บทที่ 6
อนุพันธ์ และอินทิกรัลของฟังก์ชันอดิศัย

ในบทที่ 4 และบทที่ 5 ได้กล่าวถึงอนุพันธ์ และอินทิกรัลของฟังก์ชันพีชคณิต แต่ในบทนี้จะศึกษาอนุพันธ์และอินทิกรัลของฟังก์ชันซึ่งไม่ใช่ฟังก์ชันพีชคณิต ที่เรียกว่าฟังก์ชันอดิศัย (trancendental function) ซึ่งได้แก่

(1) ฟังก์ชันตรีโกณมิติ

(2) ฟังก์ชันตรีโกณมิติผกผัน

(3) ฟังก์ชันลอการิทึม

(4) ฟังก์ชันชี้กำลัง

(5) ฟังก์ชันไฮเพอร์โบลิก

(6) ฟังก์ชันในรูป a^u , u^v

ซึ่งจะได้แยกกล่าวถึงอนุพันธ์ และอินทิกรัลของแต่ละฟังก์ชันโดยละเอียดดังต่อไปนี้

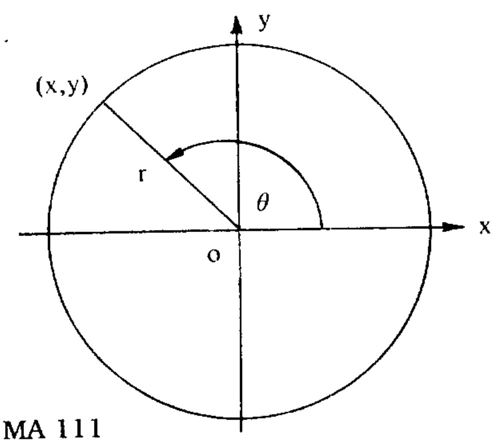
6.1 อนุพันธ์และอินทิกรัลของฟังก์ชันตรีโกณมิติ

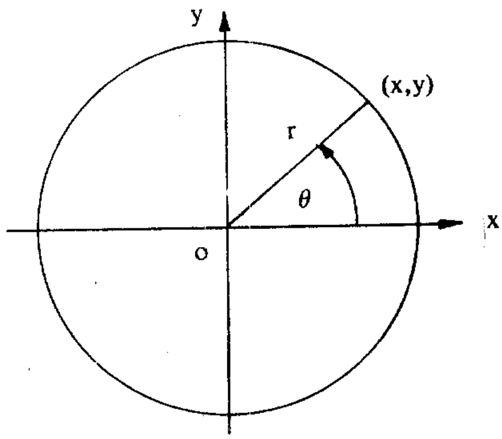
ก่อนศึกษาการหาอนุพันธ์ และอินทิกรัลของฟังก์ชันตรีโกณ เพื่อเป็นการทบทวน จะกล่าวถึงนิยามพื้นฐานของฟังก์ชัน sine และ cosine ก่อน

ฟังก์ชัน sine และ cosine

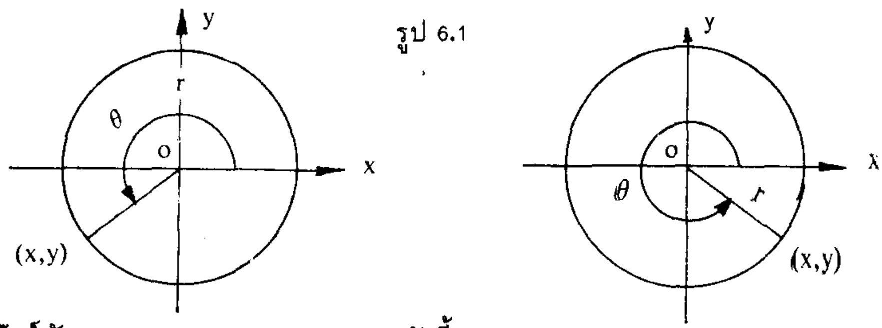
บทนิยาม 6.1 กำหนดวงกลมรัศมี r จุดศูนย์กลางที่จุดกำเนิดในระบบพิกัดฉาก (Rectangular coordinates or Cartesian Coordinates)

θ เป็นมุมตรงจุดศูนย์กลาง วัดจากแกน x ด้านบวกในทิศทวนเข็มนาฬิกา (x,y) เป็นจุดตัดของด้านประกอบมุม θ นี้กับวงกลม ดังรูป 6.1





รูป 6.1



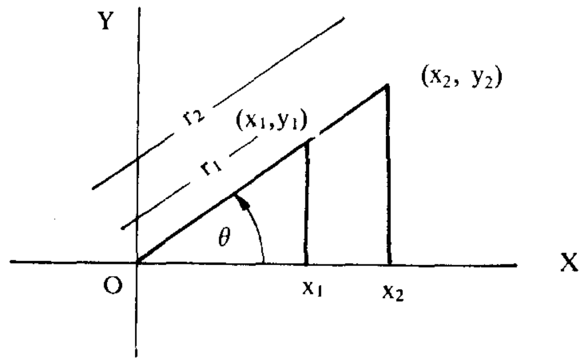
นิยาม ฟังก์ชัน sine และ cosine ของมุม θ ดังนี้

$$\sin\theta = \frac{Y}{r} \qquad , r = \sqrt{x^2 + y^2}$$

$$\cos\theta = \frac{x}{r}$$

บทนิยามของ $\sin\theta$ และ $\cos\theta$ นี้ ไม่ขึ้นอยู่กับขนาดของวงกลมหรือรัศมี r แต่ขึ้นอยู่กับมุม θ นี้เท่านั้น เพราะว่า พิจารณาจากสามเหลี่ยม 2 รูป ดังรูป 6.2

รูป 6.2



จะเห็นได้ว่า

$$\frac{x_1}{r_1} = \frac{x}{r_2}$$

เมื่อ $r_1 = \sqrt{x_1^2 + y_1^2}$, $r_2 = \sqrt{x_2^2 + y_2^2}$

เครื่องหมายของ $\sin\theta$ และ $\cos\theta$ ขึ้นอยู่กับ มุม θ ซึ่งกำหนดโดย (x,y) ว่าอยู่ในจตุภาคใด ดังรูป 6.2 ($r = \sqrt{x^2+y^2} > 0$)

ในจตุภาคที่ 1 เครื่องหมายของ $\sin\theta$ และ $\cos\theta$ เป็นบวก ($x, y > 0$)

ในจตุภาคที่ 2 เครื่องหมายของ $\sin\theta$ เป็นบวก และ $\cos\theta$ เป็นลบ ($x < 0$, $y > 0$)

ในจตุภาคที่ 3 เครื่องหมายของ $\sin\theta$ และ $\cos\theta$ เป็นลบ ($x , y < 0$)

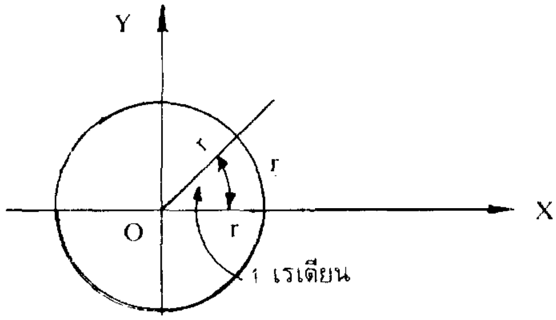
ในจตุภาคที่ 4 เครื่องหมายของ $\sin\theta$ เป็นลบ และ $\cos\theta$ เป็นบวก ($x > 0$, $y < 0$)

หน่วยวัดมุมเรเดียน (Radius unit, Radian)

หน่วยวัดที่ใช้ทั่วไป คือ องศา (Degree) ซึ่งมีมุมรอบจุดเท่ากับ 360 องศา แต่เพื่อที่จะนิยาม ฟังก์ชันตรีโกณ เป็นฟังก์ชันของจำนวนจริง ดังนั้นจึงใช้ หน่วยวัดมุมเป็นเรเดียน โดยที่

1 เรเดียน = มุมตรงจุดศูนย์กลางวงกลม ซึ่งรองรับส่วนโค้งวงกลมยาวเท่ากับรัศมีของวงกลม ดังรูป 6.3

รูป 6.3



ดังนั้น ถ้ามุมตรงจุดศูนย์กลาง คือ θ เรเดียน และรองรับส่วนโค้งยาว S หน่วย ของวงกลมรัศมี r หน่วย ในหน่วยเดียวกันแล้ว ได้ความสัมพันธ์

$$\theta\,(\text{เรเดียน}) = \frac{S}{r} \qquad \ldots\ldots\ldots(1)$$

$$\text{และมุมรอบจุดศูนย์กลาง} = \frac{\text{เส้นรอบวง}}{\text{รัศมี}} = \frac{2\pi r}{r} = 2\pi \text{ เรเดียน}$$

ฉะนั้น ได้ความสัมพันธ์

360 องศา = 2π เรเดียน

หรือ 180 องศา = π เรเดียน ....(2)

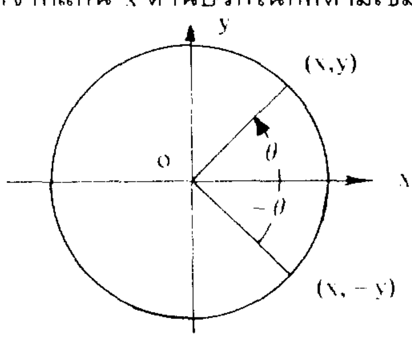
สมการ (2) ใช้เปลี่ยนมุมจากหน่วยองศาเป็นเรเดียน และในทางกลับกันด้วย

จากสมการ (1) เห็นได้ว่า หน่วยเรเดียนนี้ ไม่มีมิติ (Dimensionless unit) เพราะว่า เป็นอัตราส่วนของความยาวส่วนโค้ง และรัศมีในหน่วยเดียวกัน ฉะนั้น หน่วยเรเดียนนี้ เป็นจำนวนจริงจำนวนหนึ่งเท่านั้น ด้วยเหตุนี้จึงสะดวกในการนิยาม ฟังก์ชัน sine และ cosine ของจำนวนจริง ๆ ใดแทนที่จะเป็นฟังก์ชันของมุม

มุมลบ (Negative angles)

มุมลบ คือ มุมที่วัดจากแกน x ด้านบวกในทิศตามเข็มนาฬิกา ดังรูป

รูป 6.4



ดังนั้น โดยนิยามของ sine และ cosine ได้

$$\sin(-\theta) = -\sin \theta \qquad \text{สำหรับทุก ๆ } \theta$$

$$\cos(-\theta) = \cos \theta$$

หรือกล่าวว่า sine เป็น **ฟังก์ชันคี่** (odd function) และ

cosine เป็น **ฟังก์ชันคู่** (even function)

คาบของฟังก์ชันไซน์และโคไซน์ (Period of sine and cosine)

สำหรับ ค่า θ (เรเดียน) ที่มากกว่า 2π นั้น ด้านประกอบมุม θ หมุนรอบจุดศูนย์กลางเกิน 1 รอบ ซึ่งตำแหน่ง (x,y) จะซ้ำตำแหน่งเดิม ดังนั้น ฟังก์ชัน sine และ cosine มีค่าเช่นเดิม หรือ

$$\sin(\theta + 2\pi) = \sin \theta \ , \ \cos(\theta + 2\pi) = \cos \theta$$

หรือ
$$\sin(\theta + 2n\pi) = \sin \theta \ , \ \cos(\theta + 2n\pi) = \cos \theta$$

n คือ จำนวนเต็มใด ๆ

ดังนั้น sine และ cosine เป็นฟังก์ชันเป็นคาบซึ่งมีคาบ 2π

(Periodic function with period 2π)

ค่าของฟังก์ชันไซน์และโคไซน์

โดยนิยามของ sine และ cosine เมื่อ มุม θ วัดเป็นเรเดียน

$$\sin \theta = \frac{y}{r}$$

$$\cos \theta = \frac{x}{r}$$

เห็นได้ว่า $\sin \theta$ มีค่าสูงสุด $= 1$ เมื่อ $y = r > 0$ หรือเมื่อ

$$\theta = \frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} + 2\pi, \ldots, \frac{\pi}{2} + 2n\pi, \ldots, \ n \text{ จำนวนเต็มใด ๆ}$$

$\sin \theta = 0$ เมื่อ $y = 0$ หรือเมื่อ

$$\theta = 0, \pi, \ldots, n\pi, \ldots, \ n \text{ จำนวนเต็มใด ๆ}$$

$\sin \theta$ มีค่าต่ำสุด $= -1$ เมื่อ $y = -r < 0$ หรือเมื่อ

$$\theta = \frac{3\pi}{2}, \ldots, \frac{3\pi}{2} + 2n\pi, \ldots, \ n \text{ จำนวนเต็มใด ๆ}$$

ดังนั้น ค่าของ $\sin \theta$ อยู่ในช่วง $-1 \leqslant \sin \theta \leqslant 1$

ในทำนองเดียวกันสำหรับ $\cos \theta$

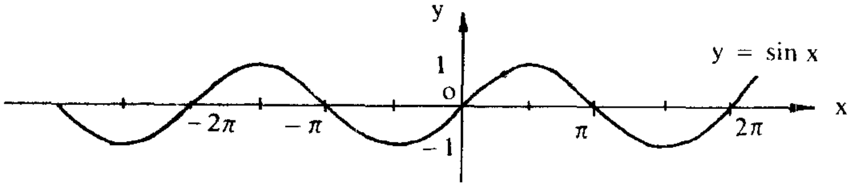
$$\cos \theta = 1 \ , \quad \theta = 2n\pi \ , \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$$

$$\cos \theta = 0 \ , \quad \theta = \frac{n+1}{2}\pi \quad n = 0, \pm 1, \ldots$$

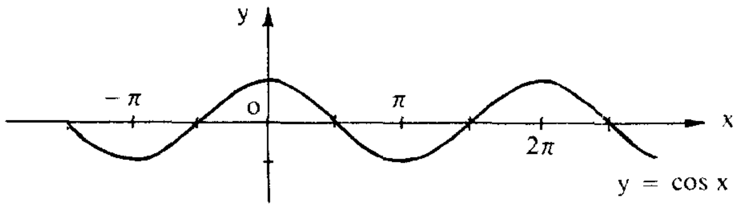
$$\cos \theta = -1 \ , \quad \theta = n\pi \ . \quad n = \pm 1, \pm 2, \ldots$$

ดังนั้นค่าของ $\cos\theta$ อยู่ในช่วง $-1 \leqslant \cos\theta \leqslant 1$

รูปแสดงกราฟของ $\cos\theta$ และ $\sin\theta$ (θ – เรเดียน)



รูป 6.5



ดังกล่าวมาแล้วว่า หน่วยวัดมุมเรเดียนนี้ ไม่มีมิติ เป็นจำนวนจำนวนหนึ่งเท่านั้น ฉะนั้น จะนิยาม ฟังก์ชัน sine และ cosine ของจำนวนจริงใด ๆ ดังนี้

นิยาม 6.2 สำหรับจำนวนจริง x ใด ๆ

เมื่อ $0 \leqslant x \leqslant 2\pi$ นิยาม $\sin x$ = sine ของมุม x เรเดียน และ $\cos x$ = cosine ของมุม x เรเดียน

และสำหรับจำนวนจริง x ใด ๆ เขียน

$x = x_0 + 2n\pi$ เมื่อ $0 \leqslant x_0 < 2\pi$ และ n เป็นจำนวนเต็มใด ๆ

นิยาม $\sin x = \sin x_0$ และ

$\cos x = \cos x_0$

ดังนั้น จากนิยามนี้ ได้

$$\sin x = \sin(x + 2\pi) = \sin(x + 2n\pi)$$

$$\cos x = \cos(x + 2\pi) = \cos(x + 2n\pi)$$

เมื่อ x เป็นจำนวนจริงใด ๆ และ n เป็นจำนวนเต็มใด ๆ

หรือกล่าวได้ว่า sine และ cosine เป็นฟังก์ชันมีคาบเท่ากับ 2π มีโดเมนเป็นเซตของจำนวนจริงทั้งหมด และพิสัยเป็นช่วง $[-1,1]$

บทนิยาม 6.3 สำหรับฟังก์ชันตรีโกณอื่น ๆ คือ tangent, cotangent, secant และ cosecant มีบทนิยามดังนี้

$$\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$$

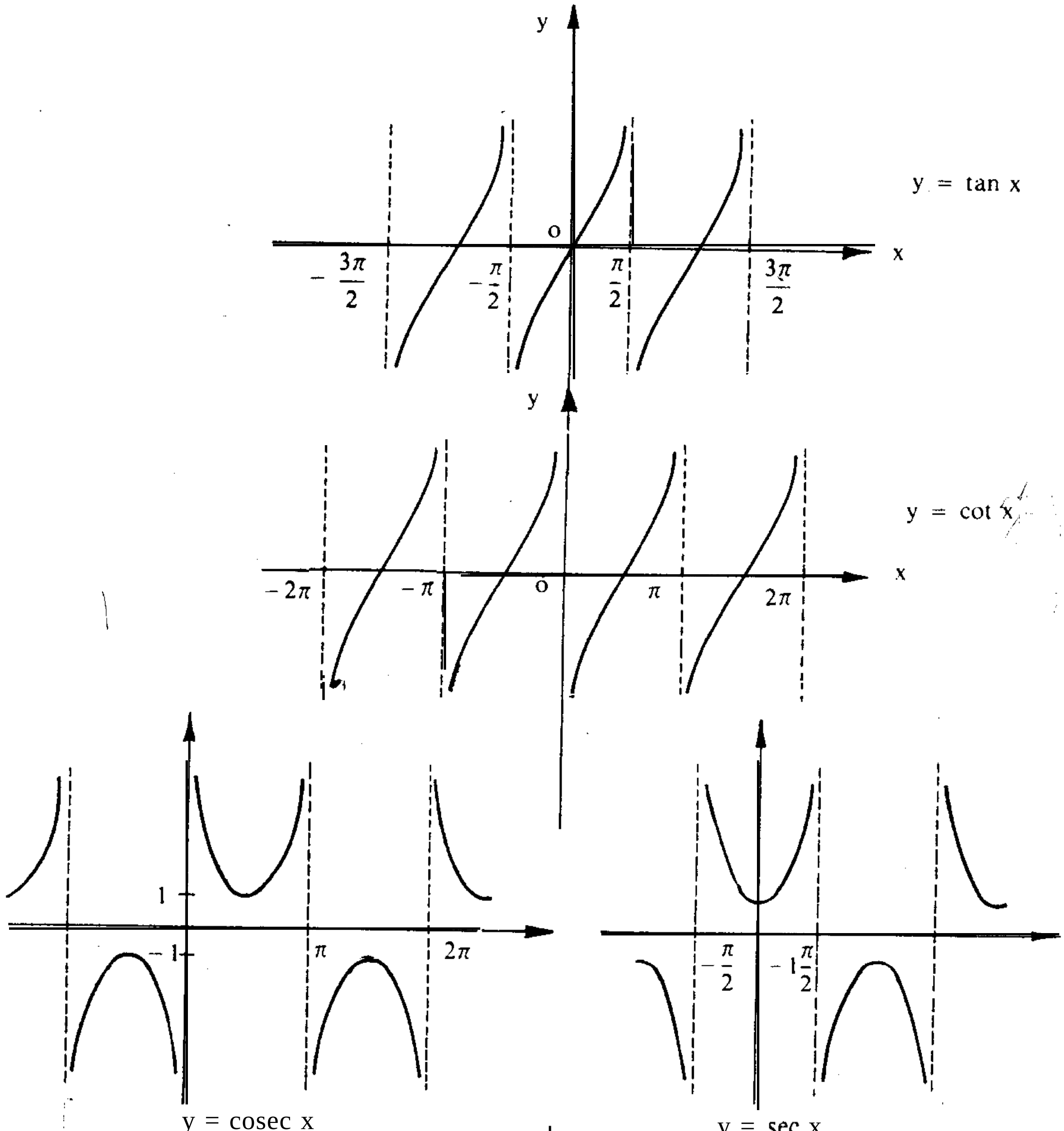
$$\cot x = \frac{\cos x}{\sin x} \quad \left(= \frac{1}{\tan x}\right)$$

$$\sec x = \frac{1}{\cos x}$$

$$\operatorname{cosec} x = \frac{1}{\sin x}$$

ใน domain ของฟังก์ชันเหล่านี้ ไม่รวมค่า x ซึ่งทำให้ตัวส่วนเป็นศูนย์ กราฟของฟังก์ชันเหล่านี้แสดงในรูป 6.6

อย่างไรก็ตาม ฟังก์ชันตรีโกณที่สำคัญ และได้ใช้บ่อย ๆ คือ sine, cosine, tangent



รูป 6.6

เอกลักษณ์ตรีโกณมิติที่ควรทราบ

สำหรับทุก ๆ ค่าจริง x , y

1. $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$
2. $\sin(x + y) = \sin x \cos y + \cos x \sin y$
3. $\cos(x + y) = \cos x \cos y - \sin x \sin y$
4. $\sin(x + \frac{\pi}{2}) = \cos x$, $\cos(x + \frac{\pi}{2}) = -\sin x$
5. $\sin 2x = 2 \sin x \cos x$
6. $\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x$
7. $\sec^2 x = \tan^2 x + 1$
8. $\sin x + \sin y = 2 \sin(\frac{x+y}{2}) \cos(\frac{x-y}{2})$
9. $\cos x + \cos y = 2 \cos(\frac{x+y}{2}) \cos(\frac{x-y}{2})$
10. $\sin^2 \frac{x}{2} = \frac{1 - \cos x}{2}$, $\cos^2 \frac{x}{2} = \frac{1 + \cos x}{2}$

อนุพันธ์ของฟังก์ชันไซน์และโคไซน์

จากทฤษฎีบท 2.9 และบทแทรกของทฤษฎีบท 2.9 ในบทที่ 2 ซึ่งเกี่ยวกับลิมิตเราได้ว่า

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1 .$$

และ $$\lim_{x \to 0} \frac{1 - \cos x}{x} = 0$$

ซึ่งจะใช้ประโยชน์ในการพิสูจน์ทฤษฎีบทต่อไปนี้

ทฤษฎีบท 6.1 ถ้า $f(x) = \sin x$ แล้ว $f'(x) = \cos x$

พิสูจน์ โดยบทนิยามของอนุพันธ์ พิจารณา

$$\frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \frac{\sin(x+h) - \sin x}{h}$$

$$= \frac{\sin x \cos h + \cos x \sin h - \sin x}{h}$$

$$= \sin x \frac{(\cos h - 1)}{h} + \cos x \frac{\sin h}{h}$$

ดังนั้น

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \to 0} \left[\sin x \frac{(\cos h - 1)}{h} + \cos x \frac{\sin h}{h} \right]$$

$$= \lim_{h\to 0} \sin x \frac{(\cos h - 1)}{h} + \lim_{h\to 0} \cos x \cdot \frac{\sin h}{h}$$

$$= \sin x \lim_{h\to 0} \frac{(1-\cos h)}{h} + \cos x \lim_{h\to 0} \frac{\sin h}{h}$$

$$= -\sin x \times 0 + \cos x \times 1$$

$$= \cos x$$

ดังนั้น อนุพันธ์ของ $\sin x$ หาค่าได้ และเท่ากับ $\cos x$

หรือ $$\frac{d \sin x}{dx} = \cos x$$

หมายเหตุ ถ้า u เป็นฟังก์ชันของ x ซึ่งหาอนุพันธ์ได้แล้วโดยกฎลูกโซ่ จะได้

$$\frac{d \sin u}{dx} = \cos u \frac{du}{dx}$$

และ

$$d \sin u = \cos u \, du$$

ทฤษฎีบท 6.2 ถ้า $f(x) = \cos x$ แล้ว $f'(x) = -\sin x$

พิสูจน์ โดยนิยามของอนุพันธ์ นั่นก็คือ พิจารณา

$$\lim_{h\to 0} \frac{\cos (x + h) - \cos x}{h}$$ โดยตรง

หรือ เขียน $\cos x = \sin (x + \frac{\pi}{2})$

ดังนั้น

$$\frac{d \cos x}{dx} = \frac{d}{dx} \sin (x + \frac{\pi}{2}) = \cos (x + \frac{\pi}{2}) \frac{d}{dx} (x + \frac{\pi}{2})$$

$$= \cos (x + \frac{\pi}{2}) \times 1 = \cos (x + \frac{\pi}{2}) = -\sin x$$

ดังนั้น อนุพันธ์ของ $\cos x$ หาค่าได้ และเท่ากับ $-\sin x$ หรือ

$$\frac{d \cos x}{dx} = -\sin x$$

และถ้า u เป็นฟังก์ชันของ x ซึ่งหาอนุพันธ์ได้ แล้วโดยกฎลูกโซ่ ได้

$$\frac{d \cos u}{dx} = -\sin u \frac{du}{dx}$$

และ

$$d \cos u = -\sin u \, du$$

ตัวอย่าง 6.1 ถ้า $y = \sin(x^2 + 2x)$ จงหา $\frac{dy}{dx}$

วิธีทำ

ให้ $u = x^2 + 2x$

$\therefore y = \sin u$

และ $$\frac{dy}{dx} = \cos u \frac{du}{dx} = \cos(x^2 + 2x) \cdot \frac{d(x^2 + 2x)}{dx}$$

$$= (\cos(x^2 + 2x))(2x + 2) \quad \#$$

ตัวอย่าง 6.2 จงหาค่าของ $\frac{d}{dx}\cos 2x$

วิธีทำ เพราะว่า $\frac{d}{dx}\cos u = -\sin u \frac{du}{dx}$

เพราะฉะนั้น $$\frac{d}{dx}\cos 2x = -\sin 2x \frac{d}{dx}(2x)$$

$$= -2\sin 2x \quad \#$$

ตัวอย่าง 6.3 ถ้า $y = \tan 2x$ จงหา $\frac{dy}{dx}$

วิธีทำ $y = \tan 2x = \frac{\sin 2x}{\cos 2x}$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}\left(\frac{\sin 2x}{\cos 2x}\right) = \frac{\cos 2x \frac{d}{dx}\sin 2x - \sin 2x \frac{d}{dx}\cos 2x}{\cos^2 2x}$$

$$= \frac{\cos 2x \cdot \cos 2x \frac{d\,2x}{dx} - \sin 2x(-\sin 2x)\frac{d\,2x}{dx}}{\cos^2 2x}$$

$$= \frac{2(\cos^2 2x + \sin^2 2x)}{\cos^2 2x} = 2\sec^2 2x$$

\#

ตัวอย่าง 6.4 จงหาอนุพันธ์ของ $\cos^3(1 - x^2)$

วิธีทำ หาอนุพันธ์ $\cos^3(1 - x^2)$ โดยใช้สูตร $\frac{du^n}{dx} = nu^{n-1}\frac{du}{dx}$

และหาอนุพันธ์ของ $\cos u$

เพราะฉะนั้น $$\frac{d}{dx}\cos^3(1 - x^2) = 3\cos^2(1 - x^2)\frac{d\cos(1 - x^2)}{dx}$$

$$= 3\cos^2(1 - x^2)[-\sin(1 - x^2)\frac{d}{dx}(1 - x^2)]$$

$$= 3\cos^2(1-x^2)\,|-\sin(1-x^2)(-2x)|$$

$$= 6x\cos^2(1-x^2)\sin(1-x^2)$$

#

อนุพันธ์ของ tan x, cot x, sec x, cosec x

สูตร อนุพันธ์ของ tan x, cot x, sec x และ cosec x หาได้โดยเขียน ฟังก์ชันตรีโกณเหล่านี้ในรูปของ sin x และ cos x แล้วใช้สูตรอนุพันธ์ของผลหารของฟังก์ชัน หรือผลคูณของฟังก์ชันและอนุพันธ์ของ sin x และ cos x ดังแสดงในตัวอย่าง จะได้

$$\frac{d}{dx}\tan x = \sec^2 x$$

$$\frac{d}{dx}\cot x = -\operatorname{cosec}^2 x$$

$$\frac{d}{dx}\sec x = \sec x \tan x$$

$$\frac{d}{dx}\operatorname{cosec} x = -\operatorname{cosec} x \cot x$$

สรุปสูตรอนุพันธ์และดิพเพอเรนเชียลของฟังก์ชันตรีโกณ ได้ดังนี้
เมื่อ u เป็นฟังก์ชันของ x ซึ่งหาอนุพันธ์ได้

1. $\frac{d \sin u}{dx} = \cos u \frac{du}{dx}$, $d \sin u = \cos u \, du$
2. $\frac{d \cos u}{dx} = -\sin u \frac{du}{dx}$, $d \cos u = -\sin u \, du$
3. $\frac{d \tan u}{dx} = \sec^2 u \frac{du}{dx}$, $d \tan u = \sec^2 u \, du$
4. $\frac{d \cot u}{dx} = -\operatorname{cosec}^2 u \frac{du}{dx}$, $d \cot u = -\operatorname{cosec}^2 u \, du$
5. $\frac{d \sec u}{dx} = \sec u \tan u \frac{du}{dx}$, $d \sec u = \sec u \tan u \, du$
6. $\frac{d \operatorname{cosec} u}{dx} = -\operatorname{cosec} u \cot u \frac{du}{dx}$, $d \operatorname{cosec} u = -\operatorname{cosec} u \cot u \, du$

และจากสูตรอนุพันธ์ของฟังก์ชันตรีโกณ จาก 1 – 6 ข้างต้นนี้ ได้สูตรอินทิกรัลของฟังก์ชันตรีโกณ ดังนี้

1. $\int \cos u \, du = \sin u + C$
2. $\int \sin u \, du = -\cos u + C$

3. $\int \sec^2 u \, du = \tan u + C$

4. $\int \operatorname{cosec}^2 u \, du = -\cot u + C$

5. $\int \sec u \tan u \, du = \sec u + C$

6. $\int \operatorname{cosec} u \cot u \, du = -\operatorname{cosec} u + C$

เมื่อ C คือ ค่าคงตัวใด ๆ

การใช้สูตรอินทิกรัล 1 – 6 นี้ u อาจเป็นฟังก์ชันใด ๆ ของ x ดังนั้น การหาค่าของอินทิกรัล เมื่อตัวถูกอินทิเกรต (Integrand) **เป็นฟังก์ชันตรีโกณ ในรูปใดก็ตาม** ถ้าสามารถจัดอยู่ในรูป - 1 – 6 ก็จะทำให้หาค่าของอินทิกรัลได้โดยง่าย

ตัวอย่าง 6.5 จงหาค่าของ $\int \cot^2 (2x - 6) \, dx$

วิธีทำ ตัวถูกอินทิเกรต เป็นฟังก์ชันประกอบของฟังก์ชันตรีโกณ และไม่อยู่ในรูปที่จะอินทิเกรตได้โดยตรง แต่ถ้าเขียน

$$\cot^2 (2x - 6) = \operatorname{cosec}^2 (2x - 6) - 1$$

และแทน $2x - 6 = u$ ได้ $2dx = du$

ดังนั้น

$$\begin{aligned}
\int \cot^2 (2x - 6) \, dx &= \frac{1}{2} \int (\operatorname{cosec}^2 u - 1) \, du \\
&= \frac{1}{2} \int \operatorname{cosec}^2 u \, du - \frac{1}{2} \int du \\
&= -\frac{1}{2} \cot u - \frac{1}{2} u + C \text{ (โดยสูตร 4)} \\
&= -\frac{1}{2} \cot (2x - 6) - \frac{1}{2} (2x - 6) + C
\end{aligned}$$

ตัวอย่าง 6.6 $\int \cos^6 2x \sin 2x \, dx$

วิธีทำ อินทิกรัล จัดอยู่ในรูป $\int u^n du$ ได้โดยให้

$$u = \cos 2x \quad \therefore du = -2\sin 2x \, dx$$

$$\begin{aligned}
\therefore \int \cos^6 2x \sin 2x \, dx &= -\frac{1}{2} \int u^6 \, du \\
&= -\frac{1}{2} \frac{u^7}{7} + C \\
&= \frac{-1}{14} \cos^7 2x + C
\end{aligned}$$

สำหรับเทคนิคการอินทิเกรต เมื่อตัวถูกอินทิเกรตอยู่ในรูปฟังก์ชันตรีโกณ จะได้ศึกษาเพิ่มเติมในแคลคูลัส และเรขาคณิตวิเคราะห์ 2 (calculus and analytic geometry II) อย่างไรก็ตาม **ควรจะใช้สูตรอินทิกรัล** 1 – 6 **ให้ชำนาญเสียก่อน**

แบบฝึกหัด 6.1

1. ถ้า $y = \operatorname{cosec} x$ แล้วจงแสดงว่า $\frac{dy}{dx} = -\operatorname{cosec} x \cot x$

2. ถ้า $y = \cot x$ แล้วจงแสดงว่า $\frac{dy}{dx} = \operatorname{cosec}^2 x$

3. จงพิสูจน์ โดยนิยามของอนุพันธ์ ว่า $\frac{d \cos x}{ax} = -\sin x$

4. ถ้า $y = \sin kx$ แล้วจงแสดงว่า $y'' + k^2y = 0$

จงหาอนุพันธ์ของฟังก์ชันในข้อ 5 - 14

5. $\sin (\tan x)$

6. $\cos (x^4 - x^3)$

7. $\operatorname{cosec}^3 (\frac{1}{3}y)$

8. $\dfrac{\sin 2x}{1 + \cos 2x}$

9. $x^2 \tan^2 (\frac{x}{2})$

10. $\frac{1}{3} \sec^3 2x \quad \sec 2x$

11. $(\cot^2 x) \mid (1 + x^2)$

12. $\tan (\sin x)$

13. $\sqrt{\tan 2x}$

14. จงหาอนุพันธ์ของข้อต่อไปนี้ และเขียนสูตรอินทิกรัลที่ได้

ก) $2\sin x \cos x$ ข) $x \tan x$ ค) $\dfrac{\sin x}{x}$

ง) $\dfrac{1}{1 + \tan x}$ จ) $\dfrac{\sin x + \cos x}{\sin x \quad \cos x}$

15. ให้ $f(x) = x^2 \sin (\frac{1}{x})$ เมื่อ $x \neq 0$ และ

$f(0) = 0$

จงแสดงโดยนิยามของอนุพันธ์ของ f ว่า $f'(0)$ หาค่าได้ และเท่ากับศูนย์

จงหาค่าของอินทิกรัลในข้อ 16 - 25

16. $\int \sec 2x \tan 2x \, dx$

17. $\int \cos \frac{\pi}{2}x \, dx$

18. $\int \dfrac{dx}{\cos^2 x}$

19. $\int \dfrac{\sin \sqrt{\pi x}}{\sqrt{x}} \, dx$

20. $\int \frac{\sin 3x \, dx}{\cos^3 3x}$

21. $\int \sin^5 x \, dx$

22. $\int \tan^5 x \sec^2 x \, dx$

23. $\int \cot^2 (2x - 6) \, dx$

24. $\int \cos^2 \frac{1}{2}x \, dx$

25. $\int \sin 3x \cos 5x \, dx$ (ใช้เอกลักษณ์ตรีโกณ)

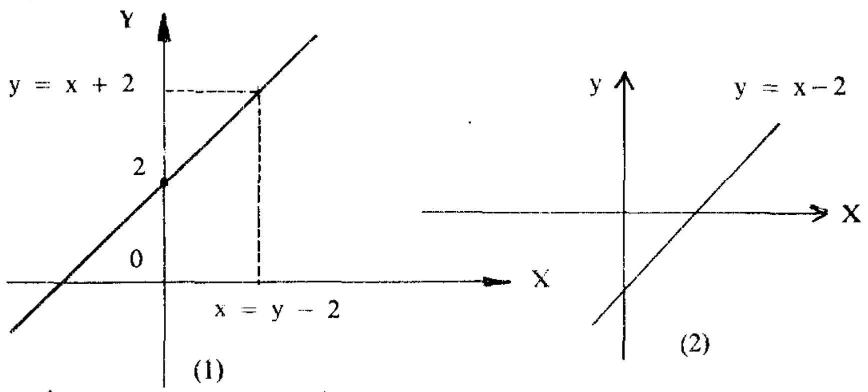
6.2 อนุพันธ์และอินทิกรัลของฟังก์ชันตรีโกณผกผัน

ฟังก์ชันผกผัน (The inverse function)

พิจารณาฟังก์ชัน $y = x + 2$ ....(1)

ในที่นี้ y เป็นฟังก์ชันของ x สำหรับแต่ละค่าของ x จะสมนัยกับค่าของ y เพียงหนึ่งค่า หรือกำหนดค่าของ x มา สามารถหาค่าของ y ได้ ในทางกลับกัน ถ้าทราบค่าของ y แล้ว จาก (1) ย่อมได้ค่าของ x ที่สมนัยกับ y ค่านี้ และมีเพียงค่าเดียวเท่านั้น หรือ

$x = y - 2$ ....(2)



รูป 6.7

สมการ (2) นี้ เห็นได้ว่าเป็นฟังก์ชัน ซึ่งทำหน้าที่กลับกับ (1) หรือเรียกว่า ฟังก์ชันผกผัน (Inverse function) นั่นก็คือ

$x = y - 2$ เป็นฟังก์ชันผกผัน ของ $y = x + 2$

และถ้าคิดในแง่ของตัวแปรแบบเดียวกัน แทน x ด้วย y และแทน y ด้วย x ใน (2) จะได้ $y = x - 2$ เป็นฟังก์ชันผกผันของ $y = x + 2$

บทนิยาม 6.4 ให้ $y = f(x)$ และถ้าสำหรับแต่ละค่า y_1 ในพิสัยของ f มีค่า x_1 ในโดเมนของ f เพียงค่าเดียวเท่านั้น ซึ่ง

$f(x_1) = y_1$

แล้ว

นิยาม ฟังก์ชันผกผันของ f คือ

$x = g(y) =$ จำนวน x จำนวนเดียวเท่านั้น ซึ่ง $f(x) = y$

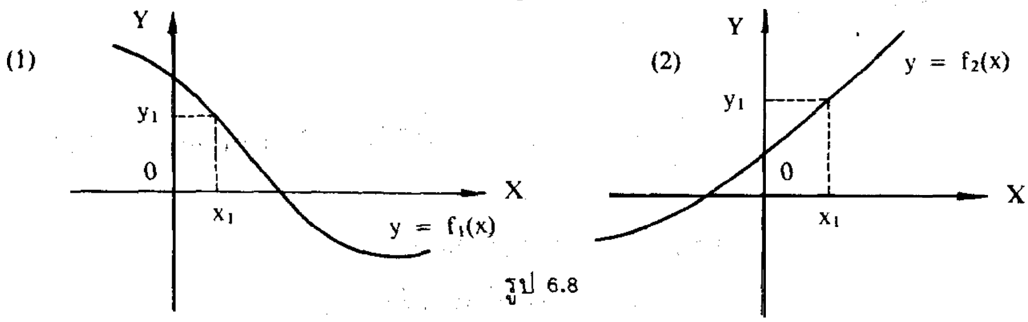
หรือ $x = g(y)$ ก็ต่อเมื่อ $f(x) = y$

ดังนั้น โดเมนของ $x = g(y)$ คือ พิสัยของ $f(x) = y$ และได้

$f(g(y)) = y$ และ $g(f(x)) = x$

สัญญกรณ์ ที่ใช้สำหรับฟังก์ชันผกผันของ f คือ f^{-1}

สิ่งที่จะพิจารณาต่อไป คือ ฟังก์ชันต้องมีคุณสมบัติอย่างใด จึงจะทำให้หาฟังก์ชันผกผันของมันได้ พิจารณาในแง่เรขาคณิต จากรูป 6.8 (1), (2)



รูป 6.8

เส้นโค้งของ $y = f_1(x)$ เบนลงทางด้านขวามือโดยตลอด ถ้าลากเส้นขนาน $y = y_1$ ตัดกับเส้นโค้งนี้ ตรงจุดตัดลากเส้นดิ่งมาตัดแกน x ที่ x_1 ได้เพียงค่าเดียวเท่านั้น เช่นเดียวกับเส้นโค้ง- $y = f_2(x)$ ในรูป 6.8 (2) ฉะนั้นจะสรุปได้ว่าฟังก์ชันผกผันหาค่าได้ในกรณีฟังก์ชันเพิ่มขึ้นโดยตลอด หรือลดลงโดยตลอด (strictly increasing or decreasing function)

ตัวอย่าง 6.7 จงหาฟังก์ชันผกผันของ $y = x^2$, $x \geqslant 0$

วิธีทำ พิจารณา $y = x^2$

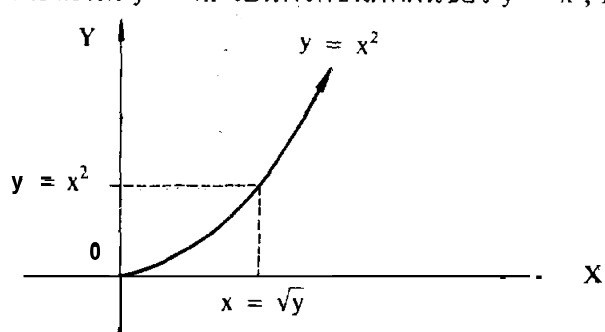
ฟังก์ชันผกผันหาได้ เพราะว่า $f(x) = x^2$ เป็นฟังก์ชันเพิ่มขึ้นโดยตลอด

จาก $y = x^2$, $x \geqslant 0$

จะได้ $x = \sqrt{y}$ และเพื่อให้เป็นฟังก์ชันในตัวแปรแบบเดียวกัน แทน x ด้วย y และ y ด้วย x

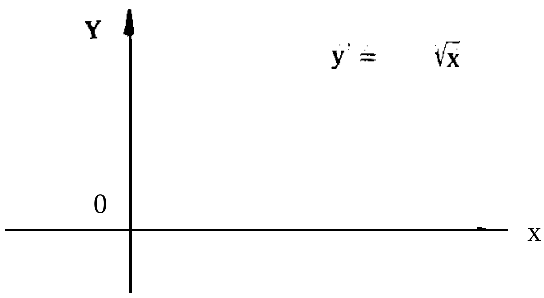
เพราะฉะนั้น $y = \sqrt{x}$ เป็นฟังก์ชันผกผันของ $y = x^2$, $x \geqslant 0$

ดังรูป 6.9



รูป 66..9

รูป 6.9



ฟังก์ชันตรีโกณมิติผกผัน (The inverse trigonometric functions)

arc sine **ของ** y

รูป 6.11