บทที่ 1
ระเบียบวิธีการอินทิเกรต
(Method of Integration)

บทสรุปเกี่ยวกับระเบียบวิธีการอินทิเกรตที่ควรสนใจ มีดังนี้

(1) สูตรพื้นฐานที่ใช้ในการแก้ปัญหา

1) ฟังก์ชันพีชคณิต

$$\int (u+v)dx = \int udx + \int vdx$$

$$\int cudx = c\int udx$$

2) ฟังก์ชันในรูปยกกำลัง

$$\int u^n du = \frac{u^{n+1}}{n+1} + C \quad , \quad n \neq -1$$

$$\int \frac{1}{u} du = \ell n\,|u| + C$$

$$\int e^u\, du = e^u + C$$

$$\int a^u\, du = \frac{a^u}{\ell n\, a} + C$$

3) ฟังก์ชันตรีโกณมิติ

$$\int \sin u\, du = -\cos u + C$$

$$\int \cos u\, du = \sin u + C$$

$$\int \tan u\, du = -\ell n\,|\cos u| + C$$

$$\int \cot u\, du = \ell n\,|\sin u| + C$$

$$\int \sec^2 u\, du = \tan u + C$$

$$\int \operatorname{cosec}^2 u\, du = -\cot u + C$$

$$\int \sec u \tan u\, du = \sec u + C$$

$$\int \operatorname{cosec} u \cot u\, du = -\operatorname{cosec} u + C$$

4) **ฟังก์ชันตรีโกณมิติผกผัน**

$$\int \frac{du}{\sqrt{1-u^2}} = \begin{cases} \arcsin u + C \\ -\arccos u + C \end{cases}$$

$$\int \frac{du}{1+u^2} = \begin{cases} \arctan u + C \\ -\operatorname{arccot} u + C \end{cases}$$

$$\int \frac{du}{u\sqrt{u^2-1}} = \begin{cases} \operatorname{arcsec} u + C \\ -\operatorname{arccosec} u + C \end{cases}$$

5) **ฟังก์ชันไฮเพอร์โบลิก**

$$\int \sinh u\, du = \cosh u + C$$

$$\int \cosh u\, du = \sinh u + C$$

$$\int \operatorname{sech}^2 u\, du = \tanh u + C$$

$$\int \operatorname{cosech}^2 u\, du = -\coth u + C$$

$$\int \operatorname{sech} u \tanh u\, du = -\operatorname{sech} u + C$$

$$\int \operatorname{cosech} u \coth u\, du = -\operatorname{cosech} u + C$$

(2) การอินทิเกรตโดยการแทนค่า

ปัญหาไม่สามารถอินทิเกรตโดยใช้สูตรข้างต้นได้

วิธีการแก้ปัญหา

1) สมมติ u จากกลุ่มยุ่งยากหรือกลุ่มที่กระจายไม่ได้ โดยให้ u = ตัวภายในกลุ่ม
2) เปลี่ยนตัวที่เหลือและ dx เป็นรูป u และ du
3) หาค่าอินทิกรัล $\int f(u)\, du$
4) แทนค่ากลับตอบในรูป x

(3) การอินทิเกรตฟังก์ชันตรีโกณมิติ

3.1) กรณีตัวที่อยู่หลังฟังก์ชันต่างกัน เช่น $\int \sin 2x \cos 3x\, dx$

วิธีการแก้ปัญหา

1) เปลี่ยนผลคูณเป็นผลบวกผลลบ ดังสูตรต่อไปนี้

$$\sin mx \cos nx = \frac{1}{2}[\sin(m-n)x + \sin(m+n)x]$$

$$\sin mx \sin nx = \frac{1}{2}[\cos(m-n)x - \cos(m+n)x]$$

$$\cos mx \cos nx = \frac{1}{2}[\cos(m-n)x + \cos(m+n)x]$$

2) ใช้สูตรอินทิเกรตฟังก์ชันไซน์และฟังก์ชันโคไซน์ หาคำตอบต่อไป

3.2) กรณีตัวที่อยู่หลังฟังก์ชันเหมือนกัน เช่น $\int \sin^2 2x \cos^3 2x\, dx$ มี 3 แบบด้วยกัน คือ

(1) $\int \sin^m x \cos^n x\, dx$

(2) $\int \sec^m x \tan^n x\, dx$

(3) $\int \operatorname{cosec}^m x \cot^n x\, dx$

3.2.1) ตัวถูกอินทิเกรตประกอบด้วย $\sin x$ หรือ $\cos x$ ที่มีกำลังเป็นเลขคี่บวก

วิธีการแก้ปัญหา

1) แยก $\sin x$ หรือ $\cos x$ จากตัวที่มีกำลังเป็นเลขคี่ออกมา 1 ตัว

2) เปลี่ยน $\sin x\, dx$ เป็น $-d\cos x$

$\cos x\, dx$ เป็น $d\sin x$

3) ถ้าเปลี่ยนเป็น $d\cos x$ แล้วฟังก์ชันหน้า $d\cos x$ ต้องเปลี่ยนเป็นรูป cos ทั้งหมด และถ้าเปลี่ยนเป็น $d\sin x$ แล้วฟังก์ชันหน้า $d\sin x$ ต้องเปลี่ยนเป็นรูป sin ทั้งหมด

4) ใช้สูตรความสัมพันธ์ระหว่าง $\sin x$ กับ $\cos x$ คือ

$$\sin^2 x + \cos^2 x = 1$$

ในการเปลี่ยนรูปของฟังก์ชัน

5) อินทิเกรตตลอดเทียบกับ $d\sin x$ หรือ $d\cos x$ โดยใช้สูตร

$$\int u^n\, du = \frac{u^{n+1}}{n+1} + C$$

3.2.2) ตัวถูกอินทิเกรตมีกำลังของ $\sin x$ หรือ $\cos x$ มีกำลังเป็นจำนวนเต็มคู่บวกทั้ง 2 ตัว

วิธีการแก้ปัญหา

1) ใช้สูตรมุมครึ่งในการลดกำลัง

$$\cos^2 x = \frac{1+\cos 2x}{2}$$

$$\sin^2 x = \frac{1-\cos 2x}{2}$$

2) ทำตัวถูกอินทิเกรตให้เหลือกำลังเป็น 1

3) ใช้สูตร $\int \sin u\, du = -\cos u + C$

$\int \cos u\, du = \sin u + C$

3.2.3) ตัวถูกอินทิเกรตเป็นฟังก์ชัน $\tan x$ หรือ $\cot x$ มีกำลังเป็นเลขคี่บวก

วิธีการแก้ปัญหา

1) เปลี่ยน $\tan x, \cot x$ ให้อยู่ในรูป $\sin x, \cos x$

$$\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$$

$$\cot x = \frac{\cos x}{\sin x}$$

2) แก้ปัญหาในรูป $\sin x, \cos x$ ในลักษณะเดียวกับแบบ 3.2.1)

3.2.4) ตัวถูกอินทิเกรตเป็นฟังก์ชัน $\tan x$, $\cot x$, $\sec x$ และ $\operatorname{cosec} x$ ที่มีกำลังเป็นเลขจำนวนเต็มคู่บวก

วิธีการแก้ปัญหา

1) เอกลักษณ์ที่ใช้ประกอบการคำนวณ

$$\sec^2 x = 1 + \tan^2 x$$

$$\operatorname{cosec}^2 x = 1 + \cot^2 x$$

2) รูปที่ใช้ในการเปลี่ยนแปลงรูปเพื่อช่วยในการอินทิเกรต

$$\sec^2 x\, dx = d\tan x$$

$$\operatorname{cosec}^2 x\, dx = -d\cot x$$

3) ถ้าเปลี่ยนได้ในรูป $d\tan x$ ฟังก์ชันหน้า $d\tan x$ ต้องเปลี่ยนเป็นรูป $\tan x$ และถ้าเปลี่ยนได้ในรูป $d\cot x$ ฟังก์ชันหน้า $d\cot x$ ต้องเปลี่ยนเป็นรูป $\cot x$

3.2.5) ตัวถูกอินทิเกรตเป็นรูปฟังก์ชันในรูปผลคูณของ $\tan x$ กับ $\sec x$ หรือผลคูณของ $\cot x$ กับ $\operatorname{cosec} x$

วิธีการแก้ปัญหา

1) ถ้ากำลังของ $\sec x$ หรือ $\operatorname{cosec} x$ เป็นเลขจำนวนเต็มคู่บวก การแก้ปัญหาทำโดยการแยก $\sec^2 x$, $\operatorname{cosec}^2 x$ ออกมาแล้วเปลี่ยนเป็น $d\tan x$, $-d\cot x$ แล้วเปลี่ยนฟังก์ชันเพื่อให้อินทิเกรตได้

2) ถ้ากำลังของ $\tan x$ กับ $\sec x$ หรือ $\cot x$ กับ $\operatorname{cosec} x$ เป็นจำนวนเต็มคี่ทั้งคู่ การแก้ปัญหาแยก $\sec x \tan x$ หรือ $\operatorname{cosec} x \cot x$ ออกมา แล้วเปลี่ยนเป็น

$d\sec x$ หรือ $-d\operatorname{cosec} x$ แล้วเปลี่ยนฟังก์ชันเพื่อให้อินทิเกรตได้

3) ในกรณีที่กำลังของ $\sec x$ หรือ $\operatorname{cosec} x$ เป็นจำนวนเต็มคี่ แต่กำลังของ $\tan x$ หรือ $\cot x$ เป็นเลขจำนวนเต็มคู่ จะแก้ปัญหาได้โดยใช้การอินทิเกรตทีละส่วน

(4) การแทนค่าด้วยฟังก์ชันตรีโกณ

ลักษณะของปัญหาจะอยู่ในรูปติดกรณฑ์ที่ไม่สามารถแก้ปัญหาโดยการอินทิเกรตโดยตรงได้

วิธีการแก้ปัญหา

1) อยู่ในรูป $\sqrt{a^2-u^2}$ ให้สมมุติ $u = a\sin\theta$
2) อยู่ในรูป $\sqrt{a^2+u^2}$ ให้สมมุติ $u = a\tan\theta$
3) อยู่ในรูป $\sqrt{u^2-a^2}$ ให้สมมุติ $u = a\sec\theta$
4) แทนค่าลดทอนให้ $\sqrt{\ }$ หมดไป และเปลี่ยนฟังก์ชันทั้งหมดเป็นฟังก์ชันของมุม θ ตามด้วย $d\theta$
5) ใช้วิธีการของฟังก์ชันตรีโกณมิติหาคำตอบต่อไป
6) แทนค่าย้อนกลับหาค่าในพจน์ของ x

(5) การอินทิเกรตโดยการทำเป็นกำลังสองสมบูรณ์

กรณีนี้ตัวถูกอินทิเกรตอยู่ในรูป ax^2+bx+c

วิธีการแก้ปัญหา

1) ทำเป็นกำลังสองสมบูรณ์ก่อน

$$ax^2+bx+c = a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2 + \left(c-\frac{b^2}{4a^2}\right)$$

2) สมมุติ $u = x+\frac{b}{2a}$
3) แก้ปัญหาในรูป u
4) แทนค่าย้อนกลับ หาคำตอบ

(6) การอินทิเกรตโดยการแยกเศษส่วนย่อย

วิธีการแก้ปัญหา

1) ทำเป็นจำนวนคละก่อน แล้วแยกเศษส่วนย่อยในกรณีที่เศษส่วนมีกำลังของเศษน้อยกว่ากำลังของส่วน

2) การแยกเศษส่วนย่อยมีได้ 4 กรณี

1. ตัวประกอบเป็นกำลัง 1 ทั้งหมดและไม่ซ้ำ

$$\frac{2x+1}{(x-1)(x-2)(x+3)} = \frac{A}{x-1}+\frac{B}{x-2}+\frac{C}{x+3}$$

2. ตัวประกอบเป็นกำลัง 1 ทั้งหมดและซ้ำบางตัว

$$\frac{x^2+x+3}{(x-2)^2(x-3)} = \frac{A}{x-2}+\frac{B}{(x-2)^2}+\frac{C}{x-3}$$

3. ตัวประกอบเป็นกำลัง 2 และไม่ซ้ำ

$$\frac{x^2-x+4}{(x^2+x+1)(x-2)} = \frac{Ax+B}{x^2+x+1}+\frac{C}{x-2}$$

4. ตัวประกอบเป็นกำลัง 2 และมีซ้ำ

$$\frac{x^2-3x+2}{(x^2+x+1)(x^2-x+1)^2} = \frac{Ax+B}{x^2+x+1}+\frac{Cx+D}{x^2-x+1}+\frac{Ex+F}{(x^2-x+1)^2}$$

3) หาค่าคงที่ A, B, C, ... โดยวิธีการแทนค่า หรือการเทียบสัมประสิทธิ์

4) หาค่าอินทิเกรตแต่ละพจน์

(7) การอินทิเกรตทีละส่วน

วิธีการแก้ปัญหา

1) สูตรที่ใช้คือ $\int u\,dv = uv - \int v\,du$

2) แยกตัวที่หาอนุพันธ์ได้ง่าย สมมติเป็น u
แยกตัวที่หาอินทิเกรตได้ง่าย สมมติเป็น dv

3) หา du และ v

4) แทนค่าสูตรแล้วอินทิเกรตหาค่า แต่ถ้ายังหาค่าอินทิเกรตไม่ได้ ให้ใช้อินทิเกรตทีละส่วนต่อไปอีก

5) รูปพิเศษของการอินทิเกรตทีละส่วนที่อยู่ในรูป $e^{ax}\sin bx$ หรือ $e^{ax}\cos bx$ ใช้อินทิเกรตทีละส่วน 2 ครั้ง แล้วย้ายข้างหาค่าอินทิกรัลได้

(8) การอินทิเกรตฟังก์ชันตรรกยะของฟังก์ชันตรีโกณมิติ

เป็นฟังก์ชันตรีโกณมิติที่ไม่สามารถแก้ปัญหาโดยวิธีข้างต้นได้

วิธีการแก้ปัญหา

1) สมมุติให้ $z = \tan\frac{x}{2}$

2) เปลี่ยนฟังก์ชันเป็นรูป $\sin x$, $\cos x$ และเปลี่ยน $\sin x$, $\cos x$ และ dx เป็นรูป z

$$\sin x = \frac{2z}{1+z^2}$$

$$\cos x = \frac{1-z^2}{1+z^2}$$

$$dx = \frac{2dz}{1+z^2}$$

3) แทนค่า หาค่าอินทิกรัลในรูปตัวแปร z

4) แทนค่าย้อนกลับในรูปตัวแปร x

(9) อินทิกรัลไม่ตรงแบบ

$\int_a^b f(x)dx$ เรียกว่า อินทิกรัล**ไม่ตรงแบบ** ก็ต่อเมื่อ

1) ตัวถูกอินทิเกรต $f(x)$ มีจุดที่ไม่ต่อเนื่อง อย่างน้อย 1 จุด บน $[a, b]$ หรือ

2) ลิมิตของการอินทิเกรตเป็นอนันต์

วิธีการแก้ปัญหา

1) ใช้นิยามของการอินทิเกรตแบบต่าง ๆ

1. ไม่ต่อเนื่องที่ $x = a$: $\int_a^b f(x)dx = \lim_{\epsilon\to 0^+} \int_{a+\epsilon}^b f(x)dx$

2. ไม่ต่อเนื่องที่ $x = b$: $\int_a^b f(x)dx = \lim_{\epsilon\to 0^+} \int_a^{b-\epsilon} f(x)dx$

3. ไม่ต่อเนื่องที่ $x = c$ เมื่อ $a < c < b$

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\epsilon_1\to 0^+} \int_a^{c-\epsilon_1} f(x)dx + \lim_{\epsilon_2\to 0^+} \int_{c+\epsilon_2}^b f(x)dx$$

4. ลิมิตของการอินทิเกรตเป็นค่าอนันต์

$$\int_a^\infty f(x)dx = \lim_{b\to\infty} \int_a^b f(x)dx$$

$$\int_{-\infty}^b f(x)dx = \lim_{a\to -\infty} \int_a^b f(x)dx$$

$$\int_{-\infty}^\infty f(x)dx = \lim_{a\to -\infty} \int_a^c f(x)dx + \lim_{b\to\infty} \int_c^b f(x)dx$$

2) หาค่าอินทิกรัลในพจน์ที่ติดค่า ϵ หรือ a, b

3) หาค่าลิมิตของอินทิกรัลในข้อ 2)

4) ถ้าลิมิตหาค่าได้ แล้วอินทิกรัลลู่เข้า (converge)
ถ้าลิมิตหาค่าไม่ได้ แล้วอินทิกรัลลู่ออก (diverge)

(10) การหาปริมาตรรูปทรงตัน

วิธีการแก้ปัญหา

1) แบ่งพื้นที่เล็ก ๆ ตั้งฉากกับแกนหมุน

ใช้สูตร

$$V_x = \pi \int_a^b$$

$$V_y = \pi \int_c^d (f(y))^2 \, dy$$

2) แบ่งพื้นที่เล็ก ๆ ขนานกับแกนหมุน

$$V_x = 2\pi \int_c^d y \, g(y) dy$$

$$V_y = 2\pi \int_a^b x \, f(x) dx$$

(11) งาน

วิธีการแก้ปัญหา

สูตรที่ใช้ในการแก้ปัญหาเกี่ยวกับงาน คือ

$$W = \int_{x_1}^{x_2} F(x) dx$$

เมื่อ F(x) แทนแรงที่กระทำต่อวัตถุ

(12) เฉลยแบบฝึกหัดเกี่ยวกับระเบียบวิธีการอินทิเกรต

แบบฝึกหัด 1.1

จงหาค่าอินทิกรัลต่อไปนี้

1. $\int 3x^2(x^3+2)^2dx$

วิธีทำ ให้

$$u = x^3+2$$
$$du = 3x^2dx$$

แทนค่าในโจทย์ จะได้ว่า

$$\int 3x^2(x^3+2)^2dx = \int u^2du$$
$$= \frac{u^3}{3}+C$$
$$= \left(\frac{x^3+2}{3}\right)^3+C$$

2. $\int x^2\sqrt{x^3+2}\,dx$

วิธีทำ ให้

$$u = x^3+2$$
$$du = 3x^2dx$$

ดังนั้น $x^2dx = \frac{du}{3}$

แทนค่าในโจทย์ จะได้ว่า

$$\int x^2\sqrt{x^3+2}\,dx = \int u^{\frac{1}{2}}\frac{du}{3}$$
$$= \frac{1}{3}\int u^{\frac{1}{2}}du$$
$$= \frac{2}{9}u^{\frac{3}{2}}+C$$
$$= \frac{2}{9}(x^3+2)^{\frac{3}{2}}+C$$

3. $\int \frac{8x^2}{(x^3+2)^3}dx$

วิธีทำ ให้

$$u = x^3+2$$

$$du = 3x^2\,dx$$

ดังนั้น

$$x^2dx = \frac{du}{3}$$

แทนค่าในโจทย์ จะได้ว่า

$$\int \frac{8x^2}{(x^3+2)^3}dx = \int \frac{8}{u^3}\frac{du}{3}$$

$$= \frac{8}{3}\int u^{-3}du$$

$$= \frac{8}{3}\left(\frac{u^{-2}}{-2}\right)+C$$

$$= -\frac{4}{3}\cdot\frac{1}{u^2}+C$$

$$= \frac{-4}{3(x^3+2)^2}+C$$

4. $\int \frac{x^2}{\sqrt{x^3+2}}dx$

วิธีทำ ให้

$$u = x^3+2$$

$$du = 3x^2dx$$

ดังนั้น

$$x^2dx = \frac{du}{3}$$

แทนค่าในโจทย์ จะได้ว่า

$$\int \frac{x^2dx}{\sqrt{x^3+2}} = \int \frac{1}{\sqrt{u}}\frac{du}{3}$$

$$= \frac{1}{3}\int u^{-\frac{1}{2}}du$$

$$= \frac{2}{3}u^{\frac{1}{2}} + C$$

$$= \frac{2}{3}\sqrt{x^3+2}+C$$

5. $\int 3x\sqrt{1-2x^2}\,dx$

วิธีทำ ให้

$$u = 1-2x^2$$

$$du = -4x\,dx$$

ดังนั้น

$$x\,dx = \frac{du}{-4}$$

แทนค่าในโจทย์ จะได้ว่า

$$\begin{aligned}
\int 3x\sqrt{1-2x^2}\,dx &= \int 3u^{\frac{1}{2}}\frac{du}{-4} \\
&= -\frac{3}{4}\int u^{\frac{1}{2}}\,du \\
&= -\frac{3}{4}\cdot\frac{2}{3}u^{\frac{3}{2}}+C \\
&= -\frac{1}{2}(1-2x^2)^{\frac{3}{2}}+C
\end{aligned}$$

6. $\int \frac{(x+3)}{(x^2+6x)^{\frac{1}{3}}}\,dx$

วิธีทำ ให้

$$\begin{aligned}
u &= x^2+6x \\
du &= (2x+6)dx \\
&= 2(x+3)dx
\end{aligned}$$

ดังนั้น

$$(x+3)dx = \frac{du}{2}$$

แทนค่าในโจทย์ จะได้ว่า

$$\begin{aligned}
\int \frac{(x+3)}{(x^2+6x)^{\frac{1}{3}}}\,dx &= \int \frac{1}{u^{\frac{1}{3}}}\frac{du}{2} \\
&= \frac{1}{2}\int u^{-\frac{1}{3}}du \\
&= \frac{1}{2}\frac{u^{\frac{2}{3}}}{\frac{2}{3}}+C \\
&= \frac{3}{4}u^{\frac{2}{3}}+C \\
&= \frac{3}{4}(x^2+6x)^{\frac{2}{3}}+C
\end{aligned}$$

7. $\int (x^3-2x)^5(3x^2-2)dx$

วิธีทำ ให้

$$u = x^3-2x$$
$$du = (3x^2-2)dx$$

แทนค่าในโจทย์ จะได้ว่า

$$\int (x^3-2x)^5(3x^2-2)dx = \int u^5\,du$$
$$= \frac{u^6}{6}+C$$
$$= \frac{1}{6}(x^3-2x)^6+C$$

8. $\int \frac{(x+1)}{x^2+2x+5}dx$

วิธีทำ ให้

$$u = x^2+2x+5$$
$$du = (2x+2)dx$$
$$= 2(x+1)dx$$

ดังนั้น $(x+1)dx = \frac{du}{2}$

แทนค่าในโจทย์ จะได้ว่า

$$\int \frac{(x+1)}{x^2+2x+5}dx = \int \frac{1}{u}\frac{du}{2}$$
$$= \frac{1}{2}\int \frac{1}{u}du$$
$$= \frac{1}{2}\ell n\,|u|+C$$
$$= \frac{1}{2}\ell n\,|x^2+2x+5|+C$$

9. $\int x^2\sqrt{1+x}\,dx$

วิธีทำ ให้

$$u = 1+x \qquad du = dx$$

$$x = u-1$$

$$x^2 = (u-1)^2$$

$$= u^2-2u+1$$

แทนค่าในโจทย์ จะได้ว่า

$$\int x^2\sqrt{1+x}\,dx = \int (u^2-2u+1)\sqrt{u}\,du$$

$$= \int (u^{\frac{5}{2}}-2u^{\frac{3}{2}}+u^{\frac{1}{2}})du$$

$$= \frac{2}{7}u^{\frac{7}{2}}-\frac{4}{5}u^{\frac{5}{2}}+\frac{2}{3}u^{\frac{3}{2}}+C$$

$$= \frac{2}{7}(1+x)^{\frac{7}{2}}-\frac{4}{5}(1+x)^{\frac{5}{2}}+\frac{2}{3}(1+x)^{\frac{3}{2}}+C$$

10. $\int \frac{x^2}{1-2x^3}dx$

วิธีทำ ให้

$$u = 1-2x^3$$

$$du = -6x^2dx$$

ดังนั้น $x^2dx = \frac{du}{-6}$

แทนค่าในโจทย์ จะได้ว่า

$$\int \frac{x^2dx}{1-2x^3} = \int \frac{1}{u}\frac{du}{-6}$$

$$= -\frac{1}{6}\int \frac{1}{u}du$$

$$= -\frac{1}{6}\ell n|u|+C$$

$$= -\frac{1}{6}\ell n|1-2x^3|+C$$

11. $\int (e^x+1)^3 e^x dx$

วิธีทำ ให้

$$u = e^x + 1$$
$$du = e^x dx$$

แทนค่าในโจทย์ จะได้ว่า

$$\int (e^x+1)^3 e^x dx = \int u^3 du$$
$$= \frac{u^4}{4} + C$$
$$= \frac{1}{4}(e^x+1) + C$$

12. $\int \cos^3 2x \sin 2x \, dx$

วิธีทำ ให้

$$u = \cos 2x$$
$$du = -\sin 2x \; d(2x)$$
$$= -2\sin 2x \; dx$$

ดังนั้น $\sin 2x \, dx = -\frac{du}{2}$

แทนค่าในโจทย์ จะได้ว่า

$$\int \cos^3 2x \sin 2x \, dx = \int u^3\left(-\frac{du}{2}\right)$$
$$= -\frac{1}{2}\int u^3 du$$
$$= -\frac{1}{2}\cdot\frac{u^4}{4} + C$$
$$= -\frac{1}{8}(\cos 2x)^4 + C$$
$$= -\frac{\cos^4 2x}{8} + C$$

13. $\int \sin x \, e^{\cos x} \, dx$

วิธีทำ ให้

$$u = \cos x$$
$$du = -\sin x \, dx$$
$$\sin x \, dx = -du$$

แทนค่าในโจทย์ จะได้ว่า

$$\int \sin x \, e^{\cos x} \, dx = \int e^{u}(-du)$$
$$= -\int e^{u} \, du$$
$$= -e^{u} + C$$
$$= -e^{\cos x} + C$$

14. $\int \frac{\cos x \, dx}{\sqrt{4 - \sin^2 x}}$

วิธีทำ ให้

$$u = \sin x$$
$$du = \cos x \, dx$$

แทนค่าในโจทย์ จะได้ว่า

$$\int \frac{\cos x \, dx}{\sqrt{4 - \sin^2 x}} = \int \frac{du}{\sqrt{4 - u^2}}$$
$$= \arcsin \frac{u}{2} + C$$
$$= \arcsin\left(\frac{\sin x}{2}\right) + C$$

15. $\int \frac{e^{\sqrt{1+x}}}{\sqrt{1+x}} \, dx$

วิธีทำ ให้

$$du = \sqrt{1+x}$$
$$du = \frac{1}{2}(1+x)^{-\frac{1}{2}} \, dx$$
$$= \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{1+x}} \, dx$$

ดังนั้น $\frac{1}{\sqrt{1+x}} \, dx = 2du$

แทนค่าในโจทย์ จะได้ว่า

$$\int \frac{e^{\sqrt{1+x}}}{\sqrt{1+x}}dx = \int e^u(2du)$$

$$= 2\int e^u du$$

$$= 2e^u + C$$

$$= 2e^{\sqrt{1+x}} + C$$

16. $\int \cos 2x\sqrt{1-\sin 2x}\,dx$

วิธีทำ ให้ $u = 1-\sin 2x$

$du = -2\cos 2x\,dx$

ดังนั้น $\cos 2x\,dx = \frac{du}{-2}$

แทนค่าในโจทย์ จะได้ว่า

$$\int \cos 2x\sqrt{1-\sin 2x}\,dx = \int \sqrt{u}\frac{du}{-2}$$

$$= -\frac{1}{2}\int u^{\frac{1}{2}}du$$

$$= -\frac{1}{2}\frac{u^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} + C$$

$$= -\frac{1}{3}u^{\frac{3}{2}} + C$$

$$= -\frac{1}{3}(1-\sin 2x)^{\frac{3}{2}} + C$$

17. $\int 3^{2t+1}\,dt$

วิธีทำ ให้ $u = 2t+1$

$du = 2dt$

ดังนั้น $dt = \frac{du}{2}$

แทนค่าในโจทย์ จะได้ว่า

$$\int 3^{2t+1}\,dt = \int 3^u \frac{du}{2}$$

$$= \frac{1}{2}\int 3^u\,du$$

$$= \frac{1}{2}\frac{3^u}{\ell n\,3} + C$$

$$= \frac{3^{2t+1}}{2\ell n\,3} + C$$

18. $\int \frac{e^{\arctan 2t}}{1+4t^2}\,dt$

วิธีทำ ให้ $u = \arctan 2t$

$$du = \frac{2dt}{1+4t^2}$$

ดังนั้น $\frac{dt}{1+4t^2} = \frac{du}{2}$

แทนค่าในโจทย์ จะได้ว่า

$$\int \frac{e^{\arctan 2t}}{1+4t^2}\,dt = \int e^u \frac{du}{2}$$

$$= \frac{1}{2}\int e^u\,du$$

$$= \frac{1}{2}e^u + C$$

$$= \frac{1}{2}e^{\arctan 2t} + C$$

19. $\int \left(\frac{\ell n\,x}{x}\right)^3 dx$

วิธีทำ ให้ $u = \ell n\,x$

$$du = \frac{1}{x}dx$$

แทนค่าในโจทย์ จะได้ว่า

$$\int \left(\frac{\ell n\,x}{x}\right)^3 dx = \int u^3\,du$$

$$= \frac{u^4}{4} + C$$

$$= \frac{1}{4}(\ell n\,x)^4 + C$$

20. $\int \frac{dx}{x\,\ell n\,x}$

วิธีทำ ให้

$$u = \ell n\,x$$

$$du = \frac{1}{x}\,dx$$

แทนค่าในโจทย์ จะได้ว่า

$$\int \frac{dx}{x\,\ell n\,x} = \int \frac{1}{u}\,du$$

$$= \ell n\,|u| + C$$

$$= \ell n\,|\ell n\,x| + C$$

จงหาค่าอินทิกรัลจำกัดเขตต่อไปนี้

21. $\int_1^5 \frac{x+3}{\sqrt{2x-1}}\,dx$

วิธีทำ พิจารณา $\int \frac{x+3}{\sqrt{2x-1}}\,dx$

ให้ $u = 2x-1$

จะได้ว่า $du = 2dx$

และ $x = \frac{u+1}{2}$

ดังนั้น $x+3 = \frac{u+1}{2}+3$

$$= \frac{u+7}{2}$$

แทนค่าในโจทย์ จะได้ว่า

$$\int \frac{x+3}{\sqrt{2x-1}}\,dx = \int \frac{u+7}{2\sqrt{u}}\frac{du}{2}$$

$$= \frac{1}{4}\int (u^{\frac{1}{2}} + 7u^{-\frac{1}{2}})du$$

$$= \frac{1}{4}\cdot\frac{2}{3}u^{\frac{3}{2}} + \frac{7}{4}\cdot 2u^{\frac{1}{2}} + C$$

$$= \frac{1}{6}u^{\frac{3}{2}} + \frac{7}{2}u^{\frac{1}{2}} + C$$

$$= \frac{1}{2}(2x-1)^{\frac{3}{2}} + \frac{7}{2}(2x-1)^{\frac{1}{2}} + C$$

ดังนั้น $\int_1^5 \frac{x+3}{\sqrt{2x-1}}\,dx = \frac{1}{2}(2x-1)^{\frac{3}{2}} + \frac{7}{2}(2x-1)^{\frac{1}{2}} \Big|_1^5$

$= \frac{1}{2}\cdot(27) + \frac{7}{2}(3) - \frac{1}{2} - \frac{7}{2}$

$= 20$

22. $\int_0^1 \frac{x}{x^2+4}\,dx$

วิธีทำ พิจารณา $\int \frac{x}{x^2+4}\,dx$

ให้ $u = x^2+4$

$du = 2x\,dx$

จะได้ $x\,dx = \frac{du}{2}$

แทนค่าในโจทย์ จะได้ว่า

$\int \frac{x\,dx}{x^2+4} = \int \frac{1}{u}\frac{du}{2}$

$= \frac{1}{2}\int \frac{1}{u}\,du$

$= \frac{1}{2}\,\ell n\,|u| + C$

$= \frac{1}{2}\,\ell n\,|x^2+4| + C$

ดังนั้น $\int_0^1 \frac{x}{x^2+4} = \frac{1}{2}\,\ell n\,|x^2+4|\Big|_0^1$

$= \frac{1}{2}\,\ell n\,5 - \frac{1}{2}\,\ell n\,4$

$= \frac{1}{2}\ell n\,\frac{5}{4}$

23. $\int_1^8 \sqrt{1+3x}\,dx$

วิธีทำ พิจารณา $\int \sqrt{1+3x}\,dx$

ให้ $u = 1+3x$

$du = 3dx$

จะได้ $dx = \frac{du}{3}$

แทนค่าในโจทย์ จะได้ว่า

$$\int \sqrt{1+3x}\,dx = \int \sqrt{u}\,\frac{du}{3}$$

$$= \frac{1}{3}\int u^{\frac{1}{2}}\,du$$

$$= \frac{1}{3}\cdot\frac{2}{3}u^{\frac{3}{2}}+C$$

$$= \frac{2}{9}(1+3x)^{\frac{3}{2}}+C$$

ดังนั้น $$\int_1^8 \sqrt{1+3x}\,dx = \frac{2}{9}(1+3x)^{\frac{3}{2}}\Big|_1^8$$

$$= \frac{2}{9}(125)-\frac{2}{9}(8)$$

$$= 26$$

24. $\int_4^8 \frac{x\,dx}{\sqrt{x^2-15}}$

วิธีทำ พิจารณา $\int \frac{x\,dx}{\sqrt{x^2-15}}$

ให้ $u = x^2-15$

$du = 2x\,dx$

จะได้ $x\,dx = \frac{du}{2}$

แทนค่าในโจทย์ จะได้ว่า

$$\int \frac{x\,dx}{\sqrt{x^2-15}} = \int \frac{1}{\sqrt{u}}\frac{du}{2}$$

$$= \frac{1}{2}\int u^{-\frac{1}{2}}du$$

$$= \frac{1}{2}\cdot 2u^{\frac{1}{2}}+C$$

$$= \sqrt{x^2-15}+C$$

ดังนั้น $$\int_4^8 \frac{x\,dx}{\sqrt{x^2-15}} = \sqrt{x^2-15}\Big|_4^8$$

$$= 7-1$$

$$= 6$$

25. $\int_0^{2\pi} \sin\frac{1}{2}t\,dt$

วิธีทำ พิจารณา $\int \sin\frac{1}{2}t\,dt$

ให้ $u = \frac{1}{2}t$

$du = \frac{1}{2}dt$

จะได้ $dt = 2du$

แทนค่าในโจทย์ จะได้ว่า

$$\begin{aligned}
\int \sin\frac{1}{2}t\,dt &= \int \sin u\,(2du) \\
&= 2\int \sin u\,du \\
&= -2\cos u + C \\
&= -2\cos\frac{1}{2}t + C
\end{aligned}$$

ดังนั้น

$$\begin{aligned}
\int_0^{2\pi} \sin\frac{1}{2}t\,dt &= -2\cos\frac{1}{2}t\Big|_0^{2\pi} \\
&= -2\left(\cos\frac{2\pi}{2} - \cos\theta\right) \\
&= -2(\cos\pi - \cos\theta) \\
&= -2(-1-1) \\
&= -2(-2) \\
&= 4
\end{aligned}$$

แบบฝึกหัด 1.2

จงหาค่าอินทิกรัลต่อไปนี้

1. $\int \sin 3x \sin 2x \, dx$

วิธีทำ

$$\begin{aligned}\int \sin 3x \sin 2x \, dx &= \int \frac{1}{2}\left[\cos(3x-2x) - \cos(3x+2x)\right] dx \\ &= \frac{1}{2}\int (\cos x - \cos 5x)\, dx \\ &= \frac{1}{2}\sin x - \frac{1}{10}\sin 5x + C\end{aligned}$$

2. $\int \sin 3x \cos 5x \, dx$

วิธีทำ

$$\begin{aligned}\int \sin 3x \cos 5x \, dx &= \int \frac{1}{2}\left[\sin(3x-5x) + \sin(3x+5x)\right] dx \\ &= \frac{1}{2}\int \left(\sin(-2x) + \sin 8x\right) dx \\ &= \frac{1}{2}\int (-\sin 2x + \sin 8x)\, dx \\ &= \frac{1}{4}\cos 2x - \frac{1}{16}\cos 8x + C\end{aligned}$$

3. $\int \cos 4x \cos 2x \, dx$

วิธีทำ

$$\begin{aligned}\int \cos 4x \cos 2x \, dx &= \int \frac{1}{2}\left[\cos(4x-2x) + \cos(4x+2x)\right] dx \\ &= \frac{1}{2}\int (\cos 2x + \cos 6x)\, dx \\ &= \frac{1}{4}\sin 2x + \frac{1}{12}\sin 6x + C\end{aligned}$$

4. $\int \cos^4 2x \sin^3 2x \, dx$

วิธีทำ

$$\begin{aligned}\int \cos^4 2x \sin^3 2x \, dx &= \int \cos^4 2x \sin^2 2x \sin 2x \, dx \\ &= -\frac{1}{2}\int \cos^4 2x \sin^2 2x \, d\cos 2x \\ &= -\frac{1}{2}\int \cos^4 2x\,(1-\cos^2 2x)\, d\cos 2x \\ &= -\frac{1}{2}\int (\cos^4 2x - \cos^6 2x)\, d\cos 2x \\ &= -\frac{1}{10}\cos^5 2x + \frac{1}{14}\cos^7 2x + C\end{aligned}$$

5. $\int \sin^3 3x \cos^5 3x \, dx$

วิธีทำ

$$\begin{aligned}
\int \sin^3 3x \cos^5 3x \, dx &= \int \cos^5 3x \,(1-\cos^2 3x) \sin 3x \, dx \\
&= -\frac{1}{3}\int \cos^5 3x \,(1-\cos^2 3x)\, d\cos 3x \\
&= -\frac{1}{3}\int (\cos^5 3x - \cos^7 3x)\, d\cos 3x \\
&= -\frac{1}{18}\cos^6 3x + \frac{1}{24}\cos^8 3x + C
\end{aligned}$$

6. $\int \sin^2 x \cos^2 x \, dx$

วิธีทำ

$$\begin{aligned}
\int \sin^2 x \cos^2 x \, dx &= \frac{1}{4}\int (2\sin x \cos x)^2 \, dx \\
&= \frac{1}{4}\int \sin^2 2x \, dx \\
&= \frac{1}{4}\int \frac{1-\cos 4x}{2} \, dx \\
&= \frac{1}{8}\int (1-\cos 4x) \, dx \\
&= \frac{1}{8}x - \frac{1}{32}\sin 4x + C
\end{aligned}$$

7. $\int \sin^4 x \, dx$

วิธีทำ

$$\begin{aligned}
\int \sin^4 x \, dx &= \int (\sin^2 x)^2 \, dx \\
&= \int \left(\frac{1-\cos 2x}{4}\right)^2 dx \\
&= \frac{1}{4}\int (1 - 2\cos 2x + \cos^2 2x) \, dx \\
&= \frac{1}{4}\int \left(1 - 2\cos 2x + \frac{1+\cos 4x}{2}\right) dx \\
&= \frac{1}{8}\int (3 - 4\cos 2x + \cos 4x) \, dx \\
&= \frac{3}{8}x - \frac{1}{4}\sin 2x + \frac{1}{32}\sin 4x + C
\end{aligned}$$

8. $\int \sin^4 3x \cos^2 3x \, dx$

วิธีทำ

$$\begin{aligned}
\int \sin^4 3x \cos^2 3x \, dx &= \int (\sin^2 3x \cos^2 3x) \sin^2 3x \, dx \\
&= \frac{1}{4} \int \sin^2 6x \sin^2 3x \, dx \\
&= \frac{1}{4} \int \sin^2 6x \left(\frac{1-\cos 6x}{2}\right) dx \\
&= \frac{1}{8} \int \sin^2 6x \, dx - \frac{1}{8} \int \sin^2 6x \cos 6x \, dx \\
&= \frac{1}{8} \int \frac{1-\cos 12x}{2} dx - \frac{1}{48} \int \sin^2 6x \, d\sin 6x \\
&= \frac{1}{16}x - \frac{1}{192} \sin 12x - \frac{1}{144} \sin^3 6x + C
\end{aligned}$$

9. $\int \sqrt{1-\cos x} \, dx$

วิธีทำ

$$\begin{aligned}
\int \sqrt{1-\cos x} \, dx &= \int \sqrt{2\sin^2 \frac{x}{2}} \, dx \\
&= \sqrt{2} \int \sin \frac{x}{2} \, dx \\
&= -2\sqrt{2} \cos \frac{x}{2} + C
\end{aligned}$$

10. $\int \frac{\cos^3 x}{1-\sin x} dx$

วิธีทำ

$$\begin{aligned}
\int \frac{\cos^3 x}{1-\sin x} dx &= \int \frac{\cos^2 x \cos x}{1-\sin x} dx \\
&= \int \frac{\cos^2 x}{1-\sin x} d\sin x \\
&= \int \frac{1-\sin^2 x}{1-\sin x} d\sin x \\
&= \int (1+\sin x) \, d\sin x \\
&= \sin x + \frac{1}{2} \sin^2 x + C
\end{aligned}$$

11. $\int \tan^4 x \, dx$

วิธีทำ

$$\begin{aligned}
\int \tan^4 x \, dx &= \int \tan^2 x \tan^2 x \, dx \\
&= \int \tan^2 x (\sec^2 x - 1) \, dx \\
&= \int \tan^2 x \sec^2 x \, dx - \int \tan^2 x \, dx \\
&= \int \tan^2 x \, d\tan x - \int (\sec^2 x - 1) \, dx \\
&= \frac{\tan^3 x}{3} - \tan x + x + C
\end{aligned}$$

12. $\int \tan^5 x\, dx$

วิธีทำ

$$\begin{aligned}
\int \tan^5 x\, dx &= \int \tan^3 x \tan^2 x\, dx \\
&= \int \tan^3 x (\sec^2 x - 1)\, dx \\
&= \int \tan^3 x \sec^2 x\, dx - \int \tan^3 x\, dx \\
&= \int \tan^3 x\, d\tan x - \int \tan x (\sec^2 x - 1)\, dx \\
&= \int \tan^3 x\, d\tan x - \int \tan x \sec^2 x\, dx + \int \tan x\, dx \\
&= \int \tan^3 x\, d\tan x - \int \tan x\, d\tan x + \int \tan x\, dx \\
&= \frac{1}{4}\tan^4 x - \frac{1}{2}\tan^2 x + \ell n|\sec x| + C
\end{aligned}$$

13. $\int \sec^4 2x\, dx$

วิธีทำ

$$\begin{aligned}
\int \sec^4 2x\, dx &= \int \sec^2 2x \sec^2 2x\, dx \\
&= \int \sec^2 2x (1 + \tan^2 2x)\, dx \\
&= \int \sec^2 2x\, dx + \int \tan^2 2x \sec^2 2x\, dx \\
&= \frac{1}{2}\int d\tan 2x + \frac{1}{2}\int \tan^2 2x\, d\tan 2x \\
&= \frac{1}{2}\tan 2x + \frac{1}{6}\tan^3 2x + C
\end{aligned}$$

14. $\int \tan^3 3x \sec^4 3x\, dx$

วิธีทำ

$$\begin{aligned}
\int \tan^3 3x \sec^4 3x\, dx &= \int \tan^3 3x \sec^2 3x \sec^2 3x\, dx \\
&= \frac{1}{3}\int \tan^3 3x (1 + \tan^2 3x)\, d\tan 3x \\
&= \frac{1}{3}\int (\tan^3 3x + \tan^5 3x)\, d\tan 3x \\
&= \frac{1}{12}\tan^4 3x + \frac{1}{18}\tan^6 3x + C
\end{aligned}$$

15. $\int \tan^3 2x \sec^3 2x\, dx$

วิธีทำ

$$\begin{aligned}
\int \tan^3 2x \sec^3 2x\, dx &= \int \tan^2 2x \sec^2 2x (\sec 2x \tan 2x)\, dx \\
&= \frac{1}{2}\int (\sec^2 2x - 1)\sec^2 2x\, d\sec 2x \\
&= \frac{1}{2}\int (\sec^4 2x - \sec^2 2x)\, d\sec 2x \\
&= \frac{1}{10}\sec^5 2x - \frac{1}{6}\sec^3 2x + C
\end{aligned}$$

16. $\int \cot^3 2x\, dx$

วิธีทำ

$$\begin{aligned}
\int \cot^3 2x\, dx &= \int \cot 2x\,(\operatorname{cosec}^2 2x - 1)\, dx \\
&= \int \cot 2x \operatorname{cosec}^2 2x\, dx - \int \cot 2x\, dx \\
&= -\frac{1}{2}\int \cot 2x\, d\cot 2x - \frac{1}{2}\int \cot 2x\, d2x \\
&= -\frac{1}{4}\cot^2 2x + \frac{1}{2}\ell n\,|\operatorname{cosec} 2x| + C
\end{aligned}$$

17. $\int \cot 3x \operatorname{cosec}^4 3x\, dx$

วิธีทำ

$$\begin{aligned}
\int \cot 3x \operatorname{cosec}^4 3x\, dx &= \int \cot 3x \operatorname{cosec}^2 3x \operatorname{cosec}^2 3x\, dx \\
&= -\frac{1}{3}\int \cot 3x\,(1+\cot^2 3x)\, d\cot 3x \\
&= -\frac{1}{3}\int (\cot 3x + \cot^3 3x)\, d\cot 3x \\
&= -\frac{1}{6}\cot^2 3x - \frac{1}{12}\cot^4 3x + C
\end{aligned}$$

18. $\int \cot^3 x \operatorname{cosec}^5 x\, dx$

วิธีทำ

$$\begin{aligned}
\int \cot^3 x \operatorname{cosec}^5 x\, dx &= \int \cot^2 x \operatorname{cosec}^4 x\,(\operatorname{cosec} x \cot x)\, dx \\
&= -\int (\operatorname{cosec}^2 x - 1)\operatorname{cosec}^4 x\, d\operatorname{cosec} x \\
&= -\int (\operatorname{cosec}^6 x - \operatorname{cosec}^4 x)\, d\operatorname{cosec} x \\
&= -\frac{1}{7}\operatorname{cosec}^7 x + \frac{1}{5}\operatorname{cosec}^5 x + C
\end{aligned}$$

19. $\int \frac{\cos^3 x}{\sqrt{\sin x}}\, dx$

วิธีทำ

$$\begin{aligned}
\int \frac{\cos^3 x}{\sqrt{\sin x}}\, dx &= \int \frac{\cos^2 x}{\sqrt{\sin x}}\cdot \cos x\, dx \\
&= \int \frac{1-\sin^2 x}{\sqrt{\sin x}}\, d\sin x \\
&= \int \left[(\sin x)^{-\frac{1}{2}} - (\sin x)^{\frac{3}{2}}\right] d\sin x \\
&= 2\sqrt{\sin x} - \frac{2}{5}(\sin x)^{\frac{5}{2}} + C
\end{aligned}$$

20. $\int \frac{\sin 2x}{1+\sin^2 x}\,dx$

วิธีทำ

$$\int \frac{\sin 2x}{1+\sin^2 x}\,dx = \int \frac{2\sin x\,\cos x}{1+\sin^2 x}\,dx$$

$$= \int \frac{2\sin x}{1+\sin^2 x}\,d\sin x$$

$$= \int \frac{1}{1+\sin^2 x}\,d(1+\sin^2 x)$$

$$= \ell n\,|1+\sin^2 x| + C$$

จงหาค่าอินทิกรัลจำกัดเขตต่อไปนี้

21. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 x\,dx$

วิธีทำ พิจารณา

$$\int \sin^2 x\,dx = \int \left(\frac{1-\cos 2x}{2}\right) dx$$

$$= \frac{x}{2} - \frac{1}{4}\sin 2x + C$$

ดังนั้น

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 x\,dx = \frac{x}{2} - \frac{1}{4}\sin 2x \Big|_0^{2\pi}$$

$$= (\pi - 0) - (0-0)$$

$$= \pi$$

22. $\int_0^{\frac{\pi}{6}} \cos^2 3x\,dx$

วิธีทำ พิจารณา

$$\int \cos^2 3x\,dx = \int \left(\frac{1+\cos 6x}{2}\right) dx$$

$$= \frac{x}{2} + \frac{1}{12}\sin 6x + C$$

ดังนั้น

$$\int_0^{\frac{\pi}{6}} \cos^2 3x\,dx = \frac{x}{2} + \frac{1}{12}\sin 6x \Big|_0^{\frac{\pi}{6}}$$

$$= \left(\frac{\pi}{12} + 0\right) - (0+0)$$

$$= \frac{\pi}{12}$$

23. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 x \cos^3 x \, dx$

วิธีทำ พิจารณา

$$\begin{aligned}
\int \sin^2 x \cos^3 x \, dx &= \int \sin^2 x \cos^2 x \cos x dx \\
&= \int \sin^2 x (1 - \sin^2 x) \, d\sin x \\
&= \int (\sin^2 x - \sin^4 x) \, d\sin x \\
&= \frac{1}{3}\sin^3 x - \frac{1}{5}\sin^5 x + C
\end{aligned}$$

ดังนั้น

$$\begin{aligned}
\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 x \cos^3 x \, dx &= \frac{1}{3}\sin^3 x - \frac{1}{5}\sin^5 x \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} \\
&= \left(\frac{1}{3}(1) - \frac{1}{5}(1)\right) - (0-0) \\
&= \frac{2}{15}
\end{aligned}$$

24. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \tan^2 \frac{x}{2} \, dx$

วิธีทำ พิจารณา

$$\begin{aligned}
\int \tan^2 \frac{x}{2} \, dx &= \int \left(\sec^2 \frac{x}{2} - 1\right) dx \\
&= \int \sec^2 \frac{x}{2} dx - \int dx \\
&= 2\tan\frac{x}{2} - x + C
\end{aligned}$$

ดังนั้น

$$\begin{aligned}
\int_0^{\frac{\pi}{2}} \tan^2 \frac{x}{2} \, dx &= 2\tan\frac{x}{2} - x \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} \\
&= 2(1-0) - \left(\frac{\pi}{2} - 0\right) \\
&= 2 - \frac{\pi}{2} \\
&= \frac{4-\pi}{2}
\end{aligned}$$

25. $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan^3 x \sec^4 x \, dx$

วิธีทำ พิจารณา $\int \tan^3 x \sec^4 x \, dx = \int \tan^3 x \sec^2 x \sec^2 x \, dx$

$$= \int \tan^3 x (1 + \tan^2 x) \, d\tan x$$

$$= \int (\tan^3 x + \tan^5 x) \, d\tan x$$

$$= \frac{\tan^4 x}{4} + \frac{\tan^6 x}{4} + C$$

ดังนั้น $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan^3 x \sec^4 x \, dx = \left. \frac{\tan^4 x}{4} + \frac{\tan^6 x}{6} \right|_0^{\frac{\pi}{4}}$

$$= \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{6}\right) - (0+0)$$

$$= \frac{3+2}{12}$$

$$= \frac{5}{12}$$

แบบฝึกหัด 1.3

จงหาค่าอินทิกรัล

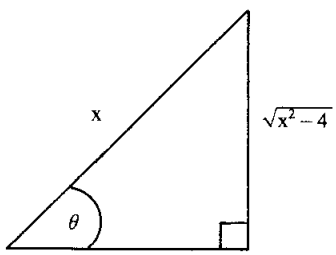
1. $\int \frac{x^3}{\sqrt{x^2-4}}\,dx$

วิธีทำ ให้

$$\begin{aligned} x &= 2\sec\theta \\ dx &= 2\sec\theta\,\tan\theta\,d\theta \\ \sqrt{x^2-4} &= \sqrt{4\sec^2\theta-4} \\ &= 2\sqrt{\sec^2\theta-1} \\ &= 2\tan\theta \end{aligned}$$

แทนค่า จะได้ว่า

$$\begin{aligned} \int \frac{x^3}{\sqrt{x^2-4}}\,dx &= \int \frac{(2\sec\theta)^3}{2\tan\theta}(2\sec\theta\,\tan\theta)\,d\theta \\ &= 8\int \sec^4\theta\,d\theta \\ &= 8\int \sec^2\theta\,\sec^2\theta\,d\theta \\ &= 8\int (1+\tan^2\theta)\,d\tan\theta \\ &= 8\tan\theta + \frac{8}{3}\tan^3\theta + C \\ &= 8\frac{\sqrt{x^2-4}}{2} + \frac{8}{3}\left(\frac{\sqrt{x^2-4}}{2}\right)^3 + C \\ &= 4\sqrt{x^2-4} + \frac{1}{3}(x^2-4)\sqrt{x^2-4} + C \end{aligned}$$



2. $\int \frac{\sqrt{9-4x^2}}{x}\,dx$

วิธีทำ ให้

$$x = \frac{3}{2}\sin\theta$$

$$dx = \frac{3}{2}\cos\theta\,d\theta$$

$$\sqrt{9-4x^2} = \sqrt{9-9\sin^2\theta}$$

$$= 3\cos\theta$$

แทนค่าในโจทย์ จะได้ว่า

$$\int \frac{\sqrt{9-4x^2}}{x}\,dx = \int \frac{3\cos\theta}{\frac{3}{2}\sin\theta}\cdot\frac{3}{2}\cos\theta\,d\theta$$

$$= \int \frac{3\cos^2\theta}{\sin\theta}\,d\theta$$

$$= 3\int \frac{1-\sin^2\theta}{\sin\theta}\,d\theta$$

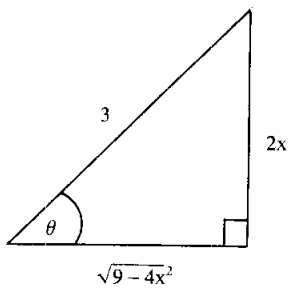
$$= 3\int (\operatorname{cosec}\theta - \sin\theta)\,d\theta$$

$$= 3\,\ell n\,|\operatorname{cosec}\theta - \cot\theta| + 3\cos\theta + C_1$$

$$= 3\,\ell n\left|\frac{3}{2x} - \frac{\sqrt{9-4x^2}}{2x}\right| + 3\left(\frac{\sqrt{9-4x^2}}{3}\right) + C_1$$

$$= 3\,\ell n\left|\frac{3-\sqrt{9-4x^2}}{2x}\right| + \sqrt{9-4x^2} + C_1$$

$$= 3\,\ell n\left|\frac{3-\sqrt{9-4x^2}}{x}\right| + \sqrt{9-4x^2} + C$$



3. $\int \frac{dx}{x\sqrt{9+4x^2}}$

วิธีทำ ให้

$$x = \frac{3}{2}\tan\theta$$

$$dx = \frac{3}{2}\sec^2\theta\, d\theta$$

$$\sqrt{9+4x^2} = \sqrt{9+9\tan^2\theta}$$

$$= 3\sec\theta$$

แทนค่าในโจทย์ จะได้ว่า

$$\int \frac{dx}{x\sqrt{9+4x^2}} = \int \frac{\frac{3}{2}\sec^2\theta\, d\theta}{\frac{3}{2}\tan\theta \cdot 3\sec\theta}$$

$$= \frac{1}{3}\int \frac{\sec\theta}{\tan\theta}\, d\theta$$

$$= \frac{1}{3}\int \frac{1}{\sin\theta}\, d\theta$$

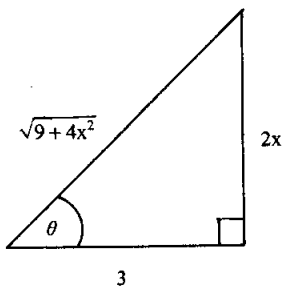
$$= \frac{1}{3}\int \operatorname{cosec}\theta\, d\theta$$

$$= \frac{1}{3}\ln|\operatorname{cosec}\theta - \cot\theta| + C_1$$

$$= \frac{1}{3}\ln\left|\frac{\sqrt{9+4x^2}}{2x} - \frac{3}{2x}\right| + C_1$$

$$= \frac{1}{3}\ln\left|\frac{\sqrt{9+4x^2}-3}{2x}\right| + C_1$$

$$= \frac{1}{3}\ln\left|\frac{\sqrt{9+4x^2}-3}{x}\right| + C$$



4. $\int \frac{(16-9x^2)^{\frac{3}{2}}}{x^6}\,dx$

วิธีทำ ให้

$$x = \frac{4}{3}\sin\theta$$

$$dx = \frac{4}{3}\cos\theta\ d\theta$$

$$\sqrt{16-9x^2} = \sqrt{16-16\sin^2\theta}$$

$$= 4\cos\theta$$

แทนค่าในโจทย์ จะได้

$$\int\frac{(16-9x^2)^{\frac{3}{2}}}{x^6}\,dx = \int\frac{64\cos^3\theta\cdot\frac{4}{3}\cos\theta\ d\theta}{\frac{4096}{729}\sin^6\theta}$$

$$= \frac{243}{16}\int\frac{\cos^4\theta}{\sin^6\theta}\,d\theta$$

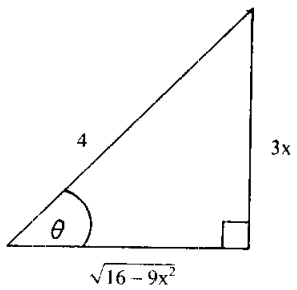
$$= \frac{243}{16}\int\cot^4\theta\ \mathrm{cosec}^2\theta\ d\theta$$

$$= -\frac{243}{16}\int\cot^4\theta\ d\cot\theta$$

$$= -\frac{243}{80}\cot^5\theta + C$$

$$= -\frac{243}{80}\left(\frac{16-9x^2}{243x^5}\right)^{\frac{5}{2}} + C$$

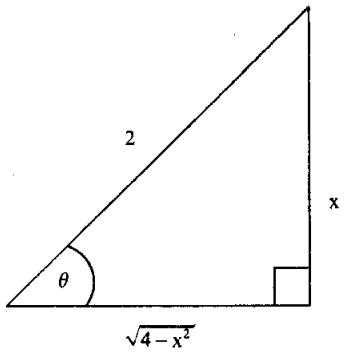
$$= -\frac{1}{80}\left(\frac{16-9x^2}{x^5}\right)^{\frac{5}{2}} + C$$



5. $\int \frac{dx}{(4-x^2)^{\frac{3}{2}}}$

วิธีทำ ให้

$$x = 2\sin\theta$$
$$dx = 2\cos\theta\, d\theta$$
$$\sqrt{4-x^2} = \sqrt{4-4\sin^2\theta}$$
$$= 2\cos\theta$$



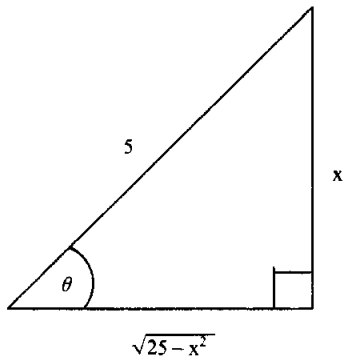
แทนค่าในโจทย์ จะได้ว่า

$$\int \frac{dx}{(4-x^2)^{\frac{3}{2}}} = \int \frac{2\cos\theta\, d\theta}{8\cos^3\theta}$$
$$= \frac{1}{4}\int \frac{1}{\cos^2\theta}\, d\theta$$
$$= \frac{1}{4}\int \sec^2\theta\, d\theta$$
$$= \frac{1}{4}\tan\theta + C$$
$$= \frac{1}{4}\left(\frac{x}{\sqrt{4-x^2}}\right) + C$$

6. $\int \frac{\sqrt{25-x^2}}{x}\, dx$

วิธีทำ ให้

$$x = 5\sin\theta$$
$$dx = 5\cos\theta\, d\theta$$
$$\sqrt{25-x^2} = \sqrt{25-25\sin^2\theta}$$
$$= 5\cos\theta$$



แทนค่าในโจทย์ จะได้ว่า

$$\int \frac{\sqrt{25-x^2}}{x}\, dx = \int \frac{5\cos\theta \cdot 5\cos\theta}{5\sin\theta}\, d\theta$$
$$= 5\int \frac{\cos^2\theta}{\sin\theta}\, d\theta$$
$$= 5\int \frac{1-\sin^2\theta}{\sin\theta}\, d\theta$$
$$= 5\int (\operatorname{cosec}\theta - \sin\theta)\, d\theta$$
$$= 5\,\ell n\,|\operatorname{cosec}\theta - \cot\theta| + 5\cos\theta + C$$
$$= 5\,\ell n\left|\frac{5}{x} - \frac{\sqrt{25-x^2}}{x}\right| + 5\frac{\sqrt{25-x^2}}{5} + C$$
$$= 5\,\ell n\left|\frac{5-\sqrt{25-x^2}}{x}\right| + \sqrt{25-x^2} + C$$

7. $\int \frac{dx}{x^2\sqrt{a^2-x^2}}$

วิธีทำ ให้

$$x = a\sin\theta$$

$$dx = a\cos\theta\, d\theta$$

$$\sqrt{a^2-x^2} = \sqrt{a^2-a^2\sin^2\theta}$$

$$= a\cos\theta$$

แทนค่าในโจทย์ จะได้ว่า

$$\int \frac{dx}{x^2\sqrt{a^2-x^2}} = \int \frac{a\cos\theta\, d\theta}{a^2\sin^2\theta\cdot a\cos\theta}$$

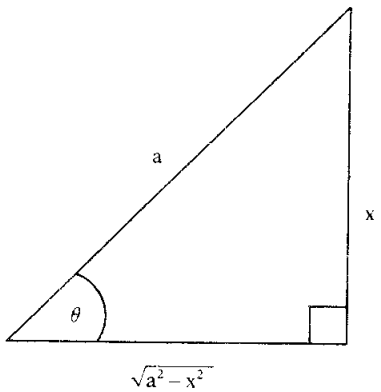
$$= \frac{1}{a^2}\int \frac{1}{\sin^2\theta}\, d\theta$$

$$= \frac{1}{a^2}\int \operatorname{cosec}^2\theta\, d\theta$$

$$= -\frac{1}{a^2}\cot\theta + C$$

$$= -\frac{1}{a^2}\left(\frac{\sqrt{a^2-x^2}}{x}\right) + C$$

$$= -\frac{\sqrt{a^2-x^2}}{a^2x} + C$$



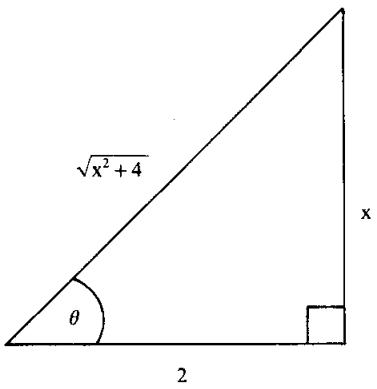
8. $\int x\sqrt{x^2+4}\,dx$

วิธีทำ ให้

$$x = 2\tan\theta$$
$$dx = 2\sec^2\theta\,d\theta$$
$$\sqrt{x^2+4} = \sqrt{4\tan^2\theta+4}$$
$$= 2\sec\theta$$

แทนค่าในโจทย์ จะได้ว่า

$$\int x\sqrt{x^2+4}\,dx = \int 2\tan\theta\cdot 2\sec\theta\cdot 2\sec^2\theta\,d\theta$$
$$= 8\int \frac{\sin\theta}{\cos^4\theta}\,d\theta$$
$$= -8\int \frac{1}{\cos^4\theta}\,d\cos\theta$$
$$= -8\left(\frac{\cos\theta}{-3}\right)^{-3} + C$$
$$= \frac{8}{3}(\cos\theta)^{-3} + C$$
$$= \frac{8}{3}\left(\frac{2}{\sqrt{x^2+4}}\right)^{-3} + C$$
$$= \frac{8}{3}\left(\frac{\sqrt{x^2+4}}{2}\right)^{3} + C$$
$$= \frac{1}{3}(x^2+4)^{\frac{3}{2}} + C$$



9. $\int \frac{x^3}{\sqrt{x^2-16}}\,dx$

วิธีทำ ให้

$$x = 4\sec\theta$$

$$dx = 4\sec\theta\tan\theta\,d\theta$$

$$\sqrt{x^2-16} = \sqrt{16\sec^2\theta-16}$$

$$= 4\tan\theta$$

แทนค่าในโจทย์ จะได้ว่า

$$\int \frac{x^3}{\sqrt{x^2-16}}\,dx = \int \frac{64\sec^3\theta\cdot 4\sec\theta\tan\theta}{4\tan\theta}\,d\theta$$

$$= 64\int \sec^4\theta\,d\theta$$

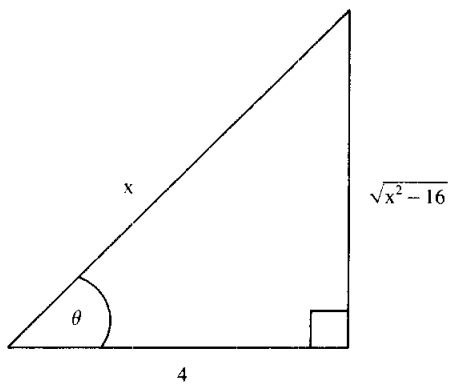
$$= 64\int \sec^2\theta\sec^2\theta\,d\theta$$

$$= 64\int (\tan^2\theta+1)\,d\tan\theta$$

$$= \frac{64}{3}\tan^3\theta + 64\tan\theta + C$$

$$= \frac{64}{3}\left(\frac{\sqrt{x^2-16}}{4}\right)^3 + 64\left(\frac{\sqrt{x^2-16}}{4}\right) + C$$

$$= \frac{1}{3}(x^2-16)^{\frac{3}{2}} + 16\sqrt{x^2-16} + C$$



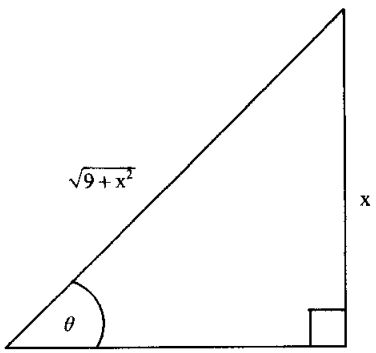
10. $\int \frac{dx}{(9+x^2)^2}$

วิธีทำ ให้

$$x = 3\tan\theta$$
$$dx = 3\sec^2\theta\, d\theta$$
$$9+x^2 = 9+9\tan^2\theta$$
$$= 9\sec^2\theta$$

แทนค่าในโจทย์ จะได้ว่า

$$\int \frac{dx}{(9+x^2)^2} = \int \frac{3\sec^2\theta\, d\theta}{81\sec^4\theta}$$
$$= \frac{1}{27}\int \frac{1}{\sec^2\theta}\, d\theta$$
$$= \frac{1}{27}\int \cos^2\theta\, d\theta$$
$$= \frac{1}{27}\int \frac{1+\cos 2\theta}{2}\, d\theta$$
$$= \frac{1}{27}\left(\frac{\theta}{2}+\frac{1}{4}\sin 2\theta\right) + C$$
$$= \frac{1}{54}\theta + \frac{1}{54}\sin\theta\cos\theta + C$$
$$= \frac{1}{54}\arctan\frac{x}{3} + \frac{1}{54}\left(\frac{x}{\sqrt{9+x^2}}\right)\left(\frac{3}{\sqrt{9+x^2}}\right) + C$$
$$= \frac{1}{54}\arctan\frac{x}{3} + \frac{1}{18}\left(\frac{x}{9+x^2}\right) + C$$



3

11. $\int \frac{dx}{\sqrt{4x^2+9}}$

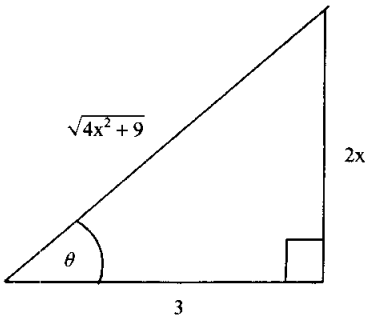
วิธีทำ ให้

$$x = \frac{3}{2}\tan\theta$$

$$dx = \frac{3}{2}\sec^2\theta \, d\theta$$

$$\sqrt{4x^2+9} = \sqrt{9\tan^2\theta+9}$$

$$= 3\sec\theta$$



แทนค่าในโจทย์ จะได้ว่า

$$\int \frac{dx}{\sqrt{4x^2+9}} = \int \frac{\frac{3}{2}\sec^2\theta \, d\theta}{3\sec\theta}$$

$$= \frac{1}{2}\int \sec\theta \, d\theta$$

$$= \frac{1}{2}\ln|\sec\theta+\tan\theta| + C_1$$

$$= \frac{1}{2}\ln\left|\frac{\sqrt{4x^2+9}}{3}+\frac{2x}{3}\right| + C_1$$

$$= \frac{1}{2}\ln|\sqrt{4x^2+9}+2x| + C$$

12. $\int \frac{dx}{\sqrt{9x^2-25}}$

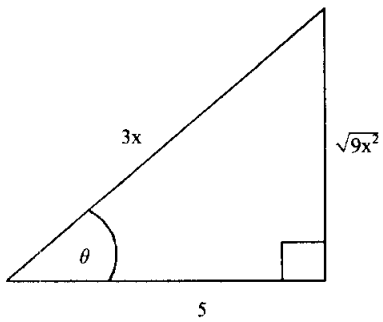
วิธีทำ ให้

$$x = \frac{5}{3}\sec\theta$$

$$dx = \frac{5}{3}\sec\theta\tan\theta \, d\theta$$

$$\sqrt{9x^2-25} = \sqrt{25\sec^2\theta-25}$$

$$= 5\tan\theta$$



แทนค่าในโจทย์ จะได้ว่า

$$\int \frac{dx}{\sqrt{9x^2-25}} = \int \frac{\frac{5}{3}\sec\theta\tan\theta \, d\theta}{5\tan\theta}$$

$$= \frac{1}{3}\int \sec\theta \, d\theta$$

$$= \frac{1}{3}\ln|\sec\theta+\tan\theta| + C_1$$

$$= \frac{1}{3}\ln\left|\frac{3x}{5}+\frac{\sqrt{9x^2-25}}{5}\right| + C_1$$

$$= \frac{1}{3}\ln|3x+\sqrt{9x^2-25}| + C$$

13. $\int \frac{(x+2)dx}{\sqrt{x^2+9}}$

วิธีทำ ให้

$$x = 3\tan\theta$$

$$dx = 3\sec^2\theta \, d\theta$$

$$\sqrt{x^2+9} = \sqrt{9\tan^2\theta+9}$$

$$= 3\sec\theta$$

แทนค่าในโจทย์ จะได้ว่า

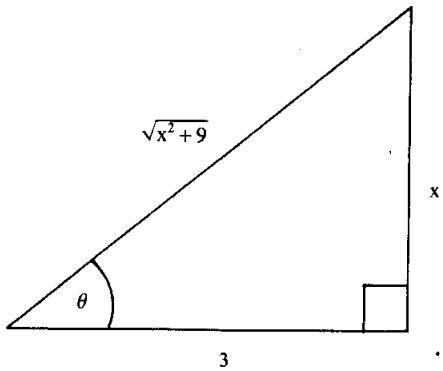
$$\int \frac{x+2}{\sqrt{x^2+9}}dx = \int \frac{(3\tan\theta+2)}{3\sec\theta}3\sec^2\theta \, d\theta$$

$$= \int (3\sec\theta \tan\theta + 2\sec\theta)\, d\theta$$

$$= 3\sec\theta + \frac{2}{3}\ell n\,|\sec\theta+\tan\theta| + C_1$$

$$= 3\frac{\sqrt{x^2+9}}{3} + \frac{2}{3}\ell n\left|\frac{\sqrt{x^2+9}}{3}+\frac{x}{3}\right| + C_1$$

$$= \sqrt{x^2+9} + \frac{2}{3}\ell n\,|\sqrt{x^2+9}+x| + C$$



จงหาค่าอินทิกรัลจำกัดเขตต่อไปนี้

14. $\int_0^2 \frac{dx}{x^2\sqrt{4+x^2}}$

วิธีทำ พิจารณา $\int \frac{dx}{x^2\sqrt{4+x^2}}$

ให้

$$x = 2\tan\theta$$

$$dx = 2\sec^2\theta \, d\theta$$

$$\sqrt{4+x^2} = \sqrt{4+4\tan^2\theta}$$

$$= 2\sec\theta$$

แทนค่าในโจทย์ จะได้ว่า

$$\int \frac{dx}{x^2\sqrt{4+x^2}} = \int \frac{2\sec^2\theta \, d\theta}{(4\tan^2\theta)(2\sec\theta)}$$

$$= \frac{1}{4}\int \frac{\sec\theta}{\tan^2\theta} d\theta$$

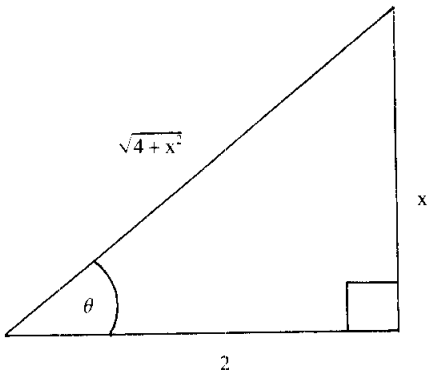
$$= \frac{1}{4}\int \sin^{-2}\theta \cos\theta \, d\theta$$

$$= -\frac{1}{4\sin\theta} + C$$

$$= -\frac{\sqrt{4+x^2}}{4x} + C$$

ดังนั้น $\int_0^2 \frac{dx}{x^2\sqrt{4+x^2}} = -\frac{\sqrt{4+x^2}}{4x}\Big|_0^2$

= หาค่าไม่ได้ (ลู่ออก)



15. $\int_0^{\frac{1}{3}} \frac{dx}{\sqrt{4-9x^2}}$

วิธีทำ พิจารณา $\int \frac{dx}{\sqrt{4-9x^2}}$

ให้

$$x = \frac{2}{3}\sin\theta$$

$$dx = \frac{2}{3}\cos\theta \, d\theta$$

$$\sqrt{4-9x^2} = \sqrt{4-4\sin^2\theta}$$

$$= 2\cos\theta$$

แทนค่าในโจทย์ จะได้ว่า

$$\int \frac{dx}{\sqrt{4-9x^2}} = \int \frac{\frac{2}{3}\cos\theta \, d\theta}{2\cos\theta}$$

$$= \frac{1}{3}\int d\theta$$

$$= \frac{1}{3}\theta + C$$

$$= \frac{1}{3}\arcsin\left(\frac{3x}{2}\right) + C$$

ดังนั้น

$$\int_0^{\frac{1}{3}} \frac{dx}{\sqrt{4-9x^2}} = \frac{1}{3}\arcsin\left(\frac{3x}{2}\right)\Big|_0^{\frac{1}{3}}$$

$$= \frac{1}{3}\arcsin\left(\frac{1}{2}\right) - \frac{1}{3}\arcsin(0)$$

$$= \frac{1}{3}\left(\frac{\pi}{6}\right) - \frac{1}{3}(0)$$

$$= \frac{\pi}{18}$$

แบบฝึกหัด 1.4

จงหาค่าอินทิกรัลต่อไปนี้

1. $\int \frac{dx}{\sqrt{2x-x^2}}$

วิธีทำ

$$\int \frac{dx}{\sqrt{2x-x^2}} = \int \frac{dx}{\sqrt{1-(x^2-2x+1)}}$$

$$= \int \frac{dx}{\sqrt{1-(x-1)^2}}$$

ให้ $u = x-1$

$du = dx$

แทนค่าในโจทย์ จะได้ว่า

$$\int \frac{dx}{\sqrt{2x-x^2}} = \int \frac{du}{\sqrt{1-u^2}}$$

$$= \arcsin u + C$$

$$= \arcsin (x-1) + C$$

2. $\int \frac{dx}{4x^2+4x+2}$

วิธีทำ

$$\int \frac{dx}{4x^2+4x+2} = \int \frac{dx}{(4x^2+4x+1)+1}$$

$$= \int \frac{dx}{1+(2x+1)^2}$$

ให้ $u = 2x+1$

$du = 2dx$

$dx = \frac{du}{2}$

แทนค่าในโจทย์ จะได้ว่า

$$\int \frac{dx}{4x^2+4x+2} = \frac{1}{2}\int \frac{du}{1+u^2}$$

$$= \frac{1}{2}\arctan u + C$$

$$= \frac{1}{2}\arctan (2x+1) + C$$

3. $\int \frac{(x+2)}{\sqrt{x^2+2x-3}}\,dx$

วิธีทำ

$$\int \frac{(x+2)}{\sqrt{x^2+2x-3}}\,dx = \int \frac{(x+2)dx}{\sqrt{(x^2+2x+1)-4}}$$

$$= \int \frac{(x+2)\,dx}{\sqrt{(x+1)^2-4}}$$

ให้ $u = x+1$

$du = dx$

แทนค่าในโจทย์ จะได้ว่า

$$\int \frac{(x+2)}{\sqrt{x^2+2x-3}}\,dx = \int \frac{(u+1)}{\sqrt{u^2-4}}\,du$$

$$= \int \frac{u}{\sqrt{u^2-4}}\,du + \int \frac{du}{\sqrt{u^2-4}}$$

$$= \sqrt{u^2-4} + \ell n\,|u+\sqrt{u^2-4}| + C$$

$$= \sqrt{x^2+2x-3} + \ell n\,|(x+1)+\sqrt{x^2+2x-3}| + C$$

4. $\int \frac{x\,dx}{\sqrt{27+6x-x^2}}$

วิธีทำ

$$\int \frac{x\,dx}{\sqrt{27+6x-x^2}} = \int \frac{x\,dx}{\sqrt{36-(x^2-6x+9)}}$$

$$= \int \frac{x\,dx}{\sqrt{36-(x-3)^2}}$$

ให้ $u = x-3$

$du = dx$

แทนค่าในโจทย์ จะได้ว่า

$$\int \frac{x\,dx}{\sqrt{27+6x-x^2}} = \int \frac{(u+3)du}{\sqrt{36-u^2}}$$

$$= \int \frac{u}{\sqrt{36-u^2}}\,du + \int \frac{3}{\sqrt{36-u^2}}\,du$$

$$= -\frac{1}{2}\int \frac{1}{\sqrt{36-u^2}}\,d(36-u^2) + 3\int \frac{1}{\sqrt{6^2-u^2}}\,du$$

$$= -\frac{1}{2}\cdot 2\sqrt{36-u^2} + 3\arcsin\frac{u}{6} + C$$

$$= -\sqrt{36-u^2} + 3\arcsin\frac{u}{6} + C$$

$$= -\sqrt{27+6x-x^2} + 3\arcsin\left(\frac{x-3}{6}\right) + C$$

5. $\int \frac{(5-4x)\,dx}{\sqrt{12x-4x^2-8}}$

วิธีทำ

$$\int \frac{(5-4x)\,dx}{\sqrt{12x-4x^2-8}} = \int \frac{(5-4x)\,dx}{\sqrt{1-(4x^2-12x+9)}}$$

$$= \int \frac{(5-4x)\,dx}{\sqrt{1-(2x-3)^2}}$$

ให้ $u = 2x-3$

$du = 2dx$

แทนค่าในโจทย์ จะได้ว่า

$$\int \frac{(5-4x)\,dx}{\sqrt{12x-4x^2-8}} = \int \frac{(-2u-1)}{\sqrt{1-u^2}}\frac{du}{2}$$

$$\frac{1}{2}\int \left(\frac{-2u-1}{\sqrt{1-u^2}}\right) du$$

$$= \frac{1}{2}\int \frac{-2u\,du}{\sqrt{1-u^2}} - \frac{1}{2}\int \frac{1}{\sqrt{1-u^2}}\,du$$

$$= \frac{1}{2}\cdot 2\sqrt{1-u^2} - \frac{1}{2}\arcsin u + C$$

$$= \sqrt{1-u^2} - \frac{1}{2}\arcsin u + C$$

$$= \sqrt{12x-4x^2-8} - \frac{1}{2}\arcsin(2x-3) + C$$

6. $\int \frac{(2x-3)\,dx}{x^2+6x+13}$

วิธีทำ

$$\int \frac{(2x-3)\,dx}{x^2+6x+13} = \int \frac{(2x-3)\,dx}{x^2+6x+9+4}$$

$$= \int \frac{(2x-3)\,dx}{(x+3)^2+4}$$

ให้

$$u = x+3$$

$$du = dx$$

$$x = u-3$$

$$2x = 2u-6$$

$$2x-3 = 2u-9$$

แทนค่าในโจทย์ จะได้ว่า

$$\int \frac{(2x-3)\,dx}{x^2+6x+13} = \int \frac{2u-9}{u^2+4}\,du$$

$$= \int \frac{2u\,du}{u^2+4} - 9\int \frac{1}{4+u^2}\,du$$

$$= \ell n\,|u^2+4| - 9\cdot\frac{1}{2}\arctan\frac{u}{2} + C$$

$$= \ell n\,|u^2+4| - \frac{9}{2}\arctan\frac{u}{2} + C$$

$$= \ell n\,|x^2+6x+13| - \frac{9}{2}\arctan\frac{x+3}{2} + C$$

7. $\int \frac{(x-1)\,dx}{3x^2-4x+3}$

วิธีทำ

$$\int \frac{(x-1)\,dx}{3x^2-4x+3} = \int \frac{(3x-3)\,dx}{9x^2-12x+9}$$

$$= \int \frac{3x-3\,dx}{(9x^2-12x+4)+5}$$

$$= \int \frac{3x-3}{(3x-2)^2+5}\,dx$$

ให้ $u = 3x-2$

$du = 3dx$

$dx = \frac{du}{3}$

และ $3x-3 = u-1$

แทนค่าในโจทย์ จะได้ว่า

$$\int \frac{(x-1)\,dx}{3x^2-4x+3} = \int \frac{u-1}{u^2+5}\frac{du}{3}$$

$$= \frac{1}{3}\int \frac{u}{u^2+5}\,du - \frac{1}{3}\int \frac{1}{u^2-5}\,du$$

$$= \frac{1}{6}\,\ell n\,|u^2+5| - \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{\sqrt{5}}\arctan\frac{u}{\sqrt{5}} + C_1$$

$$= \frac{1}{6}\,\ell n\,|9x^2-12x+9| - \frac{1}{3\sqrt{5}}\arctan\frac{u}{\sqrt{5}} + C_1$$

$$= \frac{1}{6}\,\ell n\,|3x^2-4x+3| - \frac{\sqrt{5}}{15}\arctan\frac{3x-2}{\sqrt{5}} + C$$

8. $\int \frac{x^2dx}{\sqrt{2x-x^2}}$

วิธีทำ

$$\int \frac{x^2dx}{\sqrt{2x-x^2}} = \int \frac{x^2dx}{\sqrt{1-(x^2-2x+1)}}$$

$$= \int \frac{x^2\,dx}{\sqrt{1-(x-1)^2}}$$

ให้ $u = x-1$

$du = dx$

แทนค่าในโจทย์ จะได้ว่า

$$\int \frac{x^2\,dx}{\sqrt{2x-x^2}} = \int \frac{(u+1)^2}{\sqrt{1-u^2}}du$$

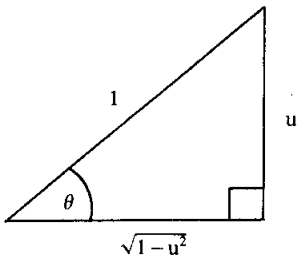
$$= \int \frac{u^2+2u+1}{\sqrt{1-u^2}}du \qquad \text{..... (1)}$$

ให้ $u = \sin\theta$

$du = \cos\theta\ d\theta$

$\sqrt{1-u^2} = \sqrt{1-\sin^2\theta}$

$= \cos\theta$



แทนค่าใน (1) จะได้ว่า

$$\int \frac{x^2\,dx}{\sqrt{2x-x^2}} = \int \frac{\sin^2\theta+2\sin\theta+1}{\cos\theta}\cdot\cos\theta\ d\theta$$

$$= \int (\sin^2\theta+2\sin\theta+1)\,d\theta$$

$$= \int \left(\frac{1-\cos 2\theta}{2}+2\sin\theta+1\right)d\theta$$

$$= \frac{3}{2}\theta-\frac{1}{4}\sin 2\theta-2\cos\theta+C$$

$$= \frac{3}{2}\arcsin u-\frac{1}{4}\cdot 2\sin\theta\cos\theta-2\cos\theta+C$$

$$= \frac{3}{2}\arcsin u-\frac{1}{2}u\sqrt{1-u^2}-2\sqrt{1-u^2}+C$$

$$= \frac{3}{2}\arcsin(x-1)-\frac{1}{2}(x-1)\sqrt{2x-x^2}-2\sqrt{2x-x^2}+C$$

$$= \frac{3}{2}\arcsin(x-1)-\frac{1}{2}(x+3)\sqrt{2x-x^2}+C$$

9. $\int \frac{(x+1)\,dx}{\sqrt{2x^2-6x+4}}$

วิธีทำ

$$\int \frac{(x+1)\,dx}{\sqrt{2x^2-6x+4}} = \int \frac{\sqrt{2}\,(x+1)}{\sqrt{4x^2-12x+8}}\,dx$$

$$= \sqrt{2}\int \frac{(x+1)}{\sqrt{(2x-3)^2-1}}\,dx$$

ให้

$$u = 2x-3$$

$$du = 2dx$$

$$x+1 = \frac{u+3}{2}+1$$

$$= \frac{u+5}{2}$$

แทนค่าในโจทย์ จะได้ว่า

$$\int \frac{(x+1)\,dx}{\sqrt{2x^2-6x+4}} = \frac{\sqrt{2}}{4}\int \frac{u+5}{\sqrt{u^2-1}}\,du$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{4}\int \frac{u}{\sqrt{u^2-1}}\,du + \frac{5\sqrt{2}}{4}\int \frac{1}{\sqrt{u^2-1}}\,du$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{4}(\sqrt{u^2-1}) + \frac{5\sqrt{2}}{4}\ell n\,|u+\sqrt{u^2-1}| + C$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{4}(\sqrt{4x^2-12x+8}) + \frac{5\sqrt{2}}{4}\ell n\,|(2x-3)+\sqrt{4x^2-12x+8}| + C$$

$$= \frac{1}{2}\sqrt{2x^2-6x+4} + \frac{5\sqrt{2}}{4}\ell n\,|2x-3+\sqrt{4x^2-12x+8}| + C$$

10. $\int \frac{dx}{(4x^2-24x+27)^{\frac{3}{2}}}$

วิธีทำ

$$\int \frac{dx}{(4x^2-24x+27)^{\frac{3}{2}}} = \int \frac{dx}{[4(x-3)^2-9]^{\frac{3}{2}}}$$

ให้ $x-3 = \frac{3}{2}\sec\theta$

$dx = \frac{3}{2}\sec\theta\tan\theta\, d\theta$

และ $\sqrt{4x^2-24x+27} = \sqrt{9\sec^2\theta-9}$

$= 3\tan\theta$

แทนค่าในโจทย์ จะได้ว่า

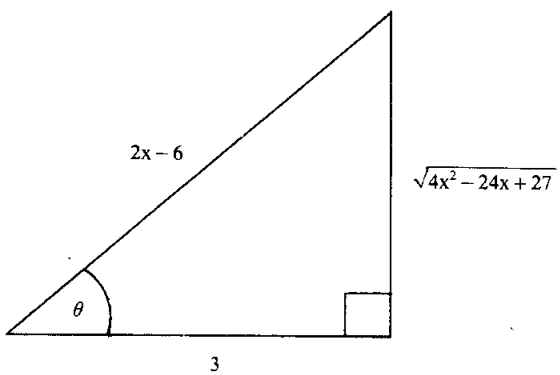
$$\int \frac{dx}{(4x^2-24x+27)^{\frac{3}{2}}} = \int \frac{\frac{3}{2}\sec\theta\tan\theta\, d\theta}{27\tan^3\theta}$$

$$= \frac{1}{18}\int \frac{\sec\theta}{\tan^2\theta}d\theta$$

$$= \frac{1}{18}\int \sin^{-2}\theta\cos\theta\, d\theta$$

$$= -\frac{1}{18}(\sin\theta)^{-1} + C$$

$$= -\frac{1}{18\sin\theta} + C$$

$$= \frac{-1}{18\cdot\frac{\sqrt{4x^2-24x+27}}{2x-6}} + C$$

$$= \frac{-(x-3)}{9\sqrt{4x^2-24x+27}} + C$$