บทที่ 2
เรขาคณิตวิเคราะห์

สรุปการเขียนกราฟของฟังก์ชันไม่เป็นเชิงเส้น

จะอาศัยกฎเกณฑ์ต่าง ๆ 4 ข้อดังนี้

1. ส่วนตัดแกน

1.1 ส่วนตัดแกน x หาได้โดยแทนค่า $y = 0$

1.2 ส่วนตัดแกน y หาได้โดยแทนค่า $x = 0$

2. สมมาตร

2.1 สมมาตรกับแกน x เมื่อแทนค่า y ด้วย $-y$ ในสมการแล้วสมการคงเดิม

2.2 สมมาตรกับแกน y เมื่อแทนค่า x ด้วย $-x$ ในสมการแล้วสมการคงเดิม

2.3 สมมาตรกับจุดกำเนิด เมื่อแทนค่า x ด้วย $-x$ และ y ด้วย $-y$ ในสมการแล้วสมการคงเดิม

3. ขอบเขต คือ การหาโดเมนและเรนจ์นั่นเอง

โดเมน $= \{x | x \in A, (x, y) \in r\}$

เรนจ์ $= \{y | y \in B, (x, y) \in r\}$

4. เส้นกำกับ

ถ้าสมการเส้นโค้ง คือ

$$y = \frac{N(x)}{D(x)}$$

- **เส้นกำกับในแนวดิ่ง** คือ ค่า x ซึ่ง $D(x) = 0$
- **เส้นกำกับในแนวระดับ** โดยเอาเทอมที่ x มีกำลังสูงสุดหารทั้ง $N(x)$ และ $D(x)$ แล้วให้ $x \to \infty$ จะได้ $y = c$ เป็นเส้นกำกับในแนวระดับ ถ้า y ไม่เข้าใกล้ c ค่าใดเลย จะกล่าวว่าไม่มีเส้นกำกับในแนวระดับ

กฎเกณฑ์ทั้ง 4 ข้อ จะทำให้เราสามารถเขียนรูปร่างของกราฟได้ครบทุกค่าของ x

เฉลยแบบฝึกหัด 2.1

จงวิเคราะห์และเขียนกราฟของสมการต่อไปนี้ โดยพิจารณาจาก

1. ส่วนตัดแกน
2. สมมาตร
3. ขอบเขต
4. เส้นกำกับ

1. $y = x^3$

วิธีทำ ส่วนตัดแกน

แทนค่า $y = 0$ จะได้ $x = 0$

แทนค่า $x = 0$ จะได้ $y = 0$

ดังนั้น ส่วนตัดแกน x คือ 0 และส่วนตัดแกน y คือ 0

สมมาตร

แทน y ด้วย $-y$ จะได้สมการ $-y = x^3$ สมการเปลี่ยน

แทน x ด้วย $-x$ จะได้สมการ $y = -x^3$ สมการเปลี่ยน

แทน x ด้วย $-x$ และ y ด้วย $-y$ สมการคงเดิม

ดังนั้น กราฟมีสมมาตรกับจุดกำเนิดอย่างเดียว

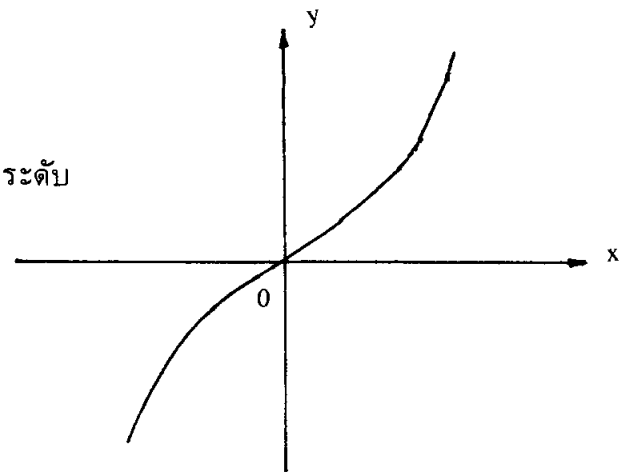
ขอบเขต

ขอบเขตของ x และ y คือ R

เส้นกำกับ

$y = x^3$

ไม่มีเส้นกำกับในแนวดิ่งและในแนวระดับ



2. $y = x^2 + 4$

วิธีทำ

ส่วนตัดแกน

เมื่อแทนค่า $y = 0$ ไม่มีค่า x ที่ทำให้ $x^2 + 4 = 0$ ดังนั้น ไม่มีส่วนตัดแกน x

ส่วนตัดแกน y คือ 4

สมมาตร

แทนค่า y ด้วย $-y$ สมการเปลี่ยน

แทนค่า x ด้วย $-x$ สมการคงเดิม

แทนค่า x ด้วย $-x$ และ y ด้วย $-y$ สมการเปลี่ยน

ดังนั้น กราฟมีสมมาตรกับแกน y อย่างเดียว

ขอบเขต

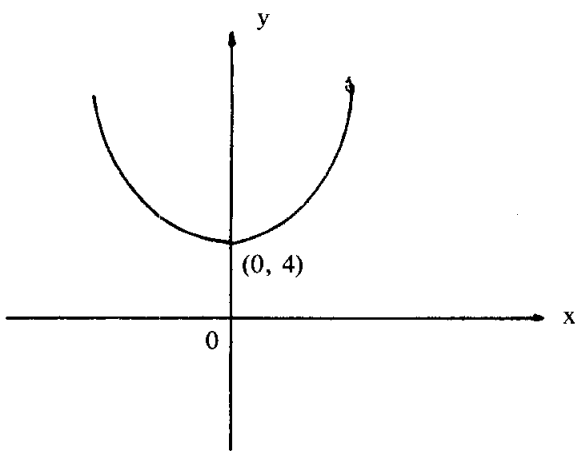
ขอบเขตของ x คือ R

ขอบเขตของ y คือ $\{y | y \geqslant 4\}$

เส้นกำกับ

$y = x^2 + 4$

ไม่มีเส้นกำกับในแนวดิ่ง และในแนวระดับ



3. $y = \sqrt{x - 2}$

วิธีทำ

เส้นตัดแกน

แทน $x = 0$ หาค่า y ไม่ได้ $\therefore$ ไม่มีส่วนตัดแกน y

แทน $y = 0; x = 2$ $\therefore$ ส่วนตัดแกน x เท่ากับ 2

สมมาตร

แทน y ด้วย $-y$ สมการเปลี่ยน

แทน x ด้วย $-x$ สมการเปลี่ยน

แทน x ด้วย $-x$ และ y ด้วย $-y$ สมการเปลี่ยน

กราฟไม่มีสมมาตรกับแกนหรือจุดกำเนิด

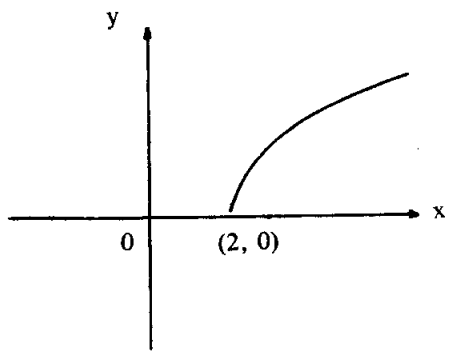
ขอบเขต

ขอบเขตของ x คือ $\{x | x \geqslant 2\}$

ขอบเขตของ y คือ $[0, \infty)$

เส้นกำกับ

ไม่มีเส้นกำกับแนวดิ่งและในแนวระดับ



4. $y = -\frac{1}{x}$

วิธีทำ

ส่วนตัดแกน

ไม่มีส่วนตัดแกน x และแกน y

สมมาตร

ไม่มีสมมาตรกับแกน x และแกน y แต่มีสมมาตรกับจุดกำเนิด

ขอบเขต

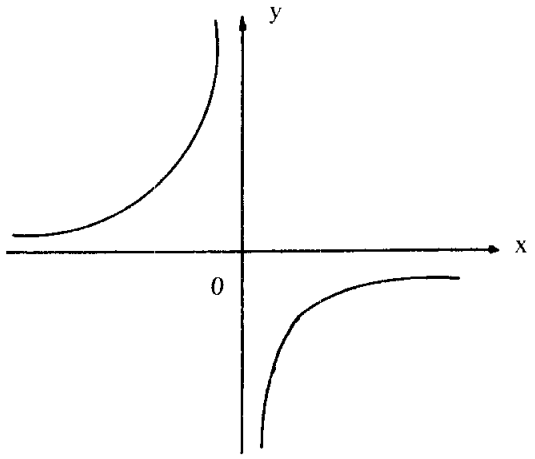
ขอบเขตของ x คือ $\{x|x \neq 0\}$

และขอบเขตของ y คือ $\{y|y \neq 0\}$

เส้นกำกับ

ในแนวดิ่ง คือ $x = 0$

แนวระดับ คือ $y = 0$



5. $y^2 + 4y = x - 6$

วิธีทำ

ส่วนตัดแกน

แกน $x = 6$

ไม่ตัดแกน y

สมมาตร

ไม่มีสมมาตรกับแกน x, แกน y และจุดกำเนิด

ขอบเขต

$$(y^2 + 4y + 4) = x - 2$$

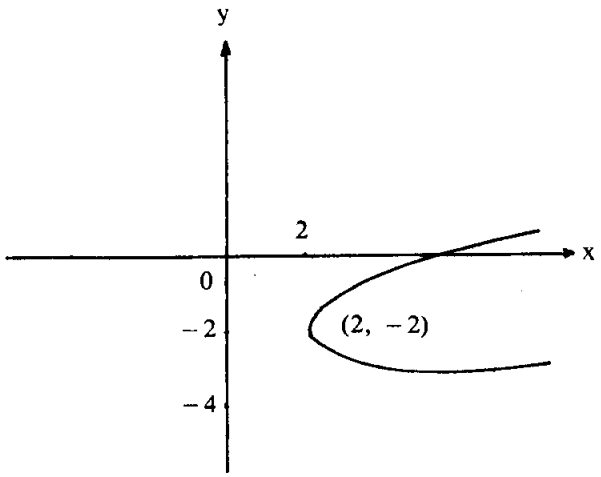
$$(y + 2)^2 = \sqrt{x - 2}$$

ขอบเขตของ x คือ $\{x | x \geqslant 2\}$

ขอบเขตของ y คือ R

เส้นกำกับ

ไม่มีเส้นกำกับในแนวดิ่งและแนวระดับ



6. $y = \dfrac{3x}{x - 2}$

วิธีทำ

ส่วนตัดแกน

แกน x ที่ $x = 0$

แกน y ที่ $y = 0$

สมมาตร

ไม่มีสมมาตรกับแกน x, y และจุดกำเนิด

ขอบเขต

ขอบเขตของ x คือ $\{x | x \in R, x \neq 2\}$

จัดสมการใหม่ $x(y - 3) = 2y$

$$x = \frac{2y}{y - 3}$$

ขอบเขตของ y คือ $\{y | y \in R$ และ $y \neq 3\}$

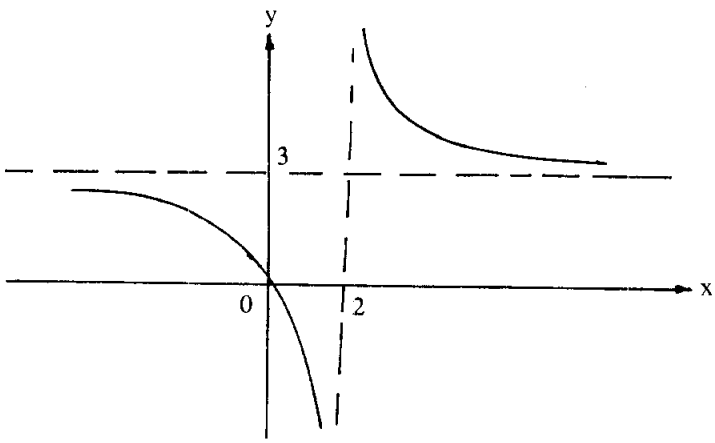
เส้นกำกับ

ในแนวดิ่ง คือ $x = 2$

ในแนวนอน $y = \dfrac{3}{1 - 2/x}$

$\dfrac{2}{x} \to 0$ เมื่อ $x \to \infty$

ดังนั้น $y = 3$ เป็นเส้นกำกับในแนวนอน

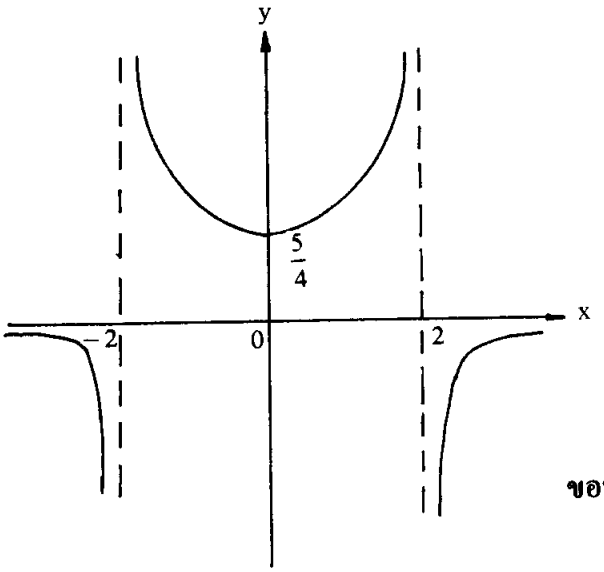


7. $y = \dfrac{5}{4 - x^2}$

วิธีทำ **ส่วนตัดแกน**

ไม่มีส่วนตัดแกน x

ส่วนตัดแกน $y = \dfrac{5}{4}$



สมมาตร

ไม่มีสมมาตรกับแกน x และจุดกำเนิด

มีสมมาตรกับแกน y

ขอบเขต

ขอบเขตของ x คือ $\{x | x \in R, x \neq \pm 2\}$

$$x^2 = \frac{4y - 5}{y}$$

$$x = \pm\sqrt{\frac{4y - 5}{y}}$$

ขอบเขตของ y คือ $\{y | y \in R, y < 0$ หรือ $y \geqslant \frac{5}{4}\}$

เส้นกำกับ

ในแนวดิ่งคือ $x = \pm 2$

ในแนวระดับจาก $y = \dfrac{\frac{5}{x^2}}{\frac{4}{x^2} - 1} \to 0$ เมื่อ $x \to \infty$

เส้นกำกับในแนวระดับ คือ $y = 0$

8. $y = \dfrac{x}{x^2 - 9}$

วิธีทำ

ส่วนตัดแกน

แกน x และแกน y ส่วนตัดแกนเท่ากับ 0

สมมาตร

มีสมมาตรกับจุดกำเนิดอย่างเดียว

ขอบเขต

ขอบเขตของ x คือ $\{x | x \in R, x \neq 3\}$

ขอบเขตของ y คือ R

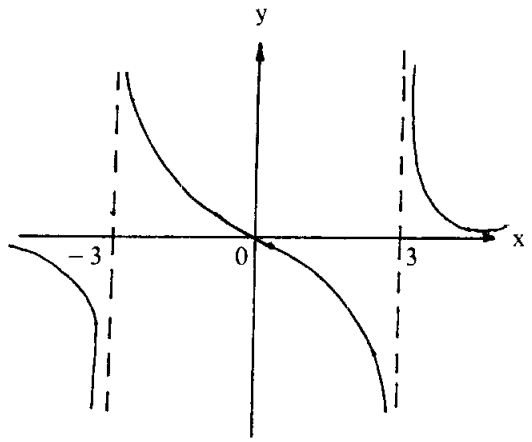
เส้นกำกับ

ในแนวดิ่ง คือ $x = \pm 3$

ในแนวระดับ จาก $y = \dfrac{x}{x^2 - 9}$

$$y = \frac{\frac{1}{x}}{1 - \frac{9}{x^2}} \rightarrow 0 \text{ เมื่อ } x \rightarrow \infty$$

ดังนั้น เส้นกำกับในแนวระดับ คือ $y = 0$



9. $x^2 + y^2 = 9$

วิธีทำ

ส่วนตัดแกน

แกน $x = \pm 3$

แกน $y = \pm 3$

สมมาตร

สมมาตรกับแกน x, แกน y และจุดกำเนิด

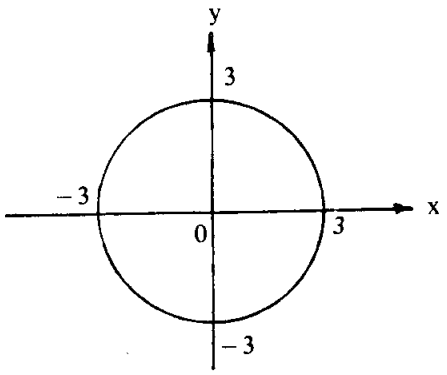
ขอบเขต

ขอบเขตของ x คือ $\{x | -3 \leqslant x \leqslant 3\}$

ขอบเขตของ y คือ $\{y | -3 \leqslant y \leqslant 3\}$

เส้นกำกับ

ไม่มีในแนวดิ่งและในแนวนอน



10. $2x^2 + 3y^2 = 18$

วิธีทำ

ส่วนตัดแกน

แกน $x = \pm 3$

แกน $y = \pm\sqrt{6}$

สมมาตร

สมมาตรกับแกน x, แกน y และจุดกำเนิด

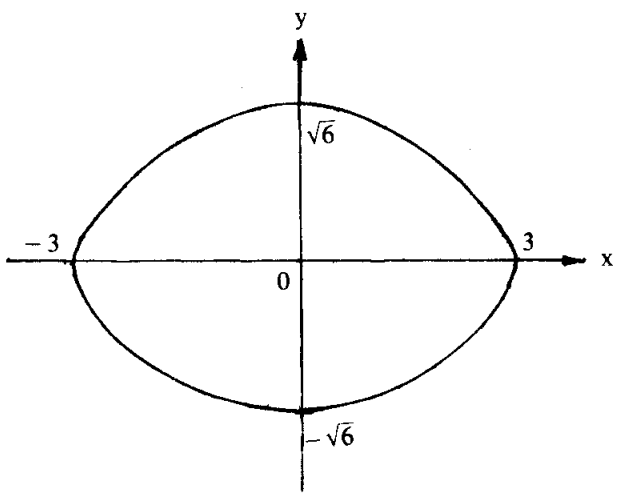
ขอบเขต

ขอบเขตของ x คือ $\{ x | -3 \leqslant x \leqslant 3 \}$

ขอบเขตของ y คือ $\{ y | -\sqrt{6} \leqslant y \leqslant \sqrt{6} \}$

เส้นกำกับ

ไม่มีเส้นกำกับในแนวดิ่งและในแนวนอน



11. $y = \dfrac{3}{x^2 - 9x}$

วิธีทำ

ส่วนตัดแกน

ไม่มีส่วนตัดแกน x และส่วนตัดแกน y

สมมาตร

ไม่สมมาตรกับแกน x, แกน y แลจุดกำเนิด

ขอบเขต

ขอบเขตของ x คือ $\{x | x \neq 0, 9\}$

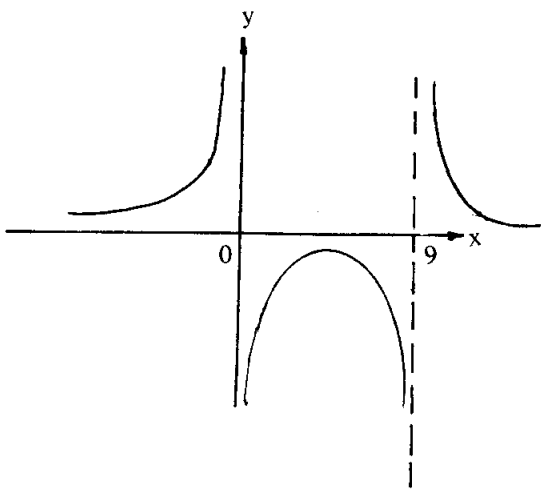
ขอบเขตของ y คือ $\{y | y \leqslant -\frac{12}{81}$ หรือ $y > 0\}$

เส้นกำกับ

ในแนวดิ่ง $x = 0, 9$

ในแนวระดับ จาก $y = \dfrac{3}{x^2 - 9x} = \dfrac{\frac{3}{x^2}}{1 - \frac{9}{x}} \to 0$ เมื่อ $x \to \infty$

$\therefore$ เส้นกำกับในแนวระดับ คือ $y = 0$



12. $\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{20} = 1$

วิธีทำ

ส่วนตัดแกน

แกน $x = \pm 4$

ไม่มีส่วนตัดแกน y

สมมาตร

มีสมมาตรกับแกน x, แกน y และจุดกำเนิด

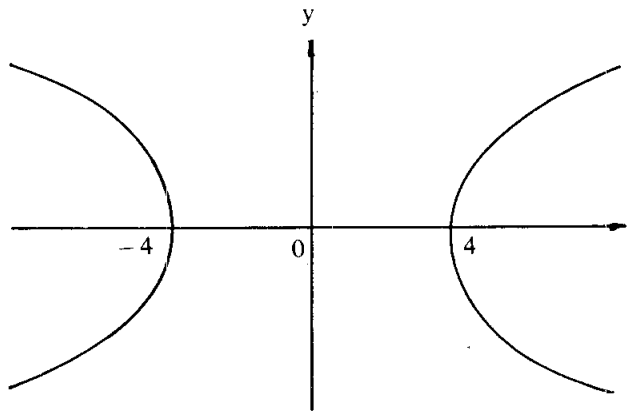
ขอบเขต

ขอบเขตของ x คือ $\{ x | x \leqslant -4$ หรือ $x \geqslant 4 \}$

ขอบเขตของ y คือ $\{ y | y \in R \}$

เส้นกำกับ

ไม่มีเส้นกำกับในแนวดิ่ง หรือในแนวนอน



สรุป สูตรของสมการวงกลม

วงกลม

สมการวงกลมซึ่งมีจุดศูนย์กลางที่ (h, k) และมีรัศมี = r คือ

$$(x - h)^2 + (y - k)^2 = r^2 \qquad \text{.....(1)}$$

สมการทั่วไปของวงกลม คือ

$$x^2 + y^2 + Dx + Ey + F = 0 \qquad \text{.....(2)}$$

ถ้ากำหนดสมการกำลังสองให้ เราทราบว่าเป็นสมการวงกลมโดยดู ส.ป.ส. ของ x^2 และ y^2 ต้องเท่ากัน แล้วจัดให้อยู่ในรูป (1)

1. ถ้า $D^2 + E^2 - 4F > 0$ จะได้ว่าสมการที่กำหนดให้เป็นสมการวงกลม จุดศูนย์กลางที่ $(-\frac{D}{2}, -\frac{E}{2})$ และมีรัศมี $\frac{1}{2}\sqrt{D^2 + E^2 - 4F}$

2. ถ้า $D^2 + E^2 - 4F = 0$ สมการที่กำหนดให้จะเป็นวงกลมจุดเพียงจุดเดียว คือ $(-\frac{D}{2}, -\frac{E}{2})$

3. ถ้า $D^2 + E^2 - 4F < 0$ ไม่สามารถหาค่าจริงของ x และ y ที่คล้องตามสมการได้

จะเห็นว่า ข้อสรุป 3 ข้อนี้ หาได้จากการจัดสมการ (2) โดยวิธีทำกำลังสองสมบูรณ์ให้อยู่ในรูป (1) นั่นเอง ดังนั้น ถ้าไม่อยากจำสูตรมาก ก็พยายามจัดสมการโดยใช้กำลังสองสมบูรณ์

เฉลยแบบฝึกหัด 2.2

1. จงหาสมการวงกลมซึ่งมีคุณสมบัติดังนี้

1.1 จุดศูนย์กลางอยู่ที่ (3, −4) และรัศมี 5 หน่วย

วิธีทำ

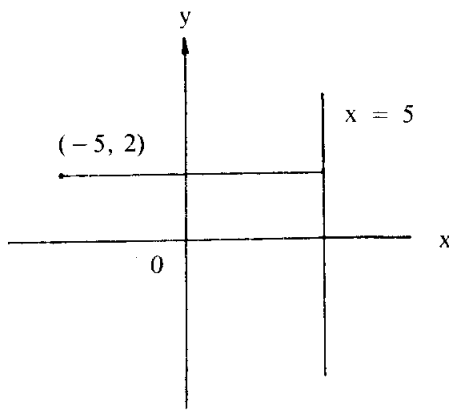
จากสมการ $(x - h)^2 + (y - k)^2 = r^2$

ในที่นี้ $(h, k) = (3, -4)$ และ $r = 5$

แทนค่า

$$(x - 3)^2 + (y + 4)^2 = 25$$

1.2 จุดศูนย์กลางอยู่ที่ (−5, 2) และสัมผัสเส้นตรง $x = 5$



เนื่องจากรัศมีจะตั้งฉากกับเส้นสัมผัส

ดังนั้น รัศมีของวงกลม = 10 หน่วย

จากสมการ $(x - h)^2 + (y - k)^2 = r^2$

$$(x + 5)^2 + (y - 2)^2 = 100$$

1.3 จุดปลายของเส้นผ่าศูนย์กลาง คือ $(-2, 1)$ และ $(4, 3)$

วิธีทำ

จุดกึ่งกลางของเส้นตรงที่ผ่านจุด $(-2, 1)$ และ $(4, 3)$ คือ $(\frac{-2+4}{2}, \frac{1+3}{2}) = (1, 2)$

ระยะทางระหว่าง จุด $(-2, 1)$ และ $(1, 2)$ $= \sqrt{(1-(-2))^2 + (2-1)^2} = \sqrt{10}$

ดังนั้น รัศมีของวงกลม $= \sqrt{10}$

จากสมการ $(x-h)^2 + (y-k)^2 = r^2$

แทนค่า $(x-1)^2 + (y-2)^2 = 10$

1.4 จุดศูนย์กลางอยู่บนเส้นตรง $x = 3$ รัศมีเท่ากับ $\sqrt{13}$ และผ่านจุด $(6, 5)$

วิธีทำ

จากสมการ $(x-h)^2 + (y-k)^2 = r^2$

ในที่นี้ $h = 3, r = \sqrt{13}$

แทนค่า $(x-3)^2 + (y-k)^2 = 13$

จุด $(6, 5)$ อยู่บนวงกลม แทนค่า $x = 6, y = 5$ หาค่า k

$$(6-3)^2 + (5-k)^2 = 13$$
$$(5-k)^2 = 13 - 9 = 4$$
$$5 - k = \pm 2$$
$$k = 3, 7$$

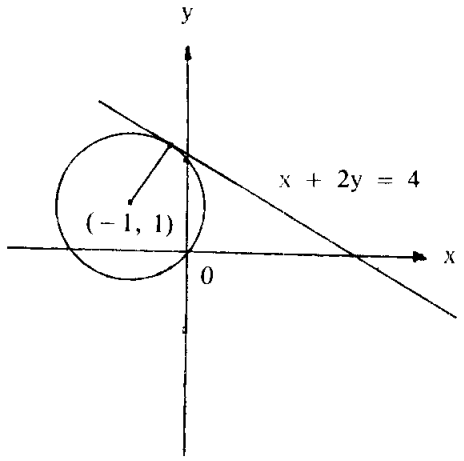
จุดศูนย์กลางมี 2 จุด คือ $(3, 3)$ และ $(3, 7)$ รัศมี $= \sqrt{13}$

สมการวงกลมคือ $(x-3)^2 + (y-3)^2 = 13$

และ $(x-3)^2 + (y-7)^2 = 13$

1.5 จุดศูนย์กลางอยู่ที่ $(-1, 1)$ และสัมผัสกับเส้นตรง $x + 2y = 4$

วิธีทำที่ 1



จากสมการ $x + 2y = 4$

$$y = -\frac{x}{2} + 2$$

ความชันของเส้นตรง $= -\frac{1}{2}$

เนื่องจากรัศมีของวงกลมจะตั้งฉากกับเส้นสัมผัส

ดังนั้นความชันของรัศมี $= \dfrac{-1}{\left(-\frac{1}{2}\right)} = 2$

ให้โคออร์ดิเนตของจุดสัมผัสเป็น (x, y) แต่ (x, y) อยู่บนเส้นตรงที่กำหนดให้

ดังนั้น จุดสัมผัส คือ $(x, -\frac{x}{2} + 2)$

ความชันของรัศมีที่ผ่านจุด $(-1, 1)$ และ $(x, -\frac{x}{2} + 2)$ $= \dfrac{-\frac{x}{2} + 2 - 1}{x + 1}$

$$= \frac{-x + 2}{2(x + 1)}$$

$$\therefore \quad \frac{2 - x}{2(x + 1)} = 2$$

$$2 - x = 4x + 4$$

$$x = -\frac{2}{5}$$

$$y = \frac{11}{5}$$

รัศมีของวงกลม $= \sqrt{\left(-\frac{2}{5} - (-1)\right)^2 + \left(\frac{11}{5} - 1\right)^2} = \frac{3\sqrt{5}}{5} = \frac{3}{\sqrt{5}}$

สมการวงกลมคือ $5(x + 1)^2 + 5(y - 1)^2 = 9$

วิธีที่ 2

ถ้าทราบว่าสูตรระยะทางตั้งฉากจากจุด (x_1, y_1) ไปยังเส้นตรง $Ax + By + C = 0$

คือ $$|d| = \frac{|Ax_1 + By_1 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}$$

ดังนั้นรัศมีของวงกลม $= |d| = \frac{|(-1) + 2(1) - 4|}{\sqrt{1^2 + 2^2}} = \frac{3}{\sqrt{5}}$

1.6 ผ่านจุด 3 จุด คือ A(2, 3), B(3, 2) และ C(−4, 3)

วิธีทำ

จากสมการทั่วไปของวงกลม $x^2 + y^2 + Dx + Ey + F = 0$

จุด A, B, C อยู่บนวงกลม

$4 + 9 + 2D + 3E + F = 0$

$9 + 4 + 3D + 2E + F = 0$

$16 + 9 - 4D + 3E + F = 0$

หรือ $2D + 3E + F = -13$ .....(1)

$3D + 2E + F = -13$ .....(2)

$-4D + 3E + F = -25$ .....(3)

(1) − (3); $6D = 12$

$D = 2$

(2) − (3); $7D - E = 12$ .....(4)

แทนค่า D ใน (4)

$E = 2$

แทนค่า D, E ใน (1)

$4 + 6 + F = -13$

$F = -23$

สมการทั่วไปของวงกลมคือ $x^2 + y^2 + 2x + 2y - 23 = 0$

2. จงหาจุดศูนย์กลางและรัศมีของวงกลม

2.1 $x^2 + y^2\ 2x - 4y + 9 = 0$

วิธีทำ

$$x^2 + y^2 + 2x - 4y + 9 = 0$$

$$(x^2 + 2x + 1) + (y^2 - 4y + 4) = -9 + 4 + i$$

$$(x + 1)^2 + (y - 2)^2 = -4$$

ไม่สามารถหาค่าจริงของ x และ y ที่คล้องตามสมการได้
ดังนั้นสมการนี้ไม่มีกราฟ

2.2 $2x^2 + 2y^2 + 16x + 8y + 22 = 0$

วิธีทำ

เอา 2 หารตลอด

$$x^2 + y^2 + 8x + 4y + 11 = 0$$

$$(x^2 + 8x + 16) + (y^2 + 4y + 4) = -11 + 16 + 4$$

$$(x + 4)^2 + (y + 2)^2 = 9$$

จุดศูนย์กลางของวงกลมอยู่ที่ $(-4, -2)$ และรัศมีเท่ากับ 3

2.3 $4x^2 + 4y^2 - 4x + 12y + 50 = 0$

วิธีทำ

เอา 4 หารตลอด

$$x^2 + y^2 - x + 3y + \frac{25}{2} = 0$$

$$(x^2 - x + \frac{1}{4}) + (y^2 + 3y + \frac{9}{4}) = -\frac{25}{2} + \frac{1}{4} + \frac{9}{4} = \frac{-40}{4} = -10$$

$$(x - \frac{1}{2})^2 + (y + \frac{3}{2})^2 = -10$$

สมการนี้ไม่มีกราฟ

2.4 $x^2 + y^2 - 6x - 2y - 6 = 0$

วิธีทำ

จากสมการทั่วไป $x^2 + y^2 + Dx + Ey + F = 0$

สมการนี้มีจุดศูนย์กลางที่ $\left(-\frac{D}{2}, -\frac{E}{2}\right)$ และรัศมี $\frac{1}{2}\sqrt{D^2 + E^2 - 4F}$

จาก $x^2 + y^2 - 6x - 2y - 6 = 0$

ในที่นี้ $D = -6, E = -2, F = -6$

ดังนั้น $\frac{1}{2}\sqrt{D^2 + E^2 - 4F} = \frac{1}{2}\sqrt{36 + 4 + 24} = 4$

สมการมีจุดศูนย์กลางที่ $\left(-\frac{(-6)}{2}, -\frac{(-2)}{2}\right) = (3, 1)$ และรัศมี $= 4$

3. จงหาสมการของวงกลมซึ่งผ่านจุด $(-2, 2)$, $(5, 1)$ และมีจุดศูนย์กลางอยู่บนเส้นตรง $x + 2y + 3 = 0$

วิธีทำ

ให้สมการวงกลม $(x - h)^2 + (y - k)^2 = r^2$

จุดศูนย์กลาง (h, k) อยู่บนเส้นตรง $x + 2y + 3 = 0$

ดังนั้น $h + 2k + 3 = 0$

$h + 2k = -3$ .....(1)

จุด $(-2, 2)$ และ $(5, 1)$ อยู่บนวงกลม ดังนั้น

$$(-2 - h)^2 + (2 - k)^2 = r^2 = (5 - h)^2 + (1 - k)^2$$

$$4 + 4h + h^2 + 4 - 4k + k^2 = 25 - 10h + h^2 + 1 - 2k + k^2$$

$$14h - 2k = 18 \quad \text{.....(2)}$$

(1) + (2); $15h = 15$

$h = 1$

$k = -2$

ดังนั้น จุดศูนย์กลางอยู่ที่ $(1, -2)$

รัศมีของวงกลม $= \sqrt{(-2 - 1)^2 + (2 - (-2))^2} = \sqrt{9 + 16} = 5$

$$(x - 1)^2 + (y + 2)^2 = 25$$

4. จงหาสมการวงกลมซึ่งมีจุดศูนย์กลางร่วมกับวงกลม $x^2 + y^2 - 4x + 8y = 1$ และสัมผัสเส้นตรง $x + y + 3 = 0$

วิธีทำ

$$x^2 + y^2 - 4x + 8y = 1$$

$$(x^2 - 4x + 4) + (y^2 + 8y + 16) = 1 + 4 + 16$$

$$(x - 2)^2 + (y + 4)^2 = 21$$

จุดศูนย์กลางของวงกลมอยู่ที่ $(2, -4)$

จากสมการ $x + y + 3 = 0$

ถ้า (x_1, y_1) เป็นจุดใด ๆ ระยะทางจากจุด (x_1, y_1) ไปยังเส้นตรง $Ax + By + C = 0$ มีค่าเท่ากับ d

$$|d| = \frac{|Ax_1 + By_1 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}$$

ดังนั้น รัศมีของวงกลม = ระยะทางจากจุด $(2, -4)$ ไปยัง $x + y + 3 = 0$

รัศมีของวงกลม $= \dfrac{2 + (-4) + 3}{\sqrt{1 + 1}} = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$

สมการวงกลมที่ต้องการคือ $(x - 2)^2 + (y - 4)^2 = \dfrac{1}{2}$

5. จงหาสมการเส้นสัมผัสวงกลม $x^2 + y^2 - 3x + 10y = 15$ ที่จุด $(4, -11)$

วิธีทำ

$$x^2 + y^2 - 3x + 10y = 15$$

$$(x^2 - 3x + \frac{9}{4}) + (y^2 + 10y + 25) = 15 + \frac{9}{4} + 25 = \frac{169}{4}$$

$$(x - \frac{3}{2})^2 + (y + 5)^2 = (\frac{13}{2})^2$$

วงกลมมีจุดศูนย์กลางอยู่ที่ $(\frac{3}{2}, -5)$ รัศมี $= \dfrac{13}{2}$

ความชันของรัศมีที่ผ่านจุด $(\frac{3}{2}, -5)$ และ $(4, -11)$ $= \dfrac{-11 - (-5)}{4 - \frac{3}{2}}$

$$= \frac{-12}{5}$$

ดังนั้น ความชันของเส้นสัมผัส $= -\left(-\frac{5}{12}\right) = \frac{5}{12}$

สมการเส้นตรงที่ผ่านจุด (4, −11) มีความชัน $\frac{5}{12}$ คือ

$$y - (-11) = \left(\frac{5}{12}\right)(x - 4)$$

$$12(y + 11) = 5(x - 4)$$

หรือ $12y - 5x + 152 = 0$

6. จงหาสมการวงกลมซึ่งผ่านจุด (3, 2), (1, 0) และสัมผัสแกน y

วิธีทำ

เนื่องจากวงกลมสัมผัสแกน y ถ้า (h, k) เป็นจุดศูนย์กลางของวงกลม

ดังนั้น รัศมีของวงกลม = h

จากสมการ $(x - h)^2 + (y - k)^2 = r^2$

วงกลมผ่านจุด (3, 2), (−1, 0) ดังนั้น

$$(3 - h)^2 + (2 - k)^2 = h^2 = (1 - h)^2 + (0 - k)^2$$

$$9 - 6h + h^2 + 4 - 4k + k^2 = 1 - 2h + h^2 + k^2$$

$$k = 3 - h \qquad \text{.....(1)}$$

และ $1 - 2h + h^2 + k^2 = h^2$

$$1 - 2h + k^2 = 0 \qquad \text{.....(2)}$$

แก้สมการ (1) + (2) จะได้

$$h^2 - 8h + 10 = 0$$

$$h = 4 \pm\sqrt{6}$$

$$k = -1 \pm\sqrt{6}$$

รัศมีของวงกลม $= 4 \pm\sqrt{6}$

สมการวงกลมคือ $(x - (4 \pm\sqrt{6}))^2 + (y - (-12\sqrt{6}))^2 = (4 \pm\sqrt{6})^2$

7. จงหาสมการเส้นสัมผัสวงกลม $x^2 + y^2 - 4x + 2y + 1 = 0$ และขนานกับเส้นตรง $3x - 4y + 5 = 0$

วิธีทำ

สมการ $3x - 4y + 5 = 0$

หรือ $y = \frac{3}{4}x + \frac{5}{4}$

มีความชัน $= \frac{3}{4}$

เส้นสัมผัสวงกลมขนานกับเส้นตรงที่กำหนดให้ ดังนั้นความชันของเส้นสัมผัสย่อมเท่ากับ $\frac{3}{4}$ ด้วย

$$x^2 + y^2 - 4x + 2y + 1 = 0$$

$$(x^2 - 4x + 4) + (y^2 + 2y + 1) = -1 + 4 + 1$$

$$(x - 2)^2 + (y + 1)^2 = 4$$

จุดศูนย์กลางอยู่ที่ $(2, -1)$ รัศมี $= 2$

ให้จุดสัมผัสเป็น (x, y)

ความชันของรัศมีวงกลม $= -\frac{4}{3}$

ดังนั้นความชันรัศมีซึ่งผ่านจุด $(2, -1)$ และ $(x, y) = \frac{y + 1}{x - 2}$

$$\therefore \frac{y + 1}{x - 2} = -\frac{4}{3}$$

$$4x + 3y = 5$$

หรือ $y = -\frac{4}{3}x + \frac{5}{3}$ .....(1)

แต่ระยะทางระหว่าง $(2, -1)$ และ (x, y) เท่ากับ 2 ดังนั้น

$$(x - 2)^2 + (y + 1)^2 = 4$$

แทนค่า y ; $(x-2)^2 + (-\frac{4}{3}x + \frac{5}{3} + 1)^2 = 4$

$$25x^2 - 100x + 64 = 0$$

$$(5x - 16)(5x - 4) = 0$$

$$x = \frac{16}{5}, \frac{4}{5}$$

แทนค่า x ใน (1) ได้ $y = \frac{-13}{5}, \frac{3}{5}$

ความชันเส้นสัมผัส $= \frac{3}{4}$

จากสมการ $y - y_1 = m(x - x_1)$

จุดสัมผัสเป็น $\left(\frac{16}{5}, -\frac{13}{5}\right)$ ได้สมการ

$$y + \frac{13}{5} = \frac{3}{4}\left(x - \frac{16}{5}\right)$$

$$20y - 15x + 68 = 0$$

จุดสัมผัสเป็น $\left(\frac{4}{5}, \frac{3}{5}\right)$ ได้สมการ

$$y - \frac{3}{5} = \frac{3}{4}\left(x - \frac{4}{5}\right)$$

$$20y - 15x - 8 = 0$$

8. จงหาสมการวงกลมซึ่งสัมผัสเส้นตรง $x - 3y - 5 = 0$ ที่จุด $(1,-1)$และวงกลมผ่านจุด $(-3, 7)$

วิธีทำ

เส้นตรง $x - 3y - 5 = 0$

$$y = \frac{1}{3}x - \frac{5}{3}$$

มีความชัน $= \frac{1}{3}$

ดังนั้น ความชันของรัศมี $= -3$

ให้จุดศูนย์กลางของวงกลม คือ (h, k)

ความชันของรัศมีผ่านจุด (h, k) และ $(1, -1)$ คือ $\frac{k+1}{h-1}$

$$\therefore \quad \frac{k+1}{h-1} = -3$$

$$k + 1 = -3h + 3$$

$$k = -3h + 2$$

สมการวงกลม คือ $(x - h)^2 + (y - k)^2 = r^2$

วงกลมผ่าน $(-3, 7)$;

$$(-3 - h)^2 + (7 - k)^2 = (h - 1)^2 + (k + 1)^2$$

แทนค่า k;

$$9 + 6h + h^2 + 25 + 30h + 9h^2 = 10(h - 1)^2$$

$$10h^2 + 36h + 34 = 10h^2 - 20h + 10$$

$$56h = -24$$

$$h = -\frac{3}{7}$$

$$k = \frac{23}{7}$$

สมการวงกลม คือ $\left(x + \frac{3}{7}\right)^2 + \left(y - \frac{23}{7}\right)^2 = \frac{1000}{49}$

หรือ $(7x + 3)^2 + (7y - 23)^2 = 1000$

9. จงหาค่า k ที่ทำให้สมการ $x^2 + y^2 + 6x - 4y + 8 - k = 0$ เป็น

9.1 วงกลม 9.2 วงกลมจุด 9.3 ไม่มีกราฟ

วิธีทำ

$$x^2 + y^2 + 6x - 4y + 8 - k = 0$$

$$(x^2 + 6x + 9) + (y^2 - 4y + 4) = k - 8 + 9 + 4$$

$$(x + 3)^2 + (y - 2)^2 = k + 5 = r^2$$

ดังนั้น $r = \sqrt{k + 5}$

9.1 ถ้าสมการมีกราฟเป็นวงกลมก็ต่อเมื่อ $k + 5 > 0$ นั่นคือ $k > -5$
ดังนั้น จุดศูนย์กลางของวงกลมอยู่ที่ $(-3, 2)$ รัศมี $= \sqrt{k + 5}$
เมื่อ $k > -5$

9.2 กราฟของสมการเป็นวงกลมจุดก็ต่อเมื่อ $k + 5 = 0$ หรือ $k = -5$
กราฟคือ จุด $(-3, 2)$ เพียงจุดเดียว

9.3 สมการไม่มีกราฟ เมื่อ $k + 5 < 0$ หรือ $k < -5$

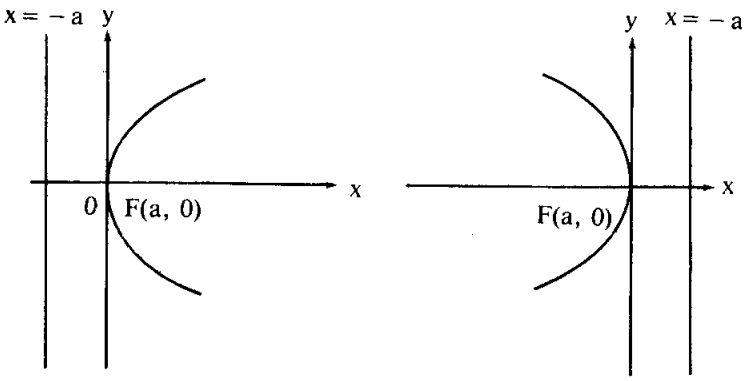
พาราโบลา จุดยอดอยู่ที่จุดกำเนิด

1. **แกนของพาราโบลา คือ แกน** x โฟกัสอยู่ที่ F(a, 0) และสมการาไดเรกตริกซ์ คือ $x = -a$ สมการคือ

$$y^2 = 4ax$$

ถ้า $a > 0$ จะได้รูปพาราโบลาเปิดทางขวา

ถ้า $a < 0$ จะได้รูปพาราโบลาเปิดทางซ้าย

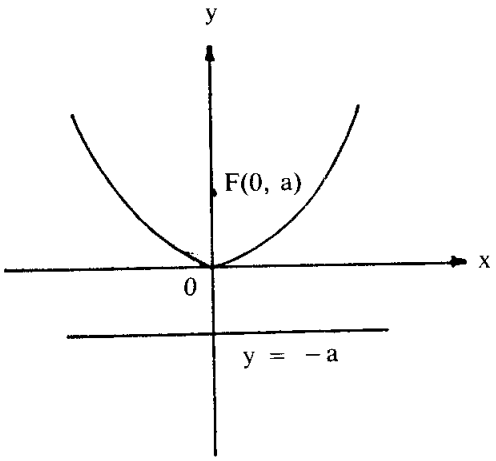


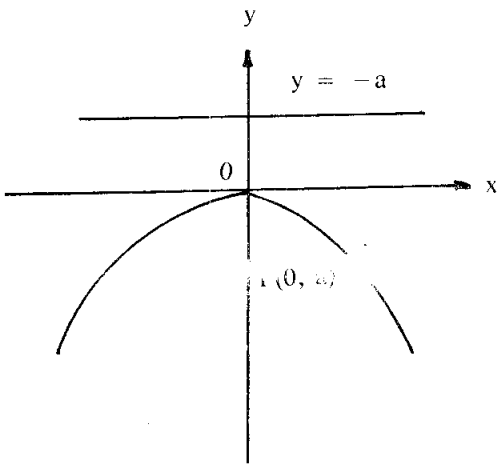
2. แกนของพาราโบลา คือ แกน y โฟกัสอยู่ที่ F(0, a) และสมการไดเรกตริกซ์ คือ $y = -a$ สมการคือ

$$x^2 = 4ay$$

ถ้า $a > 0$ จะได้รูปพาราโบลาหงายขึ้น

ถ้า $a < 0$ จะได้รูปพาราโบลาคว่ำลง





เลตัสเรกตัมของพาราโบลา $= |4a|$ ในการเขียนกราฟพาราโบลาต้องหาจุดปลายของเลตัสเรกตัม

วงรี จุดศูนย์กลางอยู่ที่จุดกำเนิด

1. แกนของวงรี คือ แกน x (แกนเอกทับแกน x) จุดโฟกัสทั้งสองคือ $F_1(-c, 0)$, $F_2(c, 0)$, $c > 0$ จุดยอดที่ $V_1(-a, 0)$ และ $V_2(a, 0)$, $a > 0$ สมการคือ

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \qquad \text{เมื่อ } a > b$$

สมการไดเรกตริกซ์ คือ $x = \pm \frac{a}{e}$

2. **แกนของวงรี คือ แกน** y (แกนเอกทับแกน y) จุดโฟกัสอยู่ที่ $F_1(0, -c)$ และ $F_2(0, c)$, $c > 0$ จุดยอดที่ $V_1(0, -a)$, $V_2(0, a)$, $a > 0$ สมการคือ

$$\frac{x^2}{b^2} + \frac{y^2}{a^2} = 1 \qquad \text{เมื่อ } a > b$$

สมการไดเรกตริกซ์คือ $y = \pm \frac{a}{e}$

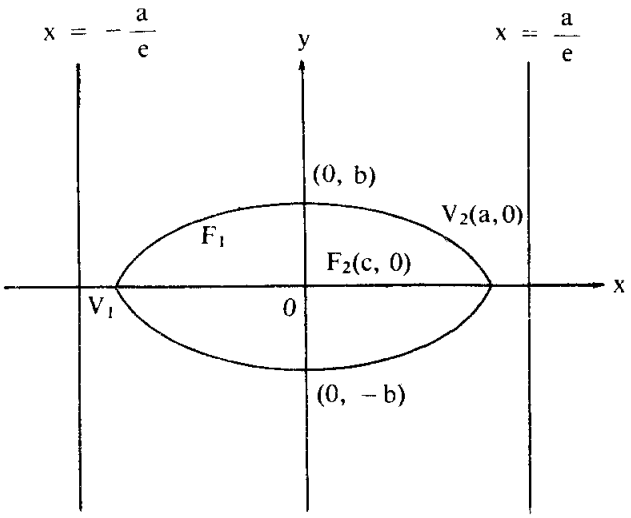
เมื่อ a เป็นครึ่งแกนเอก

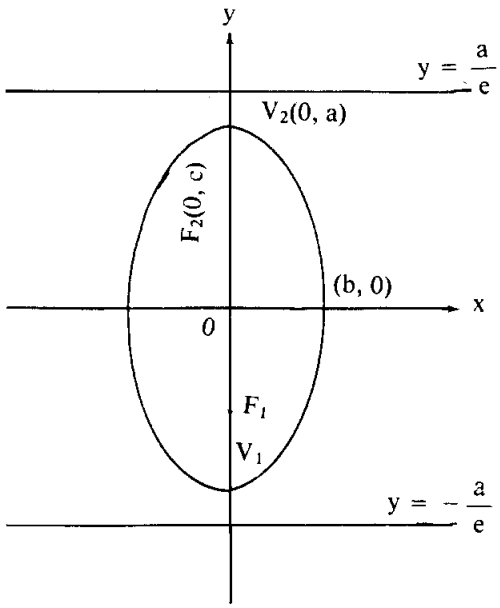
b เป็นครึ่งแกนโท

c เป็นระยะจากจุดศูนย์กลางถึงโฟกัส และ $a^2 = b^2 + c^2$

ความยาวเลตัสเรกตัม $= \frac{2b^2}{a}$

ค่าเยื้องศูนย์กลาง (eccentricity) $e = \frac{c}{a} < 1$





ไฮเพอร์โบลา จุดศูนย์กลางอยู่ที่จุดกำเนิด

1. **แกนของไฮเพอร์โบลา คือ แกน** x (แกนตามขวางทับแกน x) จุดโฟกัสทั้งสองอยู่ที่ $F_1(-c, 0)$ และ $F_2(c, 0)$, $c > 0$ จุดยอดทั้งสองอยู่ที่ $V_1(-a, 0)$, $V_2(a, 0)$, $a > 0$ สมการคือ

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

สมการเส้นกำกับหาได้จาก $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 0$ หรือ $y = \pm \frac{b}{a} x$

2. **แกนของไฮเพอร์โบลา คือ แกน** y (แกนตามขวางทับแกน y) จุดโฟกัสทั้งสองอยู่ที่ $F_1(0, -c)$ และ $F_2(0, c)$, $c > 0$ จุดยอดอยู่ที่ $V_1(0, -a)$ และ $V_2(0, a)$, $a > 0$ สมการคือ

$$\frac{y^2}{a^2} - \frac{x^2}{b^2} = 1$$

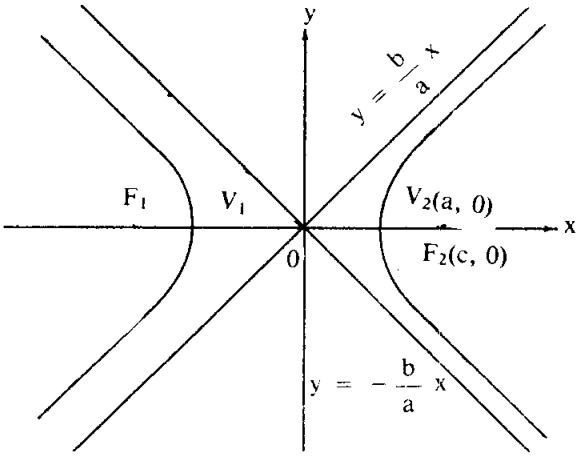
สมการเส้นกำกับคือ $\frac{y^2}{a^2} - \frac{x^2}{b^2} = 0$ หรือ $y = \pm \frac{a}{b} x$

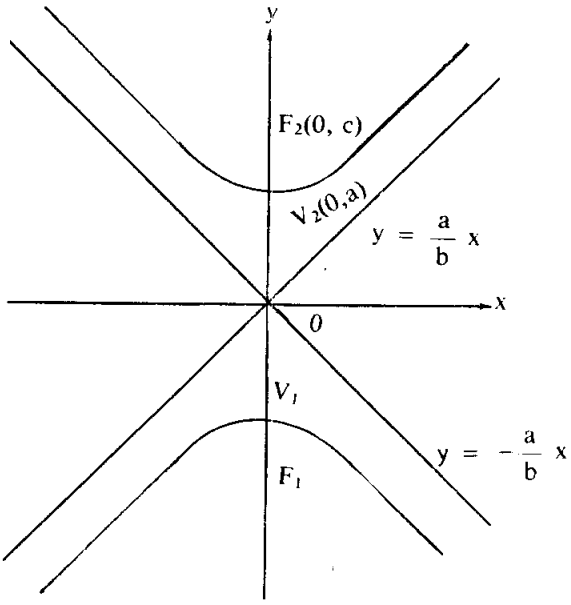
เมื่อ a เป็นครึ่งแกนตามขวาง, b เป็นครึ่งแกนสังยุค

c เป็นระยะจากจุดศูนย์กลางถึงโฟกัส และ $c^2 = a^2 + b^2$

ความยาวเลตัสเรกตัม $= \frac{2b^2}{a}$

ค่าเยื้องศูนย์กลาง $e = \frac{c}{a} > 1$





เฉลยแบบฝึกหัด 2.3

จงหาพิกัดของโฟกัส สมการไดเรกตริกซ์ พร้อมทั้งเขียนกราฟ

1. $2x^2 = 5y$

วิธีทำ

$$x^2 = \frac{5}{2}y$$

จากสมการ $x^2 = 4ay$

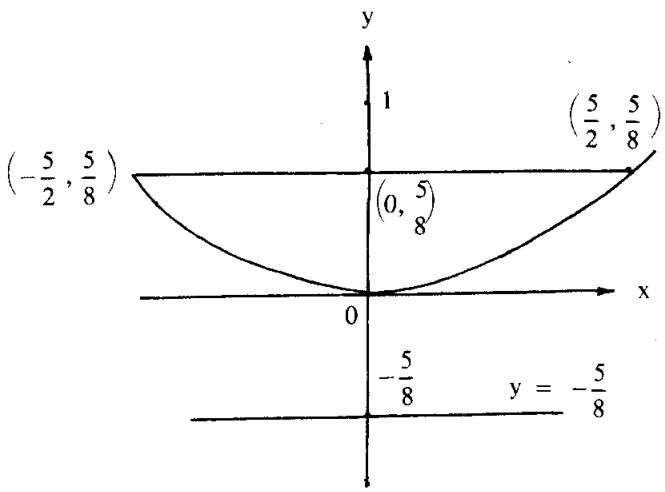
ดังนั้น $4a = \frac{5}{2}$

$$a = \frac{5}{8}$$

จากรูปของสมการทราบว่าแกนของพาราโบลา คือ แกน y

จุดโฟกัสอยู่ที่ $\left(0, \frac{5}{8}\right)$ และสมการไดเรกตริกซ์เป็น $y = -\frac{5}{8}$

ในการเขียนกราฟต้องทราบเลตัสเรกตัม y ในที่นี้เท่ากับ $|4a| = \frac{5}{2}$



2. $y^2 = 8x$

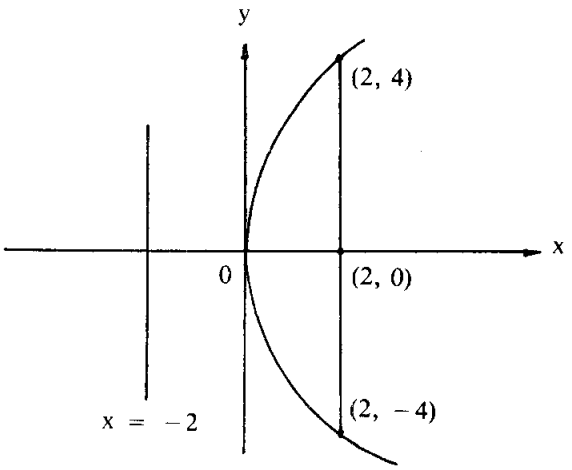
วิธีทำ

จากสมการ $y^2 = 4ax$

ดังนั้น $4a = 8$

$a = 2$

จุดโฟกัสอยู่ที่ (2, 0) และสมการไดเรกตริกซ์เป็น $x = -2$



3. $x^2 = -24y$

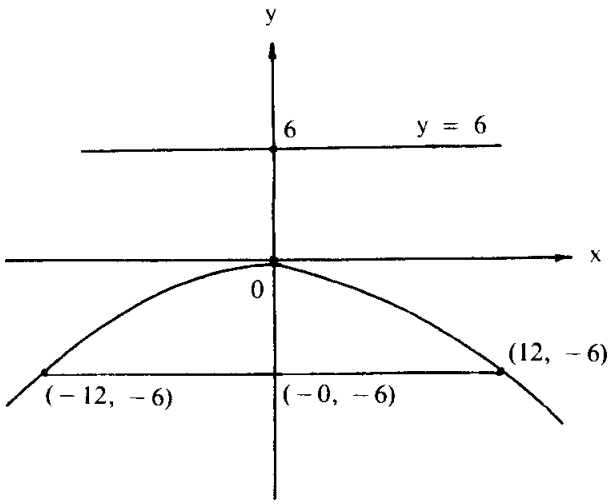
วิธีทำ

จาก $x^2 = 4ay$

$4a = -24$

$a = -6$

จุดโฟกัสอยู่ที่ (0, −6) สมการไดเรกตริกซ์ คือ $y = 6$



4. $y^2 + 16x = 0$

วิธีทำ

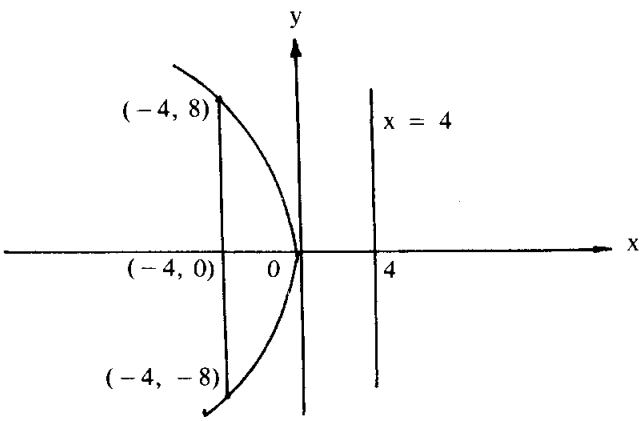
$$y^2 = -16x$$

จาก $$y^2 = 4ax$$

$$4a = -16$$

$$a = -4$$

จุดโฟกัสอยู่ที่ (−4, 0) สมการไดเรกตริกซ์ คือ x = 4



5. $y + 2x^2 = 0$

วิธีทำ

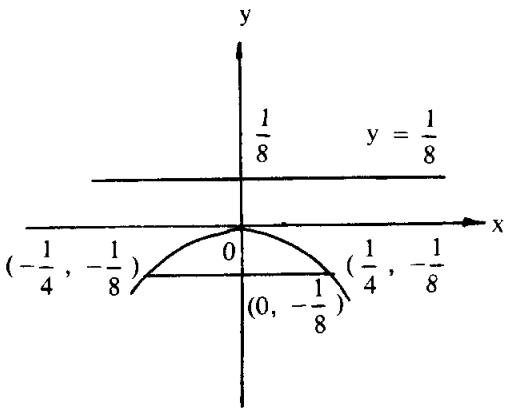
$$x^2 = -\frac{y}{2}$$

จากสมการ $x^2 = 4ay$

$$\therefore 4a = -\frac{1}{2}$$

$$a = -\frac{1}{8}$$

จุดโฟกัสอยู่ที่ $(0, -\frac{1}{8})$ สมการไดเรกตริกซ์ คือ $y = \frac{1}{8}$



จงเขียนกราฟและหาสมการพาราโบลา ซึ่งมีจุดยอดที่จุดกำเนิด และมีคุณสมบัติดังต่อไปนี้

6. โฟกัสอยู่ที่ (0, 2)

วิธีทำ จุดโฟกัสอยู่บนแกน y

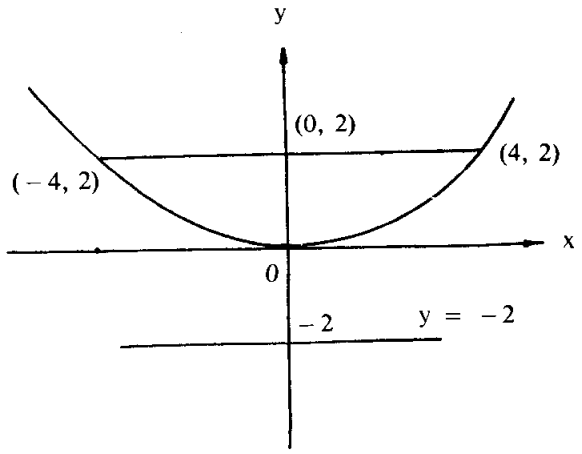
$$a = 2 > 0$$

ดังนั้น พาราโบลาหงาย มีสมการเป็น

$$x^2 = 4ay$$

$$x^2 = 8y$$

ความยาวเลตัสเรกตัม $= |4a| = 8$



7. โฟกัสอยู่ที่ $(-10, 0)$

วิธีทำ จุดโฟกัสอยู่บนแกน x

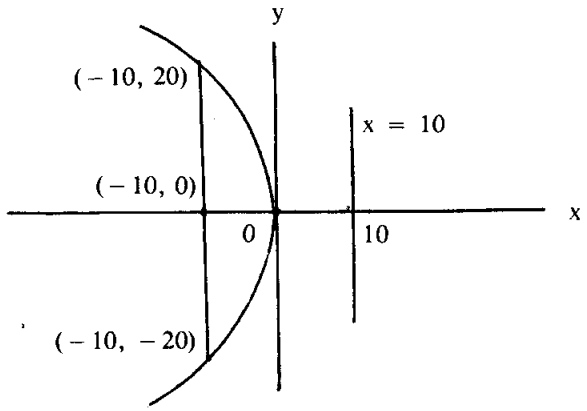
$$a = -10 < 0$$

ดังนั้น พาราโบลา เปิดทางซ้าย มีสมการเป็น

$$y^2 = 4ax$$

$$y^2 = -40x$$

ความยาวเลตัสเรกตัม $= |4a| = 40$



8. สมการไดเรกตริกซ์ คือ $x = -\frac{3}{2}$

วิธีทำ จากสมการไดเรกตริกซ์ $x = -\frac{3}{2}$ ดังนั้น แกนของพาราโบลาคือแกน x

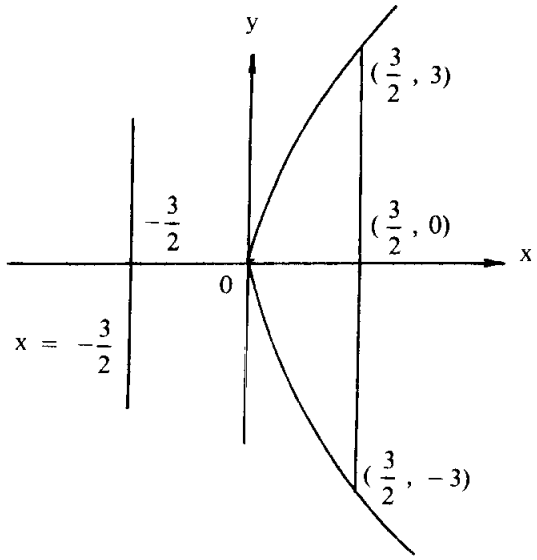
รูปสมการคือ $y^2 = 4ax$

ในที่นี้ $a = \frac{3}{2}$

$y^2 = 6x$

โฟกัสอยู่ที่ $(\frac{3}{2}, 0)$

ความยาวเลตัสเรกตัม $= |4a| = 6$



9. สมการไดเรกตริกซ์ คือ $y = \frac{4}{3}$

วิธีทำ จากสมการไดเรกตริกซ์ $y = \frac{4}{3}$ ดังนั้น แกนของพาราโบลาคือแกน y

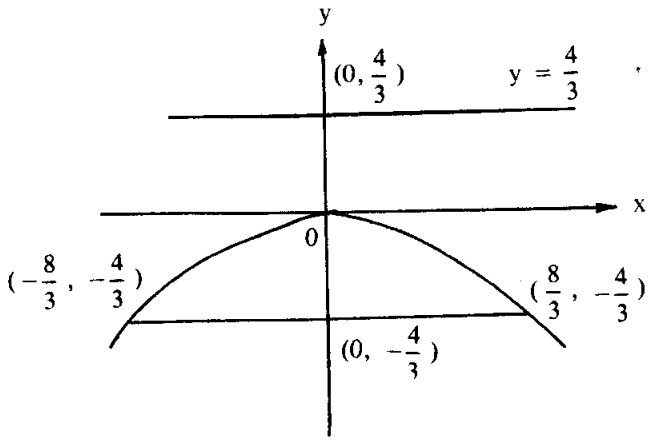
รูปสมการคือ $x^2 = 4ay$

ในที่นี้ $a = -\frac{4}{3}$

ดังนั้น $x^2 = -\frac{16}{3}y$

โฟกัสอยู่ที่ $(0, -\frac{4}{3})$

ความยาวเลตัสเรกตัม $= |4a| = \frac{16}{3}$



10. ผ่านจุด (2, 4) และแกนทับแกน x

วิธีทำ แกนของพาราโบลาทับแกน x ดังนั้น สมการพาราโบลา คือ

$$y^2 = 4ax$$

ผ่านจุด (2, 4) ดังนั้น

$$16 = 4a(2)$$

$$a = 2$$

สมการคือ $y^2 = 8x$

รูปเหมือนข้อ 2

11. โฟกัสอยู่บนแกน y และความยาวเลตัสเรกตัมเท่ากับ 6

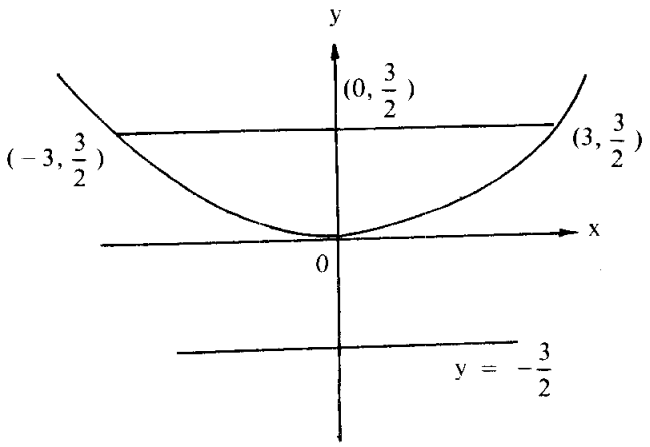
วิธีทำ โฟกัสอยู่บนแกน y ดังนั้น สมการพาราโบลาคือ

$$x^2 = 4ay$$

ความยาวเลตัสเรกตัม $= |4a| = 6$

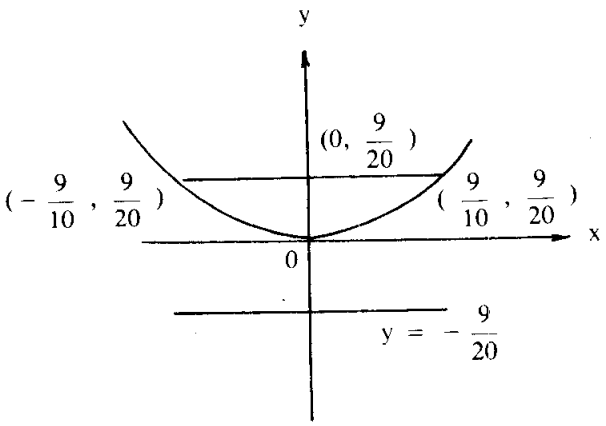
$$a = \frac{3}{2}$$

สมการคือ $x^2 = 6y$



12. ผ่านจุด $(-3, 5)$ และแกนทับแกน y

วิธีทำ แกนของพาราโบลาทับแกน y ดังนั้น สมการคือ



$$x^2 = 4ay$$

ผ่านจุด $(-3, 5)$

$$9 = 4a(5)$$

$$a = \frac{9}{20}$$

ความยาวเลตัสเรกตัม $= |4a| = \frac{9}{5}$

สมการคือ $x^2 = \frac{9}{5}y$ หรือ $5x^2 = 9y$

เฉลยแบบฝึกหัด 2.4

จงหาความยาวของแกนเอก แกนโท พิกัดของโฟกัส จุดยอด และค่า e พร้อมทั้งเขียนกราฟของสมการวงรีต่อไปนี้

1. $25x^2 + 4y^2 = 100$

วิธีทำ

$$\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{25} = 1$$

ในที่นี้ แกนเอกทับแกน y

$$a^2 = 25, b^2 = 4$$

$$\therefore a = 5, b = 2$$

$$c^2 = a^2 - b^2 = 25 - 4 = 21$$

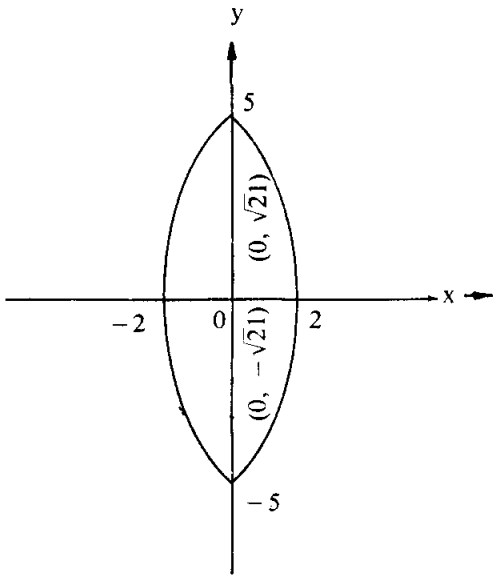
ความยาวแกนเอก $= 2a = 10$

ความยาวแกนโท $= 2b = 4$

พิกัดของโฟกัสทั้งสอง $= (0, \pm\sqrt{21})$

จุดยอดอยู่ที่ $(0, \pm 5)$

ค่า $e = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{21}}{5}$



2. $4x^2 + 9y^2 = 36$

วิธีทำ

$$\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1$$

ในที่นี้แกนเอกทับแกน x

$$a = 3, \ b = 2$$

$$c^2 = a^2 - b^2 = 9 - 4 = 5$$

$$c = \sqrt{5}$$

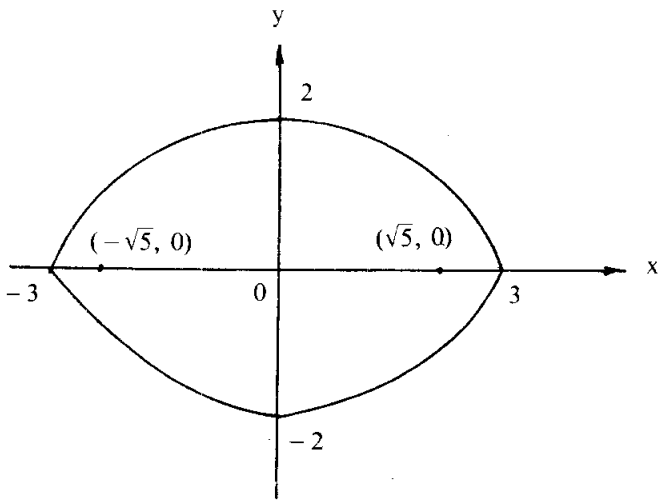
ความยาวแกนเอก $= 2a = 6$

ความยาวแกนโท $= 2b = 4$

พิกัดของโฟกัสทั้งสอง $= (\pm\sqrt{5}, 0)$

จุดยอดอยู่ที่ $(\pm 3, 0)$

$$e = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{5}}{3}$$



3. $3x^2 + y^2 = 9$

วิธีทำ

$$\frac{x^2}{3} + \frac{y^2}{9} = 1$$

แกนเอกทับแกน y

$$a = 3, b = \sqrt{3}$$

$$c = \sqrt{a^2 - b^2} = \sqrt{6}$$

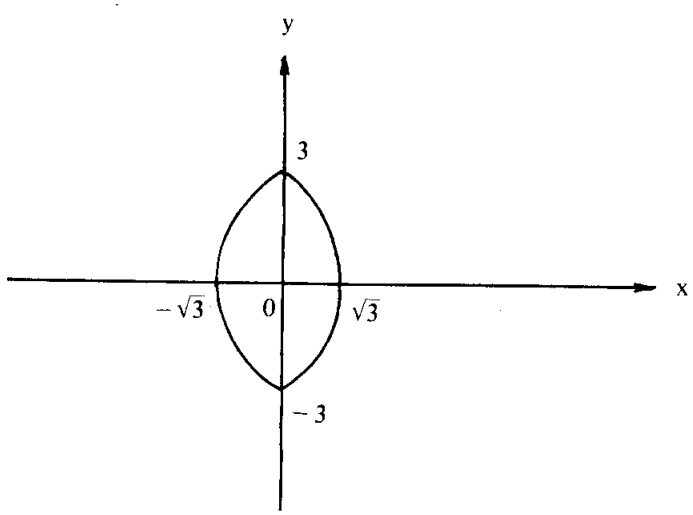
ความยาวแกนเอก $= 6$

ความยาวแกนโท $= 2\sqrt{3}$

พิกัสของโฟกัสทั้งสอง $= (0, \pm\sqrt{6})$

จุดยอดอยู่ที่ $(0, \pm 3)$

$$e = \frac{\sqrt{6}}{3}$$



4. $2x^2 + 3y^2 = 24$

วิธีทำ

$$\frac{x^2}{12} + \frac{y^2}{8} = 1$$

แกนเอกทับแกน x

$$a = \sqrt{12} = 2\sqrt{3}, \quad b = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$$

$$c = \sqrt{a^2 - b^2} = 2$$

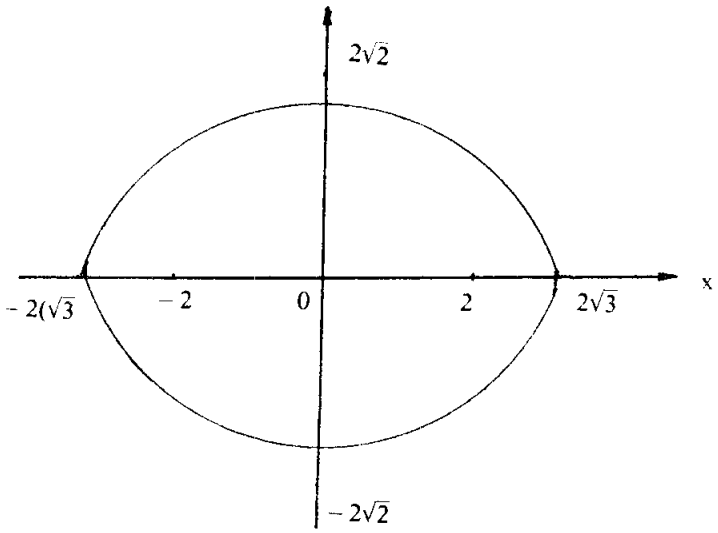
ความยาวแกนเอก $= 4\sqrt{3}$

ความยาวแกนโท $= 4\sqrt{2}$

พิกัดของโฟกัสทั้งสอง $= (\pm 2, 0)$

จุดยอดอยู่ที่ $(\pm 2\sqrt{3}, 0)$

$$e = \frac{c}{a} = \frac{1}{\sqrt{3}}$$



จงหาสมการของวงรี ซึ่งมีคุณสมบัติดังนี้

5. จุดยอดอยู่ที่ (±4, 0) แกนโทเท่ากับ 6

วิธีทำ จากจุดยอด ทราบว่าแกนเอกของรูปทับแกน x ดังนั้นสมการคือ

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

ในที่นี้

$$a = 4$$

$$2b = 6$$

$$b = 3$$

$$\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{9} = 1$$

6. จุดยอดอยู่ที่ (0, ±5) และครึ่งแกนโทเท่ากับ $\frac{3}{2}$

วิธีทำ จากจุด (0, ±5) สมการวงรีคือ

$$\frac{x^2}{b^2} + \frac{y^2}{a^2} = 1 \quad , \quad a > b$$

ในที่นี้

$$a = 5$$

$$b = \frac{3}{2}$$

$$\frac{4x^2}{9} + \frac{y^2}{25} = 1$$

7. แกนเอกเท่ากับ 10 และจุดโฟกัสอยู่ที่ (±4, 0)

วิธีทำ

$$\text{แกนเอก} = 2a = 10$$

$$a = 5$$

สมการวงรีคือ

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad , \quad a > b$$

ในที่นี้

$$c = 4 = \sqrt{a^2 - b^2}$$

$$16 = 25 - b^2$$

$$b^2 = 9$$

ดังนั้นสมการคือ

$$\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1$$

8. โฟกัสคือ (0, 4), (0, −4) สมการไดเรกตริกซ์ คือ $y = -6$ และ $y = 6$

วิธีทำ สมการของวงรีคือ

$$\frac{x^2}{b^2} + \frac{y^2}{a^2} = 1 \quad , \qquad a > b$$

$$c = 4$$

สมการไดเรกตริกซ์ $y = \frac{a}{e}$

$$\therefore \frac{a}{e} = 6$$

$$a = 6e$$

แต่ $e = \frac{c}{a} = \frac{4}{a}$

ดังนั้น $a = \frac{24}{a}$

$$a^2 = 24$$

$$b^2 = a^2 - c^2 = 24 - 16 = 8$$

สมการคือ $\frac{x^2}{8} + \frac{y^2}{24} = 1$

9. จุดโฟกัสอยู่บนแกน y จุดศูนย์กลางอยู่ที่จุดกำเนิดค่า $e = \frac{3}{4}$ และผ่านจุด (4, 6)

วิธีทำ สมการคือ

$$\frac{x^2}{b^2} + \frac{y^2}{a^2} = 1 \quad , \qquad a > b$$

$$e = \frac{c}{a} = \frac{3}{4}$$

$$\sqrt{a^2 - b^2} = c = \frac{3}{4}a$$

$\therefore 7a^2 - 16b^2 = 0$ ดังนั้น $a^2 = \frac{16}{7}b^2$

ผ่านจุด (4, 6) ดังนั้น

$$\frac{16}{b^2} + \frac{36}{a^2} = 1$$

$$16a^2 + 36b^2 = a^2b^2 \qquad \text{.....(1)}$$

แทนค่า a^2 ใน (1)

$$b^2 = \frac{508}{16}$$

$$a^2 = \frac{508}{7}$$

สมการคือ $16x^2 + 7y^2 = 508$

เฉลยแบบฝึกหัด 2.5

จงหาความยาวของแกนตามขวาง แกนสังยุค โฟกัส จุดยอด ค่า e พร้อมทั้งเขียนรูปของ

1. $4y^2 - 25x^2 = 100$

วิธีทำ

$$\frac{y^2}{25} - \frac{x^2}{4} = 1$$

แกนขวางทับแกน y

$$a^2 = 25, \quad b^2 = 4$$

$$a = 5, \quad b = 2$$

ความยาวของแกนตามขวาง $= 2a = 10$

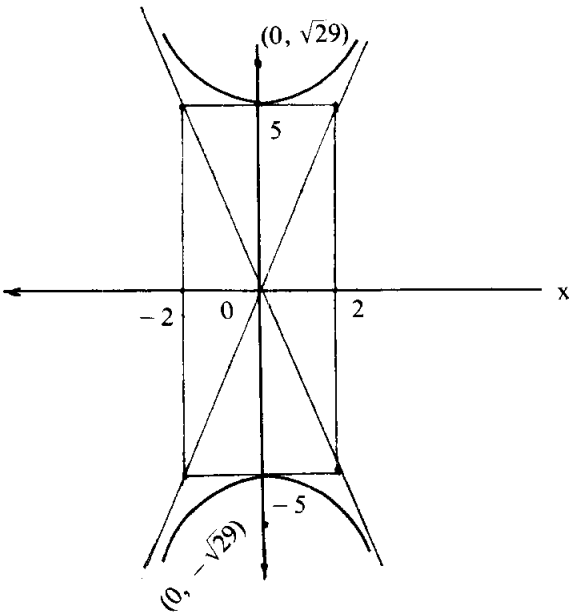
ความยาวของแกนสังยุค $= 2b = 4$

$$c = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{29}$$

โฟกัสคือ $(0, \pm\sqrt{29})$

จุดยอดคือ $(0, \pm 5)$

$$e = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{29}}{5}$$



2. $x^2 - 5y^2 = 25$

วิธีทำ

$$\frac{x^2}{25} - \frac{y^2}{5} = 1$$

แกนขวางทับแกน x

$$a^2 = 25 \quad , \quad a = 5$$

$$b^2 = 5 \quad , \quad b = \sqrt{5}$$

$$c = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{30}$$

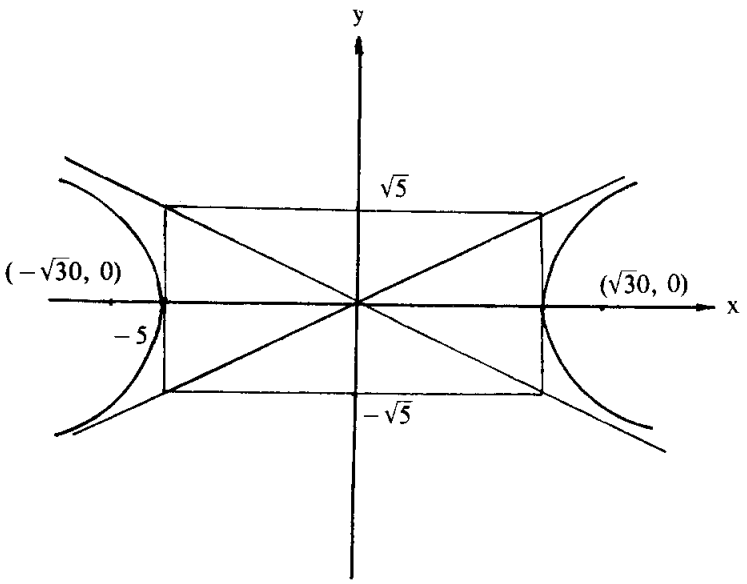
ความยาวของแกนตามขวาง $= 2a = 10$

ความยาวของแกนสังยุค $= 2b = 2\sqrt{5}$

โฟกัสคือ $(\pm\sqrt{30}, 0)$

จุดยอด $(\pm 5, 0)$

$$e = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{30}}{5}$$



3. $\frac{y^2}{9} - \frac{x^2}{16} = 1$

วิธีทำ แกนขวางทับแกน y

$$a^2 = 9, b^2 = 16$$

$$a = 3, b = 4$$

$$c = \sqrt{a^2 + b^2} = 5$$

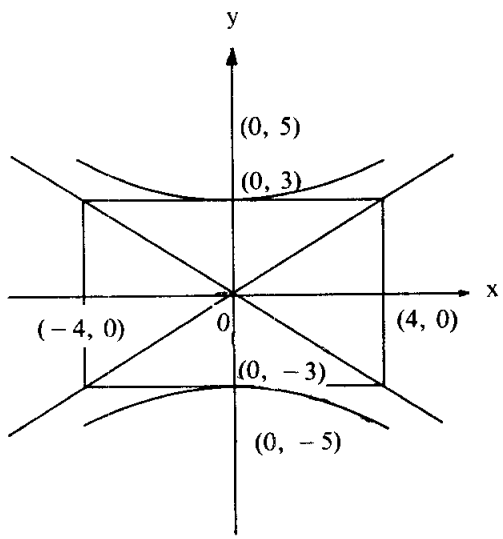
ความยาวแกนตามขวาง = 6

ความยาวแกนสังยุค = 8

โฟกัสคือ (0, ±5)

จุดยอดคือ (0, ±3)

$$e = \frac{5}{3}$$



จงหาสมการไฮเพอร์โบลา ซึ่งมีคุณสมบัติดังนี้

4. จุดยอดอยู่ที่ $(\pm 4, 0)$ โฟกัสที่ $(\pm 5, 0)$

วิธีทำ ในที่นี้แกนตามขวางทับแกน x ดังนั้นสมการคือ

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

$$a = 4$$

$$c = 5$$

จาก $c^2 = a^2 + b^2$

$$b^2 = 25 - 16 = 9$$

สมการคือ $\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{9} = 1$

5. ความยาวแกนสังยุคเท่ากับ 4 และจุดยอดอยู่ที่ $(0, \pm 1)$

วิธีทำ สมการคือ

$$\frac{y^2}{a^2} - \frac{x^2}{b^2} = 1$$

$$a = 1$$

$$2b = 4$$

$$b = 2$$

แทนค่า $y^2 - \frac{x^2}{4} = 1$

หรือ $4y^2 - x^2 = 4$

6. จุดยอดอยู่ที่ $(\pm 4, 0)$, $e = \frac{4}{3}$

วิธีทำ

สมการคือ $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$

$$a = 4$$

$$e = \frac{c}{a} = \frac{4}{3}$$

$$c = \frac{4}{3}a$$

จาก $$c^2 = a^2 + b^2$$

$$b^2 = \left(\frac{16}{3}\right)^2 - 4^2 = \frac{112}{9}$$

แทนค่า $$\frac{x^2}{16} - \frac{9y^2}{112} = 1$$

7. โฟกัสอยู่บนแกน y จุดศูนย์กลางอยู่ที่จุดกำเนิด, $e = \sqrt{5}$ และผ่านจุด (3, 2)

วิธีทำ สมการ คือ $$\frac{y^2}{a^2} - \frac{x^2}{b^2} = 1$$

$$e = \frac{c}{a} \quad \sqrt{5}$$

$$c = \sqrt{5}a$$

ผ่านจุด (3, 2)

$$\frac{4}{a^2} - \frac{9}{b^2} = 1$$

หรือ $$4b^2 - 9a^2 = a^2b^2 \qquad \text{.....(1)}$$

จาก $$c^2 = a^2 + b^2$$

แทนค่า c; $$b^2 = 4a^2$$

แทนค่าใน (1); $$a^2 = \frac{7}{4}$$

$$b^2 = 7$$

ดังนั้น สมการที่ต้องการคือ $$\frac{4y^2}{7} - \frac{x^2}{7} = 1$$

8. สมการไดเรกตริกซ์ คือ $y = 4$ และ $y = -4$ เส้นกำกับคือ $y = \frac{3}{2}x$ และ $y = -\frac{3}{2}x$

วิธีทำ จากสมการไดเรกตริกซ์ทำให้ทราบว่า แกนตามขวางทับแกน y

$$\frac{y^2}{a^2} - \frac{x^2}{b^2} = 1$$

$$y = \frac{a}{e} = 4$$

แต่ $e = \frac{c}{a}$

$\therefore \frac{a^2}{c} = 4$

$a^2 = 4c$

สมการเส้นกำกับคือ $y = \pm \frac{a}{b} x$

$\therefore \frac{a}{b} = \frac{3}{2}$

$b = \frac{2}{3} a$

จาก $a^2 + b^2 = c^2$

$a^2 + \frac{4}{9} a^2 = \frac{a^4}{16}$

$a^2 = \frac{208}{9}$

$b^2 = \frac{832}{81}$

สมการคือ

$$\frac{9y^2}{208} - \frac{81x^2}{832} = 1$$

9. จุดยอดอยู่ที่ (0, ±3) และกราฟผ่านจุด (2, 7)

วิธีทำ สมการคือ $\frac{y^2}{a^2} - \frac{x^2}{b^2} = 1$

$a = 3$

กราฟผ่าน (2, 7) แทนค่าในสมการ

$\frac{49}{a^2} - \frac{4}{b^2} = 1$

$49b^2 - 4a^2 = a^2b^2$

แทนค่า a; $b^2 = \frac{9}{10}$