวนเชิงซ้อน จะได้

$$x = \frac{2}{5}$$
$$y = -\frac{1}{5}$$

2.4)

$$(3-2i)(x+yi) = 2(x-2yi) + 2i - 1$$

$$3x+2y + (-2x+3y)i = 2x-4yi + 2i - 1$$

$$= 2x-1 + (2-4y)i$$

ใช้คุณสมบัติการเท่ากันของจำนวนเชิงซ้อน จะได้

$$3x+2y = 2x-1 \quad \text{..... (1)}$$

$$-2x+3y = 2-4y \quad \text{..... (2)}$$

จาก (1) , $x+2y = -1$ ..... (3)

จาก (2) , $-2x+7y = 2$ ..... (4)

$(3)\times 2$, $2x+4y = -2$ ..... (5)

$(4)+(5)$, $11y = 0$

$y = 0$

แทนค่า y ใน (3) , $x = -1$

2.5)

$$2x-3yi + 4xi-2y-5-10i = (x+y+2) - (y-x+3)i$$

$$2x-2y-5 + (4x-3y-10)i = (x+y+2) - (y-x+3)i$$

ใช้คุณสมบัติการเท่ากันของจำนวนเชิงซ้อน จะได้

$$2x-2y-5 = x+y+2 \quad \text{..... (1)}$$

$$4x-3y-10 = -(y-x+3) \quad \text{..... (2)}$$

จาก (1) , $x-3y = 7$ ..... (3)

จาก (2) , $3x-2y = 7$ ..... (4)

$(1)\times 3$, $3x-9y = 21$ ..... (5)

$(4)-(5)$, $7y = -14$

$y = -2$

แทนค่า y ใน (3) , $x = 1$

3. จงหาค่าของ

3.1) $z = -\frac{41+63i}{50} - \frac{(6i+1)}{1-7i}$

3.2) $z = \left(\frac{-1+\sqrt{3}\,i}{2i}\right)^2$

3.3) $z = \frac{13+12i}{6i-2} + \frac{(2i+1)^2}{i+2}$

3.4) $z = (2+i)^6$

3.5) $z = \frac{3i^{30}-i^{19}}{2i-1}$

3.6) $z = \frac{i^4+i^9+i^{16}}{2-i^5+i^{10}-i^{15}}$

วิธีทำ

3.1)
$$
\begin{aligned}
z &= \frac{-41+63i}{50} - \frac{(6i+1)}{1-7i} \\
&= \frac{(-41+63i)(1-7i)-50(6i+1)}{50(1-7i)} \\
&= \frac{\{-41-63(-7)\} + \{63+(-41)(-7)\}i-50(6i+1)}{50(1-7i)} \\
&= \frac{400+350i-300i-50}{50(1-7i)} \\
&= \frac{350+50i}{50(1-7i)} \\
&= \frac{50(7+i)}{50(1-7i)} \\
&= \frac{(7+i)(1+7i)}{(1-7i)(1+7i)} \\
&= \frac{7-7+(1+49)i}{1+49} \\
&= i
\end{aligned}
$$

3.2) $$z = \left(\frac{-1+\sqrt{3}\,i}{2i}\right)^2$$

$$= \frac{(-1+\sqrt{3}\,i)(-1+\sqrt{3}\,i)}{-4}$$

$$= \frac{(-1)(-1)-\sqrt{3}\cdot\sqrt{3}+\left(\sqrt{3}(-1)+(-1)\sqrt{3}\right)i}{-4}$$

$$= \frac{1-3-2\sqrt{3}\,i}{-4}$$

$$= \frac{-2-2\sqrt{3}\,i}{-4}$$

$$= \frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i$$

3.3) $$z = \frac{13+12i}{6i-8}+\frac{(2i+1)^2}{i+2}$$

$$= \frac{13+12i}{6i-8}+\frac{(2i+1)(2i+1)}{i+2}$$

$$= \frac{13+12i}{6i-8}+\frac{\left(1-4+(2+2)i\right)}{i+2}$$

$$= \frac{13+12i}{6i-8}+\frac{(-3+4i)}{i+2}$$

$$= \frac{(13+12i)(2+i)\ +\ (-3+4i)(-8+6i)}{(-8+6i)(2+i)}$$

$$= \frac{(26-12)+(24+13)i+(24-24)+(-32-18)i}{(-16-6)+(12-8)i}$$

$$= \frac{14+37i-50i}{-22+4i}$$

$$= \frac{14-13i}{2(-11+2i)}$$

$$= \frac{(14-13i)(-11-2i)}{2(-11+2i)(-11-2i)}$$

$$= \frac{-154-26+(143-28)i}{2\left(121+4+(-22+22)i\right)}$$

$$= \frac{-180+115i}{2\times 125}$$

$$= -\frac{18}{25}+\frac{23}{50}i$$

3.4) $z = (2+i)^6$

$= ((2+i)^2)^3$

$= \{(2+i)(2+i)\}^3$

$= \{4-1+(2+2)i\}^3$

$= \{3+4i\}^3$

$= (3+4i)^2(3+4i)$

$= \{(3+4i)(3+4i)\}(3+4i)$

$= \{9-16+(12+12)i\}(3+4i)$

$= (-7+24i)(3+4i)$

$= -21-96+(72-28)i$

$= -117+44i$

3.5 $z = \dfrac{3i^{30}-i^{19}}{2i-1}$

$= \dfrac{3(i^2)^{15}-(i^2)^9 i}{2i-1}$

$= \dfrac{3(-1)^{15}-(-1)^9 i}{2i-1}$

$= \dfrac{-3+i}{2i-1}$

$= \dfrac{(-3+i)(-1-2i)}{(-1+2i)(-1-2i)}$

$= \dfrac{3+2+(-1+6)i}{1+4+(-2+2)i}$

$= \dfrac{5+5i}{5}$

$= 1+i$

ข้อสังเกต

อาจจะใช้ความสัมพันธ์ที่ว่า $i^{4k} = 1$, $i^{4k+1} = i$, $i^{4k+2} = -1$, $i^{4k+3} = -i$

ดังนั้น $i^{30} = i^{4(7)+2} = -1$

และ $i^{19} = i^{4(4)+3} = -i$

3.6) $z = \dfrac{i^4+i^9+i^{16}}{2-i^5+i^{10}-i^{15}}$

$= \dfrac{1+i+1}{2-i+(-1)-(-i)}$

$= \dfrac{2+i}{2-i-1+i}$

$= 2+i$

$z = \dfrac{2\left(\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3}\right)}{2\left(\cos\frac{\pi}{2}+i\sin\frac{\pi}{2}\right)\left(\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3}\right)}$

$= \cos\left(\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{3}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{3}\right)$

$= \cos\left(-\frac{\pi}{2}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{2}\right)$

หรือ $z = \cos\frac{3\pi}{2} + i\sin\frac{3\pi}{2}$

4.2) $z = \dfrac{i-1}{i\left(1-\cos\frac{2\pi}{5}\right)+\sin\frac{2\pi}{5}}$

จากสูตรตรีโกณมิติ $1-\cos 2A = 2\sin^2 A$

ดังนั้น $1-\cos\frac{2\pi}{5} = 2\sin^2\frac{\pi}{5}$

และจากสูตรตรีโกณมิติ $\sin 2A = 2\sin A\cos A$

ดังนั้น $\sin\frac{2\pi}{5} = 2\sin\frac{\pi}{5}\cos\frac{\pi}{5}$

จึงได้ว่า

$z = \dfrac{i-1}{i\left(2\sin^2\frac{\pi}{5}+2\sin\frac{\pi}{5}\cos\frac{\pi}{5}\right)}$

$= \dfrac{i-1}{2\sin\frac{\pi}{5}\left(\cos\frac{\pi}{5}+i\sin\frac{\pi}{5}\right)}$

พิจารณา $-1+i$

จะพบว่า $a = -1$, $b = 1$, $r = \sqrt{a^2+b^2} = \sqrt{1+1} = \sqrt{2}$

4. จงหาค่าในรูปเชิงขั้วของ

4.1) $z = \dfrac{1+i\sqrt{3}}{2i(\cos 60^\circ + i\sin 60^\circ)}$

4.2) $z = \dfrac{i-1}{i\left(1-\cos\frac{2\pi}{5}\right)+\sin\frac{2\pi}{5}}$

วิธีทำ

4.1) $z = \dfrac{1+i\sqrt{3}}{2i(\cos 60^\circ + i\sin 60^\circ)}$

พิจารณา $1+i\sqrt{3}$

จะพบว่า $a = 1$, $b = \sqrt{3}$, $r = \sqrt{a^2+b^2} = \sqrt{1+3} = 2$

และ $\theta = \tan^{-1}\dfrac{b}{a} = \tan^{-1}\sqrt{3}$

$= \dfrac{\pi}{3}$

ดังนั้น $1+i\sqrt{3} = r(\cos\theta + i\sin\theta)$

$= 2\left(\cos\dfrac{\pi}{3} + i\sin\dfrac{\pi}{3}\right)$

พิจารณา $2i$

จะพบว่า $a = 0$, $b = 2$, $r = \sqrt{a^2+b^2} = \sqrt{0+4} = 2$

และ $\theta = \dfrac{\pi}{2}$

ดังนั้น $2i = r(\cos\theta + i\sin\theta)$

$= 2\left(\cos\dfrac{\pi}{2} + i\sin\dfrac{\pi}{2}\right)$

จาก $z = \dfrac{1+i\sqrt{3}}{2i\left(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}\right)}$

โดยการแทนค่าผลที่ได้

และ $\theta = \tan^{-1}\dfrac{b}{a} = \tan^{-1}(-1)$

$= \dfrac{3\pi}{4}$

$-1+i = r(\cos\theta + i\sin\theta)$

$= \sqrt{2}\left(\cos\dfrac{3\pi}{4} + i\sin\dfrac{3\pi}{4}\right)$

เพราะฉะนั้น $$z = \frac{\sqrt{2}\left(\cos\frac{3\pi}{4} + i\sin\frac{3\pi}{4}\right)}{2\sin\frac{\pi}{5}\left(\cos\frac{\pi}{5} + i\sin\frac{\pi}{5}\right)}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}\sin\frac{\pi}{5}}\left\{\cos\left(\frac{3\pi}{4} - \frac{\pi}{5}\right) + i\sin\left(\frac{3\pi}{4} - \frac{\pi}{5}\right)\right\}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}\sin\frac{\pi}{5}}\left(\cos\frac{11\pi}{20} + i\sin\frac{11\pi}{20}\right)$$

5. จงแสดงว่า

$$\mathrm{Im}(iz) = \mathrm{Re}(z)$$

และ $$\mathrm{Re}(iz) = -\mathrm{Im}\, z$$

วิธีทำ ให้

$$z = a + bi$$

$$iz = i(a + bi)$$

$$= -b + ai$$

ดังนั้น $\mathrm{Im}(iz) = a = \mathrm{Re}(z)$

และ $\mathrm{Re}(iz) = -b = -\mathrm{Im}(z)$

6. จงอธิบายความหมายทางเรขาคณิตของสมการต่อไปนี้

6.1) $|z + i| = 3$

6.2) $|z| \leqslant 2$

6.3) $\mathrm{Im}(z) \geqslant 1$

วิธีทำ

6.1) จาก $|z + i| = 3$

ดังนั้น $|z - (-i)| = 3$

ดังนั้น แทนวงกลมรัศมี 3 หน่วย และจุดศูนย์กลางที่ $-i = 0 + (-1)i$

6.2) ให้ $z = a + ib$

$|z| \leqslant 2$ หมายถึง $\sqrt{a^2 + b^2} \leqslant 2$

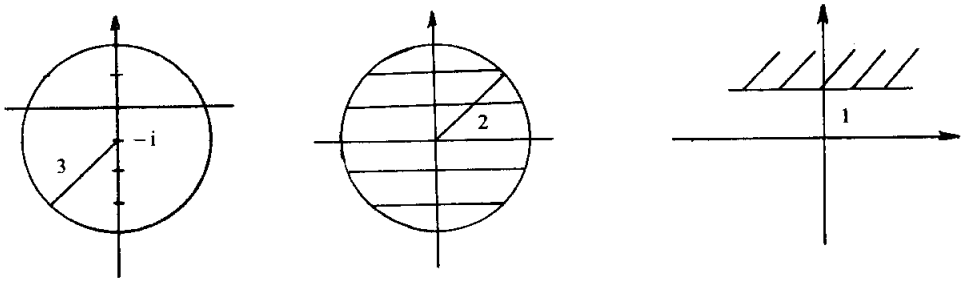
หรือ $a^2 + b^2 \leqslant 2^2$

นั่นคือ $|z| \leqslant 2$ แทนเซตของจุดในระนาบเชิงซ้อนซึ่งอยู่บนหรืออยู่ในวงกลมรัศมี 2 หน่วย และจุดศูนย์กลางที่จุดกำเนิด

6.3) ให้ $z = a+ib$

$\mathrm{Im}(z) \geqslant 1$ หมายถึง $b \geqslant 1$

นั่นคือ $\mathrm{Im}(z) \geqslant 1$ แทนส่วนของระนาบเชิงซ้อนที่อยู่บนหรือเหนือเส้นตรง $b = 1$



เฉลยแบบฝึกหัด 7.4

1. ถ้า $z_1 = 3-4i$ และ $z_2 = -2+3i$ แล้ว จงหา

   1.1) $3z_1 - 2\bar{z}_2$

   1.2) $z_1 - \bar{z}_2 - 4$

   1.3) $|2\bar{z}_1 + 3\bar{z}_2 - 1|$

วิธีทำ

1.1)
$$\begin{aligned} 3z_1 - 2\bar{z}_2 &= 3(3-4i) - 2\overline{(-2+3i)} \\ &= 9-12i - 2(-2-3i) \\ &= 9-12i + 4+6i \\ &= 13-6i \end{aligned}$$

1.2)
$$\begin{aligned} z_1 - \bar{z}_2 - 4 &= (3-4i) - \overline{(-2+3i)} - 4 \\ &= 3-4i-(-2-3i)-4 \\ &= 3-4i+2+3i-4 \\ &= 1-i \end{aligned}$$

1.3)
$$\begin{aligned} |2\bar{z}_1 + 3\bar{z}_2 - 1| &= |2\overline{(3-4i)} + 3\overline{(-2+3i)} - 1| \\ &= |2(3+4i)+3(-2-3i)-1| \\ &= |6+8i-6-9i-1| \\ &= |-1-i| \\ &= \sqrt{1+1} \\ &= \sqrt{2} \end{aligned}$$

2. ถ้า $z_1 = 1-i$, $z_2 = -2+4i$ และ $z_3 = \sqrt{3}-2i$ จงหา

   2.1) $|2z_2 - 3z_1|^2$

   2.2) $\left|\dfrac{z_1+z_2+1}{z_1-z_2+i}\right|$

   2.3) $\mathrm{Re}\,(2z_1^3 + 3z_2^2 - 5z_3^2)$

   2.4) $\mathrm{Im}\left(\dfrac{z_1 z_2}{z_3}\right)$

วิธีทำ

2.1)
$$\begin{aligned}|2z_2-3z_1|^2 &= |2(-2+4i)-3(1-i)|^2\\ &= |-4+8i-3+3i|^2\\ &= |-7+11i|^2\\ &= \left(\sqrt{49+121}\right)^2\\ &= 170\end{aligned}$$

2.2)
$$\begin{aligned}\left|\frac{z_1+z_2+1}{z_1-z_2+i}\right| &= \left|\frac{1-i+(-2+4i)+1}{1-i-(-2+4i)+i}\right|\\ &= \left|\frac{1-i-2+4i+1}{1-i+2-4i+i}\right|\\ &= \left|\frac{3i}{3-4i}\right|\\ &= \frac{|3i|}{|3-4i|}\\ &= \frac{3}{\sqrt{9+16}}\\ &= \frac{3}{5}\end{aligned}$$

2.3) $\operatorname{Re}(2z_1^3+3z_2^2-5z_3^2)$

พิจารณา
$$\begin{aligned}z_1^2 &= (1-i)(1-i) = 1-1+(-1-1)i = -2i\\ z_1^3 &= -2i(1-i) = -2-2i\\ z_2^2 &= (-2+4i)(-2+4i) = 4-16+(-8-8)i\\ &= -12-16i\\ z_3^2 &= (\sqrt{3}-2i)(\sqrt{3}-2i) = 3-4+(-2\sqrt{3}-2\sqrt{3})i\\ &= -1-4\sqrt{3}\,i\\ 2z_1^3+3z_2^2-5z_3^2 &= 2(-2-2i)+3(-12-16i)-5(-1-4\sqrt{3}\,i)\\ &= -4-4i-36-48i+5+20\sqrt{3}\,i\\ &= -35-(52-20\sqrt{3})i\end{aligned}$$

ดังนั้น
$$\operatorname{Re}(2z_1^3+3z_2^2-5z_3^2) = -35$$

2.4) $\operatorname{Im}\left(\frac{z_1z_2}{z_3}\right)$

พิจารณา $\frac{z_1z_2}{z_3} = \frac{(1-i)(-2+4i)}{\sqrt{3}-2i} = \frac{-2+4+(2+4)i}{\sqrt{3}-2i}$

$$= \frac{2+6i}{\sqrt{3}-2i}\cdot\frac{\sqrt{3}+2i}{\sqrt{3}+2i} = \frac{2\sqrt{3}-12+(6\sqrt{3}+4)i}{3+4}$$

$$= \frac{2\sqrt{3}-12+(6\sqrt{3}+4)i}{7}$$

ดังนั้น $\operatorname{Im}\left(\frac{z_1z_2}{z_3}\right) = \frac{6\sqrt{3}+4}{7}$

3. จงแสดงว่า

3.1) $\overline{\bar{z}+3i} = z-3i$

3.2) $\overline{iz} = -i\bar{z}$

3.3) $\frac{\overline{(2+i)^2}}{3-4i} = 1$

3.4) ถ้า $z = \sqrt{3}-2i$ แล้ว $(z-\bar{z})^5 = -1024i$

วิธีทำ

3.1) ให้

$$z = a+bi$$
$$\bar{z} = a-bi$$
$$\bar{z}+3i = a-bi+3i$$
$$= a+(3-b)i$$
$$\overline{\bar{z}+3i} = a-(3-b)i$$
$$= a+bi-3i$$
$$= z-3i$$

3.2) ให้

$$z = a+bi$$
$$iz = i(a+bi) = -b+ai$$
$$\overline{iz} = -b-ai$$

แต่ $-i\bar{z} = -i(a-bi)$

$$= -ai-b$$
$$= -b-ai$$

ดังนั้น $\overline{iz} = -i\bar{z}$

3.3) $\overline{2+i} = 2-i$

$$\overline{(2+i)}^2 = (2-i)(2-i) = 4-1+(-2-2)i$$

$$= 3-4i$$

ดังนั้น $\dfrac{\overline{(2+i)}^2}{3-4i} = \dfrac{3-4i}{3-4i} = 1$

3.4) ให้ $z = \sqrt{3}-2i$

$$\bar{z} = \sqrt{3}+2i$$

$$z-\bar{z} = \sqrt{3}-2i-(\sqrt{3}+2i) = -4i$$

$$(z-\bar{z})^5 = (-4i)^5$$

$$= (-4)^5 i^5$$

$$= -1024i$$

4. สำหรับจำนวนเชิงซ้อน z ใด ๆ จงแสดงว่า

4.1) $z = 0$ ก็ต่อเมื่อ $z\cdot\bar{z} = 0$

4.2) $\mathrm{Im}(z) = 0$ ก็ต่อเมื่อ $z = \bar{z}$

4.3) $\mathrm{Re}(z) = 0$ ก็ต่อเมื่อ $z = -\bar{z}$

4.4) $|z^2| = |z|^2$

วิธีทำ

4.1) ให้ $z = a+bi$

$$z = 0 \leftrightarrow a = b = 0$$

$$\leftrightarrow a^2+b^2 = 0$$

$$z\cdot\bar{z} = 0$$

4.2) $\mathrm{Im}(z) = 0 \leftrightarrow b = 0$

$$\leftrightarrow a+0i = a-0i$$

$$\leftrightarrow z = \bar{z}$$

4.3) $\mathrm{Re}(z) = 0 \leftrightarrow a = 0$

$$\leftrightarrow 0+bi = -(0-bi)$$

$$z = -\bar{z}$$

4.4) จาก $|z^2| = |(a+bi)(a+bi)|$

$$= |a^2 - b^2 + 2abi|$$
$$= \sqrt{(a^2-b^2)^2 + 4a^2b^2}$$
$$= \sqrt{a^4 - 2a^2b^2 + b^4 + 4a^2b^2}$$
$$= \sqrt{a^4 + 2a^2b^2 + b^4}$$
$$= \sqrt{(a^2+b^2)^2}$$
$$= a^2 + b^2$$
$$= |z|^2$$

5. จงแสดงว่า $z_1 = -1-i$ และ $z_2 = -2+3i$ สอดคล้องคุณสมบัติอสมการของสามเหลี่ยม

วิธีทำ พิจารณา $z_1 + z_2 = -1-i+(-2+3i) = -3+2i$

$$|z_1+z_2| = \sqrt{9+4} = \sqrt{13}$$

พิจารณา $|z_1| + |z_2| = |-1-i| + |-2+3i|$

$$= \sqrt{1+1} + \sqrt{4+9}$$
$$= \sqrt{2} + \sqrt{13}$$

ดังนั้น $|z_1+z_2| \leqslant |z_1| + |z_2|$

6. จงพิสูจน์ทฤษฎีบท 6.4.5 ข้อ 2), 4), 6)

วิธีทำ

2) ถ้า $z_2 \neq 0$, $\left|\frac{z_1}{z_2}\right| = \frac{|z_1|}{|z_2|}$

ให้ $z_2 \neq 0$ ดังนั้น $|z_2| \neq 0$

เนื่องจาก $|z_1| = \left|\frac{z_1}{z_2}\cdot z_2\right| = \left|\frac{z_1}{z_2}\right|\cdot|z_2|$

ดังนั้น $\frac{|z_1|}{|z_2|} = \left|\frac{z_1}{z_2}\right|$

4) $|z_1 - z_2| = |z_2 - z_1|$

เนื่องจาก $|z_1 - z_2| = |-(z_2 - z_1)| = |z_2 - z_1|$

6) $|z_1 - z_2| \leqslant |z_1 - z_3| + |z_2 - z_3|$

เนื่องจาก $|z_1 - z_2| = |(z_1 - z_3) + (z_3 - z_2)|$

$$\leqslant |z_1 - z_3| + |z_3 - z_2|$$
$$= |z_1 - z_3| + |z_2 - z_3|$$

เฉลยแบบฝึกหัด 7.5

1. จงใช้สูตรของเดอมัวฟ์ หาค่าต่อไปนี้

1.1) $\dfrac{2}{(1-i)^4}$

1.2) $\dfrac{2(\cos 15^\circ + i\sin 15^\circ)^7}{4(\cos 45^\circ + i\sin 45^\circ)^3}$

1.3) $\left(\dfrac{1+\sqrt{3}\,i}{1-\sqrt{3}\,i}\right)^{10}$

วิธีทำ

1.1) $\dfrac{2}{(1-i)^4}$

พิจารณา $1-i$; $a = 1$, $b = -1$, $r = \sqrt{2}$

$$\begin{aligned}\theta &= \tan^{-1}\frac{b}{a}\\ &= \tan^{-1} -1\\ &= -\frac{\pi}{4}\end{aligned}$$

ดังนั้น
$$\begin{aligned}1-i &= \sqrt{2}\left(\cos -\frac{\pi}{4} + i\sin -\frac{\pi}{4}\right)\\ &= \sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4} - i\sin\frac{\pi}{4}\right)\\ (1-i)^4 &= 2^2(\cos\pi - i\sin\pi)\\ &= 4(-1-0) = -4\end{aligned}$$

นั่นคือ $\dfrac{2}{(1-i)^4} = \dfrac{2}{-4} = -\dfrac{1}{2}$

1.2)
$$\begin{aligned}\frac{\{2(\cos 15^\circ + i\sin 15^\circ)\}^7}{\{4(\cos 45^\circ + i\sin 45^\circ)\}^3} &= \frac{2^7(\cos 105^\circ + i\sin 105^\circ)}{4^3(\cos 135^\circ + i\sin 135^\circ)}\\ &= \frac{128}{64}\{\cos(105^\circ - 135^\circ) + i\sin(105^\circ - 135^\circ)\}\\ &= 2(\cos(-30^\circ) + i\sin(-30^\circ))\\ &= 2(\cos 30^\circ - i\sin 30^\circ)\\ &= 2\left(\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}\right)\\ &= \sqrt{3} - 1\end{aligned}$$

1.3) $\left(\frac{1+\sqrt{3}\,i}{1-\sqrt{3}\,i}\right)^{10}$

พิจารณา $1+\sqrt{3}\,i$; $a = 1$, $b = \sqrt{3}$, $r = \sqrt{1+3} = 2$

$$\theta = \tan^{-1}\frac{b}{a}$$
$$= \tan^{-1}\sqrt{3}$$
$$= \frac{\pi}{3}$$

ดังนั้น $1+\sqrt{3}\,i = 2\left(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}\right)$

พิจารณา $1-\sqrt{3}\,i$; $a = 1$, $b = -\sqrt{3}$, $r = \sqrt{1+3} = 2$

$$\theta = \tan^{-1}\frac{b}{a}$$
$$= \tan^{-1} -\sqrt{3}$$
$$= -\frac{\pi}{3}$$

ดังนั้น $1-\sqrt{3}\,i = 2\left(\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{3}\right)\right)$

เพราะฉะนั้น

$$\left(\frac{1+\sqrt{3}\,i}{1-\sqrt{3}\,i}\right)^{10} = \left\{\frac{2\left(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}\right)}{2\left(\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{3}\right)\right)}\right\}^{10}$$
$$= \left(\cos\frac{2\pi}{3} + i\sin\frac{2\pi}{3}\right)^{10}$$
$$= \cos\frac{20\pi}{3} + i\sin\frac{20\pi}{3}$$

2. จงแสดงว่า

2.1) $\cos 5\theta = 16\cos^5\theta - 20\cos^3\theta + 5\cos\theta$

2.2) $\frac{\sin 5\theta}{\sin\theta} = 16\cos^4\theta - 12\cos^2\theta + 1$

ถ้า $\theta \neq 0, \pm\pi, \pm 2\pi, \ldots$

วิธีทำ

2.1) จากสูตร $\cos^n\theta = \frac{1}{2^n}\left(z+\frac{1}{z}\right)^n$

ดังนั้น $\cos^5\theta = \frac{1}{2^5}\left(z+\frac{1}{z}\right)^5$

$$= \frac{1}{32}\left(z^5+5z^4\cdot\frac{1}{z}+10z^3\cdot\frac{1}{z^2}+10z^2\cdot\frac{1}{z^3}+5z\cdot\frac{1}{z^4}+\frac{1}{z^5}\right)$$

$$= \frac{1}{32}\left[\left(z^5+\frac{1}{z^5}\right)+5\left(z^3+\frac{1}{z^3}\right)+10\left(z+\frac{1}{z}\right)\right]$$

แต่ $z+\frac{1}{z} = 2\cos\theta$

$z^3+\frac{1}{z^3} = 2\cos 3\theta$

และ $z^5+\frac{1}{z^5} = 2\cos 5\theta$

ดังนั้น $\cos^5\theta = \frac{1}{32}\left[2\cos 5\theta+10\cos 3\theta+20\cos\theta\right]$

$$= \frac{1}{16}\left[\cos 5\theta+5\cos 3\theta+10\cos\theta\right]$$

หรือ $\cos 5\theta = 16\cos^5\theta-5\cos 3\theta-10\cos\theta$

แต่ $\cos 3\theta = 4\cos^3\theta-3\cos\theta$

เพราะฉะนั้น

$$\cos 5\theta = 16\cos^5\theta-5(4\cos^3\theta-3\cos\theta)-10\cos\theta$$

$$= 16\cos^5\theta-20\cos^3\theta+5\cos\theta$$

2.2) จากสูตร $\sin^n\theta = \frac{1}{(2i)^n}\left(z-\frac{1}{z}\right)^n$

ดังนั้น $\sin^5\theta = \frac{1}{(2i)^5}\left(z-\frac{1}{z}\right)^5$

$$= \frac{1}{32i}\left(z^5-5z^4\cdot\frac{1}{z}+10z^3\cdot\frac{1}{z^2}-10z^2\cdot\frac{1}{z^3}+5z\cdot\frac{1}{z^4}-\frac{1}{z^5}\right)$$

$$= \frac{1}{32i}\left[\left(z^5-\frac{1}{z^5}\right)-5\left(z^3-\frac{1}{z^3}\right)+10\left(z-\frac{1}{z}\right)\right]$$

แต่ $z - \frac{1}{z} = 2i\sin\theta$

$z^3 - \frac{1}{z^3} = 2i\sin 3\theta$

และ $5 - \frac{1}{z^5} = 2i\sin 5\theta$

ดังนั้น $\sin^5\theta = \frac{1}{32i}\left[2i\sin 5\theta - 5(2i\sin 3\theta) + 10(2i\sin\theta)\right]$

$= \frac{1}{16}(\sin 5\theta - 5\sin 3\theta + 10\sin\theta)$

แต่ $\sin 3\theta = 3\sin\theta - 4\sin^3\theta$

เพราะฉะนั้น

$\sin^5\theta = \frac{1}{16}(\sin 5\theta - 15\sin\theta + 20\sin^3\theta + 10\sin\theta)$

$= \frac{1}{16}(\sin 5\theta + 20\sin^3\theta + 5\sin\theta)$

หรือ $\sin 5\theta = 16\sin^5\theta - 20\sin^3\theta + 5\sin\theta$

นั่นคือ $\frac{\sin 5\theta}{\sin\theta} = 16\sin^4\theta - 20\sin^2\theta + 5$

$= 16(1-\cos^2\theta)^2 - 20(1-\cos^2\theta) + 5$

$= 16(1 - 2\cos^2\theta + \cos^4\theta) - 20 + 20\cos\theta + 5$

$= 16\cos^4\theta - 12\cos^2\theta + 1$

3. จงแสดงว่า $2 + i = \sqrt{5}\, e^{\tan^{-1}\frac{1}{2}}$

วิธีทำ ในที่นี้ $a = 2,\ b = 1,\ r = \sqrt{4+1} = \sqrt{5}$

$\theta = \tan^{-1}\frac{1}{2}$

ดังนั้น $2 + i = r(\cos\theta + i\sin\theta)$

$= r\,e^{i\theta}$

$= \sqrt{5}\, e^{i\tan^{-1}\frac{1}{2}}$

4. จงหาค่ารากทั้งหมดของ

4.1) $8^{\frac{1}{3}}$

4.2) $(-32)^{\frac{1}{5}}$

4.3) $(-2\sqrt{3} - 2i)^{\frac{1}{4}}$

4.4) $(4\sqrt{2} + 4\sqrt{2}\,i)^{\frac{1}{2}}$

4.5) $i^{\frac{1}{2}}$

4.6) $(-15 - 8i)^{\frac{1}{2}}$

วิธีทำ

4.1) $8^{\frac{1}{3}}$

ในที่นี้ $w = 8$ ซึ่งเขียนในรูปเชิงขั้วได้เป็น

$$8 = 8(\cos\theta + i\sin\theta)$$

จากสูตรรากที่ n

$$z_k = \sqrt[n]{\rho}\left[\cos\left(\frac{\alpha}{n} + \frac{2\pi}{n}k\right) + i\sin\left(\frac{\alpha}{n} + \frac{2\pi}{n}\right)k\right]$$

$$k = 0, 1, 2, \ldots, n-1$$

โดย $\rho = 8,\ n = 3,\ \alpha = 0$

ดังนั้น $z_k = \sqrt[3]{8}\left[\cos\frac{2\pi}{3}k + i\sin\frac{2\pi}{3}k\right]$ $\quad k = 0, 1, 2$

ผลที่ได้คือ

$$z_0 = 2(\cos\theta + i\sin\theta) = 2$$

$$z_1 = 2\left(\cos\frac{2\pi}{3} + i\sin\frac{2\pi}{3}\right) = -1 + \sqrt{3}i$$

$$z_2 = 2\left(\cos\frac{4\pi}{3} + i\sin\frac{4\pi}{3}\right) = -1 - \sqrt{3}i$$

4.2) $(-32)^{\frac{1}{5}}$

ในที่นี้ $w = -32$ ซึ่งเขียนในรูปเชิงขั้วได้เป็น

$$-32 = 32(\cos\pi + i\sin\pi)$$

จากสูตรรากที่ n

$$z_k = \sqrt[n]{\rho}\left[\cos\left(\frac{\alpha}{n} + \frac{2\pi}{n}k\right) + i\sin\left(\frac{\alpha}{n} + \frac{2\pi}{n}\right)k\right]$$

$$k = 0, 1, 2, \ldots, n-1$$

โดย $\rho = 32,\ n = 5,\ \alpha = \pi$

ดังนั้น $z_k = \sqrt[5]{32}\left[\cos\left(\frac{\pi}{5} + \frac{2\pi}{5}\right)k + i\sin\left(\frac{\pi}{5} + \frac{2\pi}{5}\right)k\right]$ $\quad k = 0, 1, 2, 3, 4$

ผลที่ได้คือ

$$z_0 = 2\left(\cos\frac{\pi}{5} + i\sin\frac{\pi}{5}\right)$$

$$z_1 = 2\left(\cos\frac{3\pi}{5} + i\sin\frac{3\pi}{5}\right)$$

$$z_2 = 2\left(\cos\frac{5\pi}{5} + i\sin\frac{5\pi}{5}\right)$$

$$= 2(\cos\pi + i\sin\pi) = -2$$

$$z_3 = 2\left(\cos\frac{7\pi}{5} + i\sin\frac{7\pi}{5}\right)$$

$$z_4 = 2\left(\cos\frac{9\pi}{5} + i\sin\frac{9\pi}{5}\right)$$

4.3) $(-2\sqrt{3} - 2i)^{\frac{1}{4}}$

ในที่นี้ $w = -2\sqrt{3} - 2i$ ซึ่งเขียนในรูปเชิงขั้วได้เป็น

$$-2\sqrt{3} - 2i = 4\left(\cos\frac{7\pi}{6} + i\sin\frac{7\pi}{6}\right)$$

จากสูตรรากที่ n

$$z_k = \sqrt[n]{\rho}\left[\cos\left(\frac{\alpha}{n} + \frac{2\pi}{n}k\right) + i\sin\left(\frac{\alpha}{n} + \frac{2\pi}{n}\right)k\right]$$

$$k = 0, 1, 2, \ldots, n-1$$

โดย $\rho = 4$, $n = 4$, $\alpha = \frac{7\pi}{6}$

ดังนั้น $z_k = \sqrt[4]{4}\left[\cos\left(\frac{7\pi}{24} + \frac{2\pi}{4}k\right) + i\sin\left(\frac{7\pi}{24} + \frac{2\pi}{4}k\right)\right]$ $k = 0, 1, 2, 3$

ผลที่ได้คือ

$$z_0 = \sqrt{2}\left(\cos\frac{7\pi}{24} + i\sin\frac{7\pi}{24}\right)$$

$$z_1 = \sqrt{2}\left(\cos\frac{19\pi}{24} + i\sin\frac{19\pi}{24}\right)$$

$$z_2 = \sqrt{2}\left(\cos\frac{31\pi}{24} + i\sin\frac{31\pi}{24}\right)$$

$$z_3 = \sqrt{2}\left(\cos\frac{43\pi}{24} + i\sin\frac{43\pi}{24}\right)$$

4.4) $(4\sqrt{2}+4\sqrt{2}\,i)^{\frac{1}{2}}$

ในที่นี้ $w = 4\sqrt{2}+4\sqrt{2}\,i$ ซึ่งเขียนในรูปเชิงขั้วได้เป็น

$$4\sqrt{2}+4\sqrt{2}\,i = 8\left(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}\right)$$

จากสูตรรากที่ n

$$z_k = \sqrt[n]{\rho}\left[\cos\left(\frac{\alpha}{n}+\frac{2\pi}{n}k\right)+i\sin\left(\frac{\alpha}{n}+\frac{2\pi}{n}k\right)\right]$$

$$k = 0, 1, 2, \ldots, n-1$$

โดย $\rho = 8,\ n = 2,\ \alpha = \frac{\pi}{4}$

ดังนั้น $z_k = \sqrt[2]{8}\left[\cos\left(\frac{\pi}{8}+\frac{2\pi}{2}k\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{8}+\frac{2\pi}{2}k\right)\right] \qquad k = 0, 1$

ผลที่ได้คือ

$$z_0 = \sqrt{8}\left(\cos\frac{\pi}{8}+i\sin\frac{\pi}{4}\right)$$

$$z_1 = \sqrt{8}\left(\cos\frac{5\pi}{8}+i\sin\frac{5\pi}{4}\right)$$

4.5) $i^{\frac{1}{2}}$

ในที่นี้ $w = i$ ซึ่งเขียนในรูปเชิงขั้วได้เป็น

$$i = \cos\frac{\pi}{2}+i\sin\frac{\pi}{2}$$

จากสูตรรากที่ n

$$z_k = \sqrt[n]{\rho}\left[\cos\left(\frac{\alpha}{n}+\frac{2\pi}{n}k\right)+i\sin\left(\frac{\alpha}{n}+\frac{2\pi}{n}k\right)\right]$$

$$k = 0, 1, 2, \ldots, n-1$$

โดย $\rho = 1,\ n = 2,\ \alpha = \frac{\pi}{2}$

ดังนั้น $z_k = \cos\left(\frac{\pi}{4}+\frac{2\pi}{2}k\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{4}+\frac{2\pi}{2}k\right) \qquad k = 0, 1$

ผลที่ได้คือ

$$z_0 = \cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4} = \frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{2}}i$$

$$z_1 = \cos\frac{5\pi}{4}+i\sin\frac{5\pi}{4} = -\frac{1}{\sqrt{2}}-\frac{1}{\sqrt{2}}i$$

4.6) $(-15-8i)^{\frac{1}{2}}$

ในที่นี้ $w = -15-8i$ ซึ่งเขียนในรูปเชิงขั้วได้เป็น

$$-15-8i = 17(\cos\theta + i\sin\theta)$$

โดยที่ $\cos\theta = \frac{a}{r} = -\frac{15}{17}$ และ $\sin\theta = \frac{b}{r} = \frac{-8}{17}$

จากสูตรรากที่ n

$$z_k = \sqrt[n]{\rho}\left[\cos\left(\frac{\alpha}{n}+\frac{2\pi}{n}k\right)+i\sin\left(\frac{\alpha}{n}+\frac{2\pi}{n}k\right)\right]$$

$$k = 0, 1, 2, \ldots, n-1$$

โดย $\rho = 17$, $n = 2$, θ เป็นไปตาม $\cos\theta = -\frac{15}{17}$, $\sin\theta = \frac{-8}{17}$

ดังนั้น $z_k = \sqrt{17}\left[\cos\left(\frac{\theta}{2}+\frac{2\pi}{2}k\right)+i\sin\left(\frac{\theta}{2}+\frac{2\pi}{2}k\right)\right]$ $k = 0, 1$

ผลที่ได้คือ

$$z_0 = \sqrt{17}\left(\cos\frac{\theta}{2}+i\sin\frac{\theta}{2}\right)$$

$$z_1 = \sqrt{17}\left(\cos\left(\frac{\theta}{2}+\pi\right)+i\sin\left(\frac{\theta}{2}+\pi\right)\right)$$

$$= -\sqrt{17}\left(\cos\frac{\theta}{2}+i\sin\frac{\theta}{2}\right)$$

แต่ จากสูตรตรีโกณมิติ

$$\cos\frac{\theta}{2} = \pm\sqrt{\frac{1+\cos\theta}{2}}$$

$$= \pm\sqrt{\frac{1-15/17}{2}} = \pm\frac{1}{\sqrt{17}}$$

และ $\sin\frac{\theta}{2} = \pm\sqrt{\frac{1-\cos\theta}{2}}$

$$= \pm\sqrt{\frac{1+15/17}{2}} = \pm\frac{4}{\sqrt{17}}$$

เนื่องจาก θ อยู่ในจตุภาคที่ 3, $\frac{\theta}{2}$ จึงอยู่ในจตุภาคที่ 2

ทำให้เลือก $\cos\frac{\theta}{2} = -\frac{1}{\sqrt{17}}$ และ $\sin\frac{\theta}{2} = \frac{4}{\sqrt{17}}$

นั่นคือ $z_0 = -1+4i$

$z_1 = 1-4i$

5. จงแก้สมการต่อไปนี้

5.1) $z^5 - 1 = 0$

5.2) $z^4 + 81 = 0$

5.3) $z^6 + 1 = -\sqrt{3}\,i$

วิธีทำ

5.1) จากโจทย์จะพบว่า $z^5 = 1$

ในที่นี้ $w = 1$ เขียนในรูปเชิงขั้วได้เป็น

$$1 = \cos\theta + i\sin\theta$$

จากสูตรรากที่ n

$$z_k = \sqrt[n]{\rho}\left[\cos\left(\frac{\alpha}{n} + \frac{2\pi}{n}k\right) + i\sin\left(\frac{\alpha}{n} + \frac{2\pi}{n}k\right)\right] ; \quad k = 0, 1, 2, \ldots, n-1$$

โดย $\rho = 1, \quad n = 5, \quad \alpha = 0$

ดังนั้น $z_k = \cos\frac{2\pi}{5}k + i\sin\frac{2\pi}{5}k ; \qquad k = 0, 1, 2, 3, 4$

ผลที่ได้คือ

$$z_0 = \cos\theta + i\sin\theta = 1$$

$$z_1 = \cos\frac{2\pi}{5} + i\sin\frac{2\pi}{5}$$

$$z_2 = \cos\frac{4\pi}{5} + i\sin\frac{4\pi}{5}$$

$$z_3 = \cos\frac{6\pi}{5} + i\sin\frac{6\pi}{5}$$

$$z_4 = \cos\frac{8\pi}{5} + i\sin\frac{8\pi}{5}$$

5.2) จากโจทย์จะพบว่า $z^4 = -81$

ในที่นี้ $w = -81$ เขียนในรูปเชิงขั้วได้เป็น

$$-81 = 81(\cos\pi + i\sin\pi)$$

จากสูตรรากที่ n

$$z_k = \sqrt[n]{\rho}\left[\cos\left(\frac{\alpha}{n} + \frac{2\pi}{n}k\right) + i\sin\left(\frac{\alpha}{n} + \frac{2\pi}{n}k\right)\right] ; \quad k = 0, 1, 2, \ldots, n-1$$

โดย $\rho = 81, \quad n = 4, \quad \alpha = \pi$

ดังนั้น $z_k = \sqrt[4]{81}\left[\cos\left(\frac{\pi}{4} + \frac{2\pi}{4}k\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{4} + \frac{2\pi}{4}k\right)\right] ; \qquad k = 0, 1, 2, 3$

ผลที่ได้คือ

$$z_0 = 3\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right) = \frac{3}{\sqrt{2}} + \frac{3}{\sqrt{2}}i$$

$$z_1 = 3\left(\cos\frac{3\pi}{4} + i\sin\frac{3\pi}{4}\right) = -\frac{3}{\sqrt{2}} + \frac{3}{\sqrt{2}}i$$

$$z_2 = 3\left(\cos\frac{5\pi}{4} + i\sin\frac{5\pi}{4}\right) = -\frac{3}{\sqrt{2}} - \frac{3}{\sqrt{2}}i$$

$$z_3 = 3\left(\cos\frac{7\pi}{4} + i\sin\frac{7\pi}{4}\right) = \frac{3}{\sqrt{2}} - \frac{3}{\sqrt{2}}i$$

5.3) จากโจทย์จะพบว่า $z^6 = -1-\sqrt{3}i$

ในที่นี้ $w = -1-\sqrt{3}i$ ซึ่งเขียนในรูปเชิงขั้วได้เป็น

$$-1-\sqrt{3}i = 2\left(\cos\frac{4\pi}{3} + i\sin\frac{4\pi}{3}\right)$$

จากสูตรรากที่ n

$$z_k = \sqrt[n]{\rho}\left[\cos\left(\frac{\alpha}{n} + \frac{2\pi}{n}k\right) + i\sin\left(\frac{\alpha}{n} + \frac{2\pi}{n}k\right)\right] ; \quad k = 0, 1, 2, \ldots, n-1$$

โดย $\rho = 2, \quad n = 6, \quad \alpha = \frac{4\pi}{3}$

ดังนั้น $z_k = 2^{\frac{1}{6}}\left[\cos\left(\frac{2\pi}{9} + \frac{2\pi}{6}k\right) + i\sin\left(\frac{2\pi}{9} + \frac{2\pi}{6}k\right)\right] ; \quad k = 0, 1, 2, 3, 4, 5$

ผลที่ได้คือ

$$z_0 = 2^{\frac{1}{6}}\left(\cos\frac{2\pi}{9} + i\sin\frac{2\pi}{9}\right)$$

$$z_1 = 2^{\frac{1}{6}}\left(\cos\frac{5\pi}{9} + i\sin\frac{5\pi}{9}\right)$$

$$z_2 = 2^{\frac{1}{6}}\left(\cos\frac{8\pi}{9} + i\sin\frac{8\pi}{9}\right)$$

$$z_3 = 2^{\frac{1}{6}}\left(\cos\frac{11\pi}{9} + i\sin\frac{11\pi}{9}\right)$$

$$z_4 = 2^{\frac{1}{6}}\left(\cos\frac{14\pi}{9} + i\sin\frac{11\pi}{9}\right)$$

$$z_5 = 2^{\frac{1}{6}}\left(\cos\frac{17\pi}{9} + i\sin\frac{17\pi}{9}\right)$$

พิมพ์ที่... สำนักพิมพ์มหาวิทยาลัยรามคำแหง
Ramkhamhaeng University Press.