$$\frac{y^2}{9} - \frac{10x^2}{9} = 1$$

หรือ $$y^2 - 10x^2 = 9$$

10. จงหาสมการไดเรกตริกซ์ของ $4y^2 - x^2 = 9$

วิธีทำ $$\frac{4y^2}{9} - \frac{x^2}{9} = 1$$

แกนขวางทับแกน y

สมการไดเรกตริกซ์ คือ $y = \pm\frac{a}{e}$

$$a^2 = \frac{9}{4}$$

$$a = \frac{3}{2}$$

$$b^2 = 9 \qquad \therefore \; b = 3$$

$$c^2 = a^2 + b^2 = \frac{9}{1} + 9 = \frac{45}{4}$$

$$e = \frac{c}{a} = \sqrt{5}$$

สมการไดเรกตริกซ์ที่ต้องการคือ $y = \pm\frac{3}{2\sqrt{5}}$

การย้ายแกน

จุด P(x, y) ในระนาบ xy ถ้าต้องการย้ายจากแกน x, แกน y ไปเป็นแกน x′, y′ โดยที่จุดกำเนิด 0 เดิมถูกย้ายไปที่ (h, k) จะได้ความสัมพันธ์ของ x, y และ x′, y′ คือ

$$x' = x - h$$
$$y' = y - k$$

สมการภาคตัดกรวยเมื่อย้ายแกนขนานกับแกนพิกัด

พาราโบลา จุดยอดที่ (h, k)

1. แกนของพาราโบลาขนานกับแกน x สมการคือ

$$(y - k)^2 = 4a(x - h)$$

2. แกนของพาราโบลาขนานกับแกน y สมการคือ

$$(x - h)^2 = 4a(y - k)$$

วงรี จุดศูนย์กลางอยู่ที่ (h, k)

1. แกนเอกขนานกับแกน x สมการคือ

$$\frac{(x - h)^2}{a^2} + \frac{(y - k)^2}{b^2} = 1, \quad a > b$$

2. แกนเอกขนานกับแกน y สมการคือ

$$\frac{(x - h)^2}{b^2} + \frac{(y - k)^2}{a^2} = 1, \quad a > b$$

ไฮเพอร์โบลา จุดศูนย์กลางอยู่ที่ (h, k)

1. แกนตามขวางขนานกับแกน x สมการคือ

$$\frac{(x - h)^2}{a^2} - \frac{(y - k)^2}{b^2} = 1$$

2. แกนตามขวางขนานกับแกน y สมการคือ

$$\frac{(y - k)^2}{a^2} - \frac{(x - h)^2}{b^2} = 1$$

หมายเหตุ เมื่อย้ายแกนแล้ว จุดโฟกัส และจุดยอดก็ย่อมเปลี่ยนไปตามแกนใหม่ แต่นิยามของ a, b, c ที่ใช้ในสูตรมีความหมายเหมือนเดิมคือ

a = ระยะจากจุดศูนย์กลางถึงจุดยอด

c = ระยะจากจุดศูนย์กลางถึงจุดโฟกัส

และ b หมายถึง ครึ่งแกนโท (วงรี) หรือครึ่งแกนสังยุค (ไฮเพอร์โบลา)

สมการทั่วไปกำลังสอง

สมการทั่วไปกำลังสองคือ $Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$

ในที่นี้พิจารณาสมการกำลังสอง ซึ่งไม่มีเทอม xy ในรูปของ

$$Ax^2 + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$$

สรุปได้ว่า

1. ถ้า $AC = 0$ แล้วกราฟเป็นพาราโบลาหรือเส้นตรงสองเส้นขนานกัน หรือเส้นตรง 1 เส้น หรือไม่มีกราฟ

2. ถ้า $AC > 0$ แล้วกราฟจะเป็นวงรี (ถ้า $A \neq C$) หรือเป็นวงกลม (ถ้า $A = C$) เป็นจุด ๆ หนึ่ง หรือไม่มีกราฟ

3. ถ้า $AC > 0$ แล้วกราฟเป็นไฮเพอร์โบลา หรือเส้นตรงสองเส้น

แต่โดยทั่ว ๆ ไป จะใช้หลักเกณฑ์การทำให้เป็นกำลังสองสมบูรณ์ จัดสมการที่กำหนดให้ให้อยู่ในรูปมาตรฐานของสมการภาคตัดกรวย ซึ่งจะทราบชนิดของสมการได้

ในหัวข้อการหมุนแกนจะได้พิจารณาสมการทั่วไปกำลังสองซึ่งจะมีทฤษฎีบอกถึงการตรวจสอบชนิดของสมการกำลังสอง

เฉลยแบบฝึกหัด 2.9

จงหาพิกัดของจุดยอด โฟกัส สมการของไดเรกตริกซ์ พร้อมทั้งเขียนกราฟของสมการพาราโบลา ซึ่งกำหนดดังนี้

1. $x^2 - 6x - 3y = 0$

วิธีทำ

$$x^2 - 6x = 3y$$
$$(x^2 - 6x + 9) = 3y + 9$$
$$(x - 3)^2 = 3(y + 3)$$

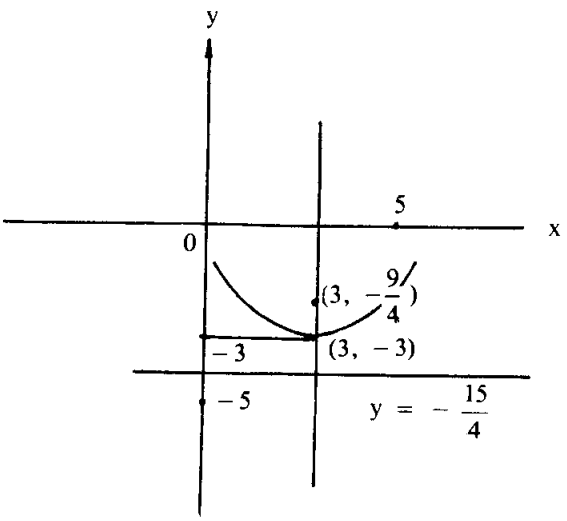
สมการนี้ คือ พาราโบลา จุดยอดอยู่ที่ $(3, -3)$

แกนของพาราโบลาขนานแกน y

$$4a = 3 \quad \therefore \quad a = \frac{3}{4}$$

จุดโฟกัสคือ $(3, -3 + \frac{3}{4}) = (3, -\frac{9}{4})$

สมการไดเรกตริกซ์ คือ $y = -3 - \frac{3}{4} = -\frac{15}{4}$



2. $y^2 - 2x - 4y + 10 = 0$

วิธีทำ

$$y^2 - 4y + 4 = 2x - 6$$

$$(y - 2)^2 = 2(x - 3)$$

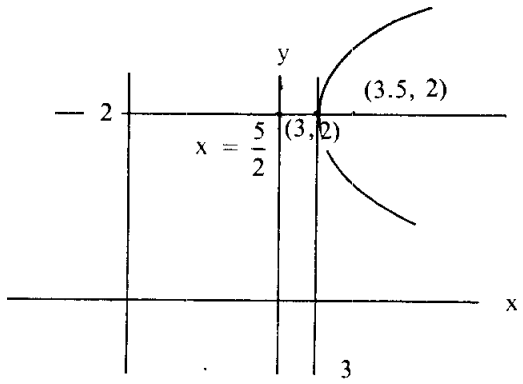
สมการนี้คือ พาราโบลา จุดยอดอยู่ที่ (3, 2)

แกนของพาราโบลาขนานแกน x

$$4a = 2 \quad \therefore \quad a = \frac{1}{2}$$

จุดโฟกัสคือ $(3 + \frac{1}{2}, 2) = (\frac{7}{2}, 2)$

สมการไดเรกตริกซ์คือ $x = 3 - \frac{1}{2} = \frac{5}{2}$



3. $2y^2 + 3x - 8y + 9 = 0$

วิธีทำ

$$(y^2 - 4y + 4) = -\frac{3}{2}x - \frac{9}{2} + 4$$

$$(y - 2)^2 = -\frac{3}{2}(x + \frac{1}{3})$$

สมการนี้คือพาราโบลาจุดยอดอยู่ที่ $(-\frac{1}{3}, 2)$

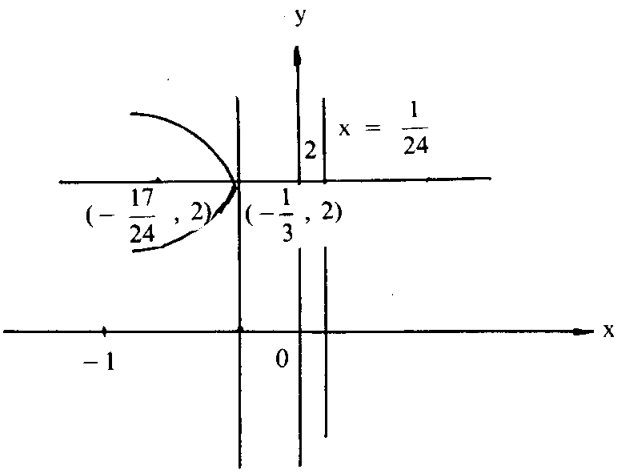
แกนของพาราโบลาขนานแกน x

$$4a = -\frac{3}{2}$$

$$a = -\frac{3}{8}$$

จุดโฟกัส คือ $(-\frac{1}{3} - \frac{3}{8}, 2) = (-\frac{17}{24}, 2)$

สมการไดเรกตริกซ์ คือ $x = -\frac{1}{3} - (-\frac{3}{8}) = \frac{1}{24}$



จงหาพิกัดของจุดศูนย์กลาง แกนเอก แกนโท จุดยอด โฟกัส และค่าเยื้องศูนย์กลาง พร้อมทั้งเขียนกราฟของ

4. $4x^2 + 9y^2 + 16x - 18y - 11 = 0$

วิธีทำ

$$4(x^2 + 4x + 4) + 9(y^2 - 2y + 1) = 11 + 16 + 9$$

$$4(x + 2)^2 + 9(y - 1)^2 = 36$$

$$\frac{(x + 2)^2}{9} + \frac{(y - 1)^2}{4} = 1$$

สมการนี้ คือ สมการของวงรี ซึ่งมีแกนเอกขนานกับแกน x

จุดศูนย์กลางอยู่ที่ $(-2, 1)$

$a = 3, b = 2$

ความยาวแกนเอก = 6

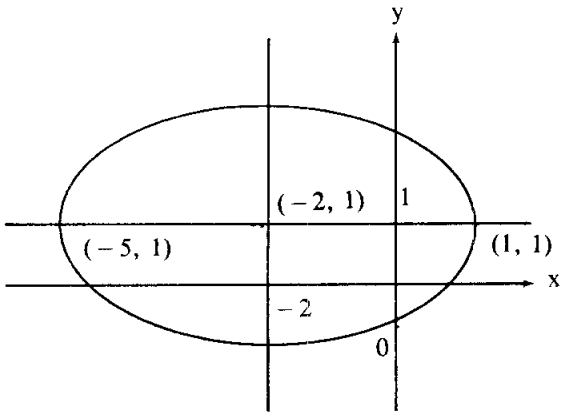
ความยาวแกนโท = 4

จุดยอดอยู่ที่ $(-5, 1)$ และ $(1, 1)$

$$c = \sqrt{a^2 - b^2} = \sqrt{5}$$

จุดโฟกัสทั้งสองอยู่ที่ $(-2 \pm\sqrt{5}, 1)$

ค่าเยื้องศูนย์กลาง $e = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{5}}{3}$



5. $5x^2 + 3y^2 - 15x + 15y = 0$

วิธีทำ $5(x^2 - 3x + \frac{9}{4}) + 3(y^2 + 5y + \frac{25}{4}) = \frac{45}{4} + \frac{75}{4}$

$$5(x - \tfrac{3}{2})^2 + 3(y + \tfrac{5}{2})^2 = 30$$

$$\frac{(x - \frac{3}{2})^2}{6} + \frac{(y + \frac{5}{2})^2}{10} = 1$$

สมการนี้เป็นสมการของวงรีแกนเอกขนานกับแกน y

จุดศูนย์กลางอยู่ที่ $(\frac{3}{2}, -\frac{5}{2})$

$$a = \sqrt{10}, \quad b = \sqrt{6}$$

ความยาวแกนเอก $= 2\sqrt{10}$

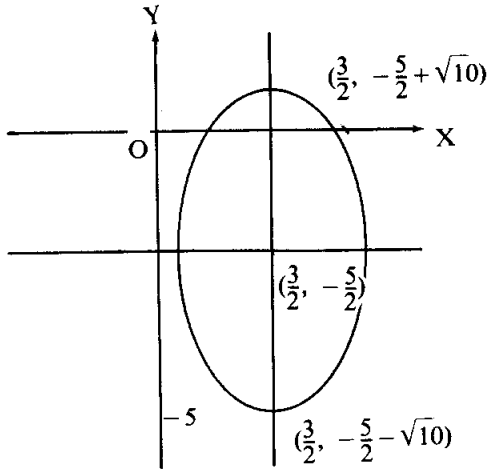
ความยาวแกนโท $= 2\sqrt{6}$

จุดยอดอยู่ที่ $(\frac{3}{2}, -\frac{5}{2}+\sqrt{10})$, $(\frac{3}{2}, -\frac{5}{2}-\sqrt{10}$

$c = \sqrt{a^2-b^2} = 2$

จุดโฟกัสอยู่ที่ $(\frac{3}{2}, -\frac{5}{2}\pm 2)$ หรือ $(\frac{3}{2}, -\frac{1}{2})$, $(\frac{3}{2}, -\frac{9}{2})$

ค่าเยื้องศูนย์กลาง $e = \frac{c}{a} = \frac{2}{\sqrt{10}}$



6. $25x^2+9y^2-100x+54y-44 = 0$

วิธีทำ $25(x^2-4x+4)+9(y^2+6y+9) = 44+100+81$

$$25(x-2)^2+9(y+3)^2 = 225$$

$$\frac{(x-2)^2}{9} + \frac{(y+3)^2}{25} = 1$$

สมการนี้เป็นสมการวงรีแกนเอกขนานกับแกน y

จุดศูนย์กลางอยู่ที่ $(2, -3)$

$a = 5$, $b = 3$

ความยาวแกนเอก $= 10$

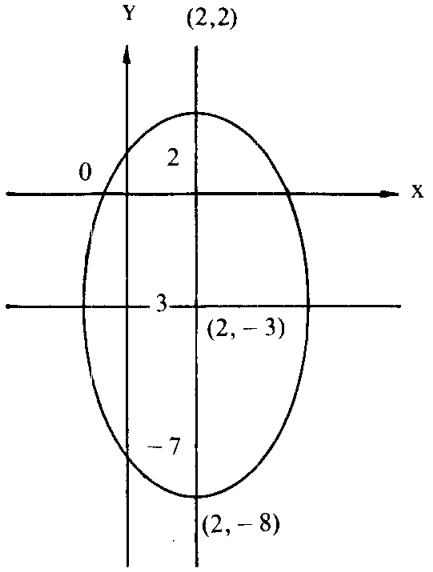
ความยาวแกนโท $= 6$

จุดยอดอยู่ที่ $(2, -3+5), (2, -3-5)$ หรือ $(2, 2), (2, -8)$

$$c = \sqrt{a^2-b^2} = 4$$

จุดโฟกัสอยู่ที่ $(2, -3\pm4)$ หรือ $(2, 1), (2, -7)$

ค่าเยื้องศูนย์กลาง $e = \frac{c}{a} = \frac{4}{5}$



จงหาพิกัดของจุดศูนย์กลาง จุดยอด แกนตามขวาง แกนสังยุค โฟกัส ค่าเยื้องศูนย์กลาง พร้อมทั้งเขียนกราฟของ

7. $4y^2 - x^2 + 4x = 0$

วิธีทำ $4y^2 - (x^2 - 4x + 4) = -4$

$$4y^2 - (x-2)^2 = -4$$

$$\frac{(x-2)^2}{4} - y^2 = 1$$

สมการนี้ กราฟเป็นไฮเพอร์โบลา แกนตามขวางขนานกับแกน x

จุดศูนย์กลางอยู่ที่ $(2, 0)$

$a = 2, \quad b = 1$

ความยาวแกนตามขวาง $= 4$

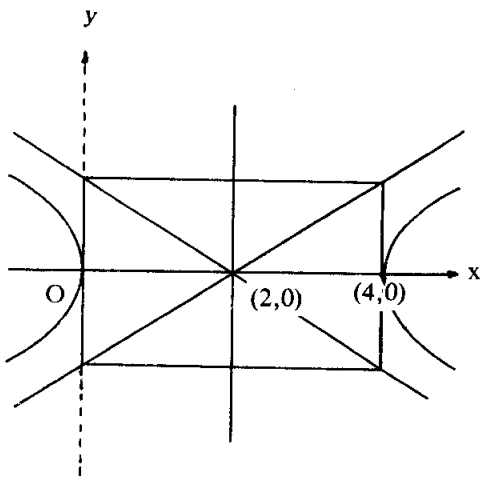
ความยาวแกนสังยุค $= 2$

จุดยอดอยู่ที่ $(2+2, 0), (2-2, 0)$ หรือ $(4, 0), (0, 0)$

$$c = \sqrt{a^2+b^2} = \sqrt{5}$$

โฟกัสทั้งสองอยู่ที่ $(2\pm\sqrt{5}, 0)$

$$e = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{5}}{2}$$



8. $3x^2 - 12y^2 - 16x - 40y - 120 = 0$

วิธีทำ $3(x^2 - \frac{16}{3}x + \frac{64}{9}) - 12(y^2 + \frac{10}{3}y + \frac{25}{9}) = 120 + \frac{64}{3} - \frac{100}{3}$

$$3(x - \frac{8}{3})^2 - 12(y + \frac{5}{3})^2 = 108$$

$$\frac{(x - \frac{8}{3})^2}{36} - \frac{(y + \frac{5}{3})^2}{9} = 1$$

สมการนี้คือ ไฮเพอร์โบลา แกนตามขวางขนานแกน x

จุดศูนย์กลางอยู่ที่ $(\frac{8}{3}, -\frac{5}{3})$

$a = 6, \quad b = 3$

ความยาวแกนตามขวาง $= 12$

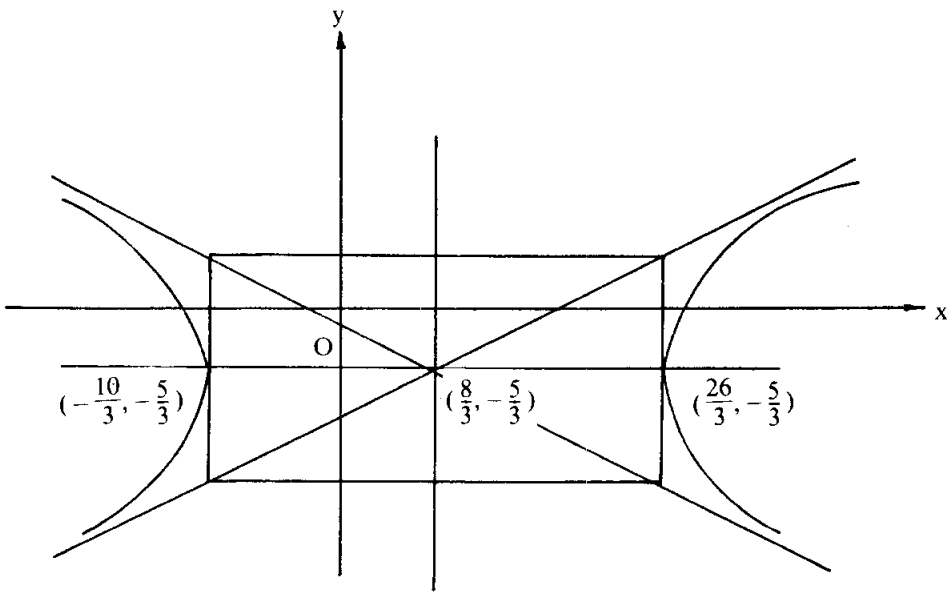
ความยาวแกนสังยุค $= 6$

จุดยอดอยู่ที่ $(\frac{8}{3}\pm 6, -\frac{5}{3})$ หรือ $(\frac{26}{3}, -\frac{5}{3}), (-\frac{10}{3}, -\frac{5}{3})$

$$c = \sqrt{a^2+b^2} = 3\sqrt{5}$$

โฟกัสทั้งสองอยู่ที่ $(\frac{8}{3}\pm 3\sqrt{5},\ -\frac{5}{3})$

$$e = \frac{\sqrt{5}}{2}$$



9. $5x^2 - 4y^2 + 20x + 8y = 4$

วิธีทำ $5(x^2+4x+4) - 4(y^2-2y+1) = 4+20-4$

$$5(x+2)^2 - 4(y-1)^2 = 20$$

$$\frac{(x+2)^2}{4} - \frac{(y-1)^2}{5} = 1$$

สมการนี้คือ ไฮเพอร์โบลา แกนตามขวางขนานแกน x

จุดศูนย์กลางอยู่ที่ $(-2, 1)$

$a = 2, \quad b = \sqrt{5}$

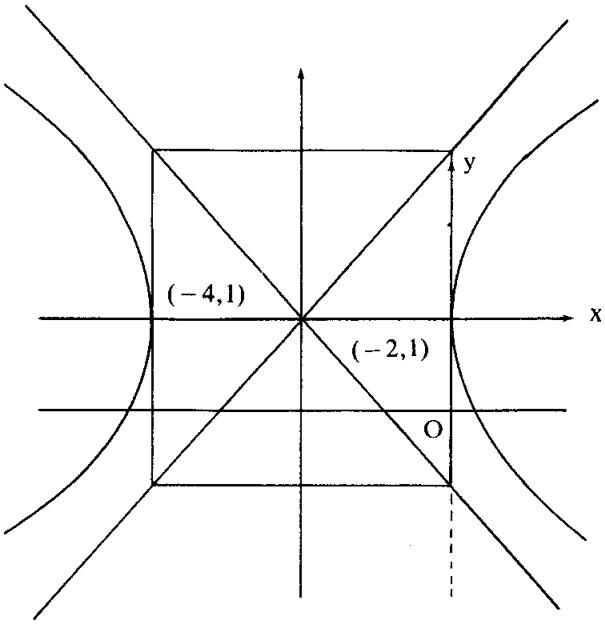
ความยาวแกนตามขวาง $= 4$

ความยาวแกนสังยุค $= 2\sqrt{5}$

จุดยอดอยู่ที่ $(-2\pm 2, 1)$ หรือ $(-4, 1), (0, 1)$

$c = \sqrt{a^2+b^2} = 3$

จุดโฟกัสอยู่ที่ $(-2\pm3, 1)$ หรือ $(-5, 1), (1, 1)$ $\quad e = \frac{3}{2}$



10. จงหาสมการพาราโบลา ซึ่งมีจุดยอดที่ (3, 1) และโฟกัสที่ (5, 1)

วิธีทำ จากจุดยอดและจุดโฟกัสที่กำหนดให้ ทำให้ทราบว่า

สมการพาราโบลา คือ $(y-k)^2 = 4a(x-h)$

ระยะห่างจุดยอดถึงจุดโฟกัส $= a = 5-3 = 2$

$(h, k) = (3, 1)$

แทนค่า $(y-1)^2 = 8(x-3)$

11. จงหาสมการพาราโบลา ซึ่งมีสมการไดเรกตริกซ์ $y = 2$ และจุดยอดที่ $(1, -1)$

วิธีทำ จากสมการไดเรกตริกซ์ $y = 2$ ทราบว่า

สมการพาราโบลา คือ $(x-h)^2 = 4a(y-k)$

$a =$ ระยะห่างจากจุดยอดถึงเส้นไดเรกตริกซ์

ในที่นี้ $a = 2-1 = 1$

สมการคือ $(x-1)^2 = 4(y+1)$

12. จงหาสมการพาราโบลา ซึ่งจุดปลายของเลตัสเรกตัม คือ $(-1, -1)$ และ $(5, -1)$ และกราฟหงายขึ้น

วิธีทำ สมการคือ $(x-h)^2 = 4a(y-k)$

ความยาวเลตัสเรกตัม $= |4a| = 5-(-1)$

$$a = \frac{6}{4} = \frac{3}{2}$$

จุดกึ่งกลางของ $(-1, -1)$ และ $(5, -1)$ คือ $(\frac{-1+5}{2}, \frac{-1-1}{2}) = (2, -1)$

แต่ $a = \frac{3}{2}$

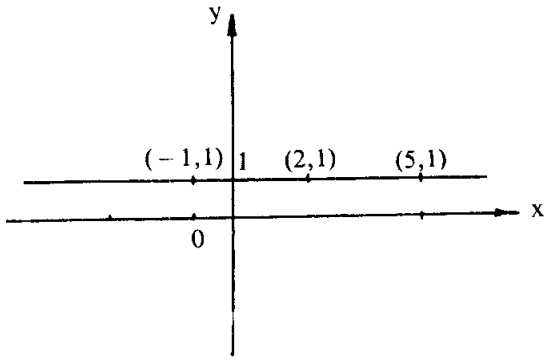
จุดยอดอยู่ที่ $(2, -1-\frac{3}{2}) = (2, -\frac{5}{2})$

สมการคือ $(x-2)^2 = 6(y+\frac{5}{2})$

13. จงหาสมการของวงรี ซึ่งมี

13.1 แกนเอกยาว 8 หน่วย โฟกัสอยู่ที่ $(5, 1)$ และ $(-1, 1)$

วิธีทำ



$a = 4$

$2c = 5-(-1) \quad \therefore \quad c = 3$

จุดกึ่งกลางระหว่าง $(5, 1)$ และ $(-1, 1) = (2, 1)$

ดังนั้น จุดศูนย์กลางของวงรี $= (2, 1)$

$$b^2 = a^2-c^2 = 16-9 = 7$$

สมการวงรี คือ $\frac{(x-h)^2}{a^2} + \frac{(y-k)^2}{b^2} = 1$

$$\frac{(x-2)^2}{16} + \frac{(y-1)^2}{7} = 1$$

13.2 จุดยอดที่ $(-6, 3)$ และ $(-2, 3)$ และโฟกัสอยู่ที่ $(-5, 3)$ และ $(-3, 3)$

วิธีทำ ระยะห่างระหว่างจุดยอดทั้ง 2 เท่ากับ $2a = |-6-(-2)| = 4$

$$a = 2$$

ระยะห่างระหว่างโฟกัสทั้งสอง $= 2c = |-5-(-3)| = 2$

$$c = 1$$

$$b^2 = a^2 - c^2 = 4 - 1 = 3$$

สมการของวงรี คือ $\dfrac{(x-h)^2}{a^2} + \dfrac{(y-k)^2}{b^2} = 1$

(h, k) คือจุดกึ่งกลางของจุดยอด $= \left(\dfrac{-6-2}{2}, \dfrac{3+3}{2}\right) = (-4, 3)$

สมการวงรี $\dfrac{(x+4)^2}{4} + \dfrac{(y-3)^2}{3} = 1$

13.3 จุดศูนย์กลางอยู่ที่ $(1, -3)$ แกนเอกยาว 10 หน่วย แกนโทยาว 6 หน่วย และแกนของรูปขนานกับแกน y

วิธีทำ สมการของวงรี คือ $\dfrac{(y-k)^2}{a^2} + \dfrac{(x-h)^2}{b^2} = 1$

$$2a = 10 \qquad \therefore\ a = 5$$

$$2b = 6 \qquad \therefore\ b = 3$$

แทนค่า $\dfrac{(y+3)^2}{25} + \dfrac{(x-1)^2}{9} = 1$

13.4 จุดศูนย์กลางอยู่ที่ $(-4, -2)$ จุดโฟกัสจุดหนึ่งอยู่ที่ $(0, -2)$ และค่า $e = \frac{3}{5}$

วิธีทำ ระยะจากจุดศูนย์กลางถึงจุดโฟกัส $= |-4-0| = 4 = c$

$$e = \frac{c}{a} = \frac{3}{5}$$

$$a = \frac{20}{3}$$

$$b^2 = a^2 - c^2$$

$$= \frac{400}{9} - 16 = \frac{256}{9}$$

สมการคือ $\dfrac{(x-h)^2}{a^2} + \dfrac{(y-k)^2}{b^2} = 1$

$$9\,\frac{(x+4)^2}{400} + 9\,\frac{(y+2)^2}{256} = 1$$

14. จงหาสมการไฮเพอร์โบลา ซึ่งมีคุณสมบัติดังนี้

14.1 จุดศูนย์กลางอยู่ที่ $(-1, 2)$ แกนตามขวางยาว 7 หน่วย และแกนสังยุคยาว 8 หน่วย แกนของรูปขนานแกน y

วิธีทำ สมการคือ $\frac{(y-k)^2}{a^2} - \frac{(x-h)^2}{b^2} = 1$

$$2a = 7 \qquad \therefore\ a = \frac{7}{2}$$

$$2b = 8 \qquad \therefore\ b = 4$$

แทนค่า $4\frac{(y-2)^2}{49} - \frac{(x+1)^2}{16} = 1$

14.2 จุดยอดที่ $(5, 1)$ และ $(-1, 1)$ และจุดโฟกัสอยู่ที่ $(6, 1), (-2, 1)$

วิธีทำ สมการคือ $\frac{(x-h)^2}{a^2} - \frac{(y-k)^2}{b^2} = 1$

$$2a = 5-(-1) = 6$$

$$a = 3$$

$$2c = 6-(-2) = 8$$

$$c = 4$$

$$b^2 = c^2 - a^2 = 16-9 = 7$$

จุดศูนย์กลางอยู่ที่ $(\frac{5-1}{2}, \frac{1+1}{2}) = (2, 1)$

แทนค่า สมการคือ

$$\frac{(x-2)^2}{9} - \frac{(y-1)^2}{7} = 1$$

14.3 จุดยอดอยู่ที่ $(-4, -2)$ และ $(0, -2)$ และความชันของเส้นกำกับ $m = \pm\frac{1}{2}$

วิธีทำ จุดศูนย์กลางอยู่ที่ $(\frac{-4+0}{2}, \frac{-2-2}{2}) = (-2, -2)$

$$2a = 4$$

$$a = 2$$

ความชันเส้นกำกับ $m = \frac{b}{a} = \frac{1}{2}$

$$\therefore\ b = 1$$

สมการคือ $\frac{(x-h)^2}{a^2} - \frac{(y-k)^2}{b^2} = 1$

แทนค่า $\frac{(x+2)^2}{4} - (y+2)^2 = 1$

14.4 จุดศูนย์กลางอยู่ที่ $(-4, 2)$ จุดยอดจุดหนึ่งอยู่ที่ $(-4, -4)$ และ $e = \frac{3}{2}$

วิธีทำ ระยะห่างจากจุดศูนย์กลางถึงจุดยอด $= a = 2-(-4) = 6$

$$e = \frac{c}{a} = \frac{3}{2}$$

$$c = 9$$

$$c^2 = a^2 + b^2$$

$$b^2 = 81 - 36 = 45$$

สมการคือ $$\frac{(y-k)^2}{a^2} - \frac{(x-h)^2}{b^2} = 1$$

แทนค่า $$\frac{(y-2)^2}{36} - \frac{(x+4)^2}{45} = 1$$

14.5 จุดศูนย์กลางอยู่ที่โฟกัสของ $y^2 = 8x$ และจุดยอดอยู่ที่ $(2, 4)$ และ $e = \frac{7}{4}$

วิธีทำ จากสมการ $y^2 = 8x$

$$4a = 8 \qquad \therefore \ a = 2$$

จุดโฟกัสของพาราโบลาอยู่ที่ $(2, 0)$

ดังนั้นจุดศูนย์กลางของไฮเพอร์โบลา คือ $(2, 0)$

$$a = 4$$

$$e = \frac{c}{a} = \frac{7}{4} \qquad \therefore \ c = 7$$

$$b^2 = c^2 - a^2 = 49 - 16 = 33$$

สมการคือ $$\frac{(y-k)^2}{a^2} - \frac{(x-h)^2}{b^2} = 1$$

แทนค่า $$\frac{y^2}{16} - \frac{(x-2)^2}{33} = 1$$

14.6 จุดยอดจุดหนึ่งอยู่ที่ $(5, -1)$ ค่า $e = \frac{3}{2}$ และสมการเส้นกำกับ คือ

$2y - \sqrt{5}x + (2+3\sqrt{5}) = 0$ และ $\sqrt{5}x + 2y + (2-3\sqrt{5}) = 0$

วิธีทำ จากสมการ $2y - \sqrt{5}x + (2+3\sqrt{5}) = 0$

$$2(y+1) = \sqrt{5}(x-3) \qquad \text{..... (1)}$$

จากสมการ $\sqrt{5}x + 2y + (2-3\sqrt{5}) = 0$

$$2(y+1) = -\sqrt{5}(x-3) \qquad \text{..... (2)}$$

ดังนั้น $$(y+1) = \pm\frac{\sqrt{5}}{2}(x-3) \qquad \text{..... (3)}$$

จาก (3) ทราบว่า จุดศูนย์กลางอยู่ที่ $(3, -1)$

ดังนั้นแกนขวางขนานกับแกน x รูปสมการคือ

$$\frac{(x-3)^2}{a^2} - \frac{(y+1)^2}{b^2} = 1$$

จาก (3) $\frac{b}{a} = \frac{\sqrt{5}}{2}$

จาก $e = \frac{c}{a} = \frac{3}{2}$

$$c = \frac{3}{2}a = \sqrt{a^2+b^2}$$

$$\therefore \frac{9}{4}a^2 = a^2+b^2$$

$$b^2 = \frac{5}{4}a^2$$

$$\therefore \frac{b}{a} = \frac{\sqrt{5}}{2}$$

$$\therefore b = \sqrt{5}, \quad a = 2$$

สมการไฮเพอร์โบลา คือ $\frac{(x-3)^2}{4} - \frac{(y^2+1)^2}{5} = 1$

การหมุนแกน

ถ้า (x, y) เป็นพิกัดของจุด P ในระบบ xy และ (x′, y′) เป็นพิกัดของจุด P ในระบบ x′y′ ถ้าหมุนแกน x และแกน y ในระนาบเป็นมุม θ ในทิศทางทวนเข็มนาฬิกา สมการหมุนแกน คือ

$$x = x' \cos\theta - y' \sin\theta$$

$$y = x' \sin\theta + y' \cos\theta$$

หรือ

$$x' = x \cos\theta + y \sin\theta$$

$$y' = -x \sin\theta + y \cos\theta$$

ท.บ. สำหรับสมการทั่วไปกำลังสอง

$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$ เมื่อ $B \neq 0$, A และ C ไม่เป็นศูนย์พร้อมกัน จะเปลี่ยนเป็นสมการ

$A'x^2 + C'y'^2 + D'x' + E'y' + F' = 0$ เมื่อ A′, C′ ไม่เป็นศูนย์พร้อมกัน โดยหมุนแกนพิกัดเป็นมุม θ เมื่อ

$$\cot 2\theta = \frac{A-C}{B}$$

หมายเหตุ ในสมการหมุนแกน ต้องใช้ค่า $\sin\theta$, $\cos\theta$ ซึ่งหาได้จาก

$$\sin\theta = \sqrt{\frac{1-\cos 2\theta}{2}}$$

$$\cos\theta = \sqrt{\frac{1+\cos 2\theta}{2}}$$

ค่า $\cos 2\theta$ หาได้จาก $\cot 2\theta$ โดยการเขียนรูป

สมการทั่วไปกำลังสอง มีรูปกราฟอย่างไร สามารถตรวจได้โดยใช้ทฤษฎีต่อไปนี้

ทฤษฎี สมการ $Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$

1. ถ้า $B^2 - 4AC = 0$ แล้วกราฟเป็นพาราโบลา เส้นตรง 2 เส้นขนานกัน หรือเส้นตรง 1 เส้น หรือไม่มีกราฟ
2. ถ้า $B^2 - 4AC < 0$ แล้วกราฟเป็นวงรี วงกลม จุด หรือไม่มีกราฟ
3. ถ้า $B^2 - 4AC > 0$ แล้วกราฟเป็นไฮเพอร์โบลา หรือเส้นตรง 2 เส้น ตัดกัน

เฉลยแบบฝึกหัด 2.7

1. จงหาสมการใหม่ในระบบ $x'y'$ เมื่อหมุนแกน x และแกน y ไปเป็นมุมที่กำหนดให้

1.1 $x^2 - y^2 = a^2, 45°$

วิธีทำ

จากสูตร
$$x = x' \cos\theta - y' \sin\theta$$
$$y = x' \sin\theta + y' \cos\theta$$
$$\cos 45° = \sin 45° \frac{1}{\sqrt{2}}$$
$$x = \frac{x'}{\sqrt{2}} - \frac{y'}{\sqrt{2}}$$
$$y = \frac{x'}{\sqrt{2}} + \frac{y'}{\sqrt{2}}$$

แทนในสมการ
$$\left(\frac{x'}{\sqrt{2}} - \frac{y'}{\sqrt{2}}\right)^2 - \left(\frac{x'}{\sqrt{2}} + \frac{y'}{\sqrt{2}}\right)^2 = a^2$$

หรือ $-2x'y' = a^2$

#

1.2 $x^2 + 2\sqrt{3}xy - y^2 = 2, 30°$

วิธีทำ

$$\sin 30° = \frac{1}{2} \quad \cos 30° = \frac{\sqrt{3}}{2}$$
$$x = \frac{\sqrt{3}}{2} x' - \frac{y'}{2}$$
$$y = \frac{x'}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} y'$$

แทนค่าในสมการ

$$\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x' - \frac{y'}{2}\right)^2 + 2\sqrt{3}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x' - \frac{y'}{2}\right)\left(\frac{x'}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}y'\right)$$

$$-\left(\frac{x'}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}y'\right)^2 = 2$$

$$\frac{5}{2}x'^2 - 2\sqrt{3}\,x'y' - \frac{y'^2}{2} = 2$$

#

จงหาสมการและเขียนกราฟของเส้นโค้งในระบบ $x'y'$ โดยการหมุนแกน x และแกน y ของสมการในระบบ xy ถ้ากราฟเป็นพาราโบลา จงหาพิกัดของโฟกัสและสมการไดเริกตริกซ์ ถ้ากราฟเป็นวงรี หรือไฮเพอร์โบลา จงหาพิกัดของจุดยอด ถ้ากราฟเป็นเส้นตรง จงหาสมการเส้นตรงในระบบ xy

2. $xy = 2$

วิธีทำ

จากสมการทั่วไป $Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$

ในที่นี้ $A = 0, B = 1, C = 0, F = -2$

$$B^2 - 4AC = 1 > 0$$

สมการควรจะเป็นไฮเพอร์โบลา หรือเส้นตรง 2 เส้นตัดกัน

ถ้าหมุนแกนไปเป็นมุม θ

$$\cot 2\theta = \frac{A - C}{B} = 0$$

$$2\theta = \frac{\pi}{2}$$

$$\theta = \frac{\pi}{4}$$

$$\sin\theta = \frac{1}{\sqrt{2}} = \cos\theta$$

$$x = x'\cos\theta - y'\sin\theta = \frac{x'}{\sqrt{2}} - \frac{y'}{\sqrt{2}}$$

$$y = x' \sin\theta + y' \cos\theta = \frac{x'}{\sqrt{2}} + \frac{y'}{\sqrt{2}}$$

แทนค่าในสมการ

$$\left(\frac{x'}{\sqrt{2}} - \frac{y'}{\sqrt{2}}\right)\left(\frac{x'}{\sqrt{2}} + \frac{y'}{\sqrt{2}}\right) = 2$$

$$\frac{x'^2}{2} - \frac{y'^2}{2} = 2$$

หรือ $$\frac{x'^2}{4} - \frac{y'^2}{4} = 1$$

เป็นสมการไฮเพอร์โบลา แกนตามขวางทับแกน x'

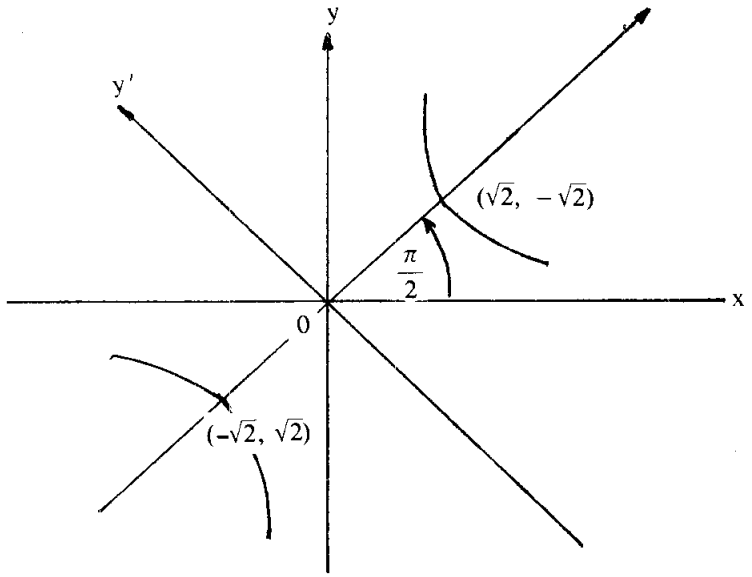
ครึ่งแกนตามขวาง $= 2$

ครึ่งแกนสังยุค $= 2$

เทียบกับแกน x', y' จุดยอดคือ $(2, 0)$ และ $(-2, 0)$

แต่จุดยอดเทียบกับแกน x, y คือ แทนค่า $x' = \pm 2$, $y' = 0$ จะได้จุดยอดอยู่ที่

$(\sqrt{2}, \sqrt{2})$ และ $(-\sqrt{2}, -\sqrt{2})$



3. $x^2 + xy + y^2 = 1$

วิธีทำ

ในที่นี้ $A = 1, B = 1, C = 1, F = -1$

$$B^2 - 4AC = 1 - 4 = -3 < 0$$

สมการควรจะเป็นวงรี วงกลม จุด หรือไม่มีกราฟ

ก็หมุนแกนไปเป็นมุม θ

$$\cot 2\theta = \frac{A - C}{B} = 0$$

$$2\theta = \frac{\pi}{2}$$

$$\theta = \frac{\pi}{4}$$

$$\sin\theta = \frac{1}{\sqrt{2}} = \cos\theta$$

$$x = \frac{x'}{\sqrt{2}} - \frac{y'}{\sqrt{2}}$$

$$y = \frac{x'}{\sqrt{2}} + \frac{y'}{\sqrt{2}}$$

แทนค่าในสมการ

$$\left(\frac{x'}{\sqrt{2}} - \frac{y'}{\sqrt{2}}\right)^2 + \left(\frac{x'}{\sqrt{2}} - \frac{y'}{\sqrt{2}}\right)\left(\frac{x'}{\sqrt{2}} + \frac{y'}{\sqrt{2}}\right) + \left(\frac{x'}{\sqrt{2}} + \frac{y'}{\sqrt{2}}\right)^2 = 1$$

$$\frac{3}{2}x'^2 + \frac{y'^2}{2} = 1$$

กราฟเป็นวงรี แกนเอกทับแกน y'

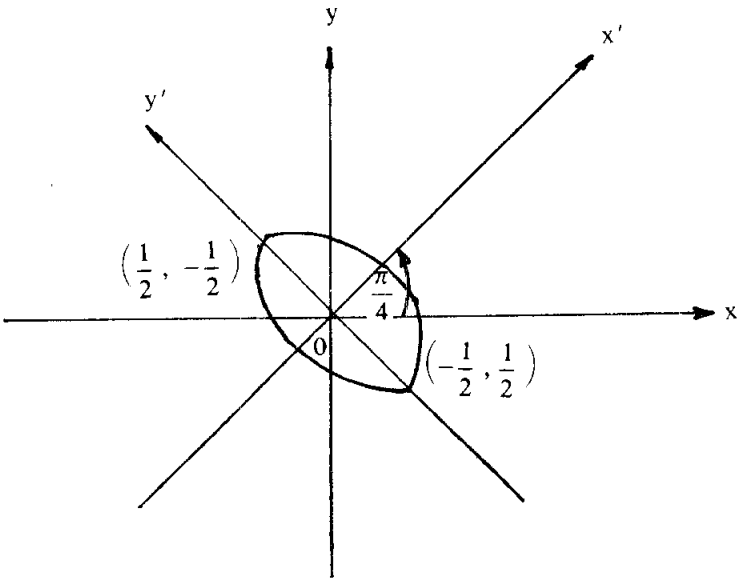
ครึ่งแกนเอก $= \frac{\sqrt{2}}{2}$

ครึ่งแกนโท $= 2\sqrt{\frac{2}{3}}$

พิกัดของจุดยอดเมื่อเทียบกับแกน $x'y'$ เป็น $\left(0, \frac{\sqrt{2}}{2}\right), \left(0, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$

เมื่อเทียบกับแกน x, y แทนค่า $x' = 0, y' = \pm \frac{\sqrt{2}}{2}$ จะได้

จุดยอดเทียบกับแกน x, y ที่ $\left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right), \left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right)$



4. $x^2 + 4xy + 4y^2 = 9$

วิธีทำ

ในที่นี้ $A = 1, B = 4, C = 4$

$$B^2 - 4AC = 16 - 16 = 0$$

กราฟเป็นพาราโบลา หรือเส้นตรง

ถ้าหมุนแกนไปเป็นมุม θ

$$\cot 2\theta = \frac{A - C}{B} = \frac{1 - 4}{4} = -\frac{3}{4}$$

$$\cos 2\theta = -\frac{3}{5}$$

$$\sin\theta = \sqrt{\frac{1-\cos 2\theta}{2}} = \frac{2}{\sqrt{5}}$$

$$\cos\theta = \sqrt{\frac{1+\cos 2\theta}{2}} = \frac{1}{\sqrt{5}}$$

$$x = \frac{x'}{\sqrt{5}} - \frac{2y'}{\sqrt{5}}$$

$$y = \frac{2}{\sqrt{5}}x' + \frac{y'}{\sqrt{5}}$$

แทนค่า x, y ในสมการ

$$\frac{1}{5}(x'-2y')^2 + \frac{4}{5}(x'-2y')(2x'+y') + \frac{4}{5}(2x'+y')^2 = 9$$

$$5x'^2 = 9$$

$$x' = \pm\frac{3}{\sqrt{5}}$$ เป็นสมการเส้นตรง 2 เส้น

จาก $x' = x\cos\theta + y\sin\theta$

ดังนั้น $\frac{3}{\sqrt{5}} = \frac{x}{\sqrt{5}} + \frac{2y}{\sqrt{5}}$ หรือ $x + 2y - 3 = 0$

และ $\frac{-3}{\sqrt{5}} = \frac{x}{\sqrt{5}} + \frac{2y}{\sqrt{5}}$ หรือ $x + 2y + 3 = 0$

#

5. $x^2 - 3xy + y^2 = 5$

วิธีทำ

ในที่นี้ $A = 1, B = -3, C = 1$

$$B^2 - 4AC = 9 - 4 = 5 > 0$$

กราฟเป็นไฮเพอร์โบลาหรือเส้นตรง 2 เส้นตัดกัน

ถ้าหมุนแกนไปเป็นมุม θ

$$\cot 2\theta = \frac{A-C}{B} = \frac{1-1}{-3} = 0$$

$$2\theta = \frac{\pi}{2}$$

$$\theta = \frac{\pi}{4}$$

$$\sin\theta = \frac{1}{\sqrt{2}} = \cos\theta$$

$$x = \frac{x'}{\sqrt{2}} - \frac{y'}{\sqrt{2}}$$

$$y = \frac{x'}{\sqrt{2}} + \frac{y'}{\sqrt{2}}$$

แทนค่าในสมการ

$$\frac{1}{2}(x' - y')^2 - \frac{3}{2}(x' - y')(x' + y') + \frac{1}{2}(x' + y')^2 = 5$$

$$\frac{5}{2}y'^2 - \frac{x'^2}{2} = 5$$

$$\frac{y'^2}{2} - \frac{x'^2}{10} = 1$$

เป็นสมการไฮเพอร์โบลา แกนตามขวางทับแกน y'

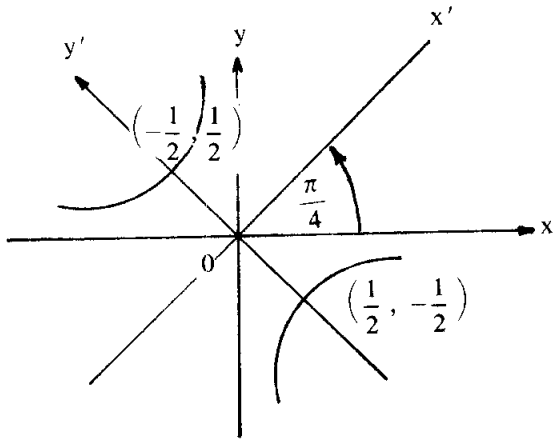
ครึ่งแกนตามขวาง $= \frac{\sqrt{2}}{2}$

ครึ่งแกนสังยุค $= \frac{\sqrt{10}}{2}$

จุดยอดอยู่ที่ $\left(0, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ และ $\left(0, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ เมื่อเทียบกับแกน x', y'

จุดยอดเทียบกับแกน x, y คือ แทนค่า $x' = 0, y' = \pm\frac{1}{\sqrt{2}}$ คือ

$\left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$ และ $\left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right)$



6. $x^2 + 2xy + y^2 - 8x + 8y = 0$

วิธีทำ $A = 1, B = 2, C = 1$

$$B^2 - 4AC = 4 - 4 = 0$$

สมการเป็นพาราโบลาหรือเส้นตรง

$$\cot 2\theta = \frac{A - C}{B} = 0$$

$$2\theta = \frac{\pi}{2} \qquad \therefore \theta = \frac{\pi}{4}$$

$$x = \frac{x'}{\sqrt{2}} - \frac{y'}{\sqrt{2}}$$

$$y = \frac{x'}{\sqrt{2}} + \frac{y'}{\sqrt{2}}$$

แทนค่า

$$\frac{1}{2}(x' - y')^2 + (x' - y')(x' + y') + \frac{1}{2}(x' + y')^2 - \frac{8}{\sqrt{2}}(x' - y')$$

$$+ \frac{8}{\sqrt{2}}(x' + y') = 0$$

$$\frac{3}{2}x'^2 + \frac{16}{\sqrt{2}}y' = 0$$

หรือ $$x'^2 = -\frac{32}{3\sqrt{2}}y'$$

เป็นสมการพาราโบลา จุดโฟกัสอยู่บนแกน y'

$$a = -\frac{8}{3\sqrt{2}}$$

พิกัดของโฟกัสเดียวกับแกน x', y' คือ $(0, -\frac{8}{3\sqrt{2}})$

สมการไดเรกตริกซ์ คือ $y' = \frac{8}{3\sqrt{2}}$

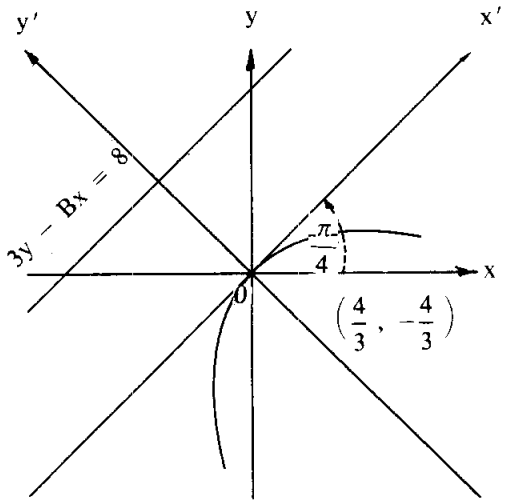
ในระบบ x, y แทนค่า $x' = 0, y' = \frac{-8}{3\sqrt{2}}$ จะได้จุดโฟกัสอยู่ที่ $\left(\frac{4}{3}, -\frac{4}{3}\right)$

และสมการไดเรกตริกซ์หาจาก $y' = -x\sin\theta + y\cos\theta$

$$y' = -\frac{x}{\sqrt{2}} + \frac{y}{\sqrt{2}}$$

แทนค่า $y' = \frac{8}{3\sqrt{2}}$ $\therefore \frac{8}{3\sqrt{2}} = \frac{-x}{\sqrt{2}} + \frac{y}{\sqrt{2}}$

ได้สมการ $3y - 3x = 8$



7. $x^2 - 4xy + 4y^2 - 40x - 20y = 0$

วิธีทำ

ในที่นี้ $A = 1, B = -4, C = 4$

$$B^2 - 4AC = 16 - 16 = 0$$

สมการเป็นพาราโบลาหรือเส้นตรง

$$\cot 2\theta = \frac{A - C}{B} = \frac{1 - 4}{-4} = \frac{3}{4}$$

$$\cos 2\theta = \frac{3}{5}$$

$$\sin \theta = \sqrt{\frac{1 - \cos 2\theta}{2}} = \frac{1}{\sqrt{5}}$$

$$\cos \theta = \sqrt{\frac{1 + \cos 2\theta}{2}} = \frac{2}{\sqrt{5}}$$

$$x = \frac{2}{\sqrt{5}}x' - \frac{y'}{\sqrt{5}}, \quad y = \frac{1}{\sqrt{5}}x' + \frac{2}{\sqrt{5}}y'$$

แทนค่าในสมการ

$$\frac{1}{2}(2x' - y')^2 - \frac{4}{5}(2x' - y')(x' + 2y') + \frac{4}{5}(x' + 2y')^2$$
$$- \frac{40}{\sqrt{5}}(2x' - y') - \frac{20}{\sqrt{5}}(x' + 2y') = 0$$

$$5y'^2 - \frac{100}{\sqrt{5}}x' = 0$$

$$y'^2 = \frac{20}{\sqrt{5}}x'$$

เป็นสมการพาราโบลา จุดโฟกัสอยู่บนแกน x'

$$a = \sqrt{5}$$

พิกัดของโฟกัสเทียบกับ x', y' คือ $(\sqrt{5}, 0)$

สมการไดเรกตริกซ์ $x' = -\sqrt{5}$

ในระบบ x, y

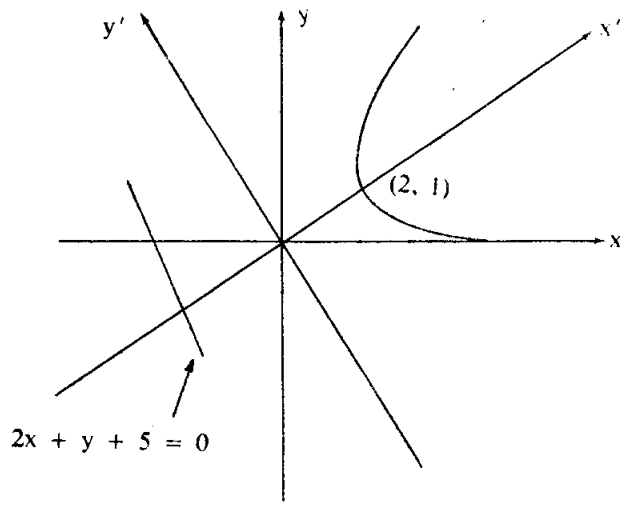
จุดโฟกัส โดยแทนค่า $x' = \sqrt{5}, y' = 0$

ดังนั้นโฟกัสอยู่ที่ $(2, 1)$

สมการไดเริกตริกซ์มาจาก $x' = x\cos\theta + y\sin\theta$

$$-\sqrt{5} = \frac{2x}{\sqrt{5}} + \frac{y}{\sqrt{5}}$$

หรือ $2x + y + 5 = 0$



#

จงบอกชนิดของสมการ โดยการหมุนและย้ายแกน จงเขียนกราฟ ถ้ากราฟเป็นพาราโบลา จงหาโฟกัส จุดยอดและสมการไดเรกตริกซ์ ถ้ากราฟเป็นวงรี หรือไฮเพอร์โบลา จงหาพิกัดของโฟกัส และสมการไดเรกตริกซ์ ถ้ากราฟเป็นเส้นตรง จงหาสมการเส้นตรง

8. $4x^2 - 4xy + y^2 - 6x + 3y + 2 = 0$

วิธีทำ

ในที่นี้ $A = 4, B = -4, C = 1$

$$B^2 - 4AC = 16 - 16 = 0$$

สมการเป็นพาราโบลาหรือเส้นตรง

$$(4x^2 - 4xy + y^2) - 3(2x - y) + 2 = 0$$

$$(2x - y)^2 - 3(2x - y) + 2 = 0$$

$$\{(2x - y) - 2\}\{(2x - y) - 1\} = 0$$

กราฟเป็นเส้นตรง 2 เส้นขนานกัน มีสมการเป็น

$$2x - y - 2 = 0$$

และ $$2x - y - 1 = 0$$

#

9. $4x^2 - 12xy + 9y^2 - 52x + 26y + 81 = 0$

วิธีทำ

ในที่นี้ $B^2 - 4AC = 144 - 36 = 108 > 0$

สมการเป็นไฮเพอร์โบลาหรือเส้นตรง 2 เส้นตัดกัน

$$\cot 2\theta = \frac{A - C}{B} = \frac{4 - 9}{-12} = \frac{5}{12}$$

$$\cos 2\theta = \frac{5}{13}$$

$$\sin \theta = \sqrt{\frac{1 - \cos 2\theta}{2}} = \frac{2}{\sqrt{13}}$$

$$\cos \theta = \frac{3}{\sqrt{13}}$$

$$x = \frac{1}{\sqrt{13}}(3x' - 2y')$$

$$y = \frac{1}{\sqrt{13}}(2x' + 3y')$$

แทนค่า x, y

$$\frac{4}{13}(9x'^2 - 12x'y' + 4y'^2) - \frac{12}{13}(6x'^2 + 5x'y' - 6y'^2)$$

$$+ \frac{9}{13}(4x'^2 + 12x'y' + 9y'^2) - 4\sqrt{13}(3x' - 2y') + 2\sqrt{13}(2x' + 3y') + 81 = 0$$

$$13y'^2 - 8\sqrt{13}x' + 14\sqrt{13}y' + 81 = 0$$

$$13\left(y'^2 + \frac{14}{\sqrt{13}}y'\right) = 8\sqrt{13}x' - 81$$

$$13\left(y' + \frac{7}{\sqrt{13}}\right)^2 = 8\sqrt{13}\left(x' - \frac{4}{\sqrt{13}}\right)$$

ให้

$$x'' = x' - \frac{4}{\sqrt{13}}$$

$$y'' = y' + \frac{7}{\sqrt{13}}$$

จะได้

$$y''^2 = \frac{8}{\sqrt{13}}x''$$

เป็นสมการพาราโบลาในระบบ x'', y'' แกนของพาราโบลาทับแกน x''

$$a = \frac{2}{\sqrt{13}}$$

จุดยอดที่จุดกำเนิด จุดโฟกัสอยู่ที่ $\left(\frac{2}{\sqrt{13}}, 0\right)$

สมการไดเรกตริกซ์ คือ $x'' = \frac{-2}{\sqrt{13}}$

ในระบบ $x'y'$

จาก

$$x' = x'' + h$$

$$y' = y'' + k$$

จุดยอดคือ $\left(0 + \frac{4}{\sqrt{13}}, 0 - \frac{7}{\sqrt{13}}\right)$ หรือ $\left(\frac{4}{\sqrt{13}}, \frac{-7}{\sqrt{13}}\right)$

โฟกัส คือ $\left(\frac{2}{\sqrt{13}} + \frac{4}{\sqrt{13}}, 0 - \frac{7}{\sqrt{13}}\right)$ หรือ $\left(\frac{6}{\sqrt{13}}, \frac{-7}{\sqrt{13}}\right)$

ไดเรกตริกซ์ คือ $x' = \frac{-2}{\sqrt{13}} + \frac{4}{\sqrt{13}} = \frac{2}{\sqrt{13}}$

ในระบบ xy หา x, y ได้จาก

$$x = x' \cos\theta - y' \sin\theta$$

$$y = x' \sin\theta + y' \cos\theta$$

โฟกัส $x' = \frac{6}{\sqrt{13}}$, $y' = \frac{-7}{\sqrt{13}}$, $\cos\theta = \frac{3}{\sqrt{13}}$, $\sin\theta = \frac{2}{\sqrt{13}}$

$$x = \frac{6}{\sqrt{13}} \cdot \frac{3}{\sqrt{13}} + \left(\frac{-7}{\sqrt{13}}\right)\left(\frac{2}{\sqrt{13}}\right) = \frac{32}{13}$$

$$y = -\frac{9}{13}$$

ดังนั้นโฟกัส คือ $\left(\frac{32}{13}, \frac{-9}{13}\right)$

จุดยอด

$$x = \frac{4}{\sqrt{13}} \cdot \frac{3}{\sqrt{13}} + \frac{7}{\sqrt{13}} \cdot \frac{2}{\sqrt{13}} = 2$$

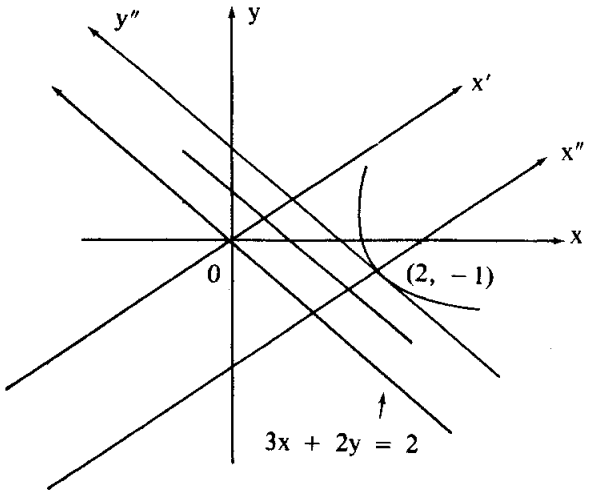
$$y = \frac{4}{\sqrt{13}} \cdot \frac{2}{\sqrt{13}} - \frac{7}{\sqrt{13}} \cdot \frac{3}{\sqrt{13}} = -1$$

จุดยอดคือ (2, −1)

สมการไดเรกตริกซ์ จาก $x' = x\cos\theta + y\sin\theta\, y'$

$$\frac{2}{\sqrt{13}} = \frac{3}{\sqrt{13}} x + \frac{2}{\sqrt{13}} y$$

หรือ $3x + 2y = 2$



10. $x^2 + y^2 + xy + x - y = 3$

วิธีทำ $B^2 - 4AC = 1 - 4 = -3 < 0$

กราฟเป็น วงกลม วงรี จุด หรือไม่มีกราฟ

ถ้าหมุนแกนเป็นมุม θ

$$\cot 2\theta = \frac{A - C}{B} = 0$$

$$\theta = \frac{\pi}{4}$$

$$\sin\theta = \cos\theta = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$x = \frac{x'}{\sqrt{2}} - \frac{y'}{\sqrt{2}}$$

$$y = \frac{x'}{\sqrt{2}} + \frac{y'}{\sqrt{2}}$$

แทนค่าในสมการ

$$\frac{1}{2}(x' - y')^2 + \frac{1}{2}(x' + y')^2 + \frac{1}{2}(x' - y')(x' + y')$$

$$+ \frac{1}{\sqrt{2}}(x' - y') - \frac{1}{\sqrt{2}}(x' + y') = 3$$

$$\frac{3}{2}x'^2 + \frac{y'^2}{2} - \sqrt{2}\,y' = 3$$

$$\frac{1}{2}(y'^2 - 2\sqrt{2}\,y') + \frac{3}{2}x'^2 = 3$$

$$\frac{1}{2}(y' - \sqrt{2})^2 + \frac{3}{2}x'^2 = 5$$

$$\frac{(y' - \sqrt{2})^2}{10} + \frac{3}{10}x'^2 = 1$$

โดยการย้ายแกนให้ $x'' = x'$

$y'' = y' - \sqrt{2}$

ได้สมการ $\dfrac{(y'')^2}{10} + \dfrac{x''}{\frac{10}{3}} = 1$ เป็นสมการวงรีในระบบ $x'y''$

ครึ่งแกนเอก $= \sqrt{10}$

ครึ่งแกนโท $= \sqrt{\frac{10}{3}}$; $C = \sqrt{\frac{20}{3}}$

แกนเอกทับแกน y'' จุดศูนย์กลางอยู่ที่จุดกำเนิด

จุดยอดอยู่ที่ $(0, \pm\sqrt{10})$

จุดโฟกัสที่ $(0, \pm\sqrt{\frac{20}{3}})$

ในระบบ $x'y'$ หา x', y' ได้จาก

$$x' = x'' + h$$

$$y' = y'' + k$$

จุดยอดคือ $(0, \sqrt{10} + \sqrt{2})$ และ $(0, -\sqrt{10} + \sqrt{2})$

โฟกัสทั้งสองคือ $(0, \sqrt{\frac{20}{3}} + \sqrt{2})$ และ $(0, -\sqrt{\frac{20}{3}} + \sqrt{2})$

ในระบบ xy

$$x = x'\cos\theta - y'\sin\theta$$

$$y = x'\sin\theta + y'\cos\theta$$

จุดยอด $x' = 0, y' = \sqrt{10} + \sqrt{2}$

$$x = \frac{-\sqrt{2} - \sqrt{10}}{\sqrt{2}} = -1 - \sqrt{5}$$

$$y = \sqrt{5} + 1$$

ถ้า $x' = 0, y' = -\sqrt{10} + \sqrt{2}$

$$x = \frac{\sqrt{10} - \sqrt{2}}{\sqrt{2}} = \sqrt{5} - 1$$

$$y = -\sqrt{5} + 1$$

จุดยอดในระบบ xy คือ $(-1 - \sqrt{5}, \sqrt{5} + 1)$ และ $(-1 + \sqrt{5}, 1 - \sqrt{5})$

จุดโฟกัส $x' = 0 \; y' = \sqrt{\frac{20}{3}} + \sqrt{2}$

$$x = -1 - \sqrt{\frac{10}{3}}$$

$$y = \sqrt{\frac{10}{3}} + 1$$

$$x' = 0, y' = -\sqrt{\frac{20}{3}} + \sqrt{2}$$

$$x = -1 + \sqrt{\frac{10}{3}}$$

$$y = -\sqrt{\frac{10}{3}} + 1$$

จุดโฟกัส คือ $\left(-1 - \sqrt{\frac{10}{3}}, -1 + \sqrt{\frac{10}{3}}\right)$ และ $\left(-1 + \sqrt{\frac{10}{3}}, -\sqrt{\frac{10}{3}} + 1\right)$

#

11. $12x^2 + 24xy + 19y^2 - 12x - 40y + 31 = 0$

วิธีทำ ในที่นี้ $A = 12, B = 24, C = 19$

$$B^2 - 4AC = 576 - 912 < 0$$

สมการเป็นวงรี วงกลม จุด หรือไม่มีกราฟ

$$\cot 2\theta = \frac{A - C}{B} = \frac{12 - 19}{24} = \frac{-7}{24}$$

$$\cos 2\theta = -\frac{7}{25}$$

$$\sin\theta = \sqrt{\frac{1-\cos 2\theta}{2}} = \frac{4}{5}$$

$$\cos\theta = \sqrt{\frac{1+\cos 2\theta}{2}} = \frac{3}{5}$$

$$x = \frac{3}{5}x' - \frac{4}{5}y'$$

$$y = \frac{4}{5}x' + \frac{3}{5}y'$$

แทนค่าในสมการ

$$\frac{12}{25}(3x'-4y')^2 + \frac{24}{25}(3x'-4y')(4x'+3y') + \frac{19}{25}(4x'+3y')^2$$

$$-\frac{12}{5}(3x'-4y') - \frac{40}{5}(4x'+3y') + 31 = 0$$

$$28x'^2 + 3y'^2 - \frac{196}{5}x' - \frac{72}{5}y' + 31 = 0$$

$$28\left(x'^2 - \frac{7}{5}x' + \frac{49}{100}\right) + 3\left(y'^2 - \frac{24}{5}y' + \frac{144}{25}\right) = -31 + \frac{316}{25}$$

$$+\frac{432}{25} = \frac{-28}{25}$$

$$28\left(x' - \frac{7}{10}\right)^2 + 3\left(y' - \frac{12}{5}\right)^2 = -\frac{28}{25}$$

ไม่สามารถหาค่า x', y' ที่คล้องตามสมการได้
ดังนั้น สมการนี้ไม่มีกราฟ

12. $2x^2 - y^2 + 4xy - 2x + 3y = 6$

วิธีทำ ในที่นี้ $A = 2, B = 4, C = -1$

$$B^2 - 4AC = 16 + 8 > 0$$

สมการเป็นไฮเพอร์โบลา หรือเส้นตรง 2 เส้น

$$\cot 2\theta = \frac{A-C}{B} = \frac{2+1}{4} = \frac{3}{4}$$

$$\cos 2\theta = \frac{3}{5}$$

$$\sin\theta = \sqrt{\frac{1-\cos 2\theta}{2}} = \frac{1}{\sqrt{5}}$$

$$\cos\theta = \sqrt{\frac{1+\cos 2\theta}{2}} = \frac{2}{\sqrt{5}}$$

$$x = \frac{2}{\sqrt{5}}x' - \frac{y'}{\sqrt{5}}$$

$$y = \frac{x'}{\sqrt{5}} + \frac{2y'}{\sqrt{5}}$$

แทนค่า $\frac{2}{5}(2x'-y')^2 - \frac{1}{5}(x'+2y')^2 + \frac{4}{5}(2x'-y')(x'-2y') - \frac{2}{\sqrt{5}}(2x'-y')$

$$+ \frac{3}{\sqrt{5}}(x'+2y') = 6$$

$$3x'^2 - 2y'^2 - \frac{1}{\sqrt{5}}x' + \frac{8y'}{\sqrt{5}} = 6$$

$$3(x'^2 - \frac{1}{3\sqrt{5}}x') - 2(y'^2 - \frac{4y'}{\sqrt{5}}) = 6$$

$$3(x'^2 - \frac{1}{3\sqrt{5}}x' + \frac{1}{180}) - 2(y'^2 - \frac{4y'}{\sqrt{5}} + \frac{4}{5}) = 6 + \frac{1}{60} - \frac{8}{5} = \frac{53}{12}$$

$$\frac{(x' - \frac{1}{6\sqrt{5}})^2}{\frac{53}{36}} - \frac{(y' - \frac{2}{\sqrt{5}})^2}{\frac{53}{24}} = 1$$

ให้

$$x'' = x' - \frac{1}{6\sqrt{5}}$$

$$y'' = y' - \frac{2}{\sqrt{5}}$$

จะได้สมการ $\frac{(x'')^2}{\frac{53}{36}} - \frac{(y'')^2}{\frac{53}{24}} = 1$ ซึ่งเป็นสมการไฮเพอร์โบลา

$$a^2 = \frac{53}{36},\ b^2 = \frac{53}{24},\ c^2 = \frac{265}{72}$$

แกนตามขวางทับแกน x''

จุดยอดอยู่ที่ $(\pm \frac{\sqrt{53}}{6}, 0)$

โฟกัสอยู่ที่ $(\pm \frac{\sqrt{265}}{6\sqrt{2}}, 0)$

ในระบบ $x'y'$ หา x', y' ได้จาก

$$x' = x'' + h \quad ; \quad x' = x'' + \frac{1}{6\sqrt{5}}$$

$$y' = y'' + k \quad y' = y'' + \frac{2}{\sqrt{5}}$$

จุดยอดคือ $\left(\pm \frac{\sqrt{53}}{6} + \frac{1}{6\sqrt{5}}, 0 + \frac{2}{\sqrt{5}}\right)$

โฟกัสคือ $\left(\pm \frac{\sqrt{265}}{6\sqrt{2}} + \frac{1}{6\sqrt{5}}, 0 + \frac{2}{\sqrt{5}}\right)$

ในระบบ xy

$$x = x' \cos\theta - y' \sin\theta$$

$$y = x' \sin\theta + y' \cos\theta$$

จุดยอด $x' = \frac{\sqrt{53}}{6} + \frac{1}{6\sqrt{5}}, y' = \frac{2}{\sqrt{5}}$

$$x = \frac{2}{\sqrt{5}}\left(\frac{\sqrt{53}}{6} + \frac{6}{\sqrt{5}}\right) - \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{2}{\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{265} + 24}{30}\right.$$

$$y = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{\sqrt{53}}{6} + \frac{1}{6\sqrt{5}}\right) + \frac{2}{\sqrt{5}}\left(\frac{2}{\sqrt{5}}\right) = \frac{\sqrt{265} + 25}{30}$$

ถ้า $x' = -\frac{\sqrt{53}}{6} + \frac{1}{6\sqrt{5}}, y' = \frac{2}{\sqrt{5}}$

$$x = \frac{-\sqrt{265} + 24}{30}, \quad y = \frac{\sqrt{265} + 25}{30}$$

จุดยอดคือ $\left(\frac{24 \pm \sqrt{265}}{30}, \frac{25 + \sqrt{265}}{30}\right)$

จุดโฟกัส $x' = \frac{\sqrt{265}}{6\sqrt{2}} + \frac{1}{6\sqrt{5}}, y' = \frac{2}{\sqrt{5}}$

$$x = \frac{\sqrt{53} - \sqrt{2}}{3\sqrt{2}}, \quad y = \frac{\sqrt{53} + 5\sqrt{2}}{6\sqrt{3}}$$

ถ้า $x' = -\frac{\sqrt{265}}{6\sqrt{2}} + \frac{1}{6\sqrt{5}}, \quad y' = \frac{2}{\sqrt{5}}$

จะได้ $x = \frac{-\sqrt{53} - \sqrt{2}}{3\sqrt{2}}, \quad y = \frac{\sqrt{53} + 5\sqrt{2}}{6\sqrt{3}}$

$\therefore$ จุดโฟกัสคือ $\left(\frac{\pm\sqrt{53} - \sqrt{2}}{3\sqrt{2}}, \frac{\sqrt{53} + 5\sqrt{2}}{6\sqrt{3}} \right)$