แบบฝึกหัด 1.5

จงหาค่าอินทิกรัลต่อไปนี้

1. $\int \frac{dx}{x^2-4}$

วิธีทำ แยกตัวประกอบของส่วน จะได้ว่า $x^2-4 = (x-2)(x+2)$

ดังนั้น
$$\frac{1}{x^2-4} = \frac{A}{x-2} + \frac{B}{x+2}$$
$$= \frac{A(x+2)+B(x-2)}{(x-2)(x+2)}$$
$$= \frac{(A+B)x+2A-2B}{(x-2)(x+2)}$$

จะได้ว่า $1 = (A+B)x + 2(A-B)$

เทียบ ส.ป.ส. จะได้ว่า

$$A+B = 0$$
$$2(A-B) = 1$$

แก้สมการ จะได้ว่า $A = \frac{1}{4}$, $B = -\frac{1}{4}$

ดังนั้น
$$\frac{1}{x^2-4} = \frac{\frac{1}{4}}{x-2} + \frac{-\frac{1}{4}}{x+2}$$
$$\int \frac{dx}{x^2-4} = \frac{1}{4}\int \frac{dx}{x-2} - \frac{1}{4}\int \frac{dx}{x+2}$$
$$= \frac{1}{4}\ell n\,|x-2| - \frac{1}{4}\ell n\,|x+2| + C$$
$$= \frac{1}{4}\ell n\left|\frac{x-2}{x+2}\right| + C$$

2. $\int \frac{(x+1)\,dx}{x^3+x^2-6x}$

วิธีทำ แยกตัวประกอบของส่วน จะได้ว่า

$$x^3+x^2-6x = x(x^2+x-6)$$
$$= x(x-2)(x+3)$$

ดังนั้น
$$\frac{x+1}{x^3+x^2-6x} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x-2} + \frac{C}{x+3}$$
$$= \frac{A(x-2)(x+3) + Bx(x+3) + Cx(x-2)}{x(x-2)(x+3)}$$

จะได้ว่า
$$x+1 = A(x-2)(x+3) + Bx(x+3) + Cx(x-2)$$
$$= (A+B+C)x^2 + (A+3B-2C)x - 6A$$

เทียบ ส.ป.ส. จะได้ว่า

$$A+B+C = 0$$
$$A+3B-2C = 1$$
$$-6A = 1$$

แก้สมการจะได้ว่า $A = -\frac{1}{6}$, $B = \frac{3}{10}$, $C = -\frac{2}{15}$

ดังนั้น
$$\int \frac{(x+1)\,dx}{x^3+x^2-6x} = -\frac{1}{6}\int \frac{dx}{x} + \frac{3}{10}\int \frac{dx}{x-2} - \frac{2}{15}\int \frac{dx}{x+3}$$
$$= -\frac{1}{6}\ell n|x| + \frac{3}{10}\ell n|x-2| - \frac{2}{15}\ell n|x+3| + C$$
$$= \frac{1}{30}\left(-5\ell n|x| + 9\ell n|x-2| - 4\ell n|x+3|\right) + C$$
$$= \frac{1}{30}\ell n\frac{|x-2|^9}{|x|^5|x+3|^4} + C$$

3. $\int \frac{dx}{x^2+7x+6}$

วิธีทำ แยกตัวประกอบของส่วน จะได้ว่า

$$x^2+7x+6 = (x+1)(x+6)$$

ดังนั้น
$$\frac{1}{x^2+7x+6} = \frac{A}{x+1} + \frac{B}{x+6}$$
$$= \frac{A(x+6) + B(x+1)}{(x+1)(x+6)}$$

จะได้ว่า
$$1 = A(x+6) + B(x+1)$$
$$1 = (A+B)x + (6A+B)$$

เทียบ ส.ป.ส. จะได้ว่า

$$A+B = 0$$
$$6A+B = 1$$

แก้สมการ จะได้ว่า $A = \frac{1}{5}$, $B = -\frac{1}{5}$

ดังนั้น
$$\int \frac{dx}{x^2+7x+6} = \frac{1}{5}\int \frac{dx}{x+1} - \frac{1}{5}\int \frac{dx}{x+6}$$
$$= \frac{1}{5}\ell n|x+1| - \frac{1}{5}\ell n|x+6| + C$$
$$= \frac{1}{5}\ell n\left|\frac{x+1}{x+6}\right| + C$$

4. $\int \frac{x\,dx}{x^2-3x-4}$

วิธีทำ แยกตัวประกอบของส่วน จะได้ว่า

$$x^2-3x-4 = (x-4)(x+1)$$

ดังนั้น
$$\frac{x}{x^2-3x-4} = \frac{A}{x-4} + \frac{B}{x+1}$$
$$= \frac{A(x+1) + B(x-4)}{(x-4)(x+1)}$$

จะได้ว่า
$$x = A(x+1) + B(x-4)$$
$$x = (A+B)x + A-4B$$

เทียบ ส.ป.ส. จะได้ว่า

$$A+B = 1$$
$$A-4B = 0$$

แก้สมการ จะได้ว่า $A = \frac{1}{5}$, $B = \frac{4}{5}$

ดังนั้น
$$\int \frac{x\,dx}{x^2-3x-4} = \frac{1}{5}\int \frac{dx}{x-4} + \frac{4}{5}\int \frac{dx}{x+1}$$
$$= \frac{1}{5}\ell n\,|x-4| + \frac{4}{5}\ell n\,|x+1| + C$$
$$= \frac{1}{5}\ell n\,|x-4|\,|x+1|^4 + C$$

5. $\int \frac{x^2-3x-1}{x^3+x^2-2x}dx$

วิธีทำ แยกตัวประกอบของส่วน จะได้ว่า

$$x^3+x^2-2x = x(x^2+x-2)$$
$$= x(x+2)(x-1)$$

ดังนั้น
$$\frac{x^2-3x-1}{x^3+x^2-2x} = \frac{A}{x}+\frac{B}{x+2}+\frac{C}{x-1}$$
$$= \frac{A(x+2)(x-1) + Bx(x-1) + Cx(x+2)}{x(x+2)(x-1)}$$

จะได้ว่า
$$x^2-3x-1 = A(x+2)(x-1) + Bx(x-1) + Cx(x+2)$$
$$x^2-3x-1 = (A+B+C)x^2 + (A-B+2C)x - 2A$$

เทียบ ส.ป.ส. จะได้ว่า

$$A+B+C = 1$$
$$A-B+2C = -3$$
$$-2A = -1$$

แก้สมการ จะได้ว่า $A = \frac{1}{2}$, $B = \frac{3}{2}$, $C = -1$

ดังนั้น
$$\int \frac{x^2-3x-1}{x^3+x^2-2x}dx = \frac{1}{2}\int\frac{dx}{x} + \frac{3}{2}\int\frac{dx}{x+2} - \int\frac{dx}{x-1}$$
$$= \frac{1}{2}\ell n|x| + \frac{3}{2}\ell n|x+2| - \ell n|x-1| + C$$
$$= \frac{1}{2}\left(\ell n|x| + 3\ell n|x+2| - 2\ell n|x-1|\right) + C$$
$$= \frac{1}{2}\ell n\frac{|x|\,|x+2|^3}{|x-1|^2} + C$$

6. $\int \frac{(x^2+3x-4)}{x^2-2x-8}dx$

วิธีทำ $x^2-2x-8 \overline{\big)\, x^2+3x-4}$; 1

$$\begin{array}{r} x^2-2x-8 \\ \hline 5x+4 \end{array}$$

จะได้ว่า $\frac{x^2+3x-4}{x^2-2x-8} = 1+\frac{5x+4}{x^2-2x-8}$

พิจารณาส่วน คือ x^2-2x-8 แยกตัวประกอบ จะได้ว่า

$$x^2-2x-8 = (x-4)(x+2)$$

ดังนั้น $\frac{5x+4}{x^2-2x-8} = \frac{A}{x-4}+\frac{B}{x+2}$

$$= \frac{A(x+2)+B(x-4)}{(x-4)(x+2)}$$

จะได้ว่า $5x+4 = A(x+2)+B(x-4)$

$$5x+4 = (A+B)x+2A-4B$$

เทียบ ส.ป.ส. จะได้ว่า

$$A+B = 5$$

$$2A-4B = 4$$

แก้สมการจะได้ว่า $A = 4$, $B = 1$

ดังนั้น $\int \frac{x^2-3x-1}{x^3+x^2-2x}dx = \int 1dx + 4\int \frac{dx}{x-4} + \int \frac{dx}{x+2}$

$$= x + 4\ell n|x-4| + \ell n|x+2| + C$$

$$= x + \ell n|x-4|^2|x+2| + C$$

7. $\int \frac{x\,dx}{(x-2)^2}$

วิธีทำ แยกเศษส่วนย่อย จะได้ว่า

$$\frac{x}{(x-2)^2} = \frac{A}{x-2} + \frac{B}{(x-2)^2}$$

$$= \frac{A(x-2)+B}{(x-2)^2}$$

จะได้ว่า $x = Ax - 2A + B$

เทียบ ส.ป.ส. จะได้ว่า

$$A = 1$$

$$-2A + B = 0$$

แก้สมการ จะได้ว่า $A = 1$, $B = 2$

ดังนั้น $\int \frac{x\,dx}{(x-2)^2} = \int \frac{dx}{x-2} + 2\int \frac{dx}{(x-2)^2}$

$$= \ell n\,|x-2| + 2\cdot\frac{(x-2)^{-1}}{-1} + C$$

$$= \ell n\,|x-2| - \frac{2}{x-2} + C$$

8. $\int \frac{(3x+5)\,dx}{x^3-x^2-x+1}$

วิธีทำ แยกตัวประกอบของส่วน จะได้ว่า

$$\begin{aligned} x^3-x^2-x+1 &= x^2(x-1) - (x-1) \\ &= (x-1)(x^2-1) \\ &= (x-1)(x-1)(x+1) \\ &= (x-1)^2(x+1) \end{aligned}$$

ดังนั้น
$$\begin{aligned} \frac{3x+5}{x^3-x^2-x+1} &= \frac{A}{x-1} + \frac{B}{(x-1)^2} + \frac{C}{x+1} \\ &= \frac{A(x-1)(x+1) + B(x+1) + C(x-1)^2}{(x-1)^2(x+1)} \end{aligned}$$

จะได้ว่า
$$\begin{aligned} 3x+5 &= A(x-1)(x+1) + B(x+1) + C(x-1)^2 \\ &= (A+C)x^2 + (B-2C)x - A + B + C \end{aligned}$$

เทียบ ส.ป.ส. จะได้ว่า

$$\begin{aligned} A+C &= 0 \\ B-2C &= 3 \\ -A+B+C &= 5 \end{aligned}$$

แก้สมการ จะได้ว่า $A = -\frac{1}{2}$, $B = 4$, $C = \frac{1}{2}$

ดังนั้น
$$\begin{aligned} \int \frac{(3x+5)\,dx}{x^3-x^2-x+1} &= -\frac{1}{2}\int \frac{dx}{x-1} + 4\int \frac{dx}{(x-1)^2} + \frac{1}{2}\int \frac{dx}{x+1} \\ &= -\frac{1}{2}\ell n\,|x-1| - \frac{4}{(x-1)} + \frac{1}{2}\ell n\,|x+1| + C \\ &= -\frac{4}{x-1} + \frac{1}{2}\ell n\left|\frac{x+1}{x-1}\right| + C \end{aligned}$$

9. $\int \frac{x^4 - x^3 - x - 1}{x^3 - x^2} dx$

วิธีทำ เขียนตัวถูกอินทิเกรตใหม่ในรูปเศษส่วนจำนวนคละ

$$\frac{x^4 - x^3 - x - 1}{x^3 - x^2} = x - \frac{x+1}{x^3 - x^2}$$

$$= x - \frac{x+1}{x^2(x-1)}$$

พิจารณา $\frac{x+1}{x^2(x-1)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x^2} + \frac{C}{x-1}$

$$= \frac{Ax(x-1) + B(x-1) + C(x^2)}{x^2(x-1)}$$

จะได้ว่า $x + 1 = Ax(x-1) + B(x-1) + Cx^2$

$$= (A+C)x^2 + (B-A)x - B$$

เทียบ ส.ป.ส. จะได้ว่า

$$A + C = 0$$

$$B - A = 1$$

$$-B = 1$$

แก้สมการจะได้ว่า $A = -2$, $B = -1$ และ $C = 2$

ดังนั้น $\int \frac{x^4 - x^3 - x - 1}{x^3 - x^2} dx = \int x\,dx + 2\int \frac{dx}{x} + \int \frac{dx}{x^2} - 2\int \frac{dx}{x-1}$

$$= \frac{x^2}{2} + 2\ln|x| - \frac{1}{x} - 2\ln|x-1| + C$$

$$= \frac{x^2}{2} - \frac{1}{x} - 2\ln\left|\frac{x-1}{x}\right| + C$$

10. $\int \frac{x^3+x^2+x+2}{x^4+3x^2+2}dx$

วิธีทำ แยกตัวประกอบของส่วน จะได้ว่า

$$x^4+3x^2+2 = (x^2+1)(x^2+2)$$

ดังนั้น
$$\frac{x^3+x^2+x+2}{x^4+3x^2+2} = \frac{Ax+B}{x^2+1} + \frac{Cx+D}{x^2+2}$$
$$= \frac{(Ax+B)(x^2+2) + (Cx+D)(x^2+1)}{(x^2+1)(x^2+2)}$$

จะได้ว่า
$$x^3+x^2+x+2 = (Ax+B)(x^2+2) + (Cx+D)(x^2+1)$$
$$= (A+C)x^3 + (B+D)x^2 + (2A+C)x + 2B+D$$

เทียบ ส.ป.ส. จะได้ว่า

$$A+C = 1$$
$$B+D = 1$$
$$2A+C = 1$$
$$2B+D = 2$$

แก้สมการ จะได้ว่า $A = 0$, $B = 1$, $C = 1$, $D = 0$

ดังนั้น
$$\int \frac{x^3+x^2+x+2}{x^4+3x^2+2}dx = \int \frac{dx}{x^2+1} + \int \frac{x\,dx}{x^2+2}$$
$$= \arctan x + \frac{1}{2}\ell n|x^2+2| + C$$

11. $\int \frac{x^2dx}{a^4-x^4}$

วิธีทำ แยกตัวประกอบของส่วน จะได้ว่า

$$a^4-x^4 = (a^2-x^2)(a^2+x^2)$$
$$= (a-x)(a+x)(a^2+x^2)$$

ดังนั้น
$$\frac{x^2}{a^4-x^4} = \frac{A}{a-x} + \frac{B}{a+x} + \frac{Cx+D}{a^2+x^2}$$
$$= \frac{A(a+x)(a^2+x^2) + B(a-x)(a^2+x^2) + (Cx+D)(a^2-x^2)}{a^4-x^4}$$

จะได้ว่า
$$x^2 = A(a+x)(a^2+x^2) + B(a-x)(a^2+x^2) + (Cx+D)(a^2-x^2)$$
$$= (A-B-C)x^3 + (aA+aB-D)x^2$$
$$+ (a^2A-a^2B+a^2C)x + a^3A+a^3B+a^2D$$

เทียบ ส.ป.ส. จะได้ว่า

$$A-B-C = 0$$
$$aA+aB-D = 1$$
$$A-B+C = 0$$
$$aA+aB+D = 0$$

แก้สมการ จะได้ว่า $A = \frac{1}{4a}$, $B = \frac{1}{4a}$, $C = 0$, $D = -\frac{1}{2}$

ดังนั้น
$$\int \frac{x^2}{a^4-x^4}dx = \frac{1}{4a}\int \frac{dx}{a-x} + \frac{1}{4a}\int \frac{dx}{a+x} - \frac{1}{2}\int \frac{dx}{a^2+x^2}$$
$$= -\frac{1}{4a}\ell n\,|a-x| + \frac{1}{4a}\ell n\,|a+x| - \frac{1}{2a}\arctan\frac{x}{a} + C$$
$$= \frac{1}{4a}\ell n\left|\frac{a+x}{a-x}\right| - \frac{1}{2a}\arctan\frac{x}{a} + C$$

12. $\int \frac{2x^2+3}{(x^2+1)^2}dx$

วิธีทำ แยกเศษส่วนย่อย จะได้ว่า

$$\frac{2x^2+3}{(x^2+1)^2} = \frac{Ax+B}{x^2+1} + \frac{Cx+D}{(x^2+1)^2}$$

$$= \frac{(Ax+B)(x^2+1) + Cx+D}{(x^2+1)^2}$$

จะได้ว่า $2x^2+3 = (Ax+B)(x^2+1) + Cx+D$

$$= Ax^3+Bx^2 + (A+C)x + B+D$$

เทียบ ส.ป.ส. จะได้ว่า

$$A = 0$$

$$B = 2$$

$$A+C = 0$$

$$B+D = 3$$

แก้สมการจะได้ว่า $A = 0$, $B = 2$, $C = 0$ และ $D = 1$

ดังนั้น $\int \frac{2x^2+3}{(x^2+1)^2}dx = \int \frac{2dx}{x^2+1} + \int \frac{1dx}{(x^2+1)^2}$

$$= 2\arctan x + \int \frac{dx}{(x^2+1)^2}$$

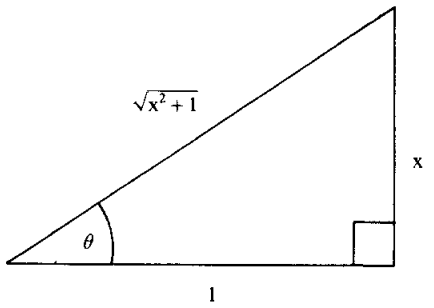
พิจารณา $\int \frac{dx}{(x^2+1)^2}$

ให้ $x = \tan x$

$$dx = \sec^2\theta \, d\theta$$

$$x^2+1 = \tan^2\theta + 1$$

$$= \sec^2\theta$$



แทนค่า จะได้

$$\begin{aligned}
\int \frac{dx}{(x^2+1)^2} &= \int \frac{\sec^2\theta\, d\theta}{\sec^4\theta} \\
&= \int \cos^2\theta\, d\theta \\
&= \int \frac{1+\cos 2\theta}{2}\, d\theta \\
&= \frac{1}{2}\theta + \frac{1}{4}\sin 2\theta + C \\
&= \frac{1}{2}\theta + \frac{1}{2}\sin\theta\cos\theta + C \\
&= \frac{1}{2}\arctan x + \frac{1}{2}\cdot\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}\cdot\frac{1}{\sqrt{x^2+1}} + C \\
&= \frac{1}{2}\arctan x + \frac{1}{2}\cdot\frac{x}{x^2+1} + C
\end{aligned}$$

ดังนั้น $\int \frac{2x^2+3}{(x^2+1)^2}\, dx = \frac{5}{2}\arctan x + \frac{1}{2}\cdot\frac{x}{x^2+1} + C$

13. $\int \frac{dx}{x^3+x}$

วิธีทำ แยกเศษส่วนย่อย จะได้ว่า

$$\begin{aligned}
\frac{1}{x^3+x} &= \frac{1}{x(x^2+1)} \\
&= \frac{A}{x} + \frac{Bx+C}{x^2+1} \\
&= \frac{A(x^2+1) + x(Bx+C)}{x(x^2+1)}
\end{aligned}$$

จะได้ว่า

$$\begin{aligned}
1 &= A(x^2+1) + x(Bx+C) \\
&= (A+B)x^2 + Cx + A
\end{aligned}$$

เทียบ ส.ป.ส. จะได้ว่า

$$\begin{aligned}
A+B &= 0 \\
C &= 0 \\
A &= 1
\end{aligned}$$

แก้สมการ จะได้ว่า $A = 1$, $B = -1$ และ $C = 0$

ดังนั้น

$$\begin{aligned}
\int \frac{dx}{x^3+x} &= \int \frac{dx}{x} + \int \frac{-x\, dx}{x^2+1} \\
&= \ln|x| - \frac{1}{2}\ln|x^2+1| + C \\
&= \ln\left|\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}\right| + C
\end{aligned}$$

14. $\int \frac{x^3+x^2+x+3}{(x^2+1)(x^2+3)}dx$

วิธีทำ แยกเศษส่วนย่อย จะได้ว่า

$$\frac{x^3+x^2+x+3}{(x^2+1)(x^2+3)} = \frac{Ax+B}{x^2+1} + \frac{Cx+D}{x^2+3}$$

$$= \frac{(Ax+B)(x^2+3) + (Cx+D)(x^2+1)}{(x^2+1)(x^2+3)}$$

ดังนั้น $x^3+x^2+x+3 = (Ax+B)(x^2+3) + (Cx+D)(x^2+1)$

$$= (A+C)x^3 + (B+D)x^2 + (3A+C)x + 3B + D$$

เทียบ ส.ป.ส. จะได้ว่า

$$A+C = 1$$

$$B+D = 1$$

$$3A+C = 1$$

$$3B+D = 3$$

แยกสมการ จะได้ว่า $A = 0,\ C = 1,\ B = 1,\ D = 0$

ดังนั้น $\int \frac{x^3+x^2+x+3}{(x^2+1)(x^2+3)}dx = \int \frac{dx}{x^2+1} + \int \frac{x\,dx}{x^2+3}$

$$= \arctan x + \frac{1}{2}\ell n|x^2+3| + C$$

$$= \ell n\sqrt{x^2+3} + \arctan x + C$$

15. $\int \frac{2x^3}{(x^2+1)^2}\,dx$

วิธีทำ แยกเศษส่วนย่อย จะได้ว่า

$$\frac{2x^3}{(x^2+1)^2} = \frac{Ax+B}{x^2+1} + \frac{Cx+D}{(x^2+1)^2}$$

$$= \frac{(Ax+B)(x^2+1) + Cx+D}{(x+1)^2}$$

ดังนั้น

$$2x^3 = (Ax+B)(x^2+1) + Cx + D$$

$$= Ax^3 + Bx^2 + (A+C)x + B+D$$

เทียบ ส.ป.ส. จะได้ว่า

$$A = 2$$

$$B = 0$$

$$A+C = 0$$

$$B+D = 0$$

แก้สมการ จะได้ว่า $A = 2$, $B = 0$, $C = -2$ และ $D = 0$

ดังนั้น

$$\int \frac{2x^3dx}{(x^2+1)^2} = \int \frac{2x}{x^2+1}dx + \int \frac{-2x\,dx}{(x^2+1)^2}$$

$$= \ell n\,|x^2+1| + \frac{1}{x^2+1} + C$$

16. $\int \frac{(2x^3+x^2+4)}{(x^2+4)^2}dx$

วิธีทำ แยกเศษส่วนย่อย จะได้ว่า

$$\frac{2x^3+x^2+4}{(x^2+4)^2} = \frac{Ax+B}{x^2+4} + \frac{Cx+D}{(x^2+4)^2}$$

$$= \frac{(Ax+B)(x^2+4) + Cx+D}{(x^2+4)^2}$$

ดังนั้น $$2x^3+x^2+4 = (Ax+B)(x^2+4) + Cx+D$$

$$= Ax^3+Bx^2 + (4A+C)x + 4B+D$$

เทียบ ส.ป.ส. จะได้ว่า

$$A = 2$$

$$B = 1$$

$$4A+C = 0$$

$$4B+D = 4$$

แก้สมการ จะได้ว่า $A = 2,\ B = 1,\ C = -8,\ D = 0$

ดังนั้น $$\int \frac{2x^3+x^2+4}{(x^2+4)^2}dx = \int \frac{2x+1}{x^2+4}dx + \int \frac{8x\,dx}{(x^2+4)^2}$$

$$= \int \frac{2x\,dx}{x^2+4} + \int \frac{dx}{x^2+4} - 4\int \frac{2x\,dx}{(x^2+4)^2}$$

$$= \ell n\,|x^2+4| + \frac{1}{2}\arctan\frac{x}{2} + \frac{4}{x^2+4} + C$$

17. $\int \frac{x^3+x-1}{(x^2+1)^2}\,dx$

วิธีทำ แยกเศษส่วนย่อย จะได้ว่า

$$\frac{x^3+x-1}{(x^2+1)^2} = \frac{Ax+B}{x^2+1} + \frac{Cx+D}{(x^2+1)^2}$$

$$= \frac{(Ax+B)(x^2+1) + Cx+D}{(x^2+1)^2}$$

ดังนั้น $x^3+x-1 = (Ax+B)(x^2+1) + Cx+D$

$$= Ax^3+Bx^2 + (A+C)x + B+D$$

เทียบ ส.ป.ส. จะได้ว่า

$$A = 1$$

$$B = 0$$

$$A+C = 1$$

$$B+D = -1$$

แก้สมการ จะได้ว่า $A = 1,\ B = 0,\ C = 0,\ D = 1$

ดังนั้น $\int \frac{x^3+x-1}{(x^2+1)^2}dx = \int \frac{x\,dx}{(x^2+1)} + \int \frac{-1}{(x^2+1)^2}dx$

$$= \frac{1}{2}\ell n|\chi^2+1| - \int \frac{dx}{(x^2+1)^2}$$

$$= \frac{1}{2}\ell n\,|x^2+1| - \frac{1}{2}\arctan x - \frac{1}{2}\cdot\frac{x}{x^2+1} + C$$

หมายเหตุ ค่าอินทิเกรต $\int \frac{dx}{(x^2+1)^2} = \frac{1}{2}\arctan x + \frac{1}{2}\cdot\frac{x}{x^2+1}$ ดูได้จากข้อ 12. ในแบบฝึกหัดชุดนี้

18. $\int \frac{x^4}{(1-x)^3}dx$

วิธีทำ

$$\frac{x^4}{(1-x)^3} = \frac{x^4}{1-x+x^2-x^3}$$

$$= -x-3 + \frac{6x^2-8x+3}{(1-x)^3}$$

พิจารณา $\frac{6x^2-8x+3}{(1-x)^3} = \frac{A}{1-x} + \frac{B}{(1-x)^2} + \frac{C}{(1-x)^3}$

$$= \frac{A(1-x)^2 + B(1-x) + C}{(1-x)^3}$$

จะได้ว่า $6x^2-8x+3 = A(1-x)^2 + B(1-x) + C$

$$= Ax^2 + (-2A-B)x + A+B+C$$

เทียบ ส.ป.ส. จะได้ว่า

$$A = 6$$

$$-2A-B = -8$$

$$A+B+C = 3$$

แก้สมการ จะได้ว่า $A = 6$, $B = -4$ และ $C = 1$

ดังนั้น $\int \frac{x^4\,dx}{(1-x)^3} = \int -xdx + \int -3dx + 6\int \frac{dx}{1-x} - 4\int \frac{dx}{(1-x)^2} + \int \frac{dx}{(1-x)^3}$

$$= -\frac{x^2}{2} - 3x - 6\ell n|1-x| - \frac{4}{1-x} + \frac{1}{2(1-x)^2} + C$$

19. $\int \frac{x^5 - x^4 + 4x^3 - 4x^2 + 8x - 4}{(x^2+2)^3} dx$

วิธีทำ $\frac{x^5 - x^4 + 4x^3 - 4x^2 + 8x - 4}{(x^2+2)^3} = \frac{Ax+B}{x^2+2} + \frac{Cx+D}{(x^2+2)^2} + \frac{Ex+F}{(x^2+2)^3}$

จะได้ว่า $x^5 - x^4 + 4x^3 - 4x^2 + 8x - 4 = (Ax+B)(x^2+2)^2 + (Cx+D)(x^2+2) + Ex + F$

$$= Ax^5 + Bx^4 + (4A+C)x^3 + (4B+D)x^2$$
$$+ (4A+2C+E)x + (4B+2D+F)$$

เทียบ ส.ป.ส. จะได้ว่า

$$A = 1$$
$$B = -1$$
$$4A + C = 4$$
$$4B + D = -4$$
$$4A + 2C + E = 8$$
$$4B + 2D + F = -4$$

แก้สมการจะได้ว่า $A = 1,\ B = -1,\ C = 0,\ D = 0,\ E = 4,\ F = 0$

ดังนั้น $\int \frac{x^5 - x^4 + 4x^3 - 4x^2 + 8x - 4}{(x^2+2)^3} dx = \int \frac{x-1}{x^2+2} + 4\int \frac{x\,dx}{(x^2+2)^3}$

$$= \frac{1}{2}\ln|x^2+2| - \frac{\sqrt{2}}{2}\arctan\frac{x}{\sqrt{2}} - \frac{1}{(x^2+2)^2} + C$$

20. $\int \frac{dx}{e^{2x}-3e^{x}}$

วิธีทำ พิจารณา

$$\frac{1}{e^{2x}-3e^{x}} = \frac{A}{e^{x}} + \frac{B}{e^{x}-3}$$

$$= \frac{A(e^{x}-3) + Be^{x}}{e^{x}(e^{x}-3)}$$

จะได้ว่า

$$1 = A(e^{x}-3) + Be^{x}$$

$$= (A+B)e^{x} - 3A$$

เทียบ ส.ป.ส. จะได้ว่า

$$A+B = 0$$

$$-3A = 1$$

แก้สมการ จะได้ว่า $A = -\frac{1}{3}$, $B = \frac{1}{3}$

ดังนั้น

$$\int \frac{dx}{e^{2x}-3e^{x}} = -\frac{1}{3}\int \frac{dx}{e^{x}} + \frac{1}{3}\frac{dx}{e^{x}-3}$$

$$= -\frac{1}{3}\int e^{-x}dx + \frac{1}{3}\int \frac{e^{-x}}{1-3e^{-x}}dx$$

$$= \frac{1}{3}e^{-x} + \frac{1}{3}\left(-\frac{1}{3}\right)\int \frac{-3e^{-x}}{1-3e^{-x}}dx$$

$$= \frac{1}{3}e^{-x} + \frac{1}{9}\ell n\,|1-3e^{-x}| + C$$

$$= \frac{1}{3e^{x}} + \frac{1}{9}\ell n\left|\frac{e^{x}-3}{e^{x}}\right| + C$$

21. $\int \frac{\sin x\, dx}{\cos x\,(1+\cos^2 x)}$

วิธีทำ $\int \frac{\sin x\, dx}{\cos x\,(1+\cos^2 x)} = -\int \frac{d\cos x}{\cos x\,(1+\cos^2 x)}$

ให้ $u = \cos x$ แทนค่าจะได้

ดังนั้น $\int \frac{\sin x\, dx}{\cos x\,(1+\cos^2 x)} = -\int \frac{du}{u(1+u^2)}$

พิจารณา $\frac{1}{u(1+u^2)} = \frac{A}{u} + \frac{Bu+C}{u^2+1}$

$$= \frac{A(u^2+1) + (Bu+C)u}{u(u^2+1)}$$

จะได้ว่า $1 = A(u^2+1) + (Bu+C)u$

$$1 = (A+B)u^2 + Cu + A$$

เทียบ ส.ป.ส. จะได้ว่า

$$A+B = 0$$
$$C = 0$$
$$A = 1$$

แก้สมการ จะได้ว่า $A = 1$, $B = -1$ และ $C = 0$

ดังนั้นจะได้ว่า

$$\int \frac{\sin x\, dx}{\cos x\,(1+\cos^2 x)} = -\int \frac{1}{\cos x} d\cos x + \int \frac{\cos x}{1+\cos^2 x} d\cos x$$

$$= -\ell n\,|\cos x| + \frac{1}{2}\ell n\,|1+\cos^2 x| + C$$

$$= \ell n \left|\frac{\sqrt{1+\cos^2 x}}{\cos x}\right| + C$$

22. $\int \frac{(2+\tan^2\theta)\sec^2\theta}{1+\tan^3\theta}\,d\theta$

วิธีทำ ให้

$$u = \tan\theta$$
$$du = \sec^2\theta\, d\theta$$

แทนค่าจะได้ว่า

$$\int \frac{(2+\tan^2\theta)\sec^2\theta}{1+\tan^3\theta}\,d\theta = \int \frac{(2+u^2)}{1+u^3}\,du$$
$$= \int \frac{(2+u^2)\,du}{(1+u)(1-u+u^2)}$$

พิจารณา
$$\frac{2+u^2}{(1+u)(1-u+u^2)} = \frac{A}{1+u} + \frac{Bu+C}{1-u+u^2}$$
$$= \frac{A(1-u+u^2) + (Bu+C)(1+u)}{(1+u)(1-u+u^2)}$$

จะได้ว่า
$$2+u^2 = A(1-u+u^2) + (Bu+C)(1+u)$$
$$= (A+B)u^2 + (-A+B+C)u + A+C$$

เทียบ ส.ป.ส. จะได้ว่า

$$A+B = 1$$
$$-A+B+C = 0$$
$$A+C = 2$$

แก้สมการ จะได้ว่า $A = 1,\ B = 0,\ C = 1$

ดังนั้น
$$\int \frac{(2+u^2)\,du}{1+u^3} = \int \frac{1}{1+u}\,du + \int \frac{1}{u^2-u+1}\,du$$
$$= \ln|1+u| + 4\int \frac{du}{(4u^2-4u+1)+3}$$
$$= \ln|1+u| + 2\int \frac{d(2u-1)}{(2u-1)^2+3}$$
$$= \ln|1+u| + \frac{2}{\sqrt{3}}\arctan\frac{2u-1}{\sqrt{3}} + C$$

ดังนั้นจะได้ว่า

$$\int \frac{(2+\tan^2\theta)\sec^2\theta}{1+\tan^3\theta}\,d\theta = \ln|1+\tan\theta| + \frac{2}{\sqrt{3}}\arctan\frac{2\tan\theta-1}{\sqrt{3}} + C$$

จงหาค่าอินทิกรัลจำกัดเขตต่อไปนี้

23. $\int_{-1}^{2} \frac{dx}{x^2-9}$

วิธีทำ พิจารณา

$$\frac{1}{x^2-9} = \frac{A}{x-3} + \frac{B}{x+3}$$

$$= \frac{A(x+3) + B(x-3)}{(x-3)(x+3)}$$

จะได้ว่า

$$1 = A(x+3) + B(x-3)$$

$$1 = (A+B)x + 3A-3B$$

เทียบ ส.ป.ส. จะได้ว่า

$$A+B = 0$$

$$3A-3B = 1$$

แก้สมการ จะได้ว่า $A = \frac{1}{6}$, $B = -\frac{1}{6}$

ดังนั้น

$$\int \frac{dx}{x^2-9} = \frac{1}{6}\int \frac{dx}{x-3} - \frac{1}{6}\int \frac{dx}{x+3}$$

$$= \frac{1}{6}\ell n\,|x-3| - \frac{1}{6}\ell n\,|x+3| + C$$

$$= \frac{1}{6}\ell n\left|\frac{x-3}{x+3}\right| + C$$

ดังนั้น

$$\int_{-1}^{2} \frac{dx}{x^2-9} = \frac{1}{6}\ell n\left|\frac{x-3}{x+3}\right|_{-1}^{2}$$

$$= \frac{1}{6}\ell n\,\frac{1}{5} - \frac{1}{6}\ell n\,2$$

$$= -\frac{1}{6}\ell n\,10$$

24. $\int_{-8}^{-3} \frac{(x+2)}{x(x-2)^2}\,dx$

วิธีทำ

$$\frac{x+2}{x(x-2)^2} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x-2} + \frac{C}{(x-2)^2}$$

$$= \frac{A(x-2)^2 + B(x-2)(x) + Cx}{x(x-2)^2}$$

$$x+2 = A(x-2)^2 + B(x-2)(x) + Cx$$

$$= (A+B)x^2 + (C-4A-2B)x + 4A$$

เทียบ ส.ป.ส. จะได้ว่า

$$A+B = 0$$

$$C-4A-2B = 1$$

$$4A = 2$$

แก้สมการ จะได้ว่า $A = \frac{1}{2}$, $B = -\frac{1}{2}$, $C = 4$

ดังนั้น $\int \frac{x+2}{x(x-2)^2}\,dx = \frac{1}{2}\int \frac{dx}{x} - \frac{1}{2}\int \frac{dx}{x-2} + 4\int \frac{dx}{(x-2)^2}$

$$= \frac{1}{2}\ell n\,|x| - \frac{1}{2}\ell n\,|x-2| - \frac{4}{(x-2)} + C$$

ดังนั้น $\int_{-8}^{-3} \frac{(x+2)\,dx}{x(x-2)^2} = \frac{1}{2}\ell n\left|\frac{x}{x-2}\right| - \frac{4}{(x-2)}\Big|_{-8}^{-3}$

$$= \frac{1}{2}\left(\ell n\,\frac{3}{5} + \frac{4}{5}\right) - \frac{1}{2}\left(\ell n\,\frac{4}{5} + \frac{2}{5}\right)$$

$$= \frac{1}{2}\left(\ell n\,\frac{3}{4} + \frac{2}{5}\right)$$

$$= \frac{1}{2}\ell n\,\frac{3}{4} + \frac{1}{5}$$

25. $\displaystyle\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}} \frac{\sin x\, dx}{\cos^2 x - 5\cos x + 4}$

วิธีทำ ให้

$$u = \cos x$$

$$du = -\sin x\, dx$$

$$\int \frac{\sin x\, dx}{\cos^2 x - 5\cos x + 4} = -\int \frac{du}{u^2 - 5u + 4}$$

$$= -\int \frac{du}{(u-1)(u-4)}$$

พิจารณา $\dfrac{1}{(u-1)(u-4)} = \dfrac{A}{u-1} + \dfrac{B}{u-4}$

$$= \frac{A(u-4) + B(u-1)}{(u-1)(u-4)}$$

ดังนั้น $1 = A(u-4) + B(u-1)$

$$1 = (A+B)u - 4A - B$$

เทียบ ส.ป.ส. จะได้ว่า

$$A + B = 0$$

$$-4A - B = 1$$

แก้สมการ จะได้ว่า $A = -\dfrac{1}{3}$, $B = \dfrac{1}{3}$

ดังนั้น $\displaystyle\int \frac{\sin x\, dx}{\cos^2 x - 5\cos x + 4} = \frac{1}{3}\int \frac{d\cos x}{\cos x - 1} - \frac{1}{3}\int \frac{d\cos x}{\cos x - 4}$

$$= \frac{1}{3}\ell n\,|\cos x - 1| - \frac{1}{3}\ell n\,|\cos x - 4| + C$$

$$= \frac{1}{3}\ell n\left|\frac{\cos x - 1}{\cos x - 4}\right| + C$$

ดังนั้น จะได้ว่า

$$\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}} \frac{\sin x\, dx}{\cos^2 x - 5\cos x + 4} = \frac{1}{3}\ell n\left|\frac{\cos x - 1}{\cos x - 4}\right|\Bigg|_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}}$$

$$= \frac{1}{3}\ell n\left|\frac{-\frac{\sqrt{2}}{2} - 1}{-\frac{\sqrt{2}}{2} - 4}\right| - \frac{1}{3}\ell n\left|\frac{\frac{\sqrt{2}}{2} - 1}{\frac{\sqrt{2}}{2} - 4}\right|$$

$$= \frac{1}{3}\ell n\left|\frac{2+\sqrt{2}}{8+\sqrt{2}}\right| - \frac{1}{3}\ell n\frac{2-\sqrt{2}}{8-\sqrt{2}}\Bigg|$$

$$= \frac{1}{3}\ell n\left|\frac{(2+\sqrt{2})(8-\sqrt{2})}{(8+\sqrt{2})(2-\sqrt{2})}\right|$$

$$= \frac{1}{3}\ell n\left|\frac{14+6\sqrt{2}}{14-6\sqrt{2}}\right|$$

$$= \frac{1}{3}\ell n\left|\frac{7+3\sqrt{2}}{7-3\sqrt{2}}\right|$$

แบบฝึกหัด 1.6

จงหาค่าอินทิกรัลต่อไปนี้

1. $\int x \sin x \, dx$

วิธีทำ ให้ $u = x \qquad dv = \sin x \, dx$

$du = dx \qquad v = -\cos x$

ดังนั้น
$$\begin{aligned}\int x \sin x \, dx &= -x\cos x - \int -\cos x \, dx \\ &= -x\cos x + \int \cos x \, dx \\ &= -x\cos x + \sin x + C\end{aligned}$$

2. $\int xe^x \, dx$

วิธีทำ ให้ $u = x \qquad dv = e^x \, dx$

$du = dx \qquad v = e^x$

ดังนั้น
$$\begin{aligned}\int x e^x \, dx &= x e^x - \int e^x \, dx \\ &= x e^x - e^x + C\end{aligned}$$

3. $\int x^2 \ln x \, dx$

วิธีทำ ให้ $u = \ln x \qquad dv = x^2 \, dx$

$du = \frac{1}{x} dx \qquad v = \frac{x^3}{3}$

ดังนั้น
$$\begin{aligned}\int x^2 \ln x \, dx &= \frac{x^3}{3}\ln x - \int \frac{x^3}{3} \cdot \frac{1}{x} dx \\ &= \frac{x^3}{3}\ln x - \int \frac{x^2}{3} dx \\ &= \frac{x^3}{3}\ln x - \frac{1}{9}x^3 + C\end{aligned}$$

4. $\int x\sqrt{1+x}\,dx$

วิธีทำ ให้ $u = x \qquad dv = \sqrt{1+x}\,dx$

$du = dx \qquad v = \frac{2}{3}(1+x)^{\frac{3}{2}}$

ดังนั้น
$$\begin{aligned}\int x\sqrt{1+x}\,dx &= \frac{2}{3}x(1+x)^{\frac{3}{2}} - \int \frac{2}{3}(1+x)^{\frac{3}{2}}\,dx \\ &= \frac{2}{3}x(1+x)^{\frac{3}{2}} - \frac{2}{3}\cdot\frac{2}{5}(1+x)^{\frac{5}{2}} + C \\ &= \frac{2}{3}x(1+x)^{\frac{3}{2}} - \frac{4}{15}(1+x)^{\frac{5}{2}} + C\end{aligned}$$

5. $\int \sec^3 x\,dx$

วิธีทำ ให้ $u = \sec x \qquad dv = \sec^2 x\,dx$

$du = \sec x \tan x\,dx \qquad v = \tan x$

ดังนั้น
$$\begin{aligned}\int \sec^3 x\,dx &= \sec x \tan x - \int \sec x \tan^2 x\,dx \\ &= \sec x \tan x - \int \sec x\,(\sec^2 x - 1)\,dx \\ &= \sec x \tan x - \int \sec^3 x\,dx + \int \sec x\,dx \\ 2\int \sec^3 x\,dx &= \sec x \tan x + \int \sec x\,dx \\ &= \sec x \tan x + \ell n\,|\sec x + \tan x| + C'\end{aligned}$$

ดังนั้น
$$\int \sec^3 x\,dx = \frac{1}{2}\left(\sec x \tan x + \ell n\,|\sec x + \tan x|\right) + C$$

6. $\int x^2 \sin x\,dx$

วิธีทำ ให้ $u = x^2 \qquad dv = \sin x\,dx$

$du = 2x\,dx \qquad v = -\cos x$

เพราะฉะนั้น $\int x^2 \sin x\,dx = -x^2\cos x + 2\int x\cos x\,dx$

ใช้การอินทิเกรตทีละส่วนอีกครั้ง

$u = x \qquad dv = \cos x\,dx$

$du = dx \qquad v = \sin x$

ดังนั้น
$$\begin{aligned}\int x^2 \sin x\,dx &= -x^2\cos x + 2\left(x\sin x - \int \sin x\,dx\right) \\ &= -x^2\cos x + 2x\sin x + 2\cos x + C\end{aligned}$$

7. $\int x^3 e^{2x}\,dx$

วิธีทำ ให้ $u = x^3$ $\quad dv = e^{2x}\,dx$

$du = 3x^2\,dx$ $\quad v = \frac{1}{2}e^{2x}$

เพราะฉะนั้น $\int x^3 e^{2x}\,dx = \frac{1}{2}x^3 e^{2x} - \int \frac{3}{2}x^2 e^{2x}\,dx$

$= \frac{1}{2}x^3 e^{2x} - \frac{3}{2}\int x^2 e^{2x}\,dx$

ให้ $u = x^2$ $\quad dv = e^{2x}\,dx$

$du = 2x\,dx$ $\quad v = \frac{1}{2}e^{2x}$

ดังนั้น $\int x^3 e^{2x}\,dx = \frac{1}{2}x^3 e^{2x} - \frac{3}{2}\left(\frac{1}{2}x^2e^{2x} - \int x\,e^{2x}\,dx\right)$

$= \frac{1}{2}x^3e^{2x} - \frac{3}{4}x^2e^{2x} + \frac{3}{2}\int x\,e^{2x}\,dx$

ให้ $u = x$ $\quad dv = e^{2x}\,dx$

$du = dx$ $\quad v = \frac{1}{2}e^{2x}$

ดังนั้น $\int x^3 e^{2x}\,dx = \frac{1}{2}x^3e^{2x} - \frac{3}{4}x^2e^{2x} + \frac{3}{2}\left(\frac{1}{2}x\,e^{2x} - \int \frac{1}{2}e^{2x}dx\right)$

$= \frac{1}{2}x^3e^{2x} - \frac{3}{4}x^2e^{2x} + \frac{3}{4}x\,e^{2x} - \frac{3}{4}\int e^{2x}\,dx$

$= \frac{1}{2}x^3e^{2x} - \frac{3}{4}x^2e^{2x} + \frac{3}{4}x\,e^{2x} - \frac{3}{8}e^{2x} + C$

8. $\int x\cos x\,dx$

วิธีทำ ให้ $u = x$ $\quad dv = \cos x\,dx$

$du = dx$ $\quad v = \sin x$

เพราะฉะนั้น $\int x\cos x\,dx = x\sin x - \int \sin x\,dx$

$= x\sin x + \cos x + C$

9. $\int x\sec^2 3x\,dx$

วิธีทำ ให้ $u = x$ $\quad dv = \sec^2 3x\,dx$

$du = dx$ $\quad v = \frac{1}{3}\tan 3x$

เพราะฉะนั้น $\int x\sec^2 3x\,dx = \frac{1}{3}x\tan 3x - \frac{1}{3}\int \tan 3x\,dx$

$= \frac{1}{3}x\tan 3x - \frac{1}{9}\ln|\sec 3x| + C$

10. $\int \arccos 2x \, dx$

วิธีทำ ให้ $u = \arccos 2x \qquad dv = dx$

$du = \dfrac{-2}{\sqrt{1-4x^2}}\,dx \qquad v = x$

ดังนั้น $\int \arccos 2x \, dx = x \arccos 2x + \int \dfrac{2x}{\sqrt{1-4x^2}}\,dx$

$= x \arccos 2x - \dfrac{1}{2}\sqrt{1-4x^2} + C$

11. $\int \arctan x \, dx$

วิธีทำ ให้ $u = \arctan x \qquad dv = dx$

$du = \dfrac{dx}{1+x^2} \qquad v = x$

ดังนั้น จะได้ว่า

$\int \arctan x \, dx = x \arctan x - \int \dfrac{x\,dx}{1+x^2}$

$= x \arctan x - \dfrac{1}{2}\ell n\,|1+x^2| + C$

$= x \arctan x - \ell n\sqrt{1+x^2} + C$

12. $\int \dfrac{x e^x}{(1+x)^2}\,dx$

วิธีทำ ให้ $u = x e^x \qquad dv = \dfrac{1}{(1+x)^2}\,dx$

$du = (1+x)e^x\,dx \qquad v = -\dfrac{1}{1+x}$

ดังนั้นจะได้ว่า $\int \dfrac{x e^x}{(1+x)^2}\,dx = -\dfrac{x e^x}{1+x} + \int e^x\,dx$

$= -\dfrac{x e^x}{1+x} + e^x + C$

$= -\dfrac{x e^x + e^x + x e^x}{1+x} + C$

$= \dfrac{e^x}{1+x} + C$

13. $\int x \arctan x \, dx$

วิธีทำ ให้ $u = \arctan x \qquad dv \; x\,dv$

$du = \dfrac{dx}{1+x^2} \qquad v = \dfrac{x^2}{2}$

จะได้ว่า

$$\begin{aligned}
\int x \arctan x \, dx &= \frac{x^2}{2}\arctan x - \frac{1}{2}\int \frac{x^2}{1+x^2}\,dx \\
&= \frac{x^2}{2}\arctan x - \frac{1}{2}\int \left(\frac{1+x^2-1}{1+x^2}\right) dx \\
&= \frac{x^2}{2}\arctan x - \frac{1}{2}\int \left(1-\frac{1}{1+x^2}\right) dx \\
&= \frac{x^2}{2}\arctan x - \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}\arctan x + C \\
&= \frac{1}{2}(x^2+1)\arctan x - \frac{1}{2}x + C
\end{aligned}$$

14. $\int x^2 e^{-3x}\,dx$

วิธีทำ ให้ $u = x^2 \qquad dv = e^{-3x}\,dx$

$du = 2x\,dx \qquad v = -\dfrac{1}{3}e^{-3x}$

จะได้ว่า

$$\int x^2 e^{-3x}\,dx = -\frac{1}{3}x^2 e^{-3x} + \frac{2}{3}\int x\,e^{-3x}\,dx$$

ให้ $u = x \qquad dv = e^{-3x}\,dx$

$du = dx \qquad v = -\dfrac{1}{3}e^{-3x}$

จะได้ว่า

$$\begin{aligned}
\int x^2 e^{-3x}\,dx &= -\frac{1}{3}x^2 e^{-3x} + \frac{2}{3}\left(-\frac{1}{3}x\,e^{-3x} + \frac{1}{3}\int e^{-3x}\,dx\right) \\
&= -\frac{1}{3}x^2 e^{-3x} - \frac{2}{9}x\,e^{-3x} + \frac{2}{9}\int e^{-3x}\,dx \\
&= -\frac{1}{3}x^2 e^{-3x} - \frac{2}{9}x\,e^{-3x} - \frac{2}{27}e^{-3x} + C \\
&= -\frac{1}{3}e^{-3x}\left(x^2 + \frac{2}{3}x + \frac{2}{9}\right) + C
\end{aligned}$$

15. $\int x^3 \sin x \, dx$

วิธีทำ ให้ $u = x^3$ $\quad dv = \sin x \, dx$

$du = 3x^2 \, dx$ $\quad v = -\cos x$

จะได้ว่า $\int x^3 \sin x \, dx = -x^3 \cos x + 3\int x^2 \cos x \, dx$

ให้ $u = x^2$ $\quad dv = \cos x \, dx$

$du = 2x$ $\quad v = \sin x$

จะได้ว่า $\int x^3 \sin x \, dx = -x^3 \cos x + 3\left(x^2 \sin x - 2\int x \sin x \, dx\right)$

$= -x^3 \cos x + 3x^2 \sin x - 6\int x \sin x \, dx$

ให้ $u = x$ $\quad dv = \sin x \, dx$

$du = dx$ $\quad v = -\cos x$

จะได้ว่า

$$\int x^3 \sin x \, dx = -x^3 \cos x + 3x^2 \sin x - 6\left(-x \cos x + \int \cos x \, dx\right)$$

$$= -x^3 \cos x + 3x^2 \sin x + 6x \cos x - 6 \sin x + C$$

16. $\int x \arcsin x^2 \, dx$

วิธีทำ $\int x \arcsin x^2 dx = \frac{1}{2}\int \arcsin x^2 \, dx^2$

ให้ $u = x^2$ จะได้ว่า

$\int x \arcsin x^2 \, dx = \frac{1}{2}\int \arcsin u \, du$

ให้ $w = \arcsin u$ $\quad dv = du$

$dw = \frac{du}{\sqrt{1-u^2}}$ $\quad v = u$

จะได้ว่า $\int x \arcsin x^2 \, dx = \frac{1}{2} u \arcsin u - \frac{1}{2}\int \frac{u \, du}{\sqrt{1-u^2}}$

$= \frac{1}{2} u \arcsin u + \frac{1}{2}\sqrt{1-u^2} + C$

$= \frac{1}{2} x^2 \arcsin x^2 + \frac{1}{2}\sqrt{1-x^4} + C$

17. $\int \sin x \sin 3x \, dx$

วิธีทำ ให้ $u = \sin 3x \qquad dv = \sin x \, dx$

$du = 3\cos 3x \, dx \qquad v = -\cos x$

ดังนั้น $\int \sin x \sin 3x \, dx = -\sin 3x \cos x + 3\int \cos 3x \cos x \, dx$

ให้ $u = \cos 3x \qquad dv = \cos x \, dx$

$du = -3\sin 3x \, dx \qquad v = \sin x$

ดังนั้น $\int \sin x \sin 3x \, dx = -\sin 3x \cos x + 3\left(\cos 3x \sin x + 3\int \sin 3x \sin x \, dx\right)$

$\int \sin x \sin 3x \, dx = -\sin 3x \cos x + 3\cos 3x \sin x + 9\int \sin 3x \sin x \, dx$

$-8\int \sin x \sin 3x \, dx = -\sin 3x \cos x + 3\cos 3x \sin x + C_1$

ดังนั้น $\int \sin x \cos 3x \, dx = \frac{1}{8}\sin 3x \cos x - \frac{3}{8}\cos 3x \sin x + C$

18. $\int \sin(\ell n\, x)\, dx$

วิธีทำ ให้ $u = \sin(\ell n\, x) \qquad dv = dx$

$du = \cos(\ell n\, x)\cdot\frac{1}{x}dx \qquad v = x$

ดังนั้นจะได้ว่า

$\int \sin(\ell n\, x)\, dx = x\sin(\ell n\, x) - \int \cos(\ell n\, x)\, dx$

ให้ $u = \cos(\ell n\, x) \qquad dv = dx$

$du = -\sin(\ell n\, x)\cdot\frac{1}{x}dx \qquad v = x$

ดังนั้น จะได้ว่า

$\int \sin(\ell n\, x)\, dx = x\sin(\ell n\, x) - x\cos(\ell n\, x) - \int \sin(\ell n\, x)\, dx$

$2\int \sin(\ell n\, x)\, dx = x\sin(\ell n\, x) - x\cos(\ell n\, x) + C_1$

ดังนั้น $\int \sin(\ell n\, x)\, dx = \frac{1}{2}[x\sin(\ell n\, x) - x\cos(\ell n\, x)] + C$

19. $\int e^{ax} \cos bx \, dx$

วิธีทำ ให้ $u = e^{ax}$ $\qquad dv = \cos bx \, dx$

$du = a e^{ax} dx$ $\qquad v = \frac{1}{b} \sin bx$

ดังนั้นจะได้ว่า

$$\int e^{ax} \cos bx \, dx = \frac{1}{b} e^{ax} \sin bx - \int \frac{a}{b} e^{ax} \sin bx \, dx$$

$$= \frac{1}{b} e^{ax} \sin bx - \frac{a}{b} \int e^{ax} \sin bx \, dx$$

ให้ $u = e^{ax}$ $\qquad dv = \sin bx \, dx$

$du = a e^{ax}$ $\qquad v = -\frac{1}{b} \cos bx$

ดังนั้นจะได้ว่า

$$\int e^{ax} \cos bx \, dx = \frac{1}{b} e^{ax} \sin bx - \frac{a}{b}\left(-\frac{1}{b} e^{ax} \cos bx + \frac{a}{b} \int e^{ax} \cos bx \, dx \right)$$

$$\int e^{ax} \cos bx \, dx + \frac{a^2}{b^2} \int e^{ax} \cos bx = \frac{1}{b} e^{ax} \sin bx + \frac{a}{b^2} e^{ax} \cos bx + C_1$$

$$\frac{a^2 + b^2}{b^2} \int e^{ax} \cos bx \, dx = \frac{b e^{ax} \sin bx + a e^{ax} \cos bx}{b^2} + C_1$$

ดังนั้น $$\int e^{ax} \cos bx \, dx = \frac{e^{ax}(b \sin bx + a \cos bx)}{a^2 + b^2} + C$$

20. $\int e^{ax} \sin bx \, dx$

วิธีทำ ให้ $u = e^{ax}$ $\qquad dv = \sin bx \, dx$

$du = a e^{ex}$ $\qquad v = -\frac{1}{b}\cos bx$

ดังนั้น จะได้ว่า

$$\int e^{ax}\sin bx \, dx = -\frac{1}{b}e^{ax}\cos bx + \frac{a}{b}\int e^{ax}\cos bx \, dx$$

ให้ $u = e^{ax}$ $\qquad dv = \cos bx \, dx$

$du = a e^{ax}$ $\qquad v = \frac{1}{b}\sin bx$

ดังนั้น จะได้ว่า

$$\int e^{ax}\sin bx \, dx = -\frac{1}{b}e^{ax}\cos bx + \frac{a}{b}\left(\frac{1}{b}e^{ax}\sin bx - \frac{a}{b}\int e^{ax}\sin bx \, dx\right)$$

$$= -\frac{1}{b}e^{ax}\cos bx + \frac{a}{b^2}e^{ax}\sin bx - \frac{a^2}{b^2}\int e^{ax}\sin bx \, dx$$

ดังนั้น $\int e^{ax}\sin bx \, dx + \frac{a^2}{b^2}\int e^{ax}\sin bx \, dx = -\frac{1}{b}e^{ax}\cos bx + \frac{a}{b^2}e^{ax}\sin bx + C_1$

$$\frac{a^2+b^2}{b^2}\int e^{ax}\sin bx \, dx = \frac{a e^{ax}\sin bx - b e^{ax}\cos bx}{b^2} + C_1$$

จะได้ว่า $\int e^{ax}\sin bx \, dx = \frac{e^{ax}(a \sin bx - b \cos bx)}{a^2+b^2} + C$

จงแสดงวิธีการกระจายสูตรลดรูป (reduction formula) ต่อไปนี้

21. $\int u^n e^{au} du = \frac{1}{a}u^n e^{au} - \frac{n}{a}\int u^{n-1}e^{au} \, du$

วิธีทำ ให้ $w = u^n$ $\qquad dv = e^{au}du$

$dw = nu^{n-1}du$ $\qquad v = \frac{1}{a}e^{au}$

ดังนั้นจะได้ว่า

$$\int u^n claudu = \frac{1}{a}u^n e^{au} - \frac{n}{a}\int u^{n-1}e^{au}du$$

22. $$\int u^n \cos bu\, du = \frac{u^n}{b}\sin bu - \frac{n}{b}\int u^{n-1}\sin bu\, du$$

วิธีทำ ให้ $w = u^n$ $\qquad dv = \cos bu\, du$

$dw = nu^{n-1}\, du$ $\qquad v = \frac{1}{b}\sin bu$

ดังนั้นจะได้ว่า

$$\int u^n \cos bu\, du = \frac{1}{b}u^n \sin bu - \frac{n}{b}\int u^{n-1}\sin bu$$

จงหาค่าอินทิกรัลจำกัดเขตต่อไปนี้

23. $\int_1^e \ell n\, x\, dx$

วิธีทำ พิจารณา $\int \ell n\, x\, dx$

ให้ $u = \ell n\, x$ $\qquad dv = dx$

$du = \frac{1}{x}dx$ $\qquad v = x$

ดังนั้น
$$\begin{aligned}\int \ell n\, x\, dx &= x\,\ell n\, x - \int dx \\ &= x\,\ell n\, x - x + C\end{aligned}$$

ดังนั้น
$$\begin{aligned}\int \ell n\, x\, dx &= x\,\ell n\, x - x \Big|_1^e \\ &= (e\,\ell n\, e - e) - (1\,\ell n\, 1 - 1) \\ &= (e - e) - (0 - 1) \\ &= 1\end{aligned}$$

24. $\int_0^{\frac{\pi}{3}} x^2\sin 3x\, dx$

วิธีทำ พิจารณา $\int x^2\sin 3x\, dx$

ให้ $u = x^2$ $\qquad dv = \sin 3x\, dx$

$du = 2x\, dx$ $\qquad v = -\frac{1}{3}\cos 3x$

ดังนั้น
$$\int x^2\sin 3x\, dx = -\frac{1}{3}x^2\cos 3x + \int \frac{2}{3}x\cos 3x\, dx$$
$$= -\frac{1}{3}x^2\cos 3x + \frac{2}{3}\int x\cos 3x\, dx$$

ให้ $u = x$ $\qquad dv = \cos 3x\, dx$

$du = dx$ $\qquad v = \frac{1}{3}\sin 3x$

ดังนั้น
$$\int x^2\sin 3x\, dx = -\frac{1}{3}x^2\cos 3x + \int \frac{2}{3}x\cos 3x\, dx$$
$$= -\frac{1}{3}x^2\cos 3x + \frac{2}{3}\int x\cos 3x\, dx$$

ให้ $u = x$ $\qquad dv = \cos 3x\, dx$

$du = dx$ $\qquad v = \frac{1}{3}\sin 3x$

ดังนั้น
$$\int x^2\sin 3x\, dx = -\frac{1}{3}x^2\cos 3x + \frac{2}{3}\left(\frac{1}{3}x\sin 3x - \frac{1}{3}\int \sin 3x\, dx\right)$$
$$= -\frac{1}{3}x^2\cos 3x + \frac{2}{9}x\sin 3x + \frac{2}{27}\cos 3x + C$$

ดังนั้นจะได้ว่า

$$\int_0^{\frac{\pi}{3}} x^2\sin 3x\, dx = -\frac{1}{3}x^2\cos 3x + \frac{2}{9}x\sin 3x + \frac{2}{27}\cos 3x \Big|_0^{\frac{\pi}{3}}$$
$$= \left(\frac{1}{3}\cdot\frac{\pi^2}{9} + 0 - \frac{2}{27}\right) - \left(0 + 0 + \frac{2}{27}\right)$$
$$= \frac{\pi^2}{27} - \frac{4}{27}$$
$$= \frac{1}{27}(\pi^2 - 4)$$

25. $\int_0^{\sqrt{2}} x^3 e^{x^2} dx$

วิธีทำ ให้ $u = x^2$ $\qquad dv = x e^{x^2} dx$

$du = 2x\,dx$ $\qquad v = \frac{1}{2} e^{x^2}$

ดังนั้นจะได้ว่า

$$\int x^3 e^{x^2} dx = \frac{1}{2} x^2 e^{x^2} - \int x e^{x^2} dx$$

$$\int x^3 e^{x^2} dx = \frac{1}{2} x^2 e^{x^2} - \frac{1}{2} e^{x^2} + C$$

ดังนั้น จะได้ว่า

$$\begin{aligned}
\int_0^{\sqrt{2}} x^3 e^{x^2} dx &= \frac{1}{2} x^2 e^{x^2} - \frac{1}{2} e^{x^2} \Big|_0^{\sqrt{2}} \\
&= \left(e^2 - \frac{1}{2} e^2\right) - \left(0 - \frac{1}{2}\right) \\
&= \frac{1}{2} e^2 + \frac{1}{2} \\
&= \frac{1}{2}(e^2 + 1)
\end{aligned}$$

แบบฝึกหัด 1.7

จงหาค่าอินทิกรัลต่อไปนี้

1. $\int \frac{dx}{\sin x + \tan x}$

วิธีทำ ให้ $z = \tan\frac{x}{2}$

$$dx = \frac{2}{1+z^2}dx \qquad \cos x = \frac{1-z^2}{1+z^2} \qquad \text{และ} \qquad \sin x = \frac{2z}{1+z^2}$$

แทนค่าจะได้

$$\int \frac{dx}{\sin x + \tan x} = \int \frac{\frac{2\,dz}{1+z^2}}{\frac{2z}{1+z^2} + \frac{2z}{1-z^2}}$$

$$= \int \frac{\frac{2dz}{1+z^2}}{\frac{4z}{(1+z^2)(1-z^2)}}$$

$$= \int \frac{(1-z^2)\,dz}{2z}$$

$$= \int \frac{1}{2z}dz - \int \frac{1}{2}z\,dz$$

$$= \frac{1}{2}\ell n\,|z| - \frac{1}{4}z^2 + C$$

$$= \frac{1}{2}\ell n\left|\tan\frac{x}{2}\right| - \frac{1}{4}\tan^2\frac{x}{2} + C$$

2. $\int \frac{dx}{1+\sin 6x+\cos 6x}$

วิธีทำ ให้ $u = 6x$ ดังนั้น $du = 6dx$

ดังนั้น $$\frac{dx}{1+\sin 6x+\cos 6x} = \frac{1}{6}\int \frac{du}{1+\sin u+\cos u}$$

ให้ $u = \tan\frac{u}{2}$

$$du = \frac{2}{1+z^2}dz \qquad \cos u = \frac{1-z^2}{1+z^2} \qquad \sin u = \frac{2z}{1+z^2}$$

แทนค่าจะได้ว่า

$$\int \frac{dx}{1+\sin 6x+\cos 6x} = \frac{1}{6}\int \frac{\frac{2}{1+z^2}dz}{1+\frac{2z}{1+z^2}+\frac{1-z^2}{1+z^2}}$$

$$= \frac{1}{6}\int \frac{2\,dz}{2+2z}$$

$$= \frac{1}{6}\int \frac{dz}{1+z}$$

$$= \frac{1}{6}\ln|1+z| + C$$

$$= \frac{1}{6}\ln\left|1+\tan\frac{u}{2}\right| + C$$

$$= \frac{1}{6}\ln|1+\tan 3x| + C$$

3. $\int \frac{d\theta}{5+4\cos 2\theta}$

วิธีทำ ให้ $u = 2\theta$ ดังนั้น $du = 2d\theta$

ดังนั้น $$\int \frac{d\theta}{5+4\cos 2\theta} = \frac{1}{2}\int \frac{du}{5+4\cos u}$$

ให้ $z = \tan\frac{u}{2}$

$du = \frac{2\,dz}{1+z^2}$ $\cos u = \frac{1-z^2}{1+z^2}$

แทนค่าจะได้ว่า

$$\int \frac{d\theta}{5+4\cos 2\theta} = \frac{1}{2}\int \frac{\frac{2\,dz}{1+z^2}}{5+4\left(\frac{1-z^2}{1+z^2}\right)}$$

$$= \frac{1}{2}\int \frac{2\,dz}{9+z^2}$$

$$= \frac{1}{2}\int \frac{dz}{9+z^2}$$

$$= \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}\arctan\frac{z}{3} + C$$

$$= \frac{1}{6}\arctan\left(\frac{\tan\theta}{3}\right) + C$$

4. $\int \frac{dx}{4\cos x - 3\sin x}$

วิธีทำ ให้ $z = \tan\frac{x}{2}$

$$dx = \frac{2\,dz}{1+z^2} \qquad \cos x = \frac{1-z^2}{1+z^2} \qquad \sin x = \frac{2z}{1+z^2}$$

แทนค่าในโจทย์ จะได้ว่า

$$\begin{aligned}
\int \frac{dx}{4\cos x - 3\sin x} &= \int \frac{\frac{2\,dz}{1+z^2}}{4\left(\frac{1-z^2}{1+z^2}\right) - 3\left(\frac{2z}{1+z^2}\right)} \\
&= \int \frac{2\,dz}{4-6z-4z^2} \\
&= \int \frac{dz}{2-3z-2z^2} \\
&= -\int \frac{dz}{2z^2+3z-2} \\
&= -\int \frac{dz}{(2z-1)(z+2)} \\
&= -\int \left[\frac{2}{5(2z-1)} - \frac{1}{5(z+2)}\right] dz \\
&= -\frac{2}{5}\int \frac{1}{(2z-1)}\,dx + \frac{1}{5}\int \frac{1}{z+2}\,dz \\
&= -\frac{1}{5}\ell n\,|2z-1| + \frac{1}{5}\ell n\,|z+2| + C \\
&= \frac{1}{5}\ell n\left|\frac{z+2}{2z-1}\right| + C \\
&= \frac{1}{5}\ell n\left|\frac{\tan\frac{x}{2}+2}{2\tan\frac{x}{2}-1}\right| + C
\end{aligned}$$

5. $\int \frac{dx}{2+2\sin x+\cos x}$

วิธีทำ ให้ $z = \tan\frac{x}{2}$

$$dx = \frac{2\,dz}{1+z^2} \qquad \cos x = \frac{1-z^2}{1+z^2} \qquad \sin x = \frac{2z}{1+z^2}$$

แทนค่าในโจทย์ จะได้ว่า

$$\begin{aligned}
\int \frac{dx}{2+2\sin x+\cos x} &= \int \frac{\frac{2\,dz}{1+z^2}}{2+2\left(\frac{2z}{1+z^2}\right)+\left(\frac{1-z^2}{1+z^2}\right)} \\
&= \int \frac{2\,dz}{3+4z+z^2} \\
&= \int \frac{2\,dz}{z^2+4z+3} \\
&= \int \frac{2\,dz}{(z+1)(z+3)} \\
&= \int \left(\frac{1}{z+1}-\frac{1}{z+3}\right) dz \\
&= \ell n\,|z+1| - \ell n\,|z+3| + C \\
&= \ell n\left|\tan\frac{x}{2}+1\right| - \ell n\left|\tan\frac{x}{2}+3\right| + C
\end{aligned}$$

6. $\int \frac{d\theta}{5\sec\theta - 3}$

วิธีทำ $\int \frac{d\theta}{5\sec\theta - 3} = \int \frac{\cos\theta\, d\theta}{5 - 3\cos\theta}$

ให้ $z = \tan\frac{\theta}{2}$

$d\theta = \frac{2\,dz}{1+z^2} \qquad \cos\theta = \frac{1-z^2}{1+z^2}$

แทนค่าในโจทย์ จะได้ว่า

$$\int \frac{d\theta}{5\sec\theta - 3} = \int \frac{\frac{1-z^2}{1+z^2}\cdot\frac{2\,dz}{1+z^2}}{5 - 3\left(\frac{1-z^2}{1+z^2}\right)}$$

$$= \int \frac{\frac{2(1-z^2)}{1+z^2}dz}{2+8z^2}$$

$$= \int \frac{(1-z^2)\,dz}{(1+z^2)(1+4z^2)}$$

$$= \int \left[\frac{-2}{3(z^2+1)} + \frac{5}{3(4z^2+1)}\right] dz$$

$$= -\frac{2}{3}\int \frac{dz}{1+z^2} + \frac{5}{3}\int \frac{dz}{1+4z^2}$$

$$= -\frac{3}{2}\arctan(z) + \frac{5}{6}\arctan(2z) + C$$

$$= -\frac{3}{2}\arctan\left(\tan\frac{\theta}{2}\right) + \frac{5}{6}\arctan\left(2\tan\frac{\theta}{2}\right) + C$$

7. $\int \frac{2-\cos\theta}{2+\cos\theta}\,d\theta$

วิธีทำ ให้ $z = \tan\frac{\theta}{2}$

$$d\theta = \frac{2\,dz}{1+z^2} \qquad \cos\theta = \frac{1-z^2}{1+z^2}$$

แทนค่าในโจทย์ จะได้ว่า

$$\int \frac{2-\cos\theta}{2+\cos\theta}\,d\theta = \int \frac{\left(2-\frac{1-z^2}{1+z^2}\right)}{2+\frac{1-z^2}{1+z^2}} \cdot \frac{2\,dz}{1+z^2}$$

$$= \int \frac{2(1+3z^2)\,dz}{(3+z^2)(1+z^2)}$$

$$= \int \left(\frac{8}{z^2+3} - \frac{2}{z^2+1}\right) dz$$

$$= 8\cdot\frac{1}{\sqrt{3}}\arctan\frac{z}{\sqrt{3}} - 2\arctan z + C$$

$$= \frac{8\sqrt{3}}{2}\arctan\left(\frac{\tan\frac{\theta}{2}}{\sqrt{3}}\right) - 2\arctan\left(\tan\frac{\theta}{2}\right) + C$$

8. $\int \frac{d\theta}{\cos\theta - 3\sin\theta + 3}$

วิธีทำ ให้ $z = \tan\frac{\theta}{2}$

$$d\theta = \frac{2\,dz}{1+z^2} \qquad \cos\theta = \frac{1-z^2}{1+z^2} \qquad \sin\theta = \frac{2z}{1+z^2}$$

แทนค่าในโจทย์ จะได้ว่า

$$\int \frac{d\theta}{\cos\theta - 3\sin\theta + 3} = \int \frac{\frac{2\,dz}{1+z^2}}{\left(\frac{1-z^2}{1+z^2}\right) - 3\left(\frac{2z}{1+z^2}\right) + 3}$$

$$= \int \frac{2\,dz}{2z^2-6z+4}$$

$$= \int \frac{dz}{z^2-3z+2}$$

$$= \int \frac{dz}{(z-1)(z-2)}$$

$$= \int \left(\frac{1}{z-2} - \frac{1}{z-1}\right) dz$$

$$= \ln|z-2| - \ln|z-1| + C$$

$$= \ln\left|\tan\frac{\theta}{2} - 2\right| - \ln\left|\tan\frac{\theta}{2} - 1\right| + C$$

9. $\int \frac{\sec\theta \, d\theta}{3\sec\theta + 2\tan\theta + 2}$

วิธีทำ $\int \frac{\sec\theta \, d\theta}{3\sec\theta + 2\tan\theta + 2} = \int \frac{d\theta}{3 + 2\sin\theta + 2\cos\theta}$

ให้ $z = \tan\frac{\theta}{2}$

$d\theta = \frac{2\,dz}{1+z^2} \qquad \cos\theta = \frac{1-z}{1+z^2} \qquad \sin\theta = \frac{2z}{1+z^2}$

แทนค่าในโจทย์ จะได้ว่า

$$\int \frac{\sec\theta \, d\theta}{3\sec\theta + 2\tan\theta + 2} = \int \frac{\frac{2\,dz}{1+z^2}}{3 + \left(\frac{2z}{1+z^2}\right) + 2\left(\frac{1-z^2}{1+z^2}\right)}$$

$$= \int \frac{2dz}{z^2 + 4z + 5}$$

$$= \int \frac{2dz}{(z+2)^2 + 1}$$

$$= 2 \text{ arc tan } (z+2) + c$$

$$= 2 \text{ arc tan } (\tan\frac{\theta}{2} + 2) + c$$

10. $\int \frac{\sin x\, dx}{\sin x + \cos x}$

วิธีทำ ให้ $z = \tan\frac{x}{2}$

$$dx = \frac{2\,dz}{1+z^2} \qquad \cos x = \frac{1-z^2}{1+z^2} \qquad \sin x = \frac{2z}{1+z^2}$$

แทนค่าในโจทย์ จะได้ว่า

$$\begin{aligned}
\int \frac{\sin x\, dx}{\sin x + \cos x} &= \int \frac{\frac{2z}{1+z^2}\cdot\frac{2\,dz}{1+z^2}}{\frac{2z}{1+z^2}+\frac{1-z^2}{1+z^2}} \\
&= \int \frac{4z\,dz}{(1+z^2)(1+2z-z^2)} \\
&= -\int \frac{4z\,dz}{(z^2+1)(z^2-2z-1)} \\
&= -\int \frac{4z\,dz}{(z^2+1)(z-1+\sqrt{2})(z-1-\sqrt{2})} \\
&= -\int \left(\frac{2-\sqrt{2}}{z-1+\sqrt{2}}+\frac{2+\sqrt{2}}{z-1-\sqrt{2}}-\frac{4z+4}{z^2+1}\right) dz \\
&= \int \left(\frac{4z+4}{z^2+1}-\frac{2-\sqrt{2}}{z-1+\sqrt{2}}-\frac{2+\sqrt{2}}{z-1-\sqrt{2}}\right) dz \\
&= 2\ln|z^2+1| + 4\arctan(z) - (2-\sqrt{2})\ln|z-1+\sqrt{2}| \\
&\quad - (2+\sqrt{2})\ln|z-1-\sqrt{2}| + C \\
&= 2\ln\left|\tan\frac{x}{2}+1\right| + 4\arctan\left(\tan\frac{x}{2}\right) \\
&\quad - (2-\sqrt{2})\ln\left|\tan\frac{x}{2}-1+\sqrt{2}\right| \\
&\quad - (2+\sqrt{2})\ln\left|\tan\frac{x}{2}-1-\sqrt{2}\right| + C
\end{aligned}$$

แบบฝึกหัด 1.8

ข้อใดต่อไปนี้เป็นอินทิกรัลไม่ตรงแบบ (Improper integral)

1. $\int_0^6 \frac{dx}{x-5}$

วิธีทำ เพราะว่า $f(x) = \frac{1}{x-5}$ เป็นฟังก์ชันที่ไม่ต่อเนื่อง ที่ $x = 5$ ซึ่งอยู่ในช่วง $[0, 6]$

ดังนั้น $\int_0^6 \frac{dx}{x-5}$ เป็นอินทิกรัลไม่ตรงแบบ

2. $\int_0^1 x \ln x \, dx$

วิธีทำ เพราะว่า $f(x) = x \ln x$ เป็นฟังก์ชันที่ไม่ต่อเนื่องที่ $x = 0$ ซึ่งเป็นขอบเขตล่างของการอินทิเกรต

ดังนั้น $\int_0^1 x \ln x \, dx$ เป็นอินทิกรัลไม่ตรงแบบ

3. $\int_0^1 \frac{\sin x}{x} dx$

วิธีทำ เพราะว่า $f(x) = \frac{\sin x}{x}$ เป็นฟังก์ชันที่ไม่ต่อเนื่องที่ $x = 0$ ซึ่งเป็นขอบเขตล่างของการอินทิเกรต

ดังนั้น $\int_0^1 \frac{\sin x}{x} dx$ เป็นอินทิกรัลไม่ตรงแบบ

4. $\int_{-1}^1 \frac{\sin x}{x} dx$

วิธีทำ เพราะว่า $f(x) = \frac{\sin x}{x}$ เป็นฟังก์ชันที่ไม่ต่อเนื่องที่ $x = 0$ ซึ่งอยู่ภายในช่วง $[-1, 1]$

ดังนั้น $\int_{-1}^1 \frac{\sin x}{x} dx$ เป็นอินทิกรัลไม่ตรงแบบ

5. $\int_0^\pi \frac{1-\cos x}{x^2} dx$

วิธีทำ เพราะว่า $f(x) = \frac{1-\cos x}{x^2}$ เป็นฟังก์ชันที่ไม่ต่อเนื่องที่ $x = 0$ ซึ่งเป็นขอบเขตล่างของการอินทิเกรต

ดังนั้น $\int_0^\pi \frac{1-\cos x}{x^2} dx$ เป็นอินทิกรัลไม่ตรงแบบ

6. $\int_0^{\infty} \frac{\cos x}{1+\sin x}\,dx$

วิธีทำ เพราะว่า $f(x) = \frac{\cos x}{1+\sin x}$ เป็นฟังก์ชันที่ไม่ต่อเนื่อง เมื่อ $x = \frac{3\pi}{2}$ ซึ่งอยู่ในช่วง $[0, \infty)$ และขอบเขตของการอินทิเกรตเป็นค่าอนันต์

ดังนั้น $\int_0^{\infty} \frac{\cos x}{1+\sin x}\,dx$ เป็นอินทิกรัลไม่ตรงแบบ

จงหาค่าของอินทิกรัลต่อไปนี้ เพื่อพิจารณาว่ามีค่าลู่เข้า (converge) หรือลู่ออก (diverge)

7. $\int_0^{8} \frac{dx}{\sqrt[3]{x}}$

วิธีทำ

$$\begin{aligned}
\int_0^{8} \frac{dx}{\sqrt[3]{x}} &= \lim_{\epsilon \to 0^+} \int_{\epsilon}^{8} \frac{dx}{\sqrt[3]{x}} \\
&= \lim_{\epsilon \to 0^+} \int_{\epsilon}^{8} x^{-\frac{1}{3}}\,dx \\
&= \lim_{\epsilon \to 0^+} \frac{3}{2} x^{\frac{2}{3}} \Big|_{\epsilon}^{8} \\
&= \lim_{\epsilon \to 0^+} \left(6 - \frac{3}{2}\epsilon^{\frac{2}{3}}\right) \\
&= 6
\end{aligned}$$

ดังนั้น $\int_0^{8} \frac{dx}{\sqrt[3]{x}}$ มีค่าลู่เข้า (converge)

8. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{\cos x}$

วิธีทำ

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{\cos x} = \lim_{\epsilon \to 0^+} \int_0^{\frac{\pi}{2}-\epsilon} \frac{dx}{\cos x}$$

$$= \lim_{\epsilon \to 0^+} \int_0^{\frac{\pi}{2}-\epsilon} \sec x \, dx$$

$$= \lim_{\epsilon \to 0^+} \Big[\ell n \, |\sec x + \tan x|\Big]_0^{\frac{\pi}{2}-\epsilon}$$

$$= \lim_{\epsilon \to 0^+} \big[\ell n \, |\operatorname{cosec} \epsilon + \cot \epsilon - 1|\big]$$

= หาค่าไม่ได้

ดังนั้น $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{\cos x}$ ลู่ออก (diverge)

9. $\int_0^3 \frac{dx}{(x-1)^{\frac{2}{3}}}$

วิธีทำ

$$\int_0^3 \frac{dx}{(x-1)^{\frac{2}{3}}} = \lim_{\epsilon_1 \to 0^+} \int_0^{1-\epsilon_1} \frac{dx}{(x-1)^{\frac{2}{3}}} + \lim_{\epsilon_2 \to 0^+} \int_{1+\epsilon_2}^3 \frac{dx}{(x-1)^{\frac{2}{3}}}$$

$$= \lim_{\epsilon_1 \to 0^+} 3(x-1)^{\frac{1}{3}} \Big|_0^{1-\epsilon_1} + \lim_{\epsilon_2 \to 0^+} 3(x-1)^{\frac{1}{3}} \Big|_{1+\epsilon_2}^3$$

$$= \lim_{\epsilon_1 \to 0^+} 3\left[(-\epsilon_1)^{\frac{1}{3}} + 1\right] + \lim_{\epsilon_2 \to 0^+} 3\left[2^{\frac{1}{3}} - (\epsilon_2)^{\frac{1}{3}}\right]$$

$$= 3 + 3\sqrt[3]{2}$$

$$= 3\left(1 + \sqrt[3]{2}\right)$$

ดังนั้น $\int_0^3 \frac{dx}{(x-1)^{\frac{2}{3}}}$ มีค่าลู่เข้า (converge)