บทที่ 6
พีชคณิตเวกเตอร์

สรุปสูตรและคุณสมบัติของเวกเตอร์

1. ขนาดของเวกเตอร์

กำหนดให้ $\vec{u} = ai + bj + ck$ เป็นเวกเตอร์ สูตรหาขนาดของเวกเตอร์ $\vec{u}$ เขียนแทนด้วย $|u|$ คือ

$$\boxed{|\vec{u}| = |ai + bj + ck| = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$$

2. เวกเตอร์หนึ่งหน่วย คือเวกเตอร์ที่มีขนาดหนึ่งหน่วย ถ้า $\vec{u}$ เป็นเวกเตอร์ที่มีขนาด $a \neq 0$ แล้ว เวกเตอร์หนึ่งหน่วยที่มีทิศทางเดียวกับ $\vec{u}$ คือ

$$\boxed{\text{เวกเตอร์ } \vec{u} \text{ หนึ่งหน่วย} = \frac{\vec{u}}{|\vec{u}|} = \frac{\vec{u}}{a}}$$

3. การบวกและลบของเวกเตอร์

กำหนดให้

$$\vec{v}_1 = a_1 i + b_1 j + c_1 k$$

$$\vec{v}_2 = a_2 i + b_2 j + c_2 k$$

ดังนั้น

$$\vec{v}_1 + \vec{v}_2 = (a_1 + a_2)i + (b_1 + b_2)j + (c_1 + c_2)k$$

$$\vec{v}_1 - \vec{v}_2 = (a_1 - a_2)i + (b_1 - b_2)j + (c_1 - c_2)k$$

4. ผลคูณสเกลาร์ (Scalar product หรือ dot product)

กำหนดให้

$$\vec{A} = a_1 i + b_1 j + c_1 k$$

$$\vec{B} = a_2 i + b_2 j + c_2 k$$

ผลคูณสเกลาร์ของ $\vec{A}$ และ $\vec{B}$ ซึ่งเขียนแทนด้วย $\vec{A} \cdot \vec{B}$ มีสูตรเป็น

$$\boxed{\vec{A} \cdot \vec{B} = a_1 a_2 + b_1 b_2 + c_1 c_2}$$

5. คุณสมบัติที่สำคัญ

1. $A \cdot B = B \cdot A$

2. $i \cdot i = j \cdot j = k \cdot k = 1$

3. $i \cdot j = j \cdot k = k \cdot i = 0$

4. ถ้า ℓ เป็นสเกลาร์

$$(\ell\vec{A}) \cdot \vec{B} = \vec{A} \cdot (\ell\vec{B}) = \ell(\vec{A} \cdot \vec{B})$$

5. ถ้า $\vec{A}, \vec{B}$ และ $\vec{C}$ เป็นเวกเตอร์

$$\vec{A} \cdot (\vec{B} + \vec{C}) = \vec{A} \cdot \vec{B} + \vec{A} \cdot \vec{C}$$

6. ถ้ามุมระหว่าง $\vec{A}$ กับ $\vec{B}$ เป็น θ ; $0 \leqslant \theta \leqslant \pi$

$$\vec{A} \cdot \vec{B} = |\vec{A}||\vec{B}| \cos\theta$$

7. ถ้า $\vec{A} \cdot \vec{B} = 0$ และ $\vec{A}$ และ $\vec{B}$ ไม่ใช่เวกเตอร์ศูนย์แล้ว $\vec{A}$ และ $\vec{B}$ จะตั้งฉากซึ่งกันและกัน

6. ผลคูณเวกเตอร์ (Vector Product หรือ cross product)

ถ้ามุมระหว่างเวกเตอร์ $\vec{A}$ และ $\vec{B}$ คือ θ เมื่อ $0 \leqslant \theta \leqslant \pi$ และให้ n เป็นเวกเตอร์หนึ่งหน่วย ที่ตั้งได้ฉากกับระนาบของเวกเตอร์ $\vec{A}$ และ $\vec{B}$ ดังนั้น ผลคูณของเวกเตอร์ $\vec{A}$ และ $\vec{B}$ ซึ่งเขียนแทนด้วย $\vec{A} \times \vec{B}$ มีสูตรเป็น

$$\boxed{\vec{A} \times \vec{B} = n|\vec{A}||\vec{B}| \sin\theta}$$

เพราะว่า i, j, k เป็นเวกเตอร์หนึ่งหน่วยบนแกน x, y และ z ตามลำดับ เพราะฉะนั้น จะได้ว่า

$$i \times i = j \times j = k \times k = 0$$

$$i \times j = -j \times i = k$$

$$j \times k = -k \times j = i$$

$$k \times i = -i \times k = j$$

ถ้ากำหนดให้

$$\vec{A} = a_1 i + b_1 j + c_1 k$$

$$\vec{B} = a_2 i + b_2 j + c_2 k$$

ดังนั้น $$\vec{A}\times\vec{B} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{vmatrix}$$

$$= i\begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_2 & c_2 \end{vmatrix} + j\begin{vmatrix} c_1 & a_1 \\ c_2 & a_2 \end{vmatrix} + k\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}$$

$$= (b_1c_2 - b_2c_1)i + (a_2c_1 - a_1c_2)j + (a_1b_2 - a_2b_1)k$$

7. ผลคูณสามเวกเตอร์

กำหนดให้ $$\vec{A} = a_1i + b_1j + c_1k$$

$$\vec{B} = a_2i + b_2j + c_2k$$

$$\vec{C} = a_3i + b_3j + c_3k$$

ดังนั้น $$\vec{A}\cdot(\vec{B}\times\vec{C}) = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

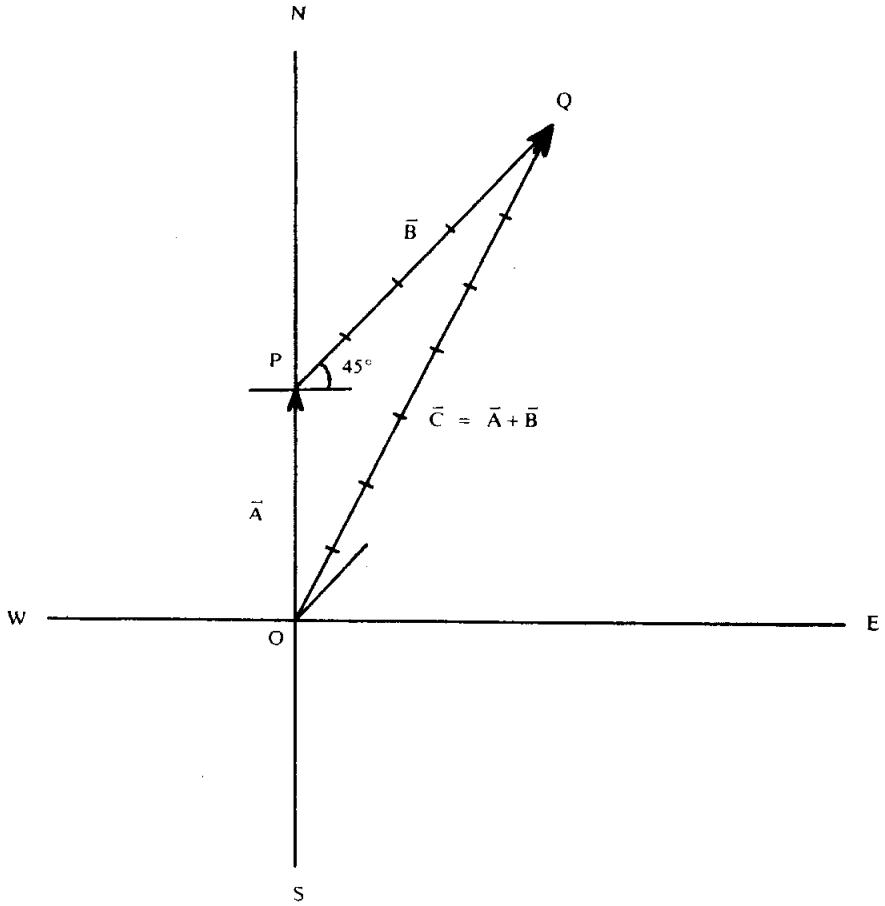
8. สูตรหาพื้นที่สามเหลี่ยมซึ่งประกอบขึ้นด้วยด้าน $\vec{A}$ และ $\vec{B}$

$$\boxed{\text{พื้นที่สามเหลี่ยม} = \frac{1}{2}|\vec{A}\times\vec{B}|}$$

เฉลยแบบฝึกหัด 6.1

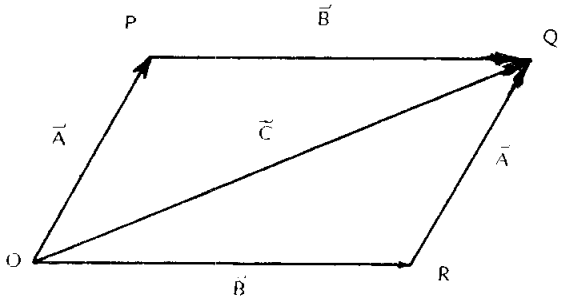
1. (ก) เวกเตอร์ (ข) สเกลาร์ (ค) สเกลาร์ (ง) สเกลาร์
   (จ) สเกลาร์ (ฉ) สเกลาร์ (ช) เวกเตอร์ (ซ) สเกลาร์
   (ฌ) สเกลาร์ (ญ) เวคเตอร์

2.



ระยะขจัดลัพธ์ $\vec{C} = \vec{A} + \vec{B}$

3. **พิสูจน์**

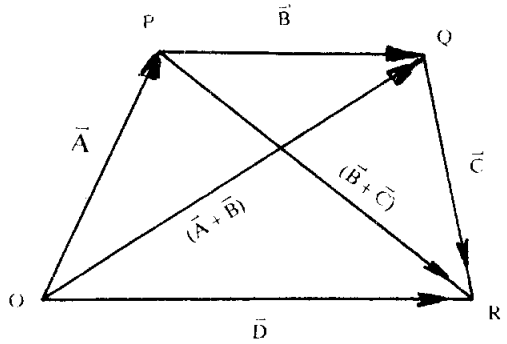


จากรูป $\overrightarrow{OP}+\overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{OQ}$ หรือ $\vec{A}+\vec{B} = \vec{C}$

และ $\overrightarrow{OR}+\overrightarrow{RQ} = \overrightarrow{OQ}$ หรือ $\vec{B}+\vec{A} = \vec{C}$

ดังนั้น $\vec{A}+\vec{B} = \vec{B}+\vec{A}$

4. **พิสูจน์**



จากรูป $\overrightarrow{OP}+\overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{OQ} = (\vec{A}+\vec{B})$

และ $\overrightarrow{PQ}+\overrightarrow{QR} = \overrightarrow{PR} = (\vec{B}+\vec{C})$

แต่ $\overrightarrow{OP}+\overrightarrow{PR} = \overrightarrow{OR} = \vec{D}$

นั่นคือ $\vec{A}+(\vec{B}+\vec{C}) = \vec{D}$

และ $\overrightarrow{OQ}+\overrightarrow{QR} = \overrightarrow{OR} = \vec{D}$

นั่นคือ $(\vec{A}+\vec{B})+\vec{C} = \vec{D}$

ดังนั้น $\vec{A}+(\vec{B}+\vec{C}) = (\vec{A}+\vec{B})+\vec{C}$

5. **พิสูจน์** สมมติ $x \neq 0$ แล้ว

$$x\vec{A} + y\vec{B} = 0 \Rightarrow x\vec{A} = -y\vec{B} \text{ หรือ } \vec{A} = -(y/x)\vec{B}$$

นั่นคือ $\vec{A}$ และ $\vec{B}$ ต้องอยู่ร่วมเส้นตรงเดียวกัน ซึ่งขัดแย้งกับสมมติฐานของโจทย์

เพราะฉะนั้น $x = 0 \Rightarrow y\vec{B} = 0 \Rightarrow y = 0$

6. **พิสูจน์** $x_1\vec{A} + y_1\vec{B} = x_2\vec{A} + y_2\vec{B}$

หรือ $(x_1 - x_2)\vec{A} + (y_1 - y_2)\vec{B} = 0$

เพราะฉะนั้น จากข้อ 5 $(x_1 - x_2) = 0$ และ $(y_1 - y_2) = 0$

หรือ $x_1 = x_2$ และ $y_1 = y_2$

7. **พิสูจน์** สมมติ $x \neq 0$

$$x\vec{A} + y\vec{B} + z\vec{C} = 0 \Rightarrow x\vec{A} = -y\vec{B} - z\vec{C}$$

หรือ $\vec{A} = -(y/x)\vec{B} - (z/x)\vec{C}$

แต่ $-(y/x)\vec{B} - (z/x)\vec{C}$ คือเวคเตอร์ที่อยู่บนระนาบของ $\vec{B}$ และ $\vec{C}$

นั่นคือ $\vec{A}$ อยู่บนระนาบของ $\vec{B}$ และ $\vec{C}$ ซึ่งขัดแย้งกับสมมติฐานของโจทย์

เพราะฉะนั้น $x = 0$

ถ้าสมมติ $y \neq 0$ และ $z \neq 0$ ก็จะพิสูจน์ได้ในทำนองเดียวกันว่า ขัดแย้งกับสมมติฐานของโจทย์เช่นเดียวกัน

เพราะฉะนั้น $y = 0$ และ $z = 0$

8. **พิสูจน์** $x_1\vec{A} + y_1\vec{B} + z_1\vec{C} = x_2\vec{A} + y_2\vec{B} + z_2\vec{C}$

หรือ $(x_1 - x_2)\vec{A} + (y_1 - y_2)\vec{B} + (z_1 - z_2)\vec{C} = 0$

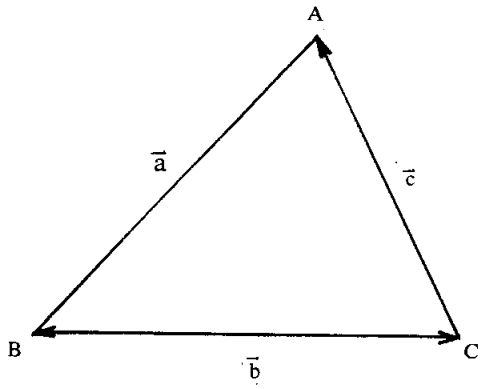
เพราะฉะนั้น จากข้อ 7 $(x_1 - x_2) = 0$, $(y_1 - y_2) = 0$ และ $(z_1 - z_2) = 0$

หรือ $x_1 = x_2$, $y_1 = y_2$ และ $z_1 = z_2$

9. เมื่อ $\vec{a} \neq \vec{0}$ ดังนั้น $\frac{\vec{a}}{|\vec{a}|}$ มีขนาด $\left|\frac{\vec{a}}{|\vec{a}|}\right| = \frac{|\vec{a}|}{|\vec{a}|} = 1$

นั่นคือ $\frac{\vec{a}}{|\vec{a}|}$ เป็นที่มีขนาดเป็นหนึ่งหน่วย จึงกล่าวว่า $\frac{\vec{a}}{|\vec{a}|}$ เป็นเวกเตอร์หน่วย

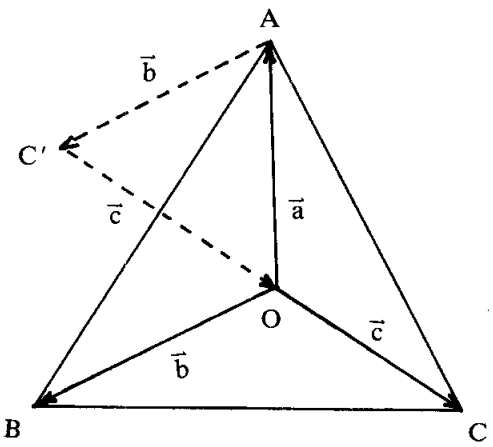
10.



จากรูป $\vec{a}+\vec{b}+\vec{c} = \vec{0}$

$\therefore$ $\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}$ เป็นเวกเตอร์ศูนย์

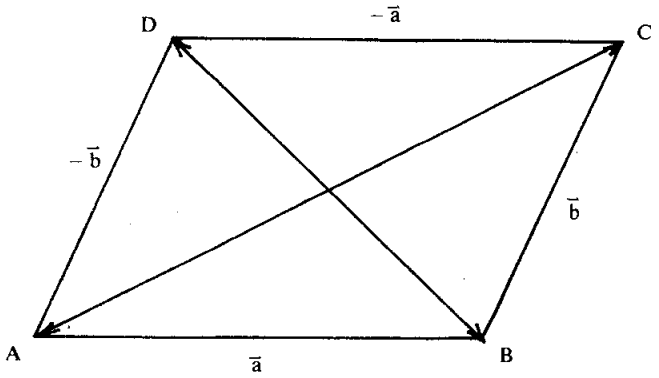
11.



โดยการสร้างรูปตามโจทย์ เราพบว่า $\vec{C'0} = \vec{C}$, $\vec{AC'} = \vec{b}$

$\therefore$ $\vec{a}+\vec{b}+\vec{c} = \vec{0}$

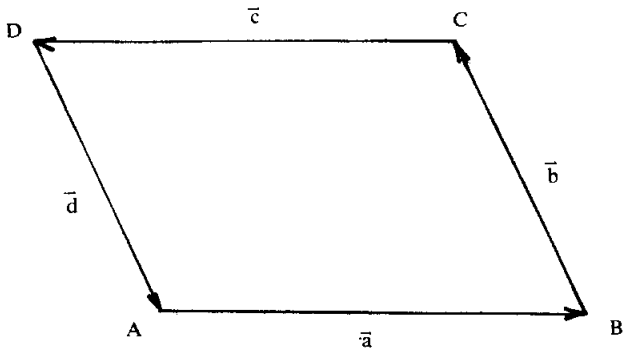
12.



กำหนดตามรูป เวกเตอร์เส้นทแยงมุม $\overrightarrow{AC} = \vec{a}+\vec{b}$

เวกเตอร์เส้นทแยงมุม $\overrightarrow{BD} = \vec{b}-\vec{a}$

13.



1) สมมติว่า ABCD เป็นสี่เหลี่ยมด้านขนาน

$\therefore\ |\vec{a}| = |\vec{c}|$ และ $|\vec{b}| = |\vec{d}|$ และ

$\vec{a}$ มีทิศทางตรงข้ามกับ $\vec{c}$ และ $\vec{b}$ มีทิศทางตรงข้ามกับ $\vec{d}$

$\therefore\ \vec{a} = -\vec{c}$ และ $\vec{b} = -\vec{d}$

$\therefore\ \vec{a}+\vec{c} = -\vec{c}+\vec{c} = \vec{0}$ และ

$\vec{b}+\vec{d} = -\vec{d}+\vec{d} = \vec{0}$

2) สมมติว่า $\vec{a}+\vec{c} = \vec{0}$ หรือ $\vec{b}+\vec{d} = \vec{0}$

สมมติต่อไปว่า $\vec{a}+\vec{c} = \vec{0}$

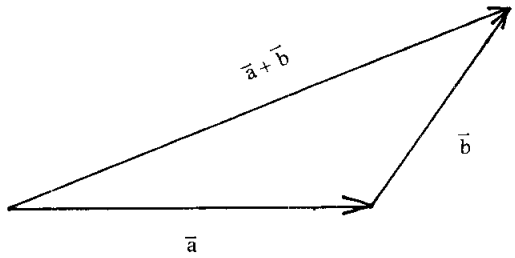
$\therefore$ $|\vec{a}| = |\vec{c}|$ และ $\vec{a}$ กับ $\vec{c}$ มีทิศทางตรงข้ามกัน

ดังนั้น AB = CD และ AB // CD

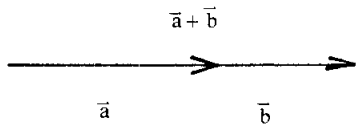
จึงทำให้ BC = AD และ BC // AD

นั่นคือ ABCD เป็นสี่เหลี่ยมด้านขนาน

14.



รูปที่ 1



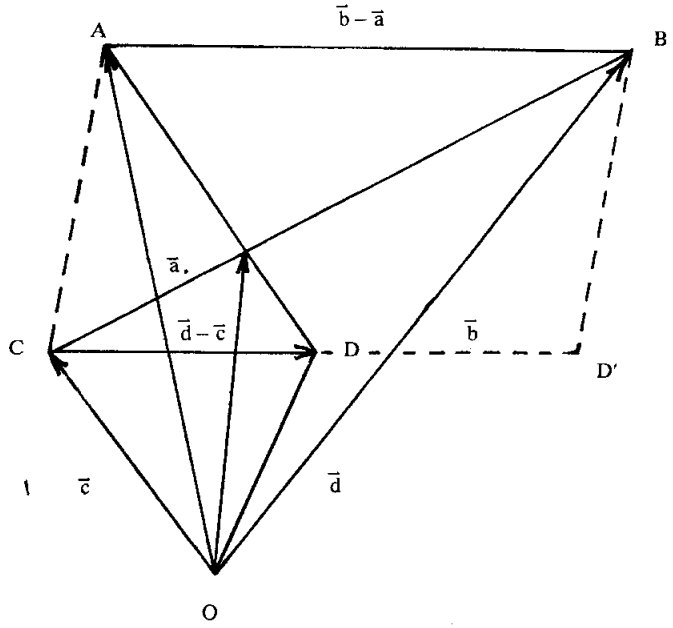
รูปที่ 2

จากรูปที่ 1 เราพบว่า $|\vec{a}|+|\vec{b}| > |\vec{a}+\vec{b}|$

จากรูปที่ 2 เราพบว่า $|\vec{a}|+|\vec{b}| = |\vec{a}+\vec{b}|$

ดังนั้น จึงสรุปได้ว่า $|\vec{a}|+|\vec{b}| \geqslant |\vec{a}+\vec{b}|$

15.



จาก $\vec{b}-\vec{a} = 2(\vec{d}-\vec{c})$

$= 2\vec{d}-2\vec{c}$

$\therefore \ \vec{a}+2\vec{d} = \vec{b}+2\vec{d}$

$\therefore \ \frac{1}{3}\vec{a}+\frac{2}{3}\vec{d} = \frac{1}{3}\vec{b}+\frac{2}{3}\vec{d}$ ..... (A)

ตามรูป สมมติว่าจุด X′ และ X″ เป็นจุดแบ่งเส้น AD และ BC ที่อัตราส่วน 1 : 2 ตามลำดับ เราจะได้

$\overrightarrow{OX'} = \frac{1}{3}\vec{a}+\frac{2}{3}\vec{d}$ และ $\overrightarrow{OX''} = \frac{1}{3}\vec{b}+\frac{2}{3}\vec{c}$

จากสมการ (A) เราพบว่า เวกเตอร์ $\overrightarrow{OX'}$ และ $\overrightarrow{OX''}$ เป็นเวกเตอร์เดียวกัน นั่นคือ เส้น AD และ BC ตัดกันในอัตราส่วน 1 : 2 ที่จุด X ตามรูป

16. คำตอบได้จากข้อ 15 เราพบว่า AB // CD และ CD = $\frac{1}{2}$AB และตามรูปข้อ 15 ABCD′ เป็นสี่เหลี่ยมด้านขนาน D เป็นจุดกึ่งกลางของด้าน CD′ AD เป็นเส้นที่ลากจากจุดยอด A ไปยังจุดกึ่งกลางของด้าน CD′ แบ่งเส้นทแยงมุม BC ในอัตราส่วน 1 : 2 ตามข้อ 15

เฉลยแบบฝึกหัด 6.2

1. เนื่องจาก $\vec{a} = 2\vec{i}-3\vec{j}-\vec{k} \neq \vec{0}$ และ $\vec{b} = -6\vec{i}+9\vec{j}+3\vec{k} \neq 0$

พิจารณา

$$\vec{a}\times\vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & -3 & -1 \\ -6 & 9 & 3 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} -3 & -1 \\ 9 & 3 \end{vmatrix}\vec{i} - \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ -6 & 3 \end{vmatrix}\vec{j} + \begin{vmatrix} 2 & -3 \\ -6 & 9 \end{vmatrix}\vec{k}$$

$$= (-9+9)\vec{i} - (6-6)\vec{j} + (18-18)\vec{k}$$

$$= \vec{0}$$

แสดงว่าเวกเตอร์ $\vec{a}$ และเวกเตอร์ $\vec{b}$ ขนานกัน #

2. เวกเตอร์ที่ตั้งฉากกับเวกเตอร์ $\vec{a} = \vec{i}-\vec{j}+\vec{k}$ และเวกเตอร์ $\vec{b} = \vec{i}+\vec{j}-\vec{k}$ คือเวกเตอร์

$$\vec{a}\times\vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix}\vec{i} - \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix}\vec{j} + \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}\vec{k}$$

$$= (1-1)\vec{i} - (-1-1)\vec{j} + (1+1)\vec{k}$$

$$= 2\vec{j}+2\vec{k}$$

$\therefore$ เวกเตอร์หนึ่งหน่วยที่ตั้งได้ฉากกับเวกเตอร์ $\vec{a}$ และ $\vec{b}$ คือเวกเตอร์

$$\frac{2}{\sqrt{2^2+2^2}}\vec{j}+\frac{2}{\sqrt{2^2+2^2}}\vec{k} = \frac{2}{2\sqrt{2}}\vec{j}+\frac{2}{2\sqrt{2}}\vec{k}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}}\vec{j}+\frac{1}{\sqrt{2}}\vec{k}$$ #

3. เวกเตอร์

$$(\vec{a}\times\vec{b})\times(\vec{c}\times\vec{d}) = -(\vec{c}\times\vec{d})\times(\vec{a}\times\vec{b})$$

$$= -[\vec{a}((\vec{c}\times\vec{d})\cdot\vec{b}) - \vec{b}((\vec{c}\times\vec{d})\cdot\vec{a})]$$

$$= [\vec{a}\cdot(\vec{c}\times\vec{d})]\vec{b} - [\vec{b}\cdot(\vec{c}\times\vec{d})]\vec{a}$$ #

4. $$\vec{d}\times(\vec{a}\times\vec{b})\cdot(\vec{a}\times\vec{c}) = \vec{d}\cdot[(\vec{a}\times\vec{b})\times(\vec{a}\times\vec{c})]$$
$$= \vec{d}\cdot[((\vec{a}\times\vec{b})\cdot\vec{c})\vec{a}-((\vec{a}\times\vec{b})\cdot\vec{a})\vec{c}]$$
$$= \vec{d}\cdot[(\vec{a}\cdot(\vec{b}\times\vec{c}))\vec{a}-0\vec{c}] \quad \text{เนื่องจาก } \vec{a}\times\vec{b}\perp\vec{a}$$
$$= [\vec{a}\cdot(\vec{b}\times\vec{c})](\vec{a}\cdot\vec{d})] \qquad \#$$

5. สมมติว่า $$\vec{a}+\vec{b}+\vec{c} = 0$$
$$\therefore\ \vec{a}+\vec{b} = -\vec{c} \quad \text{จึงได้}$$

1) $$\vec{a}\times(\vec{a}+\vec{b}) = \vec{a}\times(-\vec{c})$$
$$\therefore\ \vec{a}\times\vec{a}+\vec{a}\times\vec{b} = -(\vec{a}\times\vec{c})$$
$$\therefore\ \vec{0}+\vec{a}\times\vec{b} = \vec{c}\times\vec{a}$$
$$\therefore\ \vec{a}\times\vec{b} = \vec{c}\times\vec{a} \quad \text{และ}$$

2) $$\vec{b}\times(\vec{a}+\vec{b}) = \vec{b}\times(-\vec{c})$$
$$\therefore\ \vec{b}\times\vec{a}+\vec{b}\times\vec{b} = -(\vec{b}\times\vec{c})$$
$$\therefore\ -(\vec{a}\times\vec{b})+\vec{0} = -(\vec{b}\times\vec{c})$$
$$\therefore\ \vec{a}\times\vec{b} = \vec{b}\times\vec{c}$$

1) และ 2) จึงได้ $$\vec{a}\times\vec{b} = \vec{b}\times\vec{c} = \vec{c}\times\vec{a} \qquad \#$$

6. $$\vec{v}_1 = 2\vec{i}+4\vec{j}+3\vec{k} \quad \text{และ} \quad \vec{v}_2 = \vec{i}-5\vec{j}+2\vec{k}$$
เป็นเวกเตอร์บอกตำแหน่งของจุด P(2, 4, 3) และ Q(1, −5, 2) ตามลำดับ

$\therefore$ ผลบวกของเวกเตอร์บอกตำแหน่ง
$$\vec{v}_1+\vec{v}_2 = (2\vec{i}+4\vec{j}+3\vec{k}) + (\vec{i}-5\vec{j}+2\vec{k})$$
$$= 3\vec{i}-\vec{j}+5\vec{k} \qquad \#$$

7. ก) $|\vec{v}_3| = |-\vec{i}+2\vec{j}+2\vec{k}|$

$= \sqrt{(-1)^2+2^2+2^2}$

$= \sqrt{9}$

$= 3$ #

ข) $|\vec{v}_1+\vec{v}_2+\vec{v}_3| = |(3\vec{i}-2\vec{j}+\vec{k}) + (2\vec{i}-4\vec{j}-3\vec{k}) + (-\vec{i}+2\vec{j}+2\vec{k})|$

$= |4\vec{i}-4\vec{j}|$

$= \sqrt{4^2+(-4)^2}$

$= 4\sqrt{2}$ #

ค) $|2\vec{v}_1-3\vec{v}_2-5\vec{v}_3| = |2(3\vec{i}-2\vec{j}+\vec{k}) - 3(2\vec{i}-4\vec{j}-3\vec{k}) - 5(-\vec{i}+2\vec{j}+2\vec{k})|$

$= |(6\vec{i}-4\vec{j}+2\vec{k}) + (-6\vec{i}+12\vec{j}+9\vec{k}) + (5\vec{i}-10\vec{j}-10\vec{k})|$

$= |5\vec{i}-2\vec{j}+\vec{k}|$

$= \sqrt{5^2+(-2)^2+1^2}$

$= \sqrt{30}$ #

8. $\vec{v}_4 = a\vec{v}_1+b\vec{v}_2+c\vec{v}_3$

$\therefore\ 3\vec{i}+2\vec{j}+5\vec{k} = a(2\vec{i}-\vec{j}+\vec{k}) + b(\vec{i}+3\vec{j}-2\vec{k}) + c(-2\vec{i}+\vec{j}-3\vec{k})$

$= (2a+b-2c)\vec{i} + (-a+3b+c)\vec{j} + (a-2b-3c)\vec{k}$

$\therefore\ 2a+b-2c = 3,$ ..... (1)

$-a+3b+c = 2,$ ..... (2)

และ $a-2b-3c = 5$ ..... (3)

แก้สมการข้างต้น เราได้

$a = -2$

$b = 1$

$c = -3$ #

9. $\vec{v}_1+\vec{v}_2 = (2\vec{i}+4\vec{j}-5\vec{k}) + (\vec{i}+2\vec{j}+3\vec{k})$

$= 3\vec{i}+6\vec{j}-2\vec{k}$

เวกเตอร์หนึ่งหน่วยที่ขนานกับ $\vec{v}_1+\vec{v}_2$ คือ

$$\frac{3}{\sqrt{3^2+6^2+2^2}}\vec{i}+\frac{6}{\sqrt{3^2+6^2+2^2}}\vec{j}-\frac{2}{\sqrt{3^2+6^2+2^2}}\vec{k}$$

$$= \frac{3}{7}\vec{i}+\frac{6}{7}\vec{j}-\frac{2}{7}\vec{k}$$ #

10. เวกเตอร์ที่มีจุดเริ่มต้น $P(x_1, y_1, z_1)$ และจุดปลาย $Q(x_2, y_2, z_2)$ คือ

$$(x_2-x_1)\vec{i} + (y_2-y_1)\vec{j} + (z_2-z_1)\vec{k}$$ และมีขนาด

$$\sqrt{(x_2-x_1)^2 + (y_2-y_1)^2 + (z_2-z_1)^2}$$ #

11. ขนาดของผลบวกของแรง $\vec{A} = a_1\vec{i}+a_2\vec{j}+a_3\vec{k}$, $\vec{B} = b_1\vec{i}+b_2\vec{j}+b_3\vec{k}$ และแรง $\vec{C} = c_1\vec{i}+c_2\vec{j}+c_3\vec{k}$ คือ

$$\sqrt{(a_1+b_1+c_1)^2 + (a_2+b_2+c_2)^2 + (a_3+b_3+c_3)^2}$$ #

12. พิจารณา

$$\vec{v}\cdot\vec{i} = |\vec{v}|\,|\vec{i}|\cos\alpha$$

$$\therefore \quad x = \sqrt{x^2+y^2+z^2}\cos\alpha$$

$$\therefore \quad \cos\alpha = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$$

ในทำนองเดียวกัน

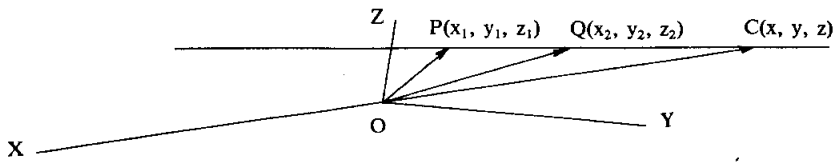
$$\cos\beta = \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$$ และ

$$\cos\gamma = \frac{z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$$

$$\therefore \quad \cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma = \frac{x^2}{x^2+y^2+z^2}+\frac{y^2}{x^2+y^2+z^2}+\frac{z^2}{x^2+y^2+z^2}$$

$$= 1$$ #

13. สมการของเส้นตรงที่ผ่านจุด $P(x_1, y_1, z_1)$ และ $Q(x_2, y_2, z_2)$



จากรูปเราพบว่า $\vec{OC} = t\vec{OP} + (1-t)\vec{OQ}$; $t \in R$

$$\therefore \quad x\vec{i}+y\vec{j}+z\vec{k} = t(x_1\vec{i}+y_1\vec{j}+z_1\vec{k}) + (1-t)(x_2\vec{i}+y_2\vec{j}+z_2\vec{k})$$

$$= (tx_1+x_2-tx_2)\vec{i} + (ty_1+y_2-ty_2)j + (tz_1+z_2-tz_2)k$$

จึงได้ชุดของสมการของเส้นตรงที่ผ่านจุด P และ Q เป็น

$$\left.\begin{aligned} x &= (x_1-x_2)t+x_2 \\ y &= (y_1-y_2)t+y_2 \\ z &= (z_1-z_2)t+z_2 \end{aligned}\right\} \quad t \in R$$ #

14. ให้

$$\vec{A} = a_1\vec{i}+a_2\vec{j}+a_3\vec{k}$$
$$\vec{B} = b_1\vec{i}+b_2\vec{j}+b_3\vec{k}$$
$$\vec{C} = c_1\vec{i}+c_2\vec{j}+c_3\vec{k}$$
$$\begin{aligned}
\vec{A}\cdot(\vec{B}+\vec{C}) &= (a_1\vec{i}+a_2\vec{j}+a_3\vec{k})\cdot[(b_1\vec{i}+b_2\vec{j}+b_3\vec{k})+(c_1\vec{i}+c_2\vec{j}+c_3\vec{k})] \\
&= (a_1\vec{i}+a_2\vec{j}+a_3\vec{k})\cdot((b_1+c_1)\vec{i}+(b_2+c_2)\vec{j}+(b_3+c_3)\vec{k}) \\
&= a_1(b_1+c_1) + a_2(b_2+c_2) + a_3(b_3+c_3) \\
&= a_1b_1+a_1c_1+a_2b_2+a_2c_2+a_3b_3+a_3c_3 \\
&= (a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3) + (a_1c_1+a_2c_2+a_3c_3) \\
&= \vec{A}\cdot\vec{B} + \vec{A}\cdot\vec{C}
\end{aligned}$$
#

15. เนื่องจาก $\vec{A}\cdot\vec{C} = (3\vec{i}-2\vec{j}+\vec{k})\cdot(2\vec{i}+\vec{j}-4\vec{k})$

$= 6-2-4 = 0$

$\therefore$ เวกเตอร์ $\vec{A}$ และ $\vec{C}$ ทำให้เกิดสามเหลี่ยมมุมฉาก

16. ให้ B เป็นจุดปลายของเวกเตอร์ $\vec{B} = \vec{i}+5\vec{j}+3\vec{k}$

P(x, y, z) เป็นจุดบนระนาบที่ต้องการ

$\therefore$ เวกเตอร์ $\overrightarrow{BP} = (x-1)\vec{i} + (y-5)\vec{j} + (z-3)\vec{k}$

ดังนั้น $\overrightarrow{BP} \perp \vec{A} = 2\vec{i}+3\vec{j}+6\vec{k}$

$\therefore \overrightarrow{BP}\cdot\vec{A} = 2(x-1) + 3(y-5) + 6(z-3) = 0$

$\therefore 2x-2+3y-15+6z-18 = 0$

$\therefore 2x+3y+6z = 35$ เป็นสมการของระนาบที่ต้องการ #

17. ให้ $\vec{A} = a_1\vec{i}+a_2\vec{j}+a_3\vec{k}$ และ $\vec{B} = b_1\vec{i}+b_2\vec{j}+b_3\vec{k}$

$$\therefore \vec{A}\times\vec{B} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix}$$

$$= -\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \vec{b}_1 & \vec{b}_2 & \vec{b}_3 \\ \vec{a}_1 & \vec{a}_2 & \vec{a}_3 \end{vmatrix}$$

$$= -\vec{B}\times\vec{A}$$

18. ก) $\vec{k}\times\vec{j} = -(\vec{j}\times\vec{k})$

$= -\vec{i}$ **ตอบ**

ข) $\vec{i}\times\vec{k} = -\vec{k}\times\vec{i}$

$= -\vec{j}$ **ตอบ**

ค) $(2\vec{j})\times(3\vec{k}) = 6\vec{j}\times\vec{k}$

$= 6\vec{k}$ **ตอบ**

ง) $3\vec{i}\times(-2\vec{k}) = -6\vec{i}\times\vec{k}$

$= 6\vec{k}\times\vec{i}$

$= 6\vec{j}$ **ตอบ**

จ) $2\vec{j}\times\vec{i}-3\vec{k} = -2\vec{i}\times\vec{j}-3\vec{k}$

$= -2\vec{k}-3\vec{k}$

$= -5\vec{k}$ **ตอบ**

19. $\vec{A}\times\vec{B} = (a_1\vec{i}+a_2\vec{j}+a_3\vec{k}) \times (b_1\vec{i}+b_2\vec{j}+b_3\vec{k})$

$= (a_1\vec{i}+a_2\vec{j}+a_3\vec{k})\times b_1\vec{i} + (a_1\vec{i}+a_2\vec{j}+a_3\vec{k})\times b_2\vec{j} + (a_1\vec{i}+a_2\vec{j}+a_3\vec{k})\times b_3\vec{k}$

$= a_1b_1\vec{i}\times\vec{i} + a_2b_1\vec{j}\times\vec{i} + a_3b_1\vec{k}\times\vec{i} + a_1b_2\vec{i}\times\vec{j} + a_2b_2\vec{j}\times\vec{j}$

$+ a_3b_2\vec{k}\times\vec{j} + a_1b_3\vec{i}\times\vec{k} + a_2b_3\vec{j}\times\vec{k} + a_3b_3\vec{k}\times\vec{k}$

$= a_1b_1\vec{0} + a_2b_1(-\vec{k}) + a_3b_1\vec{j} + a_1b_2\vec{k} + a_2b_2\vec{0} + a_3b_2(-\vec{i})$

$+ a_1b_3(-\vec{j}) + a_2b_3\vec{i} + a_3b_3\vec{0}$

$= (a_2b_3-a_3b_2)\vec{i} - (a_1b_3-a_3b_1)\vec{j} + (a_1b_2-a_2b_1)\vec{k}$

$= \begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix} i - \begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ b_1 & b_3 \end{vmatrix} \vec{j} + \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} \vec{k}$

$= \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix}$