บทที่ 4
สมการเชิงอนุพันธ์

สรุปสมการเชิงอนุพันธ์

ลักษณะของสมการเชิงอนุพันธ์ เป็นสมการซึ่งเกี่ยวข้องกับฟังก์ชันของตัวแปรและอนุพันธ์ของตัวแปร ซึ่งแบ่งเป็นสมการเชิงอนุพันธ์แบบธรรมดาและสมการเชิงอนุพันธ์ย่อย สำหรับการแก้สมการเชิงอนุพันธ์หรือการหาคำตอบของสมการเชิงอนุพันธ์นี้ก็มีคำตอบอยู่ 2 ชนิด คือ คำตอบทั่วไปและคำตอบเฉพาะ

การแก้สมการอันดับหนึ่งและดีกรีหนึ่ง ที่พิจารณาในที่นี้ มี 4 แบบ คือ

1. ถ้าสมการเชิงอนุพันธ์เป็นแบบแยกตัวแปรได้ คือ สามารถจัดให้อยู่ในรูป $M(x)dx + N(y)dy = 0$ แล้ว

คำตอบของสมการนี้จะหาได้จาก

$$\int M(x)dx + \int N(y)dy = c \qquad \text{เมื่อ } c \text{ เป็นค่าคงที่ตามใจชอบ}$$

2. ถ้าสมการเชิงอนุพันธ์เป็นสมการเอกพันธ์ คือ

$$M(x, y)dx + N(x, y)dy = 0$$

จะเรียกว่าเป็นสมการเอกพันธ์ ถ้า $M(x, y)$ และ $N(x, y)$ เป็นฟังก์ชันเอกพันธ์ซึ่งมีดีกรีเดียวกัน

ถ้าเป็นสมการเอกพันธ์แล้วสามารถหาคำตอบได้โดยการสมมุติตัวแปรใหม่มาแทนเป็น $y = vx$ หรือ $x = vy$ ก็ได้ เมื่อแทนแล้วสมการเอกพันธ์จะอยู่ในรูปที่แยกตัวแปรได้

3. ถ้าสมการเชิงอนุพันธ์เป็นสมการแบบแน่นอน กล่าวคือ

$$M(x, y)dx + N(x, y)dy = 0$$

จะเป็นสมการแบบแน่นอนถ้ามีฟังก์ชัน $u(x, y)$ ซึ่งทำให้

$$d(u(x, y)) = M(x, y)dx + N(x, y)dy = 0$$

แล้วคำตอบก็คือ $\quad u(x, y) = c$

วิธีที่จะตอบได้ว่าสมการ $M(x, y)dx + N(x, y)dy = 0$ เป็นสมการแบบแน่นอนหรือไม่นั้น สามารถจะทำได้โดยง่าย คือหาอนุพันธ์ของ $M(x, y)$ เทียบกับ y และหาอนุพันธ์ของ $N(x, y)$ เทียบกับ x แล้วเปรียบเทียบว่าเท่ากันหรือไม่

ถ้า $\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}$ แสดงว่าสมการ $M(x, y)dx + N(x, y)dy = 0$

เป็นสมการแบบแน่นอน ต่อไปก็สามารถจัดรูปหาคำตอบทั่วไปได้โดยง่าย

4. สมการเชิงเส้น ได้แก่ สมการในรูป

$$\frac{dy}{dx} + P(x)y = Q(x)$$

ซึ่งหาคำตอบโดยพิจารณา $e^{\int P(x)dx}$ นำมาคูณสมการข้างต้น จะทำให้ได้

$$d\left(e^{\int P(x)dx} y\right) = Q(x)\, e^{\int P(x)dx}$$

ซึ่งอินทิเกรตหาคำตอบได้

เฉลยแบบฝึกหัด 4.1

จงบอกอันดับและดีกรีของสมการเชิงอนุพันธ์

1. $$y'' + 3y' + y = t$$

สมการนี้เป็นสมการเชิงอนุพันธ์อันดับสองและมีดีกรีเป็นหนึ่ง

2. $$(y'')^2 + 1 + y^2 = 0$$

สมการนี้เป็นสมการเชิงอนุพันธ์อันดับสองและมีดีกรีเป็น 2

3. $$x^2dy + y^2dx = 0$$
$$x^2dy = -y^2dx$$
$$\frac{dy}{dx} = -\frac{y^2}{x^2}$$

สมการนี้เป็นสมการเชิงอนุพันธ์อันดับหนึ่ง ดีกรี 1 และมี x เป็นตัวแปรอิสระ

4. $$\frac{d^4y}{dx^4} + 3(\frac{d^2y}{dx^2})^5 + 5y = 0$$

สมการนี้เป็นสมการเชิงอนุพันธ์อันดับสี่ ดีกรี 1 และมี x เป็นตัวแปรอิสระ

5. $$\frac{d^3y}{dx^3} + 2(\frac{dy}{dx})^4 + 5y = 0$$

สมการนี้เป็นสมการเชิงอนุพันธ์อันดับสาม ดีกรี 1 และมี x เป็นตัวแปรอิสระ

6. $$(\frac{dy}{dx})^3 = (\frac{dy}{dx})^2 + 1$$

สมการนี้เป็นสมการเชิงอนุพันธ์อันดับหนึ่ง ดีกรี 3 และมี x เป็นตัวแปรอิสระ

7. $$y'' + ye^x = 0$$

สมการนี้เป็นสมการเชิงอนุพันธ์อันดับสอง ดีกรี 1

8. $$(1 + t^2)y'' + ty' = 0$$

สมการนี้เป็นสมการเชิงอนุพันธ์อันดับสอง ดีกรี 1

9. $$(\frac{dy}{dx})^3 = \sqrt{1 + (\frac{dy}{dx})^2}$$
$$(\frac{dy}{dx})^6 = 1 + (\frac{dy}{dx})^2$$

สมการนี้เป็นสมการเชิงอนุพันธ์อันดับหนึ่ง ดีกรี 6 และมี x เป็นตัวแปรอิสระ

10.
$$\frac{d^2y}{dx^2} = \sqrt{1+(\frac{dy}{dx})^4}$$

$$(\frac{d^2y}{dx^2})^2 = 1+(\frac{dy}{dx})^4$$

สมการนี้เป็นสมการเชิงอนุพันธ์อันดับสอง ดีกรี 2 และมี x เป็นตัวแปรอิสระ

เฉลยแบบฝึกหัด 4.2

จงแสดงว่าฟังก์ชันที่กำหนดให้เป็นคำตอบเฉพาะของสมการที่กำหนดให้

1. $f(x) = x + 2e^{-x}$; $y' + y = x + 1$

วิธีทำ ให้

$$y = f(x) = x + 2e^{-x}$$
$$y' = 1 - 2e^{-x}$$

แทน y' และ y ลงในด้านซ้ายของสมการ $y' + y = x + 1$ ได้ดังนี้

$$1 - 2e^{-x} + x + 2e^{-x} = 1 + x = x + 1$$

ซึ่งเท่ากับด้านขวาของสมการ

แสดงว่า $f(x) = x + 2e^{-x}$ เป็นคำตอบของ $y' + y = x + 1$

2. $f(x) = 3e^{-x} - 5e^{x}$; $y'' - y = 0$

วิธีทำ ให้

$$y = 3e^{-x} - 5e^{x}$$
$$y' = -3e^{-x} - 5e^{x}$$
$$y'' = 3e^{-x} - 5e^{x}$$

แทนค่า y'' และ y ลงในด้านซ้ายของสมการ $y'' - y = 0$ ได้ดังนี้

$$3e^{-x} - 5e^{x} - (3e^{-x} - 5e^{x}) = 3e^{-x} - 5e^{x} - 3e^{-x} + 5e^{x}$$
$$= 0$$

ซึ่งเท่ากับด้านขวาของสมการ

แสดงว่า $f(x) = 3e^{-x} - 5e^{x}$ เป็นคำตอบของสมการเชิงอนุพันธ์

3. $f(x) = e^{x} + 2x^2 + 6x + 7$; $y'' - 3y' + 2y = 4x^2$

วิธีทำ ให้

$$y = e^{x} + 2x^2 + 6x + 7$$
$$y' = e^{x} + 4x + 6$$
$$y'' = e^{x} + 4$$

แทนค่า y'', y' และ y ลงในด้านซ้ายของสมการ $y'' - 3y' + 2y = 4x^2$ ได้ดังนี้

$$e^{x} + 4 - 3(e^{x} + 4x + 6) + 2(e^{x} + 2x^2 + 6x + 7)$$
$$= e^{x} + 4 - 3e^{x} - 12x - 18 + 2e^{x} + 4x^2 + 12x + 14$$
$$= 4x^2$$

ซึ่งเท่ากับด้านขวาของสมการ

แสดงว่า $f(x) = e^{x} + 2x^2 + 6x + 7$ เป็นคำตอบของสมการเชิงอนุพันธ์

4. $f(x) = \frac{1}{x^2}(1 - \ln x)$; $x^2y'' + 5xy' + 4y = 0$

วิธีทำ ให้

$$y = \frac{1}{x^2}(1 - \ln x)$$

$$= \frac{1 - \ln x}{x^2}$$

$$y' = \frac{x^2\left(-\frac{1}{x}\right) - (1 - \ln x)(2x)}{x^4}$$

$$= \frac{2x\ln x - 3x}{x^4}$$

$$y'' = \frac{x^4(2x \cdot \frac{1}{x} + 2\ln x - 3) - 4x^3(2x\ln x - 3x)}{x^8}$$

$$= \frac{2x^4 + 2x^4\ln x - 3x^4 - 8x^4\ln x + 12x^4}{x^8}$$

$$= \frac{11x^4 - 6x^4\ln x}{x^8}$$

$$= \frac{11 - 6\ln x}{x^4}$$

แทนค่า y'', y' และ y ในสมการได้ดังนี้

$$x^2\left(\frac{11 - 6\ln x}{x^4}\right) + 5x\left(\frac{2\ln x - 3}{x^3}\right) + 4\left(\frac{1 - \ln x}{x^2}\right)$$

$$= \frac{11 - 6\ln x + 10\ln x - 15 + 4 - 4\ln x}{x^2}$$

$$= 0$$

เท่ากับข้างขวาของสมการ

แสดงว่า $f(x) = \frac{1}{x^2}(1 - \ln x)$ เป็นคำตอบของสมการเชิงอนุพันธ์

5. $f(x) = \frac{1}{2x+1}$; $(2x+1)^2 y'' - (4x+2)y' - 12y = 0$

วิธีทำ ให้

$$y = \frac{1}{2x+1}$$

$$y' = -2(2x+1)^{-2}$$

$$y'' = 8(2x+1)^{-3}$$

แทนค่า y, y' และ y'' ในสมการเชิงอนุพันธ์ได้ดังนี้

$$\frac{8(2x+1)^2}{(2x+1)^3} - \frac{2(2x+1)(-2)}{(2x+1)^3} - \frac{12}{2x+1}$$

$$= \frac{8+4-12}{2x+1}$$

$$= 0$$

เท่ากับด้านขวาของสมการ

แสดงว่า $f(x) = \frac{1}{2x+1}$ เป็นคำตอบของสมการเชิงอนุพันธ์

จงแสดงว่าฟังก์ชันที่กำหนดให้เป็นคำตอบทั่วไปของสมการที่กำหนดให้แต่ละข้อ เมื่อ c, c_1, c_2 และ c_3 เป็นค่าคงที่ตามใจชอบ

6. $f(x) = (x^3+c)e^{-3x}$; $y' + 3y = 3x^2e^{-3x}$

วิธีทำ ให้

$$y = (x^3+c)e^{-3x}$$

$$y' = -3(x^3+c)e^{-3x} + 3x^2e^{-3x}$$

แทนค่า y และ y' ในสมการเชิงอนุพันธ์ได้ดังนี้

$$-3(x^2+c)e^{-3x} + 3x^2e^{-3x} + 3(x^3+c)e^{-3x} = 3x^2e^{-3x}$$

ซึ่งเท่ากับข้างขวาของสมการ

แสดงว่า $f(x) = (x^3+c)e^{-3x}$ เป็นคำตอบของสมการที่กำหนดให้

7. $f(t) = c_1e^{4t}+c_2e^{-2t}$; $y''-2y'-8y = 0$

วิธีทำ ให้

$$y = c_1e^{4t}+c_2e^{-2t}$$
$$y' = 4c_1e^{4t}-2c_2e^{-2t}$$
$$y'' = 16c_1e^{4t}+4c_2e^{-2t}$$

แทนค่า y, y' และ y'' ในสมการเชิงอนุพันธ์ได้ดังนี้

$$16c_1e^{4t}+4c_2e^{-2t}-8c_1e^{4t}+4c_2e^{-2t}-8c_1e^{4t}-8c_2e^{-2t} = 0$$

ซึ่งเท่ากับข้างขวาของสมการเชิงอนุพันธ์

แสดงว่า $f(t) = c_1e^{4t}+c_2e^{-2t}$ เป็นคำตอบของสมการที่กำหนดให้

8. $f(x) = -16x^2+c_1x+c_2$; $y'' = -32$

วิธีทำ ให้

$$y = -16x^2+c_1x+c_2$$
$$y' = -32x+c_1$$
$$y'' = -32$$

แสดงว่า $f(x) = y = -16x^2+c_1x+c_2$ เป็นคำตอบของสมการ $y'' = -32$

9. $f(x) = c_1e^x+c_2xe^x$; $y''-2y'+y = 0$

วิธีทำ ให้

$$y = c_1e^x+c_2xe^x$$
$$y' = c_1e^x+c_2xe^x+c_2e^x$$
$$y'' = c_1e^x+c_2xe^x+c_2e^x+c_2e^x$$

แทนค่า y, y' และ y'' ในสมการเชิงอนุพันธ์ได้ดังนี้

$$c_1e^x+c_2xe^x+2c_2e^x-2c_1e^x-2c_2xe^x-2c_2e^x+c_1e^x+c_2xe^x = 0$$

ซึ่งเท่ากับข้างขวาของสมการเชิงอนุพันธ์

แสดงว่า $f(x) = c_1e^x+c_2xe^x$ เป็นคำตอบของสมการที่กำหนดให้

10. $f(x) = c_1e^{2x}+c_2xe^{2x}+c_3e^{-2x}$; $y'''-2y''-4y'+8y = 0$

วิธีทำ ให้

$$y = c_1e^{2x}+c_2xe^{2x}+c_3e^{-2x}$$
$$y' = 2c_1e^{2x}+2c_2xe^{2x}+c_2e^{2x}-2c_3e^{-2x}$$
$$y'' = 4c_1e^{2x}+4c_2xe^{2x}+2c_2e^{2x}+2c_2e^{2x}+4c_3e^{-2x}$$
$$= 4(c_1+c_2)e^{2x}+4c_2xe^{2x}+4c_3e^{-2x}$$
$$y''' = 8(c_1+c_2)e^{2x}+8c_2xe^{2x}+4c_2e^{2x}-8c_3e^{-2x}$$

แทนค่า y, y′, y″ และ y‴ ในสมการเชิงอนุพันธ์ได้ดังนี้

$$8c_1e^{2x}+12c_2e^{2x}+8c_2xe^{2x}-8c_3e^{-2x}-8c_1e^{2x}-8c_2xe^{2x}-8c_2e^{2x}-8c_3e^{-2x}$$
$$-8c_1e^{2x}-8c_2xe^{2x}-4c_2e^{2x}+8c_3e^{-2x}+8c_1e^{2x}+8c_2xe^{2x}+8c_3e^{-2x} \quad = \quad 0$$

ซึ่งเท่ากับข้างขวาของสมการเชิงอนุพันธ์

แสดงว่า $f(x) = c_1e^{2x}+c_2xe^{2x}+c_3e^{-2x}$ เป็นคำตอบของสมการที่กำหนดให้

11. $f(x) = c_1e^{x}+c_2e^{-2x}+x^2$; $y''+y'-2y = 2(1+x-x^2)$

วิธีทำ ให้

$$y = c_1e^{x}+c_2e^{-2x}+x^2$$
$$y' = c_1e^{x}-2c_2e^{-2x}+2x$$
$$y'' = c_1e^{x}+4c_2e^{-2x}+2$$

แทน y, y′ และ y″ ในสมการเชิงอนุพันธ์ได้ดังนี้

$$c_1e^{x}+4c_2e^{-2x}+2+c_1e^{x}-2c_2e^{-2x}+2x-2c_1e^{x}-2c_2e^{-2x}-2x^2$$
$$= 2+2x-2x^2$$
$$= 2(1+x-x^2)$$

ซึ่งเท่ากับข้างขวาของสมการเชิงอนุพันธ์

แสดงว่า $f(x) = c_1e^{x}+c_2e^{-2x}+x^2$ เป็นคำตอบของสมการที่กำหนดให้

12. $f(t) = c_1t^2+c_2t^{-3}$; $t^2y''+2ty'-6y = 0$

วิธีทำ ให้

$$y = c_1t^2+c_2t^{-3}$$
$$y' = 2c_1t-3c_2t^{-4}$$
$$y'' = 2c_1+12c_2t^{-5}$$

แทนค่า y, y′, y″ ในสมการเชิงอนุพันธ์ได้ดังนี้

$$t^2(2c_1+12c_2t^{-5}) + 2t(2c_1t-3c_2t^{-4}) - 6(c_1t^2+c_2t^{-3})$$
$$= 2c_1t^2+12c_2t^{-3}+4c_1t^2-6c_2t^{-3}-6c_1t^2-6c_2t^{-3}$$
$$= 0$$

ซึ่งเท่ากับข้างขวาของสมการ

แสดงว่า $f(t) = c_1t^2+c_2t^{-3}$ เป็นคำตอบของสมการที่กำหนดให้

13. $g(x) = c_1x+c_2e^{x}$; $(1-x)y''+xy'-y = 0$

วิธีทำ ให้

$$y = c_1x+c_2e^{x}$$
$$y' = c_1+c_2e^{x}$$
$$y'' = c_2e^{x}$$

แทนค่า y, y′ และ y″ ในสมการเชิงอนุพันธ์ได้ดังนี้

$$(1-x)c_2e^x + x(c_1+c_2e^x) - c_1x - c_2e^x$$
$$= c_2e^x - c_2xe^x + c_1x + c_2xe^x - c_1x - c_2e^x$$
$$= 0$$

ซึ่งเท่ากับข้างขวาของสมการเชิงอนุพันธ์

แสดงว่า $g(x) = c_1x + c_2e^x$ เป็นคำตอบของสมการที่กำหนดให้

14. $g(t) = c_1e^t + c_2e^{-t} + \frac{1}{2}te^t$; $y'' - y = e^t$

วิธีทำ ให้

$$y = c_1e^t + c_2e^{-t} + \frac{1}{2}te^t$$
$$y' = c_1e^t - c_2e^{-t} + \frac{1}{2}te^t + \frac{1}{2}e^t$$
$$y'' = c_1e^t + c_2e^{-t} + \frac{1}{2}te^t + \frac{1}{2}e^t + \frac{1}{2}e^t$$

แทนค่า y และ y″ ในสมการที่กำหนดให้ได้ดังนี้

$$c_1e^t + c_2e^{-t} + \frac{1}{2}te^t + e^t - c_1e^t - c_2e^{-t} - \frac{1}{2}te^t = e^t$$

ซึ่งเท่ากับข้างขวาของสมการเชิงอนุพันธ์

แสดงว่า $g(t) = c_1e^t + c_2e^{-t} + \frac{1}{2}te^t$ เป็นคำตอบของสมการที่กำหนดให้

เฉลยแบบฝึกหัด 4.3

1. จงหาคำตอบทั่วไปของสมการเชิงอนุพันธ์ต่อไปนี้

1.1 $dx - 2xydy = 0$

วิธีทำ สมการ $dx - 2xydy = 0$ แยกตัวแปรได้

สำหรับ $x \neq 0$

$$\frac{dx}{x} = 2ydy$$

$$\int \frac{dx}{x} = \int 2ydy$$

$$\ln|x| = y^2 + c$$

1.2 $2x(1+y^2)dx + dy = 0$

วิธีทำ สำหรับ $y \neq 0$ จัดรูปสมการใหม่ได้

$$2xdx + \frac{dy}{1+y^2} = 0$$

ซึ่งอยู่ในรูปแยกตัวแปร

$$\int 2xdx + \int \frac{1}{1+y^2}dy = c$$

$$x^2 + \arctan y = c$$

1.3 $3dx - ydy = 0$

วิธีทำ สมการนี้แยกตัวแปรได้

$$\int 3dx - \int ydy = c_1$$

$$3x - \frac{y^2}{2} = c_1$$

$$6x - y^2 = c \qquad \text{เมื่อ } c = 2c_1$$

1.4 $\frac{dy}{dx} = \frac{y}{x^2}$

วิธีทำ จัดรูปสมการใหม่ได้ดังนี้

$$\frac{dy}{y} = \frac{dx}{x^2}$$

ซึ่งอยู่ในรูปแยกตัวแปร

$$\int \frac{dy}{y} = \int \frac{dx}{x^2}$$

$$\ln|y| = -\frac{1}{x} + c$$

$$\ln|y| + \frac{1}{x} = c$$

1.5 $y' = y$

วิธีทำ

$$\frac{dy}{dx} = y$$

ซึ่งแยกตัวแปรได้เป็น $\frac{dy}{y} = dx$

$$\int \frac{dy}{y} = \int dx$$

$$\ln|y| = x + c$$

1.6 $\sqrt{1-y^2}\,dx - x\sqrt{x^2-1}\,dy = 0$

วิธีทำ จัดรูปสมการใหม่ได้ดังนี้

$$\frac{dx}{x\sqrt{x^2-1}} - \frac{dy}{\sqrt{1-y^2}} = 0$$

ซึ่งอยู่ในรูปแยกตัวแปร

$$\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2-1}} - \int \frac{dy}{\sqrt{1-y^2}} = 0$$

$$\text{arc sec } x - \text{arc sin } y = c$$

1.7 $\frac{dy}{dx} = e^{y-x}$

วิธีทำ จัดรูปสมการใหม่ได้ดังนี้

$$\frac{dy}{dx} = \frac{e^y}{e^x}$$

$$e^{-y}dy = e^{-x}dx$$

ซึ่งอยู่ในรูปแยกตัวแปร

$$\int e^{-y}dy = \int e^{-x}dx$$

$$-e^{-y} = -e^{-x} + c$$

$$e^{-x} - e^{-y} = c$$

1.8 $\frac{dy}{dt} = -4yt$

วิธีทำ แยกตัวแปรได้เป็น

$$\frac{dy}{y} = -4tdt$$

อินทิเกรตจะได้

$$\ln|y| = -2t^2 + c$$

$$\ln|y| + 2t^2 = c$$

1.9 $\cos^2 y\, dx + \sin^2 x\, dy = 0$

วิธีทำ แยกตัวแปรได้เป็น

$$\frac{dx}{\sin^2 x} + \frac{dy}{\cos^2 y} = 0$$

ซึ่งอินทิเกรตได้

$$\operatorname{cosec}^2 x\, dx + \sec^2 y\, dy = 0$$

$$-\cot x + \tan y = c$$

$$\tan y - \cot x = c$$

1.10 $2xydx + dy = 0$

วิธีทำ แยกตัวแปรได้เป็น

$$2xdx + \frac{dy}{y} = 0$$

ซึ่งอินทิเกรตได้

$$x^2 + \ln|y| = c$$

2. จงหาคำตอบเฉพาะของสมการต่อไปนี้ตามเงื่อนไขที่กำหนดให้

2.1 $yy' = t^3$; เมื่อ $t = 1$, $y = 10$

วิธีทำ แยกตัวแปรได้เป็น

$$y\frac{dy}{dt} = t^3$$

อินทิเกรตได้

$$ydy = t^3dt$$

$$\frac{y^2}{2} = \frac{t^4}{4} + c$$

เมื่อ $t = 1, y = 10$

$$\frac{100}{2} = \frac{1}{4} + c$$

$$c = 50 - \frac{1}{4} = 49\frac{3}{4}$$

$$\frac{y^2}{2} = \frac{t^4}{4} + \frac{199}{4}$$

$$2y^2 - t^4 = 199$$

2.2 $(2+y)\frac{dy}{dx} = x\sqrt{x}$; เมื่อ $x = 0, y = 1$

วิธีทำ แยกตัวแปรได้เป็น

$$(2+y)dy = x^{\frac{3}{2}}dx$$

อินทิเกรตได้

$$2y + \frac{y^2}{2} = \frac{2}{5}x^{\frac{5}{2}} + c$$

เมื่อ $x = 0, y = 1$

$$2 + \frac{1}{2} = c$$

$$c = \frac{5}{2}$$

$$2y + \frac{y^2}{2} = \frac{2}{5}x^{\frac{5}{2}} + \frac{5}{2}$$

$$5y^2 + 20y = 4x^2\sqrt{x} + 5$$

2.3 $(2xy + 2x)dx - dy = 0$ เมื่อ $x = 0, y = 0$

วิธีทำ แยกตัวแปรได้เป็น

$$2xdx - \frac{dy}{y+1} = 0$$

อินทิเกรตได้

$$x^2 - \ln|y+1| = c$$

เมื่อ $x = 0,\ y = 0$

$$c = 0$$

$$x^2 - \ln|y+1| = 0$$

2.4 $\frac{dy}{dx} = 3y$; เมื่อ $x = 0,\ y = 1$

วิธีทำ แยกตัวแปรได้เป็น

$$\frac{dy}{y} = 3dx$$

อินทิเกรตได้

$$\ln|y| = 3x + c$$

เมื่อ $x = 0,\ y = 1$

$$c = 0$$

$$\ln|y| - 3x = 0$$

2.5 $\frac{dy}{dx} = (3+y)\cot x$; เมื่อ $x = \frac{\pi}{2},\ y = 4$

วิธีทำ แยกตัวแปรได้เป็น

$$\frac{dy}{3+y} = \cot x dx$$

อินทิเกรตได้

$$\ln|3+y| = \ln\sin x + c$$

เมื่อ $x = \frac{\pi}{2},\ y = 4$

$$\ln|3+4| = \ln\sin\frac{\pi}{2} + c$$

$$c = \ln 7$$

$$\ln|3+y| = \ln\sin x + \ln 7$$

$$\ln\frac{y+3}{\sin x} = \ln 7$$

$$\frac{y+3}{\sin x} = 7$$

$$y+3 = 7\sin x$$

$$y = 7\sin x - 3$$

เฉลยแบบฝึกหัด 4.4

1. จงแสดงว่าฟังก์ชันต่อไปนี้เป็นฟังก์ชันเอกพันธ์และบอกดีกรีด้วย

1.1 x^2y+3xy^2

วิธีทำ

$$\begin{aligned} f(kx, ky) &= (kx)^2ky+3(kx)(ky)^2 \\ &= k^3x^2y+3k^3xy^2 \\ &= k^3(x^2y+3xy^2) \\ &= k^3f(x, y) \end{aligned}$$

แสดงว่า x^2y+3xy^2 เป็นฟังก์ชันเอกพันธ์ดีกรี 3

1.2 $4x-3y$

วิธีทำ

$$\begin{aligned} f(kx, ky) &= 4(kx)-3(ky) \\ &= k(4x-3y) \\ &= kf(x, y) \end{aligned}$$

แสดงว่า $4x-3y$ เป็นฟังก์ชันเอกพันธ์ดีกรี 1

1.3 $\dfrac{x^2e^{\frac{x}{y}}}{y^2}$

วิธีทำ

$$\begin{aligned} f(kx, ky) &= \frac{(kx)^2e^{\frac{kx}{ky}}}{(ky)^2} \\ &= \frac{x^2e^{\frac{x}{y}}}{y^2} \\ &= f(x, y) \end{aligned}$$

แสดงว่า $\dfrac{x^2e^{\frac{x}{y}}}{y^2}$ เป็นฟังก์ชันเอกพันธ์ดีกรี 0

2. จงแก้สมการต่อไปนี้

2.1 $(x+y)dx-xdy = 0$

วิธีทำ เพราะว่า $(x+y)$ และ x ต่างเป็นฟังก์ชันเอกพันธ์

ให้ $y = vx$ แล้ว $dy = vdx+xdv$ แทนในโจทย์

จะได้ $(x+vx)dx - x(vdx+xdv) = 0$

$$xdx+xdv = 0$$

แยกตัวแปรได้

$$dx + dv = 0$$

$$x + v = c$$

แทนค่ากลับ $v = \frac{y}{x}$ ได้

$$x + \frac{y}{x} = c$$

$$x^2 + y = cx$$

$$y = cx - x^2$$

2.2 $(y^2 + xy)dx - x^2dy = 0$

วิธีทำ เพราะว่า $(y^2 + xy)$ และ x^2 เป็นฟังก์ชันเอกพันธ์

ให้ $y = vx$ แล้ว $dy = vdx + xdv$

$$(v^2x^2 + x^2v)dx - x^2(vdx + xdv) = 0$$

$$v^2x^2dx + xdv = 0$$

$$xdx + v^{-2}dv = 0$$

$$\frac{x^2}{2} - \frac{1}{v} = c$$

แทนค่า $v = \frac{y}{x}$ ได้

$$\frac{x^2}{2} - \frac{x}{y} = c$$

$$x^2y - 2x - 2cy = 0$$

2.3 $(y^2 - x^2)dx + xydy = 0$

วิธีทำ เพราะว่า $(y^2 - x^2)$ และ xy เป็นฟังก์ชันเอกพันธ์

ให้ $y = vx$ แล้ว $dy = vdx + xdv$

$$(v^2x^2 - x^2)dx + x^2v(vdx + xdv) = 0$$

$$v^2x^2dx - x^2dx + v^2x^2dx + vx^3dv = 0$$

$$x^2(2v^2 - 1)dx + vx^3dv = 0$$

$$\frac{dx}{x} + \frac{vdv}{2v^2 - 1} = 0$$

$$\ln x + \frac{1}{4}\ln|2v^2 - 1| = \frac{1}{4}\ln c$$

$$4\ln x + \ln|2v^2-1| = \ln c$$

แทนค่า $v = \frac{y}{x}$ ได้

$$4\ln x + \ln\left|\frac{2y^2}{x^2}-1\right| = \ln c$$

$$\ln x^4 + \ln\left|\frac{2y^2-x^2}{x^2}\right| = \ln c$$

$$\ln(2y^2-x^2)x^2 = \ln c$$

$$2x^2y^2 - x^4 = c$$

2.4 $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{2}\left(\frac{x}{y}+\frac{y}{x}\right)$

วิธีทำ ให้ $y = vx$ แล้ว $dy = vdx + xdv$

$$vdx + xdv = \frac{1}{2}\left(\frac{x}{vx}+\frac{vx}{x}\right)dx$$

$$2vdx + 2xdv = \left(\frac{1+v^2}{v}\right)dx$$

$$\left[2v-\left(\frac{1+v^2}{v}\right)\right]dx + 2xdv = 0$$

$$\frac{v^2-1}{v}dx + 2xdv = 0$$

$$\frac{dx}{x} + \frac{2vdv}{v^2-1} = 0$$

$$\ln x + \ln|v^2-1| = \ln c$$

$$\ln x(v^2-1) = \ln c$$

$$x(v^2-1) = c$$

แทนค่า $v = \frac{y}{x}$ ได้

$$x\left(\frac{y^2}{x^2}-1\right) = c$$

$$x\left(\frac{y^2-x^2}{x^2}\right) = c$$

$$y^2 - x^2 = cx$$

2.5 $\frac{dy}{dx} = \frac{x}{y} + \frac{y}{x} + 2$

วิธีทำ ให้ $y = vx$ แล้ว $dy = vdx + xdv$

$$vdx + xdv = \left(\frac{x}{vx} + \frac{vx}{x} + 2\right)dx$$

$$vdx + xdv = \left(\frac{1}{v} + v + 2\right)dx$$

$$xdv = \frac{1+2v}{v}dx$$

$$\frac{xdv}{1+2v} = \frac{dx}{x}$$

$$\frac{1}{2}\ln|1+2v| = \ln x + \frac{1}{2}\ln c$$

$$\ln|1+2v| = 2\ln x + \ln c$$

$$\ln\left(\frac{1+2v}{x^2}\right) = \ln c$$

$$\frac{1+2v}{x^2} = c$$

แทนค่า $v = \frac{y}{x}$ ได้

$$1 + 2\frac{y}{x} = cx^2$$

$$x + 2y = cx^3$$

2.6 $\frac{dy}{dx} = \frac{y+x}{y-x}$

วิธีทำ ให้ $y = vx$ แล้ว $dy = vdx + xdv$

$$vdx + xdv = \frac{vx+x}{vx-x}dx$$

$$vdx + xdv = \frac{v+1}{v-1}dx$$

$$\left(v - \frac{v+1}{v-1}\right)dx + xdv = 0$$

$$\frac{v^2-2v-1}{v-1}dx + xdv = 0$$

$$(v-1)dx + xdv = 0$$

$$\frac{dx}{x}+\frac{dv}{v-1} = 0$$

$$\ln x+\ln|v-1| = \ln c$$

$$\ln x(v-1) = \ln c$$

$$x(v-1) = c$$

แทนค่า $v = \frac{y}{x}$ ได้

$$x(\frac{y}{x}-1) = c$$

$$y-x = c$$

$$y = x+c$$

2.7 $\frac{dy}{dx}+\frac{3x^2y}{x^3+y^3} = 0$ เมื่อ $x = 1,\ y = 1$

วิธีทำ ให้ $x = vy$ แล้ว $dx = vdy+ydv$

$$(x^3+y^3)dy+3x^2ydx = 0$$

$$(v^3y^3+y^3)dy + 3v^2y^3(vdy+ydv) = 0$$

$$y^3(v^3+1)dy + 3v^3y^3dy + 3v^2y^4dv = 0$$

$$(v^3+1)dy+3v^3dy+3v^2ydv = 0$$

$$(4v^3+1)dy+3v^2ydv = 0$$

$$\frac{1}{3y}dy+\frac{v^2}{4v^3+1}dv = 0$$

$$\frac{1}{3y}dy+\frac{1}{12}\frac{d(4v^3+1)}{4v^3+1} = 0$$

$$\frac{4}{y}dy+\frac{d(4v^3+1)}{4v^3+1} = 0$$

$$4\ln y+\ln|4v^3+1| = \ln c$$

$$\ln y^4+\ln|4v^3+1| = \ln c$$

แทนค่า $v = \frac{x}{y}$ ได้

$$\ln|y^4(4\frac{x^3}{y^3}+1)| = \ln c$$

$$y^4(4\frac{x^3}{y^3}+1) = c$$

$$4x^3y+y^4 = c$$

เฉลยแบบฝึกหัด 4.5

1. จงแสดงว่าสมการเชิงอนุพันธ์ต่อไปนี้เป็นสมการแน่นอน และข้อใดไม่เป็น

1.1 $x^2ydx + x^3y^2dy = 0$

วิธีทำ

ในที่นี้ $M(x, y) = x^2y$

$N(x, y) = x^3y^2$

พิจารณา $\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}(x^2y) = x^2$

$\frac{\partial N}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}(x^3y^2) = 3x^2y^2$

จะเห็นว่า $\frac{\partial M}{\partial y} \neq \frac{\partial N}{\partial x}$

ดังนั้น ไม่เป็นสมการแน่นอน

1.2 $y^2dx + 2xydy = 0$

วิธีทำ

ในที่นี้ $M(x, y) = y^2$

$N(x, y) = 2xy$

พิจารณา $\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}y^2 = 2y$

$\frac{\partial N}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}(2xy) = 2y$

จะเห็นว่า $\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}$

ดังนั้น เป็นสมการแน่นอน

1.3 $x\cos y\,dx + y\cos x\,dy = 0$

วิธีทำ

ในที่นี้ $M(x, y) = x\cos y$

$N(x, y) = y\cos x$

พิจารณา $\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}(x\cos y) = -x\sin y$

$\frac{\partial N}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}(y\cos x) = -y\sin x$

จะเห็นว่า $\frac{\partial M}{\partial y} \neq \frac{\partial N}{\partial x}$

ดังนั้น ไม่เป็นสมการแน่นอน

1.4 $(x^2+2xy)dx+(y^2-2xy)dy = 0$

วิธีทำ

ในที่นี้ $M(x, y) = x^2+2xy$

$N(x, y) = y^2-2xy$

พิจารณา $\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}(x^2+2xy) = 2x$

$\frac{\partial N}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}(y^2-2xy) = -2y$

จะเห็นว่า $\frac{\partial M}{\partial y} \neq \frac{\partial N}{\partial x}$

ดังนั้น ไม่เป็นสมการแน่นอน

1.5 $\ell n\, y\, dx+\frac{x}{y}dy = 0$

วิธีทำ

ในที่นี้ $M(x, y) = \ell n\, y$

$N(x, y) = \frac{x}{y}$

พิจารณา $\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}(\ell n\, y) = \frac{1}{y}$

$\frac{\partial N}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{x}{y}\right) = \frac{1}{y}$

จะเห็นว่า $\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}$

ดังนั้น เป็นสมการแน่นอน

1.6 $3x^2\sin y\, dx+x^3\cos y\, dy = 0$

วิธีทำ

ในที่นี้ $M(x, y) = 3x^2\sin y$

$N(x, y) = x^3\cos y$

พิจารณา $\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}(3x^2\sin y) = 3x^2\cos y$

$\frac{\partial N}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}(x^3\cos y) = 3x^2\cos y$

จะเห็นว่า $\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}$

ดังนั้น เป็นสมการแน่นอน

1.7 $2xye^{x^2}\,dx + e^{x^2}\,dy = 0$

วิธีทำ

ในที่นี้ $M(x, y) = 2xye^{x^2}$

$N(x, y) = e^{x^2}$

พิจารณา $\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}(2xy\,e^{x^2}) = 2xe^{x^2}$

$\frac{\partial N}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}(e^{x^2}) = 2xe^{x^2}$

จะเห็นว่า $\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}$

ดังนั้น เป็นสมการแน่นอน

1.8 $(2xy^4 + \sin y)dx + (4x^2y^3 + x\cos y)dy = 0$

วิธีทำ

ในที่นี้ $M(x, y) = 2xy^4 + \sin y$

$N(x, y) = 4x^2y^3 + x\cos y$

พิจารณา $\frac{\partial M}{\partial y} = 8xy^3 + \cos y$

$\frac{\partial N}{\partial x} = 8xy^3 + \cos y$

จะเห็นว่า $\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}$

ดังนั้น เป็นสมการแน่นอน

2. จงหาคำตอบทั่วไปของสมการเชิงอนุพันธ์ต่อไปนี้

2.1 $4xy\,dx + 2x^2\,dy = 0$

วิธีทำ

ในที่นี้ $M(x, y) = 4xy$

$N(x, y) = 2x^2$

พิจารณา $\frac{\partial M}{\partial y} = 4x$

$\frac{\partial N}{\partial y} = 4x$

ดังนั้น เป็นสมการแน่นอน

จะต้องมี $u(x, y)$ ซึ่ง $du = Mdx + Ndy$

แต่ $du = \frac{\partial u}{\partial x}dx + \frac{\partial u}{\partial y}dy$

ทำให้ $\frac{\partial u}{\partial x} = M = 4xy$

$\frac{\partial u}{\partial y} = N = 2x^2$

จากการสังเกต จะพบว่า

$u(x, y) = 2x^2y$

เพราะฉะนั้น คำตอบของสมการคือ

$2x^2y = c$

2.2 $y^2dx + 2xy\,dy = 0$

วิธีทำ

ในที่นี้ $M(x, y) = y^2$

$N(x, y) = 2xy$

พิจารณา $\frac{\partial M}{\partial y} = 2y$

$\frac{\partial N}{\partial x} = 2y$

ดังนั้น เป็นสมการแน่นอน

จะต้องมี $u(x, y)$ ซึ่ง $du = Mdx + Ndy$

แต่ $du = \frac{\partial u}{\partial x}dx + \frac{\partial u}{\partial y}dy$

ทำให้ $\frac{\partial u}{\partial x} = M = y^2$

$\frac{\partial u}{\partial y} = N = 2xy$

จากการสังเกต จะพบว่า

$$u(x, y) = xy^2$$

เพราะฉะนั้น คำตอบของสมการคือ

$$xy^2 = c$$

2.3 $y\cos x\,dx + \sin x\,dy = 0$

วิธีทำ

ในที่นี้ $M(x, y) = y\cos x$

$N(x, y) = \sin x$

พิจารณา $\frac{\partial M}{\partial y} = \cos x$

$\frac{\partial N}{\partial x} = \cos x$

ดังนั้น เป็นสมการแน่นอน

จะต้องมี $u(x, y)$ ซึ่ง $du = Mdx + Ndy$

แต่ $du = \frac{\partial u}{\partial x}dx + \frac{\partial u}{\partial y}dy$

ทำให้ $\frac{\partial u}{\partial x} = M = y\cos x$

$\frac{\partial u}{\partial y} = N = \sin x$

จากการสังเกต จะพบว่า

$$u(x, y) = y\sin x$$

เพราะฉะนั้น คำตอบของสมการคือ

$$y\sin x = c$$

2.4 $ye^x dx + e^x dy = 0$

วิธีทำ

ในที่นี้ $M(x, y) = ye^x$

$N(x, y) = e^x$

พิจารณา $\frac{\partial M}{\partial y} = e^x$

$\frac{\partial N}{\partial x} = e^x$

ดังนั้น เป็นสมการแน่นอน

จะต้องมี $u(x, y)$ ซึ่ง $du = \frac{\partial u}{\partial x}dx + \frac{\partial u}{\partial y}dy$

ทำให้ $$\frac{\partial u}{\partial x} = M = ye^x$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = N = e^x$$

จากการสังเกต จะพบว่า

$$u(x, y) = ye^x$$

เพราะฉะนั้น คำตอบของสมการคือ

$$ye^x = c$$

2.5 $2xy\,dx + (x^2 + 2y)dy = 0$

วิธีทำ

ในที่นี้ $$M(x, y) = 2xy$$

$$N(x, y) = x^2 + 2y$$

พิจารณา $$\frac{\partial M}{\partial y} = 2x$$

$$\frac{\partial N}{\partial x} = 2x$$

ดังนั้น เป็นสมการแน่นอน

จะต้องมี $u(x, y)$ ซึ่ง $du = \frac{\partial u}{\partial x}dx + \frac{\partial u}{\partial y}dy$

ทำให้ $$\frac{\partial u}{\partial x} = M = 2xy$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = N = x^2 + 2y$$

จากการสังเกต จะพบว่า

$$u(x, y) = x^2y + 2y$$

เพราะฉะนั้น คำตอบของสมการคือ

$$x^2y + 2y = c$$

2.6 $e^x \sin y\, dx + e^x \cos y\, dy = 0$

วิธีทำ

ในที่นี้ $M(x, y) = e^x \sin y$

$N(x, y) = e^x \cos y$

พิจารณา $\frac{\partial M}{\partial y} = e^x \cos y$

$\frac{\partial N}{\partial x} = e^x \cos y$

ดังนั้น เป็นสมการแน่นอน

จะต้องมี $u(x, y)$ ซึ่ง $du = \frac{\partial u}{\partial x} dx + \frac{\partial u}{\partial y} dy$

ทำให้ $\frac{\partial u}{\partial x} = M = e^x \sin y$

$\frac{\partial u}{\partial y} = N = e^x \cos y$

จากการสังเกต จะพบว่า

$u(x, y) = e^x \sin y$

เพราะฉะนั้น คำตอบของสมการคือ

$e^x \sin y = c$

เฉลยแบบฝึกหัด 4.6

1. จงแสดงว่าสมการเชิงอนุพันธ์ต่อไปนี้ ข้อใดเป็นสมการเชิงเส้น และข้อใดไม่เป็น

1.1 $(1-2x)dx+(1+2y)dy = 0$

วิธีทำ เนื่องจากสมการเชิงเส้น อยู่ในรูป

$$\frac{dy}{dx}+P(x)y = Q(x)$$

จากโจทย์ จัดได้เป็น

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{(1-2x)}{1+2y}$$

ซึ่งไม่สามารถจัดให้อยู่ในรูปแบบสมการเชิงเส้นได้
จึงไม่เป็นลมการเชิงเส้น

1.2 $\frac{dy}{dx} = \frac{x^2+y^2}{2xy}$

ไม่สามารถจัดให้อยู่ในรูป $\frac{dy}{dx}+P(x)y = Q(x)$ ได้

จึงไม่เป็นสมการเชิงเส้น

1.3 $\frac{dy}{dx}+\frac{1}{x}y = x^2+1$

จะสังเกตเห็นว่า อยู่ในรูป $\frac{dy}{dx}+P(x)y = Q(x)$

โดย $P(x) = \frac{1}{x}$ และ $Q(x) = x^2+1$

จึงเป็นสมการเชิงเส้น

1.4 $(2x-y+1)dx + (2y-x-1)dy = 0$

จัดได้เป็น $\frac{dy}{dx} = -\frac{(2x-y+1)}{2y-x-1}$

ซึ่งไม่สามารถให้เป็นรูปเชิงเส้นได้
จึงไม่เป็นสมการเชิงเส้น

1.5 $x(x-1)y'+y = x^2(2x-1)$

จัดได้เป็น $y'+\frac{y}{x(x-1)} = \frac{x(2x-1)}{x-1}$

ซึ่งอยู่ในรูป $\frac{dy}{dx}+P(x)y = Q(x)$

โดย $P(x) = \frac{1}{x(x-1)}$, $Q(x) = \frac{x(2x-1)}{x-1}$

จึงเป็นสมการเชิงเส้น

1.6 $y' - y\tan x = \frac{1}{\cos^3 x}$

จะเห็นว่าอยู่ในรูป $\frac{dy}{dx} + P(x)y = Q(x)$

โดย $P(x) = -\tan x$, $Q(x) = \frac{1}{\cos^3 x}$

จึงเป็นสมการเชิงเส้น

2. จงหาคำตอบของสมการเชิงอนุพันธ์ต่อไปนี้

2.1 $y' + 2xy = 2xe^{-x^2}$

วิธีทำ จะเห็นว่าเป็นสมการเชิงเส้น

โดย $P(x) = 2x$, $Q(x) = 2xe^{-x^2}$

พิจารณา $e^{\int P(x)dx} = e^{\int 2xdx} = e^{x^2}$ นำไปคูณตลอด

สมการโจทย์ จะได้

$$e^{x^2}y' + 2xye^{x^2} = 2xe^{x^2}\cdot e^{-x^2}$$

หรือ $\frac{d}{dx}(e^{x^2}\cdot y) = 2x$

อินทิเกรต $e^{x^2}y = x^2 + c$

หรือ $y = (x^2 + c)e^{-x^2}$

2.2 $y' + 2y = e^{-x}$

วิธีทำ จะเห็นว่า เป็นสมการเชิงเส้น

โดย $P(x) = 2$, $Q(x) = e^{-x}$

พิจารณา $e^{\int P(x)dx} = e^{2x}$ นำไปคูณตลอดสมการโจทย์

จะได้ $e^{2x}y' + 2ye^{2x} = e^{-x}\cdot e^{2x}$

หรือ $d(e^{2x}\cdot y) = e^{x}$

อินทิเกรต $e^{2x}y = e^{x} + c$

หรือ $y = ce^{-2x} + e^{-x}$

2.3 $y' \cos x - y \sin x = 2x, \quad y(0) = 0$

จัดรูปได้เป็น

$$y' - y\frac{\sin x}{\cos x} = \frac{2x}{\cos x}$$

ซึ่งเป็นสมการเชิงเส้น

โดย $P(x) = -\frac{\sin x}{\cos x}, \quad Q(x) = \frac{2x}{\cos x}$

พิจารณา $e^{\int P(x)dx} = e^{-\int \frac{\sin x}{\cos x} dx} = e^{\ell n(\cos x)} = \cos x$

นำไปคูณตลอดสมการโจทย์ จะได้

$$\cos x\, y' - y \sin x = 2x$$

หรือ $d(\cos x \cdot y) = 2x$

อินทิเกรต $(\cos x)\, y = x^2 + c$

หรือ $y = \frac{x^2 + c}{\cos x}$

จากเงื่อนไข $y(0) = 0$

นั่นคือ $x = 0, \; y = 0$ แทนในสมการ $y = \frac{x^2 + c}{\cos x}$

จะพบว่า $c = 0$

ดังนั้น $y = \frac{x^2}{\cos x}$

2.4 $y' + y \cos x = \cos x, \quad y(0) = 1$

ซึ่งเป็นสมการเชิงเส้น

โดย $P(x) = \cos x, \quad Q(x) = \cos x$

พิจารณา $e^{\int P(x)dx} = e^{\int \cos x\, dx} = e^{\sin x}$ นำไปคูณตลอด

$$e^{\sin x} y' + y \cos x \cdot e^{\sin x} = \cos x \cdot e^{\sin x}$$

หรือ $d(e^{\sin x} \cdot y) = \cos x \cdot e^{\sin x}$

อินทิเกรต $e^{\sin x} \cdot y = e^{\sin x} + c$

หรือ $y = ce^{-\sin x} + 1$

จากเงื่อนไข $y(0) = 1$; แทนค่า $x = 0, \; y = 1$

จะได้ $1 = c + 1$

$c = 0$

นั่นคือ $y = 1$