บทที่ 6
อนุพันธ์ และอินทิกรัลของฟังก์ชันอดิศัย

ในบทที่ 4 และบทที่ 5 ได้กล่าวถึงอนุพันธ์ และอินทิกรัลของฟังก์ชันพีชคณิต แต่ในบทนี้จะศึกษาอนุพันธ์และอินทิกรัลของฟังก์ชันซึ่งไม่ใช่ฟังก์ชันพีชคณิต ที่เรียกว่าฟังก์ชันอดิศัย (trancendental function) ซึ่งได้แก่

(1) ฟังก์ชันตรีโกณมิติ

(2) ฟังก์ชันตรีโกณมิติผกผัน

(3) ฟังก์ชันลอการิทึม

(4) ฟังก์ชันชี้กำลัง

(5) ฟังก์ชันไฮเพอร์โบลิก

(6) ฟังก์ชันในรูป a^u , u^v

ซึ่งจะได้แยกกล่าวถึงอนุพันธ์ และอินทิกรัลของแต่ละฟังก์ชันโดยละเอียดดังต่อไปนี้

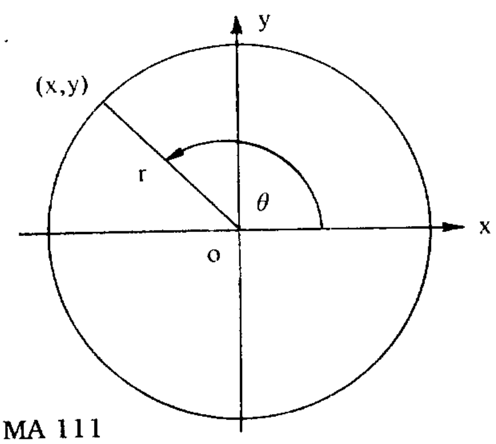
6.1 อนุพันธ์และอินทิกรัลของฟังก์ชันตรีโกณมิติ

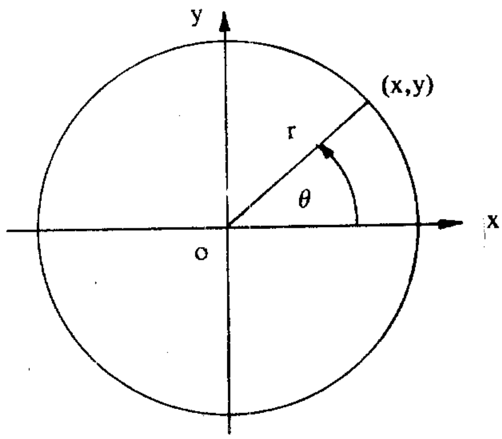
ก่อนศึกษาการหาอนุพันธ์ และอินทิกรัลของฟังก์ชันตรีโกณ เพื่อเป็นการทบทวน จะกล่าวถึงนิยามพื้นฐานของฟังก์ชัน sine และ cosine ก่อน

ฟังก์ชัน sine และ cosine

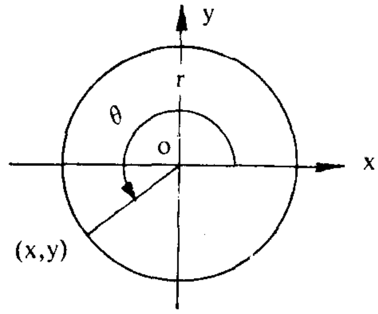
บทนิยาม 6.1 กำหนดวงกลมรัศมี r จุดศูนย์กลางที่จุดกำเนิดในระบบพิกัดฉาก (Rectangular coordinates or Cartesian Coordinates)

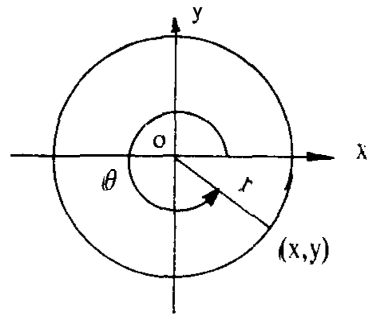
θ เป็นมุมตรงจุดศูนย์กลาง วัดจากแกน x ด้านบวกในทิศทวนเข็มนาฬิกา (x,y) เป็นจุดตัดของด้านประกอบมุม θ นี้กับวงกลม ดังรูป 6.1





รูป 6.1





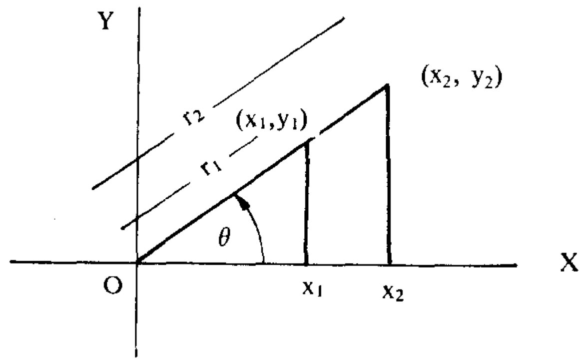
นิยาม ฟังก์ชัน sine และ cosine ของมุม θ ดังนี้

$$\sin\theta = \frac{Y}{r} \quad , r = \sqrt{x^2 + y^2}$$

$$\cos\theta = \frac{x}{r}$$

บทนิยามของ $\sin\theta$ และ $\cos\theta$ นี้ ไม่ขึ้นอยู่กับขนาดของวงกลมหรือรัศมี r แต่ขึ้นอยู่กับมุม θ นี้เท่านั้น เพราะว่า พิจารณาจากสามเหลี่ยม 2 รูป ดังรูป 6.2

รูป 6.2



จะเห็นได้ว่า

$$\frac{x_1}{r_1} = \frac{x}{r_2}$$

เมื่อ $r_1 = \sqrt{x_1^2 + y_1^2}$, $r_2 = \sqrt{x_2^2 + y_2^2}$

เครื่องหมายของ $\sin\theta$ และ $\cos\theta$ ขึ้นอยู่กับ มุม θ ซึ่งกำหนดโดย (x,y) ว่าอยู่ในจตุภาคใด ดังรูป 6.2 ($r = \sqrt{x^2+y^2} > 0$)

ในจตุภาคที่ 1 เครื่องหมายของ $\sin\theta$ และ $\cos\theta$ เป็นบวก ($x, y > 0$)

ในจตุภาคที่ 2 เครื่องหมายของ $\sin\theta$ เป็นบวก และ $\cos\theta$ เป็นลบ ($x < 0$, $y > 0$)

ในจตุภาคที่ 3 เครื่องหมายของ $\sin\theta$ และ $\cos\theta$ เป็นลบ ($x , y < 0$)

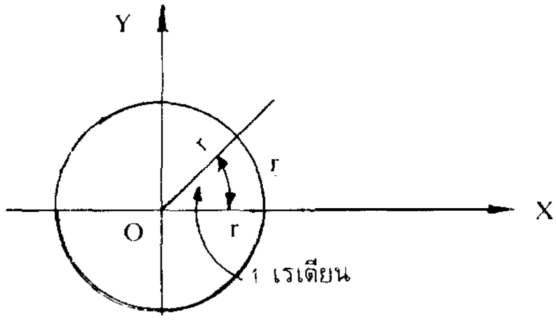
ในจตุภาคที่ 4 เครื่องหมายของ $\sin\theta$ เป็นลบ และ $\cos\theta$ เป็นบวก ($x > 0$, $y < 0$)

หน่วยวัดมุมเรเดียน (Radius unit, Radian)

หน่วยวัดที่ใช้ทั่วไป คือ องศา (Degree) ซึ่งมีมุมรอบจุดเท่ากับ 360 องศา แต่เพื่อที่จะนิยามฟังก์ชันตรีโกณ เป็นฟังก์ชันของจำนวนจริง ดังนั้นจึงใช้ หน่วยวัดมุมเป็นเรเดียน โดยที่

1 เรเดียน = มุมตรงจุดศูนย์กลางวงกลม ซึ่งรองรับส่วนโค้งวงกลมยาวเท่ากับรัศมีของวงกลม ดังรูป 6.3

รูป 6.3



ดังนั้น ถ้ามุมตรงจุดศูนย์กลาง คือ θ เรเดียน และรองรับส่วนโค้งยาว S หน่วย ของวงกลมรัศมี r หน่วย ในหน่วยเดียวกันแล้ว ได้ความสัมพันธ์

$$\theta \text{ (เรเดียน)} = \frac{S}{r} \qquad \text{..........(1)}$$

$$\text{และมุมรอบจุดศูนย์กลาง} = \frac{\text{เส้นรอบวง}}{\text{รัศมี}} = \frac{2\pi r}{r} = 2\pi \text{ เรเดียน}$$

ฉะนั้น ได้ความสัมพันธ์

$$360 \text{ องศา} = 2\pi \text{ เรเดียน}$$

$$\text{หรือ} \quad 180 \text{ องศา} = \pi \text{ เรเดียน} \qquad \text{.........(2)}$$

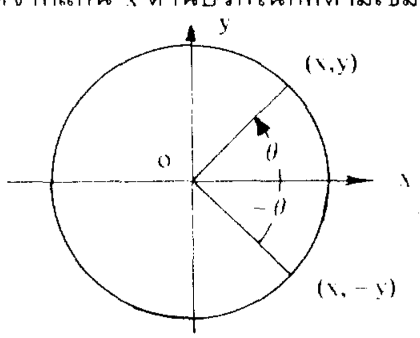
สมการ (2) ใช้เปลี่ยนมุมจากหน่วยองศาเป็นเรเดียน และในทางกลับกันด้วย

จากสมการ (1) เห็นได้ว่า หน่วยเรเดียนนี้ ไม่มีมิติ (Dimensionless unit) เพราะว่า เป็นอัตราส่วนของความยาวส่วนโค้ง และรัศมีในหน่วยเดียวกัน ฉะนั้น หน่วยเรเดียนนี้ เป็นจำนวนจริงจำนวนหนึ่งเท่านั้น ด้วยเหตุนี้จึงสะดวกในการนิยาม ฟังก์ชัน sine และ cosine ของจำนวนจริง ๆ ใด แทนที่จะเป็นฟังก์ชันของมุม

มุมลบ (Negative angles)

มุมลบ คือ มุมที่วัดจากแกน x ด้านบวกในทิศตามเข็มนาฬิกา ดังรูป

รูป 6.4



ดังนั้น โดยนิยามของ sine และ cosine ได้

$\sin(-\theta) = -\sin\theta$ สำหรับทุก ๆ θ

$\cos(-\theta) = \cos\theta$

หรือกล่าวว่า sine เป็น **ฟังก์ชันคี่** (odd function) และ

cosine เป็น **ฟังก์ชันคู่** (even function)

คาบของฟังก์ชันไซน์และโคไซน์ (Period of sine and cosine)

สำหรับ ค่า θ (เรเดียน) ที่มากกว่า 2π นั้น ด้านประกอบมุม θ หมุนรอบจุดศูนย์กลางเกิน 1 รอบ ซึ่งตำแหน่ง (x,y) จะซ้ำตำแหน่งเดิม ดังนั้น ฟังก์ชัน sine และ cosine มีค่าเช่นเดิม หรือ

$$\sin(\theta + 2\pi) = \sin\theta \;, \; \cos(\theta + 2\pi) = \cos\theta$$

หรือ
$$\sin(\theta + 2n\pi) = \sin\theta \;, \; \cos(\theta + 2n\pi) = \cos\theta$$

n คือ จำนวนเต็มใด ๆ

ดังนั้น sine และ cosine เป็นฟังก์ชันเป็นคาบซึ่งมีคาบ 2π

(Periodic function with period 2π)

ค่าของฟังก์ชันไซน์และโคไซน์

โดยนิยามของ sine และ cosine เมื่อ มุม θ วัดเป็นเรเดียน

$$\sin\theta = \frac{y}{r}$$

$$\cos\theta = \frac{x}{r}$$

เห็นได้ว่า $\sin\theta$ มีค่าสูงสุด = 1 เมื่อ $y = r > 0$ หรือเมื่อ

$\theta = \frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} + 2\pi, \ldots, \frac{\pi}{2} + 2n\pi, \ldots$, n จำนวนเต็มใด ๆ

$\sin\theta = 0$ เมื่อ $y = 0$ หรือเมื่อ

$\theta = 0, \pi, \ldots, n\pi, \ldots$, n จำนวนเต็มใด ๆ

$\sin\theta$ มีค่าต่ำสุด $= -1$ เมื่อ $y = -r < 0$ หรือเมื่อ

$\theta = \frac{3\pi}{2}, \ldots, \frac{3\pi}{2} + 2n\pi, \ldots$, n จำนวนเต็มใด ๆ

ดังนั้น ค่าของ $\sin\theta$ อยู่ในช่วง $-1 \leq \sin\theta \leq 1$

ในทำนองเดียวกันสำหรับ $\cos\theta$

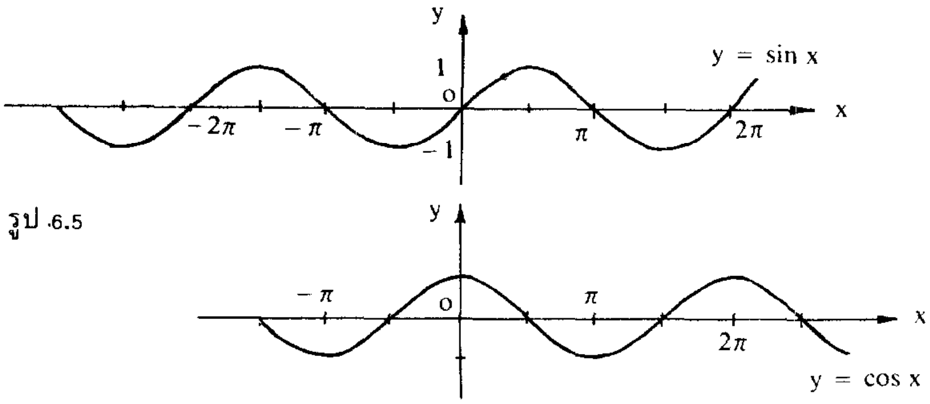
$\cos\theta = 1 \;, \; \theta = 2n\pi \;, \; n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$

$\cos\theta = 0 \;, \; \theta = \frac{n+1}{2}\pi \;\; n = 0, \pm 1, \ldots$

$\cos\theta = -1 \;, \; \theta = n\pi \;. \; n = \pm 1, \pm 2, \ldots$

ดังนั้นค่าของ $\cos\theta$ อยู่ในช่วง $-1 \leqslant \cos\theta \leqslant 1$

รูปแสดงกราฟของ $\cos\theta$ และ $\sin\theta$ (θ – เรเดียน)



รูป 6.5

ดังกล่าวมาแล้วว่า หน่วยวัดมุมเรเดียนนี้ ไม่มีมิติ เป็นจำนวนจำนวนหนึ่งเท่านั้น ฉะนั้น จะนิยาม ฟังก์ชัน sine และ cosine ของจำนวนจริงใด ๆ ดังนี้

นิยาม 6.2 สำหรับจำนวนจริง x ใด ๆ

เมื่อ $0 \leqslant x \leqslant 2\pi$ นิยาม $\sin x$ = sine ของมุม x เรเดียน และ $\cos x$ = cosine ของมุม x เรเดียน

และสำหรับจำนวนจริง x ใด ๆ เขียน

$x = x_0 + 2n\pi$ เมื่อ $0 \leqslant x_0 < 2\pi$ และ n เป็นจำนวนเต็มใด ๆ

นิยาม $\sin x = \sin x_0$ และ

$\cos x = \cos x_0$

ดังนั้น จากนิยามนี้ ได้

$$\sin x = \sin(x + 2\pi) = \sin(x+2n\pi)$$

$$\cos x = \cos(x + 2\pi) = \cos(x + 2n\pi)$$

เมื่อ x เป็นจำนวนจริงใด ๆ และ n เป็นจำนวนเต็มใด ๆ

หรือกล่าวได้ว่า sine และ cosine เป็นฟังก์ชันมีคาบเท่ากับ 2π มีโดเมนเป็นเซตของจำนวนจริงทั้งหมด และพิสัยเป็นช่วง $[-1,1]$

บทนิยาม 6.3 สำหรับฟังก์ชันตรีโกณอื่น ๆ คือ tangent, cotangent, secant และ cosecant มีบทนิยามดังนี้

$$\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$$

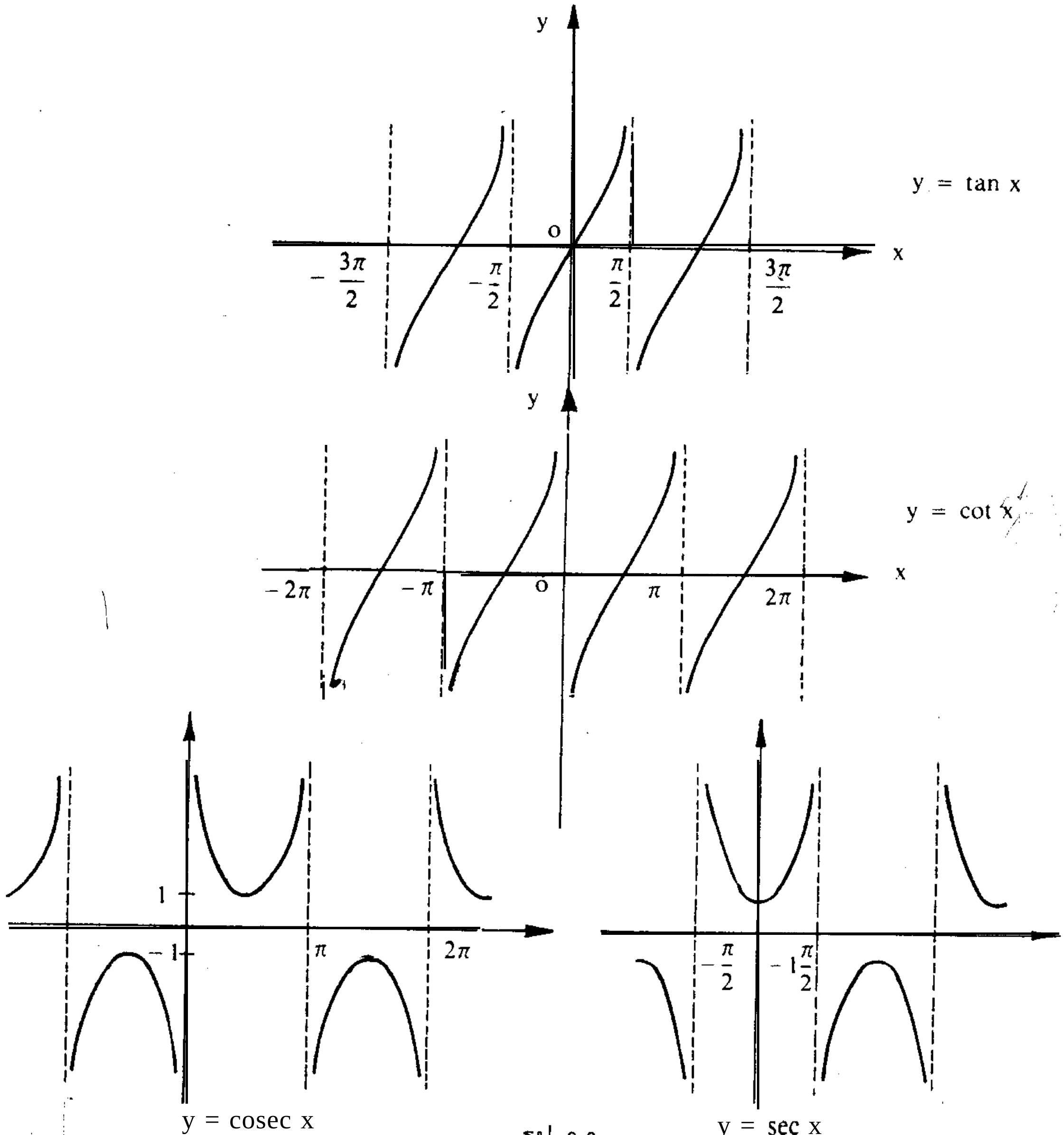
$$\cot x = \frac{\cos x}{\sin x} \quad \left(= \frac{1}{\tan x}\right)$$

$$\sec x = \frac{1}{\cos x}$$

$$\operatorname{cosec} x = \frac{1}{\sin x}$$

ใน domain ของฟังก์ชันเหล่านี้ ไม่รวมค่า x ซึ่งทำให้ตัวส่วนเป็นศูนย์ กราฟของฟังก์ชันเหล่านี้แสดงในรูป 6.6

อย่างไรก็ตาม ฟังก์ชันตรีโกณที่สำคัญ และได้ใช้บ่อย ๆ คือ sine, cosine, tangent



รูป 6.6

เอกลักษณ์ตรีโกณมิติที่ควรทราบ

สำหรับทุก ๆ ค่าจริง x , y

1. $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$
2. $\sin(x+y) = \sin x \cos y + \cos x \sin y$
3. $\cos(x+y) = \cos x \cos y - \sin x \sin y$
4. $\sin(x+\frac{\pi}{2}) = \cos x \, , \quad \cos(x+\frac{\pi}{2}) = -\sin x$
5. $\sin 2x = 2 \sin x \cos x$
6. $\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x$
7. $\sec^2 x = \tan^2 x + 1$
8. $\sin x + \sin y = 2 \sin(\frac{x+y}{2}) \cos(\frac{x-y}{2})$
9. $\cos x + \cos y = 2 \cos(\frac{x+y}{2}) \cos(\frac{x-y}{2})$
10. $\sin^2 \frac{x}{2} = \frac{1-\cos x}{2} \, , \quad \cos^2 \frac{x}{2} = \frac{1+\cos x}{2}$

อนุพันธ์ของฟังก์ชันไซน์และโคไซน์

จากทฤษฎีบท 2.9 และบทแทรกของทฤษฎีบท 2.9 ในบทที่ 2 ซึ่งเกี่ยวกับลิมิตเราได้ว่า

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1 .$$

และ $$\lim_{x \to 0} \frac{1-\cos x}{x} = 0$$

ซึ่งจะใช้ประโยชน์ในการพิสูจน์ทฤษฎีบทต่อไปนี้

ทฤษฎีบท 6.1 ถ้า $f(x) = \sin x$ แล้ว $f'(x) = \cos x$

พิสูจน์ โดยบทนิยามของอนุพันธ์ พิจารณา

$$\frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \frac{\sin(x+h)-\sin x}{h}$$

$$= \frac{\sin x \cos h + \cos x \sin h - \sin x}{h}$$

$$= \sin x \frac{(\cos h - 1)}{h} + \cos x \frac{\sin h}{h}$$

ดังนั้น

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \lim_{h \to 0} \left[\sin x \frac{(\cos h - 1)}{h} + \cos x \frac{\sin h}{h} \right]$$

$$= \lim_{h\to 0} \sin x \frac{(\cos h - 1)}{h} + \lim_{h\to 0} \cos x \cdot \frac{\sin h}{h}$$

$$= \sin x \lim_{h\to 0} \frac{(1-\cos h)}{h} + \cos x \lim_{h\to 0} \frac{\sin h}{h}$$

$$= -\sin x \times 0 + \cos x \times 1$$

$$= \cos x$$

ดังนั้น อนุพันธ์ของ $\sin x$ หาค่าได้ และเท่ากับ $\cos x$

หรือ $\frac{d \sin x}{dx} = \cos x$

หมายเหตุ ถ้า u เป็นฟังก์ชันของ x ซึ่งหาอนุพันธ์ได้แล้วโดยกฎลูกโซ่ จะได้

$$\frac{d \sin u}{dx} = \cos u \frac{du}{dx}$$

และ

$$d \sin u = \cos u \, du$$

ทฤษฎีบท 6.2 ถ้า $f(x) = \cos x$ แล้ว $f'(x) = -\sin x$

พิสูจน์ โดยนิยามของอนุพันธ์ นั่นก็คือ พิจารณา

$$\lim_{h\to 0} \frac{\cos (x+h) - \cos x}{h}$$ โดยตรง

หรือ เขียน $\cos x = \sin (x + \frac{\pi}{2})$

ดังนั้น

$$\frac{d \cos x}{dx} = \frac{d}{dx} \sin (x + \frac{\pi}{2}) = \cos (x + \frac{\pi}{2}) \frac{d}{dx} (x + \frac{\pi}{2})$$

$$= \cos (x + \frac{\pi}{2}) \times 1 = \cos (x + \frac{\pi}{2}) = -\sin x$$

ดังนั้น อนุพันธ์ของ $\cos x$ หาค่าได้ และเท่ากับ $-\sin x$ หรือ

$$\frac{d \cos x}{dx} = -\sin x$$

และถ้า u เป็นฟังก์ชันของ x ซึ่งหาอนุพันธ์ได้ แล้วโดยกฎลูกโซ่ ได้

$$\frac{d \cos u}{dx} = -\sin u \frac{du}{dx}$$

และ

$$d \cos u = -\sin u \, du$$

ตัวอย่าง 6.1 ถ้า $y = \sin(x^2 + 2x)$ จงหา $\frac{dy}{dx}$

วิธีทำ

ให้ $u = x^2 + 2x$

$\therefore y = \sin u$

และ $\frac{dy}{dx} = \cos u \frac{du}{dx} = \cos(x^2 + 2x) \cdot \frac{d(x^2 + 2x)}{dx}$

$= (\cos(x^2 + 2x))(2x + 2)$ #

ตัวอย่าง 6.2 จงหาค่าของ $\frac{d}{dx}\cos 2x$

วิธีทำ เพราะว่า $\frac{d}{dx}\cos u = -\sin u \frac{du}{dx}$

เพราะฉะนั้น $\frac{d}{dx}\cos 2x = -\sin 2x \frac{d}{dx}(2x)$

$= -2\sin 2x$ #

ตัวอย่าง 6.3 ถ้า $y = \tan 2x$ จงหา $\frac{dy}{dx}$

วิธีทำ $y = \tan 2x = \frac{\sin 2x}{\cos 2x}$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}\left(\frac{\sin 2x}{\cos 2x}\right) = \frac{\cos 2x \frac{d \sin 2x}{dx} - \sin 2x \frac{d \cos 2x}{dx}}{\cos^2 2x}$$

$$= \frac{\cos 2X \cdot \cos 2x \frac{d\,2x}{dx} - \sin 2x(-\sin 2x)\frac{d\,2x}{dx}}{\cos^2 2x}$$

$$= \frac{2(\cos^2 2x + \sin^2 2x)}{\cos^2 2x} = 2\sec^2 2x$$

#

ตัวอย่าง 6.4 จงหาอนุพันธ์ของ $\cos^3(1 - x^2)$

วิธีทำ หาอนุพันธ์ $\cos^3(1 - x^2)$ โดยใช้สูตร $\frac{du^n}{dx} = nu^{n-1}\frac{du}{dx}$

และหาอนุพันธ์ของ $\cos u$

เพราะฉะนั้น $\frac{d}{dx}\cos^3(1 - x^2) = 3\cos^2(1 - x^2)\frac{d\cos(1 - x^2)}{dx}$

$= 3\cos^2(1 - x^2)[-\sin(1 - x^2)\frac{d}{dx}(1 - x^2)]$

$$= 3\cos^2(1-x^2)\,[-\sin(1-x^2)(-2x)]$$

$$= 6x\cos^2(1-x^2)\sin(1-x^2)$$

#

อนุพันธ์ของ tan x, cot x, sec x, cosec x

สูตร อนุพันธ์ของ tan x, cot x, sec x และ cosec x หาได้โดยเขียน ฟังก์ชันตรีโกณเหล่านี้ในรูปของ sin x และ cos x แล้วใช้สูตรอนุพันธ์ของผลหารของฟังก์ชัน หรือผลคูณของฟังก์ชัน และอนุพันธ์ของ sin x และ cos x ดังแสดงในตัวอย่าง จะได้

$$\frac{d}{dx}\tan x = \sec^2 x$$

$$\frac{d}{dx}\cot x = -\mathrm{cosec}^2 x$$

$$\frac{d}{dx}\sec x = \sec x \tan x$$

$$\frac{d}{dx}\mathrm{cosec}\, x = -\mathrm{cosec}\, x \cot x$$

สรุปสูตรอนุพันธ์และดิพเพอเรนเชียลของฟังก์ชันตรีโกณ ได้ดังนี้
เมื่อ u เป็นฟังก์ชันของ x ซึ่งหาอนุพันธ์ได้

1. $\dfrac{d\sin u}{dx} = \cos u \dfrac{du}{dx}$, $d\sin u = \cos u\, du$

2. $\dfrac{d\cos u}{dx} = -\sin u \dfrac{du}{dx}$, $d\cos u = -\sin u\, du$

3. $\dfrac{d\tan u}{dx} = \sec^2 u \dfrac{du}{dx}$, $d\tan u = \sec^2 u\, du$

4. $\dfrac{d\cot u}{dx} = -\mathrm{cosec}^2 u \dfrac{du}{dx}$, $d\cot u = -\mathrm{cosec}^2 u\, du$

5. $\dfrac{d\sec u}{dx} = \sec u \tan u \dfrac{du}{dx}$, $d\sec u = \sec u \tan u\, du$

6. $\dfrac{d\,\mathrm{cosec}\, u}{dx} = -\mathrm{cosec}\, u \cot u \dfrac{du}{dx}$, $d\,\mathrm{cosec}\, u = -\mathrm{cosec}\, u \cot u\, du$

และจากสูตรอนุพันธ์ของฟังก์ชันตรีโกณ จาก 1 – 6 ข้างต้นนี้ ได้สูตรอินทิกรัลของฟังก์ชันตรีโกณ ดังนี้

1. $\int \cos u\, du = \sin u + C$

2. $\int \sin u\, du = -\cos u + C$

3. $\int \sec^2 u\, du = \tan u + C$

4. $\int \operatorname{cosec}^2 u\, du = -\cot u + C$

5. $\int \sec u \tan u\, du = \sec u + C$

6. $\int \operatorname{cosec} u \cot u\, du = -\operatorname{cosec} u + C$

เมื่อ C คือ ค่าคงตัวใด ๆ

การใช้สูตรอินทิกรัล 1 – 6 นี้ u อาจเป็นฟังก์ชันใด ๆ ของ x ดังนั้น การหาค่าของอินทิกรัล เมื่อตัวถูกอินทิเกรต (Integrand) เป็นฟังก์ชันตรีโกณ ในรูปใดก็ตาม ถ้าสามารถจัดอยู่ในรูป - 1 – 6 ก็จะทำให้หาค่าของอินทิกรัลได้โดยง่าย

ตัวอย่าง 6.5 จงหาค่าของ $\int \cot^2 (2x - 6)\, dx$

วิธีทำ ตัวถูกอินทิเกรต เป็นฟังก์ชันประกอบของฟังก์ชันตรีโกณ และไม่อยู่ในรูปที่จะอินทิเกรตได้โดยตรง แต่ถ้าเขียน

$$\cot^2 (2x - 6) = \operatorname{cosec}^2 (2x - 6) - 1$$

และแทน $2x - 6 = u$ ได้ $2dx = du$

ดังนั้น

$$\begin{aligned}\int \cot^2 (2x - 6)\, dx &= \frac{1}{2}\int (\operatorname{cosec}^2 u - 1)\, du \\ &= \frac{1}{2}\int \operatorname{cosec}^2 u\, du - \frac{1}{2}\int du \\ &= -\frac{1}{2}\cot u - \frac{1}{2}u + C \text{ (โดยสูตร 4)} \\ &= -\frac{1}{2}\cot (2x - 6) - \frac{1}{2}(2x - 6) + C\end{aligned}$$

ตัวอย่าง 6.6 $\int \cos^6 2x \sin 2x\, dx$

วิธีทำ อินทิกรัล จัดอยู่ในรูป $\int u^n du$ ได้โดยให้

$$u = \cos 2x \quad \therefore du = -2\sin 2x\, dx$$

$$\begin{aligned}\therefore \int \cos^6 2x \sin 2x\, dx &= -\frac{1}{2}\int u^6\, du \\ &= -\frac{1}{2}\frac{u^7}{7} + C \\ &= \frac{-1}{14}\cos^7 2x + C\end{aligned}$$

สำหรับเทคนิคการอินทิเกรต เมื่อตัวถูกอินทิเกรตอยู่ในรูปฟังก์ชันตรีโกณ จะได้ศึกษาเพิ่มเติมในแคลคูลัส และเรขาคณิตวิเคราะห์ 2 (calculus and analytic geometry II) อย่างไรก็ตาม **ควรจะใช้สูตรอินทิกรัล** 1 – 6 **ให้ชำนาญเสียก่อน**

แบบฝึกหัด 6.1

1. ถ้า $y = \operatorname{cosec} x$ แล้วจงแสดงว่า $\frac{dy}{dx} = -\operatorname{cosec} x \cot x$

2. ถ้า $y = \cot x$ แล้วจงแสดงว่า $\frac{dy}{dx} = \operatorname{cosec}^2 x$

3. จงพิสูจน์ โดยนิยามของอนุพันธ์ ว่า $\frac{d \cos x}{ax} = -\sin x$

4. ถ้า $y = \sin kx$ แล้วจงแสดงว่า $y'' + k^2 y = 0$

จงหาอนุพันธ์ของฟังก์ชันในข้อ 5 - 14

5. $\sin(\tan x)$

6. $\cos(x^4 - x^3)$

7. $\operatorname{cosec}^3 (\frac{1}{3}y)$

8. $\frac{\sin 2x}{1 + \cos 2x}$

9. $x^2 \tan^2 (\frac{x}{2})$

10. $\frac{1}{3} \sec^3 2x \quad \sec 2x$

11. $(\cot^2 x) \mid (1 + x^2)$

12. $\tan(\sin x)$

13. $\sqrt{\tan 2x}$

14. จงหาอนุพันธ์ของข้อต่อไปนี้ และเขียนสูตรอินทิกรัลที่ได้

ก) $2 \sin x \cos x$ ข) $x \tan x$ ค) $\frac{\sin x}{x}$

ง) $\frac{1}{1 + \tan x}$ จ) $\frac{\sin x + \cos x}{\sin x \quad \cos x}$

15. ให้ $f(x) = x^2 \sin (\frac{1}{x})$ เมื่อ $x \neq 0$ และ

$f(0) = 0$

จงแสดงโดยนิยามของอนุพันธ์ของ f ว่า $f'(0)$ หาค่าได้ และเท่ากับศูนย์

จงหาค่าของอินทิกรัลในข้อ 16 - 25

16. $\int \sec 2x \tan 2x \, dx$

17. $\int \cos \frac{\pi}{2} x \, dx$

18. $\int \frac{dx}{\cos^2 x}$

19. $\int \frac{\sin \sqrt{\pi x}}{\sqrt{x}} \, d \quad x$

20. $\int \frac{\sin 3x\, dx}{\cos^3 3x}$

21. $\int \sin^5 x\, dx$

22. $\int \tan^5 x \sec^2 x\, dx$

23. $\int \cot^2 (2x - 6)\, dx$

24. $\int \cos^2 \frac{1}{2}x\, dx$

25. $\int \sin 3x \cos 5x\, dx$ (ใช้เอกลักษณ์ตรีโกณ)

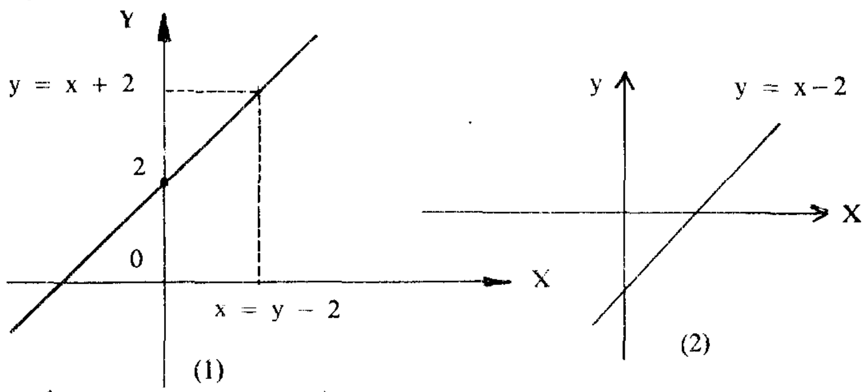
6.2 อนุพันธ์และอินทิกรัลของฟังก์ชันตรีโกณผกผัน

ฟังก์ชันผกผัน (The inverse function)

พิจารณาฟังก์ชัน $y = x + 2$ ....(1)

ในที่นี้ y เป็นฟังก์ชันของ x สำหรับแต่ละค่าของ x จะสมนัยกับค่าของ y เพียงหนึ่งค่า หรือกำหนดค่าของ x มา สามารถหาค่าของ y ได้ ในทางกลับกัน ถ้าทราบค่าของ y แล้ว จาก (1) ย่อมได้ค่าของ x ที่สมนัยกับ y ค่านี้ และมีเพียงค่าเดียวเท่านั้น หรือ

$x = y - 2$ ....(2)



รูป 6.7

สมการ (2) นี้ เห็นได้ว่าเป็นฟังก์ชัน ซึ่งทำหน้าที่กลับกับ (1) หรือเรียกว่า ฟังก์ชันผกผัน (Inverse function) นั่นก็คือ

$x = y - 2$ เป็นฟังก์ชันผกผัน ของ $y = x + 2$

และถ้าคิดในแง่ของตัวแปรแบบเดียวกัน แทน x ด้วย y และแทน y ด้วย x ใน (2) จะได้ $y = x - 2$ เป็นฟังก์ชันผกผันของ $y = x + 2$

บทนิยาม 6.4 ให้ $y = f(x)$ และถ้าสำหรับแต่ละค่า y_1 ในพิสัยของ f มีค่า x_1 ในโดเมนของ f เพียงค่าเดียวเท่านั้น ซึ่ง

$f(x_1) = y_1$

แล้ว

นิยาม ฟังก์ชันผกผันของ f คือ

$x = g(y) =$ จำนวน x จำนวนเดียวเท่านั้น ซึ่ง $f(x) = y$

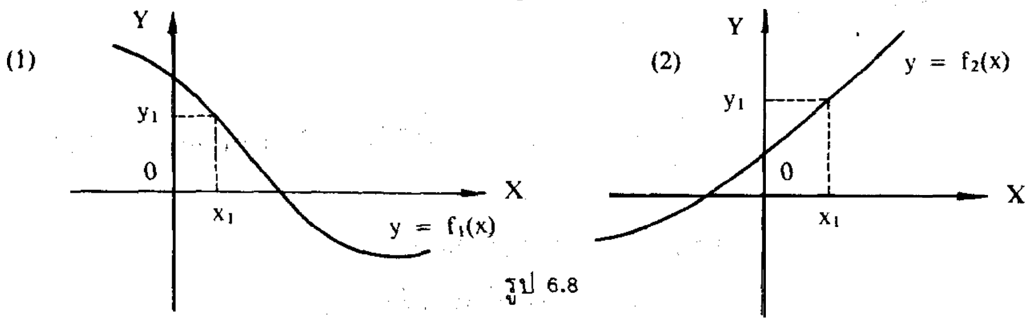
หรือ $x = g(y)$ ก็ต่อเมื่อ $f(x) = y$

ดังนั้น โดเมนของ $x = g(y)$ คือ พิสัยของ $f(x) = y$ และได้

$f(g(y)) = y$ และ $g(f(x)) = x$

สัญญลักษณ์ ที่ใช้สำหรับฟังก์ชันผกผันของ f คือ f^{-1}

สิ่งที่จะพิจารณาต่อไป คือ ฟังก์ชันต้องมีคุณสมบัติอย่างใด จึงจะทำให้หาฟังก์ชันผกผันของมันได้ พิจารณาในแง่เรขาคณิต จากรูป 6.8 (1), (2)



รูป 6.8

เส้นโค้งของ $y = f_1(x)$ เบนลงทางด้านขวามือโดยตลอด ถ้าลากเส้นขนาน $y = y_1$ ตัดกับเส้นโค้งนี้ ตรงจุดตัดลากเส้นดิ่งมาตัดแกน x ที่ x_1 ได้เพียงค่าเดียวเท่านั้น เช่นเดียวกับเส้นโค้ง-$y = f_2(x)$ ในรูป 6.8 (2) ฉะนั้นจะสรุปได้ว่าฟังก์ชันผกผันหาค่าได้ในกรณีฟังก์ชันเพิ่มขึ้นโดยตลอด หรือลดลงโดยตลอด (strictly increasing or decreasing function)

ตัวอย่าง 6.7 จงหาฟังก์ชันผกผันของ $y = x^2$, $x \geqslant 0$

วิธีทำ พิจารณา $y = x^2$

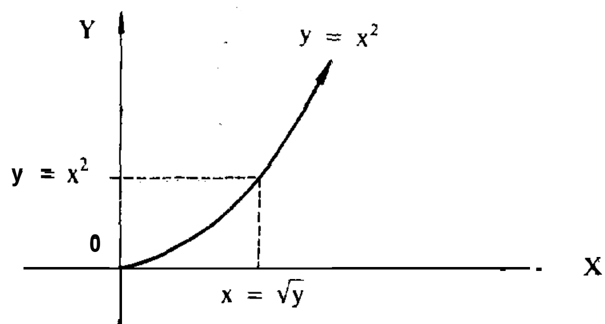
ฟังก์ชันผกผันหาได้ เพราะว่า $f(x) = x^2$ เป็นฟังก์ชันเพิ่มขึ้นโดยตลอด

จาก $y = x^2$, $x \geqslant 0$

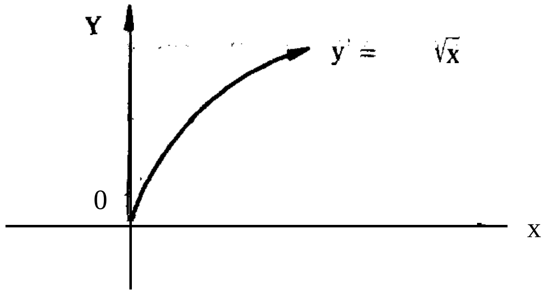
จะได้ $x = \sqrt{y}$ และเพื่อให้เป็นฟังก์ชันในตัวแปรแบบเดียวกัน แทน x ด้วย y และ y ด้วย x

เพราะฉะนั้น $y = \sqrt{x}$ เป็นฟังก์ชันผกผันของ $y = x^2$, $x \geqslant 0$

ดังรูป 6.9



รูป 6.9



รูป 6.9

ฟังก์ชันตรีโกณมิติผกผัน (The inverse trigonometric functions)

ฟังก์ชันผกผันของ sine **หรือ ฟังก์ชัน** arc sine

ให้ $y = \sin x$

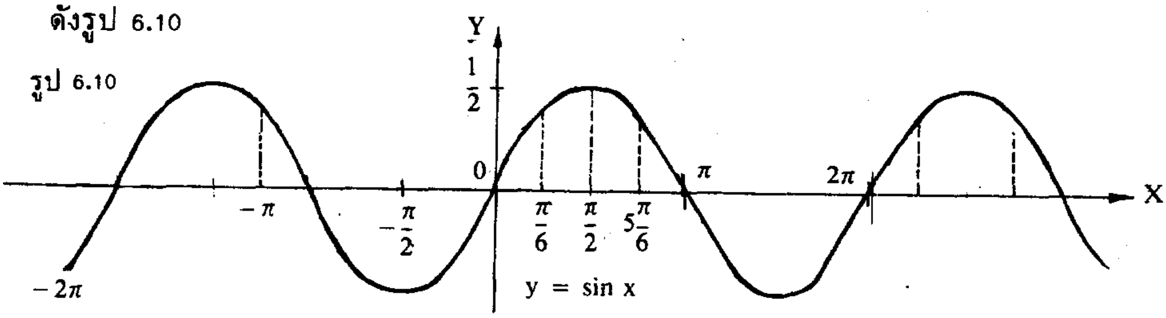
เมื่อกำหนดค่า y มาหนึ่งค่า ในช่วง $-1 \leqslant y \leqslant 1$ จะได้ค่า x ซึ่งสมนัยกับค่า y นี้ เป็นจำนวนอนันต์ เช่น

$y = 0 = \sin x$ เมื่อ $x = n\pi$, n คือ จำนวนเต็มใด ๆ

$$y = \frac{1}{2} = \sin x \text{ เมื่อ } x = \begin{cases} \frac{\pi}{6} + 2n\pi, & n \text{ คือ จำนวนเต็มใด ๆ} \\ 5\frac{\pi}{6} + 2n\pi, & n \text{ คือ จำนวนเต็มใด ๆ} \end{cases}$$

ดังรูป 6.10

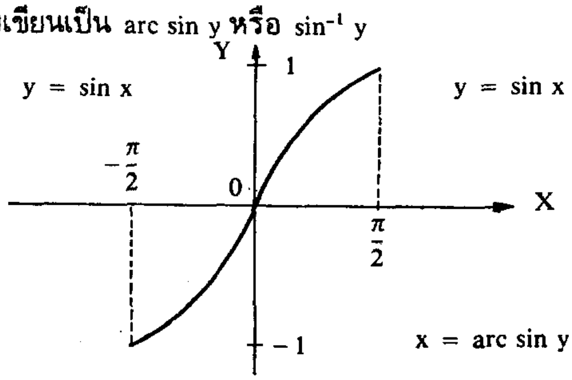
รูป 6.10



แต่ถ้าจำกัดค่า x ในช่วง $-\frac{\pi}{2} \leqslant x \leqslant \frac{\pi}{2}$ ดังรูป 6.11 แล้วสำหรับแต่ละค่า y ในช่วง $-1 \leqslant y \leqslant 1$ จะมีค่า x ซึ่งสมนัยกับค่า y นี้เพียงค่าเดียวเท่านั้น เรียก x จำนวนนี้ว่า

arc sine ของ y

โดยเขียนเป็น arc sin y หรือ $\sin^{-1} y$



รูป 6.11

เลือกจำกัด ค่า x ในช่วง $-\frac{\pi}{2} \leqslant x \leqslant \frac{\pi}{2}$ เพราะว่า $\sin x$ มีค่าเพิ่มขึ้น จาก -1 ไปยัง 1 บนช่วง $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$

นิยาม 6.5 ฟังก์ชันผกผันของ $y = \sin x$, $-\frac{\pi}{2} \leqslant x \leqslant \frac{\pi}{2}$ คือ

$x = \arcsin y$ หรือ $\sin^{-1} y$

หรือ

$x = \arcsin y$ ก็ต่อเมื่อ $y = \sin x$, $-\frac{\pi}{2} \leqslant x \leqslant \frac{\pi}{2}$

ดังนั้น โดเมนของ arc sine คือ ช่วง $[-1, 1]$ และ พิสัย คือ $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$

และ ได้ว่า

สำหรับแต่ละ x ในช่วง $-\frac{\pi}{2} \leqslant x \leqslant \frac{\pi}{2}$

$\arcsin(\sin x) = x$

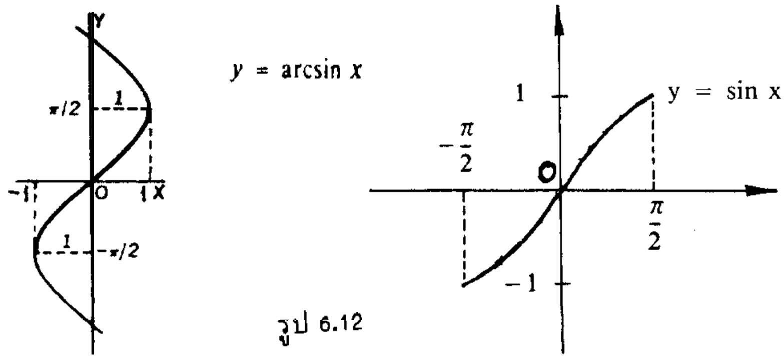
และ สำหรับแต่ละ y ในช่วง $-1 \leqslant y \leqslant 1$

$\sin(\arcsin y) = y$

โดยเขียนตัวแปร x แทน y และ y แทน x กล่าวได้ว่า

$y = \arcsin x$ เป็นฟังก์ชันผกผันของ $x = \sin y$, $-\frac{\pi}{2} \leqslant y \leqslant \frac{\pi}{2}$

กราฟแสดงได้ดังรูป 6.12



รูป 6.12

ตัวอย่าง 6.8 พิจารณาตัวอย่างของฟังก์ชันตรีโกณมิติผกผัน

1. $\arcsin(\frac{1}{2}) = \frac{\pi}{6}$
2. $\arcsin(0) = 0$
3. $\arcsin(1) = \frac{\pi}{2}$
4. $\arcsin(\sin \frac{3\pi}{4}) = \frac{\pi}{4}$ เพราะว่า $\sin \frac{3\pi}{4} = \frac{1}{\sqrt{2}}$

   และ $\arcsin(\frac{1}{\sqrt{2}}) = \frac{\pi}{4}$ ต้องตอบในช่วง $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$
5. $\arcsin(\sin \frac{\pi}{3}) = \frac{\pi}{3}$

6. arc sin (CDS $\frac{3\pi}{2}$) = 0 **เพราะว่า** cos $\frac{3\pi}{2}$ = 0

และ arc sin (0) = 0 #

ฟังก์ชันผกผันของ tangent **หรือ ฟังก์ชัน** arc tangent

ในทำนองเดียวกันกับการนิยาม ฟังก์ชัน arc sine โดยจำกัด โดเมนของฟังก์ชัน tagent เป็นช่วงเปิด $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ ด้วยเหตุผลที่ว่า ฟังก์ชัน tangent เป็นฟังก์ชันต่อเนื่อง และเพิ่มขึ้นโดยตลอดบนช่วงเปิด $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$

บทนิยาม 6.6 ฟังก์ชันผกผันของ

$$y = \tan x \ , \quad -\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}$$

คือ

$x = \text{arc tan } y$ หรือ $\tan^{-1} y$

หรือ

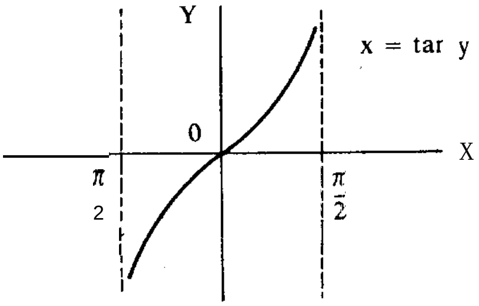
$x = \text{arc tan } y$ ก็ต่อเมื่อ $y = \tan x$, $-\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}$

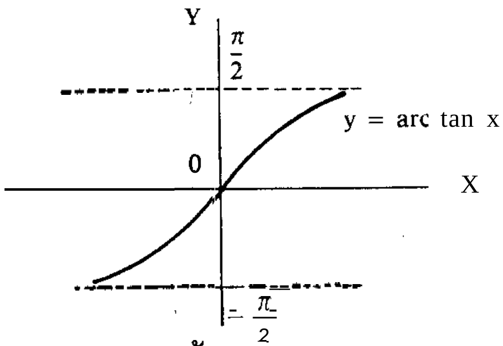
โดยเขียนตัวแปร y แทน x และ x แทน y จะได้

$y = \text{arc tan } x$ เป็นฟังก์ชันผกผันของ

$x = \tan y \ ; \quad -\frac{\pi}{2} < y < \frac{\pi}{2}$

ซึ่งแสดงด้วยกราฟในรูป 6.13





โดเมนของ arc tangent คือ เซตของจำนวนจริงทั้งหมด และพิสัย คือ ช่วงเปิด $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$

และ สำหรับแต่ละจำนวนจริง x **ได้**

$\tan(\text{arc tan } x) = x$

และ สำหรับแต่ละ x **ซึ่ง** $-\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}$ **ได้**

$\text{arc tan}(\tan x) = x$

ตัวอย่าง 6.9

1. $\text{arc tan }(1) = \frac{\pi}{4}$
2. $\text{arc tan }(\tan \frac{\pi}{6}) = \frac{\pi}{6}$
3. $\text{arc tan }(\tan 2\pi) = 0$ เพราะว่า $\tan 2\pi = 0$

   และ $\text{arc tan } o = 0$ ต้องตอบค่าในช่วง $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$
4. $\tan(\text{arc tan } 5) = 5$

สำหรับ ฟังก์ชันผกผันของฟังก์ชันตรีโกณอื่น ๆ มีบทนิยามดังนี้

		โดเมน	พิสัย
1.	$\text{arc cos } x = \frac{\pi}{2} - \text{arc sin } x$,	$-1 \leqslant x \leqslant 1$	, $0 \leqslant \text{arc cos } x \leqslant \pi$
2.	$\text{arc cot } x = \frac{\pi}{2} - \text{arc tan } x$,	$-\infty < x < \infty$	, $0 < \text{arc cot } x < \pi$
3.	$\text{arcsec} x = \text{arc cos } \frac{1}{x}$,	$\lvert x\rvert \geqslant 1$	, $0 \leqslant \text{arc sec } x \leqslant \pi$
4.	$\text{arc cosec } x = \text{arc sin } \frac{1}{x}$,	$\lvert x\rvert \geqslant 1$	, $-\frac{\pi}{2} \leqslant \text{arc cosec } x \leqslant \frac{\pi}{2}$

ตัวอย่าง 6.10

1. $\tan^{-1}(-\sqrt{3}) = -\frac{\pi}{3}$ เพราะว่า

   ให้ $Y = \tan^{-1}(-\sqrt{3})$ $\therefore \tan y = -\sqrt{3}$ ได้ $y = -\frac{\pi}{3}$
2. $\sec^{-1}(2) = \frac{\pi}{3}$ เพราะว่า

   ให้ $y = \sec^{-1}(2)$ $\therefore \sec y = 2$ ได้ $y = \frac{2\pi}{3}$

   (ต้องเลือก y ในช่วง $[0, \pi]$
3. $\cos^{-1}(\frac{1}{2}) = \frac{\pi}{3}$ เพราะว่า

   $\cos^{-1}(\frac{1}{2}) = \frac{\pi}{2} - \sin^{-1} \frac{1}{2}$

   $= \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{3}$

อนุพันธ์ของฟังก์ชันตรีโกณผกผัน

ในการพิสูจน์ทฤษฎีบทเกี่ยวกับอนุพันธ์ของฟังก์ชันตรีโกณผกผันจะใช้ทฤษฎีบทในเรื่องอนุพันธ์ที่กล่าวว่า ถ้า $x = g(y)$ เป็นฟังก์ชันผกผันของ $y = f(x)$ แล้ว $f'(x)$ หาค่าได้แล้ว

$$g'(y) = \frac{1}{f'(x)}$$

หรือ $$\frac{dx}{dy} = \frac{1}{\frac{dy}{dx}}$$

$$= 2\ln x\left(\frac{1}{x}\right)$$

$$\frac{dy}{dx} = y\left(\frac{2}{x}\ln x\right)$$

$$= x^{\ln x}\left(\frac{2}{x}\ln x\right) \qquad \#$$

แบบฝึกหัด ๖.๖

จงหาอนุพันธ์ของฟังก์ชันต่อไปนี้

1. $y = 3^{x^2+1}$
2. $y = 2^{\sec x}$
3. $y = 4^{\cos 4x}$
4. $y = a^{x^2-x}$
5. $y = (\sin x)^{\tan x}$
6. $y = x^x$
7. $y = (\ln x)$”
8. $y = x^{1/x}$

จงหาค่าอินทิกรัลต่อไปนี้

9. $\int 3^x \, dx$
10. $\int 2$”’ ^{x} $\sec x \tan x \, dx$
11. $\int 3^{-\sin\theta} \cos\theta \, dv$
12. $\int 3$“” $^{x^2}$ $2x \cos x^2 \, dx$
13. $\int_1^{\sqrt{2}} x\, 2^{-x^2} \, dx$
14. $\int_0^1 5^{2t-2} \, dt$
15. $\int_0^{\pi/6} \cos e \; 4^{-\sin\theta} \, de$