บทที่ 4
การประยุกต์ของอนุพันธ์
(Application of Derivative)

4.1 ความเร็ว ความเร่ง (Velocity, Acceleration)

ในทางฟิสิกส์ กล่าวถึงการเคลื่อนที่ของวัตถุว่ามีการเคลื่อนที่ได้หลายวิธี มีทั้งการเคลื่อนที่ในแนวเส้นตรง และไม่ใช่เส้นตรง แต่สำหรับในบทนี้จะศึกษาถึงการเคลื่อนที่ของวัตถุในแนวเส้นตรงเท่านั้น โดยเฉพาะอย่างยิ่งจะกล่าวถึงความเร็ว และความเร่งของวัตถุที่เคลื่อนที่ในแนวเส้นตรง

วัตถุเคลื่อนที่ในแนวเส้นตรงมีสมการการเคลื่อนที่อยู่ในรูปความสัมพันธ์ของระยะทางและเวลา

สมมติ วัตถุเคลื่อนที่ได้ทาง s หน่วยระยะทาง โดยใช้เวลาในการเคลื่อนที่ t หน่วยเวลา

ดังนั้น $s = f(t)$ แทนสมการการเคลื่อนที่

ความเร็วโดยทั่วไปแล้ว เราได้จากอัตราส่วนระหว่างปริมาณการแปรค่าของ s (ระยะทาง) กับปริมาณการแปรค่าของ t (เวลา) แต่ถ้าต้องการความเร็วชั่วขณะ หรือความเร็วที่เวลา t ใด ๆ คือค่า $\lim\limits_{\Delta t \to 0} \dfrac{\Delta s}{\Delta t}$ ซึ่งแทนด้วย $\dfrac{ds}{dt}$

นั่นคือ ความเร็วของวัตถุเมื่อเวลา t ใด ๆ คือ $v = \dfrac{ds}{dt}$

ข้อสังเกต
1. ถ้า $v > 0$ วัตถุจะเคลื่อนที่ในทิศทางที่ได้ระยะทางเพิ่มขึ้น
2. ถ้า $v < 0$ วัตถุจะเคลื่อนที่ในทิศทางที่ได้ระยะทางลดลง
3. ถ้า $v = 0$ แสดงว่าวัตถุหยุดนิ่ง

เช่นเดียวกันกับความเร่งของวัตถุ เมื่อเวลา t ใด ๆ เราหาได้จากอัตราส่วนระหว่างปริมาณการแปรค่าของ v กับปริมาณการแปรค่าของ t โดยหาค่า $\lim\limits_{\Delta t \to 0} \dfrac{\Delta v}{\Delta t}$ ซึ่งแทนด้วยสัญลักษณ์ $\dfrac{dv}{dt}$

นั่นคือ ความเร่งของวัตถุเมื่อเวลา t ใด ๆ คือ $a = \dfrac{dv}{dt}$

แต่ $v = \dfrac{ds}{dt}$

ดังนั้น $a = \frac{d}{dt}(\frac{ds}{dt})$

$$= \frac{d^2s}{dt^2}$$

ข้อสังเกต 1. ถ้า $a > 0$ ความเร็วจะเพิ่มขึ้น

2. ถ้า $a < 0$ ความเร็วจะลดลง

3. ถ้า v และ a มีเครื่องหมายเหมือนกัน อัตราเร็ว (speed) ของวัตถุจะเพิ่มขึ้น แต่ถ้า v และ a มีเครื่องหมายต่างกัน อัตราเร็วของวัตถุจะลดลง

จากบทนิยามความเร่งของวัตถุ $a = \frac{dv}{dt}$

โดยใช้กฎลูกโซ่ (Chain rule) จะได้ว่า

$$\frac{dv}{dt} = \frac{dv}{ds} \cdot \frac{ds}{dt}$$

$$= v\frac{dv}{ds} \qquad (1)$$

และเมื่อวัตถุมวล m เคลื่อนที่ด้วยความเร่ง a ซึ่งการเคลื่อนที่ของวัตถุในทางฟิสิคส์บอกว่าเกิดจากแรงกระทำ F โดยที่

$$F = ma$$

ซึ่งจะเขียนได้อีก 2 แบบคือ

$$F = m\frac{dv}{dt} = m\frac{d^2s}{dt^2}$$

และ $$F = mv\frac{dv}{ds} \qquad (2)$$

สมการ (1), (2) ใช้มากในการศึกษาการเคลื่อนที่ของวัตถุใดแนวเส้นตรงในทางฟิสิกส์

ตัวอย่าง 4.1 วัตถุชิ้นหนึ่งเคลื่อนที่ในแนวเส้นตรง มีสมการการเคลื่อนที่ คือ $s = \frac{1}{2}t^3 - 2t$- จงหาความเร็ว ความเร่งที่เวลา t ใด ๆ และหาความเร็ว ความเร่งของวัตถุเมื่อเวลาผ่านไป 2 วินาที

วิธีทำ จาก $v = \frac{ds}{dt}$

$$= \frac{d}{dt}(\frac{1}{2}t^3 - 2t)$$

$$= \frac{3}{2}t^2 - 2$$

เมื่อ $t = 2, v = \frac{3}{2}(2)^2 - 2$

$= 4$ หน่วยระยะทางต่อวินาที

จาก $a = \frac{dv}{dt}$

$= \frac{d}{dt}(\frac{3}{2}t^2 - 2)$

$= 3t$

เมื่อ $t = 2, \quad a = 3(2)$

$= 6$ หน่วยระยะทางต่อ (เวลา)^2

ตัวอย่าง 4.2 ระยะทางที่วัตถุเคลื่อนที่ได้เมื่อเวลา t ใด ๆ แทนด้วย $S = t^3 - 6t^2 + 9t + 4$ เมื่อ S มีหน่วยเป็นเมตร และ t มีหน่วยเป็นวินาที

จงหา (1) S และ a เมื่อ $v = 0$

(2) S และ v เมื่อ $a = 0$

(3) เมื่อใด S เพิ่มขึ้น

(4) เมื่อใด v เพิ่มขึ้น

(5) เมื่อใดทิศทางการเคลื่อนที่เปลี่ยน

วิธีทำ $v = \frac{ds}{dt} = 3t^2 - 12t + 9$

$= 3(t-1)(t-3)$

$a = \frac{dv}{dt} = 6(t-2)$

(1) เมื่อ $v = 0$ ดังนั้น $t = 1, 3$

ดังนั้น เมื่อ $t = 1, \quad S = 1^3 - 6(1)^2 + 9(1) + 4 = 8$

$t = 1, \quad a = 6(1-2) = -6$

เมื่อ $t = 3, \quad S = 3^3 - 6(3)^2 + 9(3) + 4 = 4$

$t = 3, \quad a = 6(3-2) = 6$

(2) เมื่อ $a = 0$ จะได้ $t = 2$

และเมื่อ $t = 2$, $S = 2^3 - 6(2)^2 + 9(1) + 4 = 6$

$v = 3(2-1)(2-3) = -3$

(3) S มีค่าเพิ่มขึ้น เมื่อ $v > 0$

นั่นคือ $3(t-1)(t-3) > 0$ จะได้ $t < 1$ หรือ $t > 3$

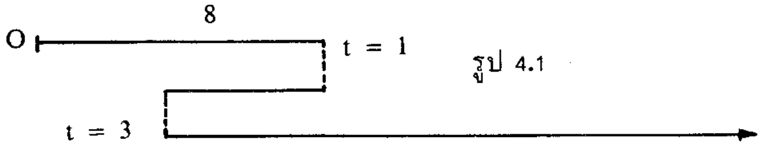
นั่นคือ S มีค่าเพิ่มขึ้น เมื่อ $t < 1 , t > 3$

(4) v มีค่าเพิ่มขึ้น แสดงว่า $a > 0$

นั่นคือ $6(t-2) > 0$

$$t > 2$$

(5) ทิศทางของการเคลื่อนที่เปลี่ยนเมื่อ $t = 1, 3$ (ดูรูป 4.1)



รูป 4.1

หมายเหตุ สำหรับในเรื่องความเร็ว ความเร่ง การแก้ปัญหา ถ้าเกิดกรณีที่ $t < 0$ เราจะไม่พิจารณา ดังตัวอย่างต่อไปนี้

ตัวอย่าง 4.3 กำหนดให้ $S = t^3 - 4t^2 - 3t + 2$ จงหาความเร่ง (acceleration) ขณะที่ความเร็วเท่ากับศูนย์

วิธีทำ $v = \dfrac{ds}{dt} = 3t^2 - 8t - 3$

$a = \dfrac{dv}{dt} = 6t - 8$

เมื่อ $v = 0$ ดังนั้น $3t^2 - 8t - 3 = 0$

$$(3t + 1)(t - 3) = 0$$

$$t = -\frac{1}{3}, 3$$

ค่า $t = -\frac{1}{3}$ ไม่ใช่

เพราะฉะนั้น $t = 3$

a เมื่อความเร็วเป็นศูนย์ $= 6(3) - 8$

$= 10$ หน่วย : (วินาที)^2

แบบฝึกหัด 4.1

1. จงหาความเร็ว (v) ความเร่ง (a) เมื่อกำหนด $S = f(t)$ ให้ ณ. เวลา t ใด ๆ

(1) $S = 2t^2 + 5t - 3$

(2) $S = \frac{1}{2}gt^2 + v_0t + S_0$ เมื่อ g , v_0 , S_0 เป็นค่าคงที่

(3) $S = t^2 - 3t + 2$

(4) $S = (2t + 3)^2$

(5) $S = 64t - 16t^2$

2. จงหาความเร็ว ความเร่ง เมื่อ $t = 1, 5$ ของ $S = f(t)$ ในข้อ 1.

3. วัตถุเคลื่อนที่ในแนวราบ มีสมการการเคลื่อนที่ $S = f(t) = t^3 - 9t^2 + 24t$ จงหา

(1) เมื่อใดที่ s เพิ่มขึ้น, เมื่อใดที่ s ลดลง

(2) เมื่อใดที่ v เพิ่มขึ้น, เมื่อใดที่ v ลดลง

(3) จงหาระยะทางและความเร็วเมื่อ $a = 0$

(4) จงหาระยะทางทั้งหมด เมื่อเวลาผ่านไป 5 วินาที เมื่อระยะทางมีหน่วยเป็นเมตร

4. น้ำในสระว่ายน้ำแห่งหนึ่งถูกปล่อยออกจากสระเพื่อทำความสะอาดสระ ถ้า Q เป็นปริมาณน้ำที่ไหลออกมา ณ. เวลา t ใด ๆ หลังจากเปิดน้ำออก โดยที่

$$Q = 200(30 - t)^2$$

จงหาความเร็วของปริมาณน้ำที่ไหลออกจากสระ เมื่อเวลาผ่านไป 10 วินาที

5. โยนวัตถุจากพื้นดินด้วยความเร็ว 160 ฟุตต่อวินาที และเคลื่อนที่ได้ทาง $S = 160t - 16t^2$ ณ. เวลา t ใด ๆ

จงหา (1) ระยะทางและเวลาที่วัตถุขึ้นไปสูงสุด

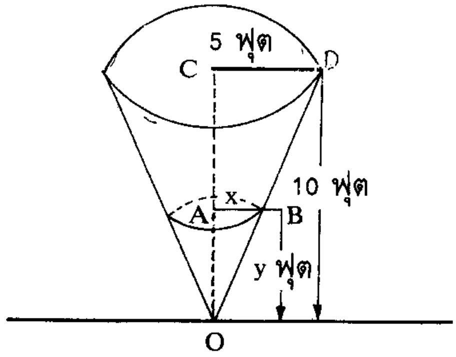
(2) ความเร็วเมื่อวัตถุอยู่ระดับ 256 ฟุต จากพื้นดิน

4.2 อัตราสัมพัทธ์ (Related rate)

ถ้าตัวแปร x เป็นฟังก์ชันของเวลา t แล้วอัตราสัมพัทธ์ของ x คือ $\frac{dx}{dt}$ เมื่อตัวแปรซึ่งเป็นฟังก์ชันของ t (ตัวแปรเหล่านี้อาจมีเพียงตัวเดียว หรือมากกว่า 1 ตัวก็ได้) มีความสัมพันธ์อยู่ในรูปของสมการ แล้วความสัมพันธ์ของอัตราสัมพัทธ์หาได้จากการดิฟเฟอเรนทิเอท สมการเทียบกับ t

พิจารณาตัวอย่างโจทย์อัตราสัมพัทธ์ต่อไปนี้

ตัวอย่าง 4.4 ถังน้ำรูปกรวยกลม สูง 10 ฟุต เส้นผ่าศูนย์กลางของปากกรวยยาว 10 ฟุต มีน้ำไหลเข้าสู่ถังด้วยอัตรา 2 ลูกบาศก์ฟุตต่อนาที จงหาว่า ขณะที่น้ำในถังสูง 6 ฟุต ระดับน้ำจะสูงขึ้นด้วยอัตราเร็วเท่าใด



รูป 4.2

ให้ V เป็นปริมาตรของน้ำในถังขณะเวลา t

x เป็นรัศมีของผิวน้ำในถังรูปกรวย (ดังรูป 4.2)

y เป็นความสูงของน้ำในถังเมื่อเวลา t

ความสัมพันธ์ที่เราทราบคือ ปริมาตรของรูปกรวย

$$V = \frac{1}{3}\pi r^2 h$$

เมื่อ $r = x$, $h = y$ ดังนั้น

$$V = \frac{1}{3}\pi x^2 y$$

จาก $\triangle$ AOB กับ $\triangle$ COD ซึ่งเป็นสามเหลี่ยมคล้าย จะได้

$$\frac{x}{y} = \frac{5}{10}$$

$$x = \frac{y}{2}$$

แทนค่า

$$V = \frac{1}{3}\pi\left(\frac{y}{2}\right)^2 y$$

$$= \frac{1}{12}\pi y^3$$

เพราะฉะนั้น

$$\frac{dv}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{12}\pi y^3\right)$$

$$= \frac{1}{12}\pi \cdot 3y^2 \frac{dy}{dt}$$

$$\frac{dv}{dt} = \frac{1}{4}\pi y^2 \frac{dy}{dt}$$

จากโจทย์กำหนด จะได้ว่า $\frac{dv}{dt} = 2$ ลูกบาศก์ฟุตต่อวินาที และโจทย์ต้องการ $\frac{dy}{dt}$ เมื่อ $y = 6$ ฟุต

ดังนั้น แทนค่าจะได้

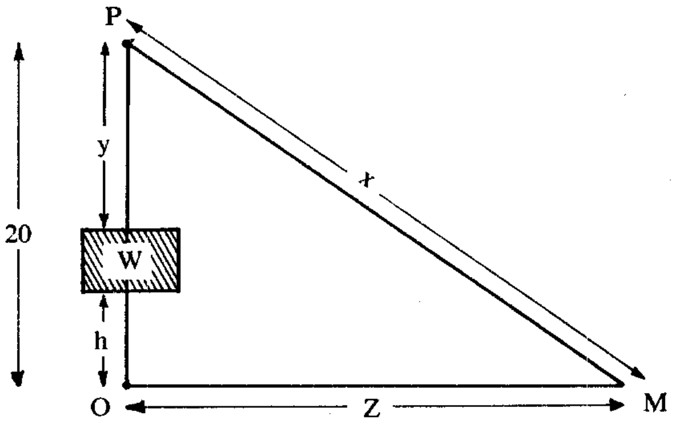
$$2 = \frac{1}{4}\pi(6)^2 \frac{dy}{dt}$$

$$\frac{dy}{dt} = \frac{2}{9\pi}$$

นั่นคือ ระดับน้ำสูงขึ้นด้วยอัตรา $\frac{2}{9\pi}$ ฟุตต่อวินาที

ตัวอย่าง 4.5 กำหนดให้รอกสูงจากพื้น 20 ฟุต เชือกเส้นหนึ่งยาว 45 ฟุต ผูกติดกับรอก โดยที่ปลายข้างหนึ่งผูกน้ำหนัก w ส่วนปลายเชือกอีกข้างหนึ่งชายคนหนึ่งถือเอาไว้ (โดยไม่คิดส่วนสูงของชายคนนี้) ถ้าชายคนนี้เดินห่างจากจุด O (ดังรูป 4.3) 15 ฟุต ด้วยความเร็วเฉลี่ย 6 ฟุตต่อวินาทีแล้ว จงหาว่าน้ำหนักที่ผูกติดกับปลายอีกข้างหนึ่งเลื่อนขึ้นด้วยความเร็วเท่าใด

วิธีทำ



รูป 4.3

ให้ P เป็นรอกอยู่ห่างจากพื้น 20 ฟุต

OM เป็นระยะทางที่ชายคนนี้เดิน 15 ฟุต

x เป็นความยาวของเชือกจากรอกมายังชายคนนี้

y เป็นความยาวของเชือกจากรอกมายังน้ำหนัก W

h เป็นความสูงของน้ำหนัก W จากพื้นดิน

จากโจทย์จะได้ว่า

$x + y = 45$ .....(1)

$y + h = 20$ (ไม่คิดความสูงของ W) .....(2)

$20^2 + Z^2 = x^2$ .....(3)

และ $\frac{dz}{dt} = 6$ ฟุต ต่อวินาที

จาก (2) $y = 20 - h$ .....(4)

จาก (1) $x = 45 - y$

$= 45 - (20 - h)$

$= 25 + h$

แทน x ลงใน (3) จะได้

$$20^2 + z^2 = (25 + h)^2 \quad .....(5)$$

สมการ (5) เป็นความสัมพันธ์ระหว่าง z กับ h สำหรับทุกค่า t ภายใต้การพิจารณาของเรา ซึ่งทั้ง z และ h เป็นฟังก์ชันของ t

ดังนั้น $\frac{d}{dt}(20 + z^2) = \frac{d}{dt}(25 + h)^2$

$$2z\frac{dz}{dt} = 2(25 + h)\frac{dh}{dt} \quad .....(6)$$

เมื่อ $z = 15$ แทนใน (5)

$$20^2 + 15^2 = (25 + h)^2$$

$$25^2 = (25 + h)^2$$

$$h = 0$$

แทนค่า $z = 15, h = 0$ $\frac{dz}{dt} =$ ใน(6)จะได้

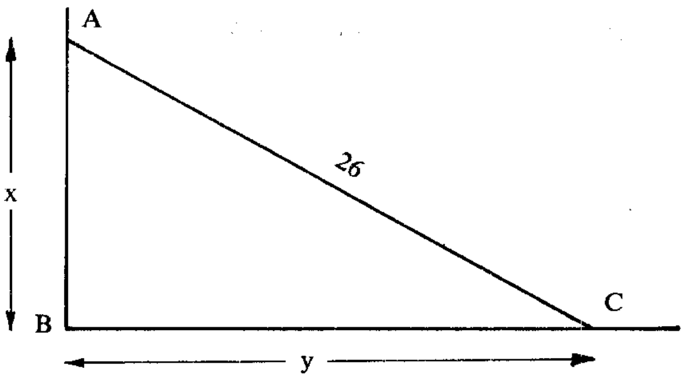
$$2(15)(6) = 2(25 + 0)\frac{dh}{dt}$$

$$\frac{dh}{dt} = \frac{18}{5}$$

นั่นคือ น้ำหนักเลื่อนขึ้นด้วยความเร็ว $\frac{18}{5}$ ฟุตต่อวินาที

ตัวอย่าง 4.6 บันไดยาว 26 ฟุต ปลายวางพิงอยู่กับกำแพง ตีนบันไดวางอยู่บนพื้นดิน ถ้าตีนบันไดเคลื่อนห่างจากกำแพง 10 ฟุต ด้วยความเร็ว 4 ฟุตต่อวินาทีจงหาว่าปลายบันไดจะเลื่อนลงด้วยความเร็วเท่าไร

วิธีทำ



ให้ AC เป็นบันไดยาว 26 ฟุต

AB เป็นระยะที่ปลายบันไดห่างจากตีนกำแพง

BC เป็นระยะที่ตีนบันไดห่างจากตีนกำแพง

จากโจทย์ทำให้ทราบว่า

$$x^2 + y^2 = 26^2$$

ดังนั้น $\frac{d}{dt}(x^2 + y^2) = \frac{d}{dt}(26^2)$

$$2x\frac{dx}{dt} + 2y\frac{dy}{dt} = 0$$

$$\frac{dx}{dt} = \frac{-y}{x}\frac{dy}{dt}$$

เมื่อ $\frac{dy}{dt} = 4, y = 10, x = \sqrt{26^2 - 10^2} = 24$

เพราะฉะนั้น $\frac{dx}{dt} = -\frac{10}{24}(4)$

$$= -\frac{5}{3}$$

นั่นคือ ปลายบันไดเลื่อนลงด้วยความเร็ว $\frac{5}{3}$ ฟุตต่อวินาที

แบบฝึกหัด 4.2

1. ให้ A เป็นพื้นที่ของวงกลมรัศมี r จงหาความสัมพันธ์ระหว่าง $\frac{dA}{dt}$ กับ $\frac{dr}{dt}$

2. ให้ v เป็นปริมาตรของทรงกลมรัศมี r จงหาความสัมพันธ์ระหว่าง $\frac{dV}{dt}$ กับ $\frac{dr}{dt}$ และถ้ารัศมีเท่ากับ 3, $\frac{dr}{dt} = 3$ จงหา $\frac{dV}{dt}$

3. ข้าวเปลือกไหลออกจากเครื่องกองบนพื้นเป็นรูปกรวย ด้วยอัตรา 10 ลูกบาศก์ฟุตต่อวินาที ถ้ารัศมีของปากกรวยเป็น $1\frac{1}{2}$ เท่าของส่วนสูงเสมอ จงหาว่า ส่วนสูงจะเพิ่มขึ้นเร็วเท่าไร เมื่อกรวยนี้สูง 5 ฟุต

4. จุด A เคลื่อนที่ตามแกน X ด้วยความเร็ว a ฟุตต่อวินาที ขณะที่จุด B เคลื่อนตามแกน Y ด้วยความเร็ว b ฟุตต่อวินาที จงหาว่าระยะทางระหว่าง A และ B จะเปลี่ยนแปลงอย่างไร เมื่อ A อยู่ที่จุด (x,o) แล้ว B อยู่ที่จุด (o,y)

5. บอลลูนรูปทรงกลม ชายคนหนึ่งปล่อยแก๊ซเข้าไปในบอลลูนด้วยอัตราเร็ว 100 ลูกบาศก์ฟุตต่อวินาที อยากทราบว่ารัศมีของบอลลูนจะเพิ่มขึ้นเร็วเท่าไร เมื่อรัศมีของบอลลูนเป็น 3 ฟุต

6. บอลลูนลอยสูงจากพื้นดิน 200 ฟุต ลอยขึ้นด้วยความเร็วคงที่ 15 ฟุตต่อวินาที รถยนต์คันหนึ่งวิ่งผ่านใต้บอลลูน ไปบนถนนตรงด้วยความเร็วคงที่ 45 ไมล์ต่อชั่วโมง จงหาว่าระยะทางระหว่างรถยนต์ และบอลลูน เปลี่ยนแปลงเร็วเท่าไร หลังจาก 1 วินาทีผ่านไป

7. ชายคนหนึ่งสูง 6 ฟุต เดินด้วยความเร็ว 5 ฟุตต่อวินาที เดินเข้าหาเสาไฟฟ้าในตอนกลางคืน โดยที่เสาไฟฟ้ามีหลอดไฟสูงจากพื้น 16 ฟุต จงหาความเร็วของเงาในการเคลื่อนที่ เมื่อชายคนนั้นอยู่ห่างจากเสาไฟ 10 ฟุต

8. ลูกเหล็กทรงกลมเส้นผ่าศูนย์กลาง 8 นิ้ว ปกคลุมด้วยน้ำแข็งอย่างสม่ำเสมอ โดยรอบ ถ้าน้ำแข็งละลายด้วยความเร็ว 10 ลูกบาศก์นิ้วต่อวินาที จงหาว่าความหนาของน้ำแข็งเปลี่ยนไปอย่างไร ในขณะที่น้ำแข็งหนา 2 นิ้ว

9. น้ำแข็งไหลออกจากกรวยซึ่งปากกรวยมีเส้นผ่าศูนย์กลาง 8 ฟุต และสูง 10 ฟุต ด้วยอัตราเร็วคงที่ คือ 5 ลูกบาศก์ฟุตต่อวินาที จงหาว่าระดับน้ำจะลดลงด้วยความเร็วอย่างไร ขณะที่น้ำสูง 6 ฟุต

10. เด็กคนหนึ่งเล่นว่าวโดยที่ว่าวสูงจากพื้นดิน 300 ฟุต ลมพัดว่าวไปในแนวระดับ ด้วยความเร็ว 25 ฟุตต่อวินาที จงหาว่า เด็กชายคนนี้จะต้องปล่อยเชือกออกไปด้วยความเร็วเท่าไร เมื่อว่าวอยู่ห่างจากเด็กคนนั้น 500 ฟุต (ไม่คิดความสูงของเด็ก)

4.3 สมการเส้นสัมผัส และเส้นปกติ (Tangents Line and Normals Line)

เราทราบมาแล้วว่า สมการเส้นตรงที่ผ่านจุด (x_0, y_0) และมีความชัน m คือ

$$y - y_0 = m(x - x_0)$$

กำหนดให้ $y = f(x)$ เป็นฟังก์ชันที่หาอนุพันธ์ได้ที่ $x = x_0$ จากบทที่แล้ว

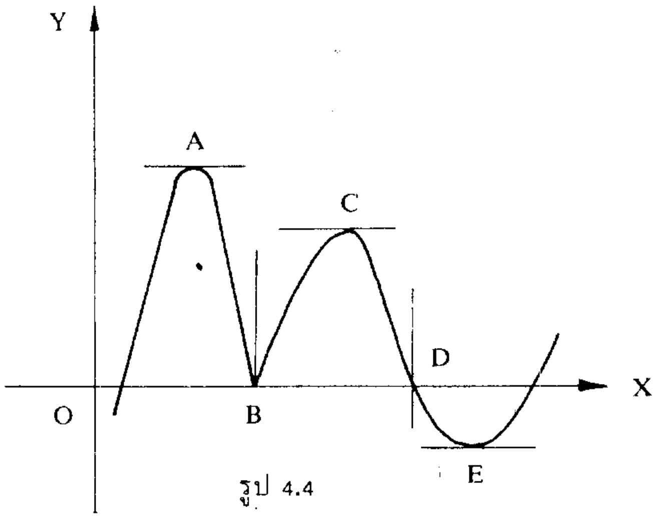
จะได้ว่า $\left(\frac{dy}{dx}\right)_{x = x_0}$ หรือ $f'(x_0)$ คือ ความชันของเส้นโค้งที่ $x = x_0$ หรือกล่าวได้อีกอย่างหนึ่ง ก็คือ ความชันของเส้นสัมผัสเส้นโค้ง $y = f(x)$ ที่ $x = x_0$

ดังนั้นสมการเส้นสัมผัสที่สัมผัสเส้นโค้ง $y = f(x)$ ที่ $x = x_0$ คือ

$$y - y_0 = f'(x_0)(x - x_0)$$

ข้อสังเกต ถ้า $f'(x_0) \neq 0$ แล้วสมการเส้นสัมผัส คือ $y - y_0 = f'(x_0)(x - x_0)$ แต่ถ้า $f'(x_0) = 0$ เส้นโค้ง $y = f(x)$ จะมีเส้นสัมผัสขนานกับแกน x (ดังรูป 4.4 ที่จุด A, C, E) คือ สมการ $y = y_0$

ถ้า $f(x)$ ต่อเนื่องที่ $x = x_0$ แต่ $\lim\limits_{x \to x_0} f'(x) = \infty$ แล้วเส้นโค้งจะมีเส้นสัมผัสในแนวดิ่ง คือ $x = x_0$ (ดังรูป 4.4 ที่จุด B, D)



รูป 4.4

บทนิยาม 4.1 เส้นตรงที่ผ่านจุด $P_0(x_0, y_0)$ และตั้งได้ฉากกับเส้นสัมผัสที่จุดสัมผัส $P_0(x_0, y_0)$ เรียกว่า เส้นปกติ (normal line) (รูป 4.5)

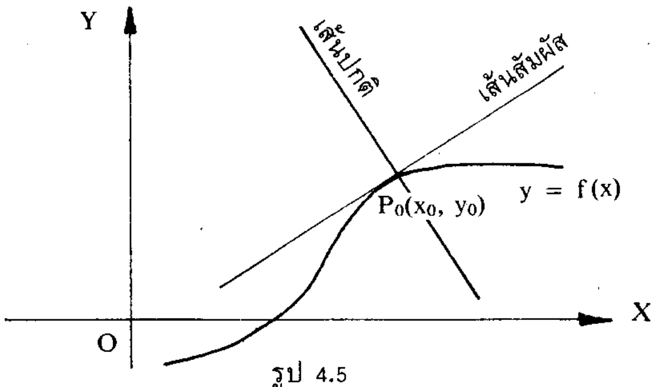
สมการเส้นปกติที่ผ่านจุด $P_0(x_0, y_0)$ คือ

$x = x_0$ ถ้า เส้นสัมผัสอยู่ในแนวระดับ

$y = y_0$ ถ้า เส้นสัมผัสอยู่ในแนวดิ่ง

สำหรับกรณีอื่นสมการคือ

$$y - y_0 = -\frac{1}{f'(x_0)}(x - x_0)$$



รูป 4.5

ข้อสังเกต ถ้า m แทนความชันของเส้นสัมผัส $-\frac{1}{m}$ แทนความชันของเส้นปกติ นั่นคือ เส้นปกติกับเส้นสัมผัสตั้งได้ฉากกันความชันคูณกันจึงมีค่าเท่ากับ -1 $(m \cdot -\frac{1}{m} = -1)$

ตัวอย่าง 4.7 จงหาสมการเส้นสัมผัส และเส้นปกติของเส้นโค้ง

$$y = x^3 - 2x^2 + 4$$

ที่จุด (2,4)

วิธีทำ จากโจทย์กำหนด $y = x^3 - 2x^2 + 4$

$$f'(x) = \frac{dy}{dx} = 3x^2 - 4x$$

ความชันของเส้นตรงที่สัมผัสเส้นโค้งที่ (2,4)

$$\begin{aligned} \text{คือ } f'(2) &= 3(2)^2 - 4(2) \\ &= 12 - 8 \\ &= 4 \end{aligned}$$

เส้นสัมผัสที่จุด (2,4) คือ

$$\begin{aligned} y - 4 &= 4(x - 2) \\ y &= 4x - 4 \qquad .....(*) \end{aligned}$$

ความชันของเส้นปกติ คือ $-\frac{1}{4}$

ดังนั้น สมการเส้นปกติที่จุด (2,4) คือ

$$\begin{aligned} y - 4 &= -\frac{1}{4}(x - 2) \\ y &= -\frac{1}{4}x + \frac{9}{2} \qquad .....(**) \end{aligned}$$

ตัวอย่าง 4.8 จงหาสมการเส้นสัมผัส และเส้นปกติของเส้นโค้ง

$$x^2 + 3xy + y^2 = 5$$

ที่จุด (1,1)

วิธีทำ จาก $x^2 + 3xy + y^2 = 5$ หาอนุพันธ์ $\frac{dy}{dx}$ จะได้

$$2x + \left(3x\frac{dy}{dx} + 3y\right) + 2y\frac{dy}{dx} = 0$$

$$(3x + 2y)\frac{dy}{dx} = -2x - 3y$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-(2x + 3y)}{3x + 2y}$$

ดังนั้นความชันของเส้นสัมผัสเส้นโค้งที่จุด (1,1) คือ

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)_{(1,1)} = \frac{-(2(1) + 3(1))}{3(1) + 2(1)} = -1$$

ความชันของเส้นปกติเท่ากับ $\frac{-1}{-1} = 1$

ดังนั้น สมการเส้นสัมผัสเส้นโค้งที่จุด (1,1) คือ

$$y - 1 = -1(x - 1)$$

$$x + y = 2 \qquad .....(*)$$

สมการเส้นปกติที่จุด (1,1) คือ

$$y - 1 = 1(x - 1)$$

$$x - y = 0 \qquad .....(**)$$

ตัวอย่าง 4.9 จงแสดงว่า เส้นปกติของเส้นโค้ง

$$x^2 + y^2 = a^2$$

ที่จุด (x_0, y_0) ใด ๆ เป็นเส้นตรงที่ผ่านจุดกำเนิด (origin)

วิธีทำ หาอนุพันธ์ $\frac{dy}{dx}$ จะได้ว่า

$$\frac{d}{dx}(x^2 + y^2) = \frac{d}{dx}a^2$$

$$2x + 2y\frac{dy}{dx} = 0$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-x}{y}$$

เพราะฉะนั้น ความชันของเส้นสัมผัสที่จุด (x_0, y_0) เท่ากับ $-\frac{x_0}{y_0}$

ดังนั้น ความชันของเส้นปกติที่จุด (x_0, y_0) คือ $-\frac{1}{\left(-\frac{x_0}{y_0}\right)} = \frac{y_0}{x_0}$

สมการเส้นปกติของเส้นโค้งที่ผ่านจุด (x_0, y_0) คือ

$$y - y_0 = \frac{y_0}{x_0}(x - x_0)$$

$$y - y_0 = \left(\frac{y_0}{x_0}\right)x - y_0$$

$$y = \left(\frac{y_0}{x_0}\right)x$$

ซึ่งเป็นสมการเส้นตรงซึ่งผ่านจุดกำเนิด (origin) เสมอ

ตัวอย่าง 4.10 จงหาสมการเส้นตรงทั้งหมดที่ลากจากจุด $P(-1, 2)$ มาสัมผัสกับเส้นโค้ง $4xy = 1$

วิธีทำ ความชันของเส้นสัมผัสเส้นโค้ง $4xy = 1$ ที่จุด (x, y) ใด ๆ คือ $\frac{dy}{dx}$ ได้แก่

$$\frac{d}{dx}(4xy) = \frac{d}{dx}(1)$$

$$4y + 4x\frac{dy}{dx} = 0$$

$$\frac{dy}{dx} \quad -\frac{y}{x} \qquad .....(1)$$

เพราะว่า เส้นตรงที่ผ่านจุด $(-1, 2)$ และ (x, y) ใด ๆ มีความชันเท่ากับ

$$m = \frac{y - 2}{x + 1} \qquad .....(2)$$

แต่ (1) = (2) ดังนั้น

$$\frac{y - 2}{x + 1} = -\frac{y}{x}$$

$$xy - 2x = -xy - y$$

$$2xy - 2x + y = 0$$

$$4xy - 4x + 2y = 0$$

แต่ $4xy = 1$ ดังนั้น

$$1 - 4x + 2y = 0$$

เพราะฉะนั้น $1 - \frac{1}{y} + 2y = 0$

$$2y^2 + y - 1 = 0$$

$$(2y - 1)(y + 1) = 0$$

$$y = \frac{1}{2}, -1$$

แทนค่า y จะได้ $x = \frac{1}{2}, -\frac{1}{4}$

เพราะฉะนั้น เส้นสัมผัสเส้นโค้งสัมผัสเส้นโค้งที่จุด $(-\frac{1}{4}, -1)$ และ $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$

และความชันของเส้นสัมผัสที่จุด $(-\frac{1}{4}, -1)$ คือ

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)_{(-\frac{1}{4},-1)} = -\frac{y}{x} = -4$$

สมการเส้นสัมผัสที่ผ่านจุด $(-1, 2)$ และมีความชัน -4 คือ

$$y - 2 = -4(x + 1)$$

$$4x + y + 2 = 0 \qquad .....(*)$$

ความชันของเส้นสัมผัสที่จุด $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ คือ

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)_{(\frac{1}{2},\frac{1}{2})} = -\frac{y}{x} = -1$$

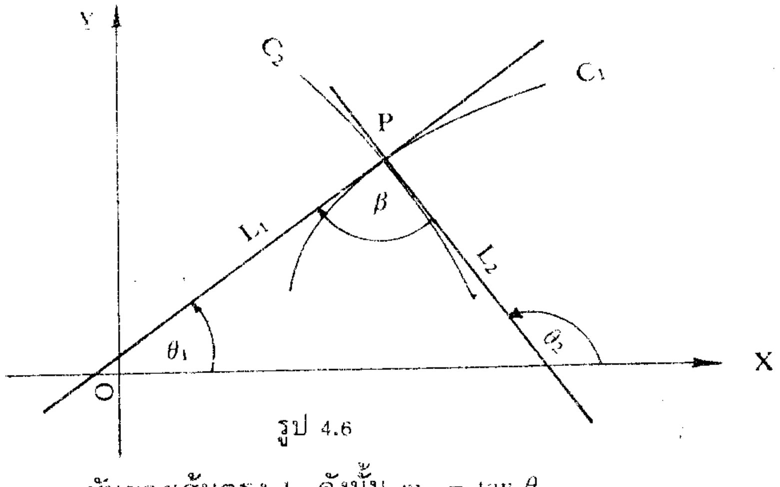
สมการเส้นสัมผัสที่ผ่านจุด $(-1, 2)$ และมีความชัน -1 คือ

$$y - 2 = -1(x + 1)$$

$$x + y = 1 \qquad .....(**)$$

4.4 มุมระหว่างเส้นโค้ง 2 เส้น (Angle between two curves)

กำหนดให้ C_1 และ C_2 เป็นเส้นโค้ง 2 เส้น ตัดกันที่จุด P ให้ L_1, L_2 เป็นเส้นสัมผัสเส้นโค้ง C_1, C_2 ที่จุด P โดยทำมุม θ_1, θ_2 กับแกน x ตามลำดับ ดังรูป 4.6



รูป 4.6

ให้ m_1 แทนความชันของเส้นตรง L_1 ดังนั้น $m_1 = \tan\theta_1$

ให้ m_2 แทนความชันของเส้นตรง L_2 ดังนั้น $m_2 = \tan\theta_2$

นิยาม 4.2 มุมระหว่างเส้นโค้ง 2 เส้นที่ตัดกัน นิยามโดยมุมระหว่างเส้นสัมผัสของเส้นโค้งทั้ง 2 ที่จุดตัดของเส้นโค้ง

เพราะฉะนั้น ถ้าให้ β เป็นมุมระหว่างเส้นสัมผัสเส้นโค้งทั้งสอง และใช้แทนมุมระหว่างเส้นโค้ง C_1 และ C_2 แล้ว

$$\beta = \theta_2 - \theta_1$$

$$\tan\beta = \tan(\theta_2 - \theta_1)$$

$$= \frac{\tan\theta_2 - \tan\theta_1}{1 + \tan\theta_2\tan\theta_1}$$

$$= \frac{m_2 - m_1}{1 + m_2m_1}$$

เมื่อ β เป็นมุมที่วัดทวนเข็มนาฬิกาจาก L_2 ไปยัง L_1 สำหรับวิธีการหามุมระหว่างเส้นโค้ง 2 เส้นตัดกัน สรุปได้ดังนี้

1) แก้สมการหาจุดตัด
2) หาความชัน m_1, m_2 ของเส้นสัมผัสเส้นโค้งที่จุดตัด ใช้ความรู้ทางอนุพันธ์ช่วย
3) ถ้า $m_1 = m_2$ มุมระหว่างเส้นโค้งทั้งสองเท่ากับ 0
   ถ้า $m_1 = -\frac{1}{m_2}$ มุมระหว่างเส้นโค้งทั้งสองเท่ากับ 90°
   ถ้าในกรณีอื่น ๆ $\tan\beta = \frac{m_2 - m_1}{1 + m_2m_1}$

ถ้า $m_1m_2 = -1$ หรือ $m_1 = -\frac{1}{m_2}$ แล้ว เส้นตรง L_1 ซึ่งเป็นเส้นสัมผัสเส้นโค้ง C_1 ตั้งได้ฉากกับ L_2 ซึ่งเป็นเส้นสัมผัสเส้นโค้ง C_2 ซึ่งเราจะกล่าวได้ว่าเส้นโค้งทั้งสองตั้งได้ฉากกัน หรือ ออร์โทโกนัล (orthogonal) กัน

ตัวอย่าง 4.11 จงหามุมระหว่างเส้นโค้ง

$x^2 + xy + y^2 = 7$ กับ $y = 2x$

วิธีทำ ความชันของเส้นสัมผัสเส้นโค้ง $x^2 + xy + y^2 = 7$ ที่จุด (x, y) ใด ๆ คือ

$$\frac{d}{dx}(x^2 + xy + y^2) = \frac{d}{dx}(7)$$

$$2x + (x\frac{dy}{dx} + y) + 2y\frac{dy}{dx} = 0$$

$$(x + 2y)\frac{dy}{dx} = -(2x + y)$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-(2x + y)}{}$$

นั่นคือ $m_1 = \frac{dy}{dx} = \frac{-(2x + y)}{x + 2y}$ .....(1)

ความชันของเส้นสัมผัสเส้นโค้ง $y = 2x$ ที่จุด (x, y) ใด ๆ คือ

$$\frac{dy}{dx} = 2$$

ให้ $m_2 = 2$ .....(2)

พิจารณาจุดตัดของเส้นโค้ง

จาก $x^2 + xy + y^2 = 7$ .....(3)

$y = 2x$ .....(4)

แทนค่า y ใน (3) จะได้

$$x^2 + 2x^2 + 4x^2 = 7$$

$$7x^2 = 7$$

$$x = \pm 1$$

ดังนั้น $y = \pm 2$

แสดงว่าเส้นโค้งตัดกันที่จุด (1,2) และ (−1, −2)

หามุมระหว่างเส้นโค้งที่จุด (1,2)

โดยการแทนค่า $x = 1, y = 2$ จะได้

$$m_1 = -\frac{4}{5}$$

$$m_2 = 2$$

$$\tan\beta = \frac{2 - (-\frac{4}{5})}{1 + (2)(-\frac{4}{5})}$$

$$= \frac{\frac{14}{5}}{-\frac{3}{5}}$$

$$= -\frac{14}{3}$$

$$\beta = \tan^{-1}(-\frac{14}{5})$$

ในทำนองเดียวกันที่จุด $(-1, -2)$ จะได้

$$m_1 = -\frac{4}{5}$$

$$m_2 = 2$$

แสดงว่าที่จุด $(-1, -2)$ เส้นโค้งทำมุมเท่ากันกับที่จุด $(1,2)$ #

หมายเหตุ จากตัวอย่าง 4.11 มุม β เป็นมุมที่วัดจากเส้นโค้ง C_1 ไปยัง C_2 แต่ถ้าเราต้องการจาก C_2 ไปยัง C_1 จะได้

$$\tan\beta = \frac{-\frac{4}{5} - 2}{1 + (2)(-\frac{4}{5})} = \frac{14}{3}$$

$$\beta = \tan^{-1}\left(\frac{14}{3}\right)$$

แบบฝึกหัด 4.3

1. จงหาสมการเส้นสัมผัสเส้นโค้งที่จุด $(-2,1)$ ของเส้นโค้ง

   $y^2 - 2x - 4y - 1 = 0$

2. จงหาสมการเส้นปกติของเส้นโค้ง $xy + 2x - 5y - 2 = 0$ ที่จุด $(3,2)$
3. จงหาสมการเส้นสัมผัสเส้นโค้ง $y = x^3 - 6x + 2$ และขนานกับเส้นตรง $y = 6x - 2$
4. จงหาสมการเส้นปกติของเส้นโค้ง $xy - y + 2x = 0$ และขนานกับเส้นตรง $y + 2x = 0$
5. จงหาสมการเส้นสัมผัส และสมการเส้นปกติของเส้นโค้ง $y^2 - 2x + 3y = 4xy$ ที่จุด $(0, -3)$
6. จงแสดงว่าเส้นตรง 2 เส้นที่ลากจากจุด $(\frac{3}{2}, 0)$ ไปสัมผัสกับเส้นโค้ง $x^2 - 4y + 4 = 0$ ต้องตั้งได้ฉากกัน
7. จงแสดงว่าเส้นตรง 2 เส้น ที่ลากจากจุดใด ๆ บนเส้นตรง $x = -p$ ไปสัมผัสเส้นโค้ง $y^2 = 4px$ ตั้งได้ฉากกัน
8. เส้นสัมผัสเส้นโค้ง $y = x^3$ ที่จุด $(1,1)$ ตัดเส้นโค้งนี้หรือไม่ถ้าตัดจงหาจุดตัดนั้น
9. ถ้าเส้นสัมผัสที่ลากจากจุด $P_1(1,5)$ ไปยังจุด $P_1(x_1, y_1)$ สัมผัสกับเส้นโค้ง $y = x^3$

   จงหาจุด $P_1(x_1, y_1)$ และจุด $P_1(x_1, y_1)$ มีได้มากกว่า 1 จุด หรือไม่เพราะเหตุใด

10. จงหาเส้นปกติของเส้นโค้ง $x^2 - y^2 = 5$ ซึ่งขนานกับเส้นตรง $2x + 3y = 10$ ว่ามีทั้งหมดกี่เส้น

    จงเขียนเส้นโค้ง และเส้นต่าง ๆ

11. เส้นปกติของเส้นโค้ง $y = x^2 + 2x - 3$ ที่จุด $(1,0)$ ตัดกับเส้นโค้งที่จุดใดบ้าง จงหาจุดตัดเหล่านั้น

12. จงแสดงว่าเส้นโค้ง $2x^2 + 3y^2 = 5$ และเส้นโค้ง $y^2 = x^3$ ตัดกันเป็นมุมฉาก

13. จงหาค่า c ซึ่งเส้นตรง $y = 12x + c$ สัมผัสเส้นโค้ง $y = x^3$

14. จงหาค่า m เมื่อเส้นตรง $y = mx$ สัมผัสเส้นโค้ง $y^2 + x^2 - 4x + 3 = 0$

15. จงหามุมระหว่างเส้นโค้ง 2 เส้นต่อไปนี้

(1) $3x + y = 5$, $2x - y = 4$

(2) $y = x^2$, $xy = 1$

(3) $x^2 + y^2 = 16$, $y^2 = 6x$

(4) $x^2 - 2x + y = 4$, $x - y = 2$

(5) $x + y - y^2 + 4 = 0$, $x = y^2$

4.5 ค่าสูงสุด ค่าต่ำสุด และกราฟ

(Maximum, minimum and graph)

สำหรับในตอนนี้จะศึกษาการหาค่าสูงสุด ค่าต่ำสุดของฟังก์ชัน พร้อมทั้งการเขียนกราฟอย่างคร่าว ๆ ตลอดจนปัญหาค่าสูงสุด ค่าต่ำสุด แต่ในตอนต้นเราจะกล่าวถึงฟังก์ชัน และการใช้อนุพันธ์ในการศึกษาฟังก์ชัน

4.5.1 ฟังก์ชันเพิ่ม ฟังก์ชันลด (increasing and decreasing function)

บทนิยาม 4.3 ถ้า $f(x_1) \leqslant f(x_2)$ สำหรับทุก ๆ $x_1, x_2 \in [a, b]$ และ $x_1 < x_2$ แล้วเรียก f ว่าเป็นฟังก์ชันเพิ่ม (increasing function) บน $[a, b]$

ถ้า $f(x_1) < f(x_2)$ สำหรับทุก ๆ $x_1, x_2 \in [a, b]$ และ $x_1 < x_2$ แล้วเรียก f ว่าเป็นฟังก์ชันเพิ่มโดยแท้ (strictly increasing function) บน $[a, b]$

บทนิยาม 4.4 ถ้า $f(x_1) \geqslant f(x_2)$ สำหรับทุก ๆ $x_1, x_2 \in [a, b]$ และ $x_1 < x_2$ แล้วเรียก f ว่าเป็นฟังก์ชันลด (decreasing function) บน $[a, b]$

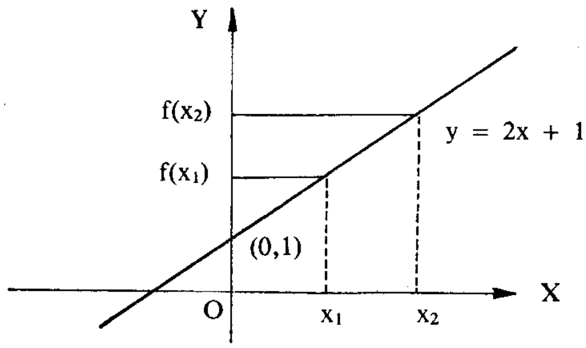
ถ้า $f(x_1) > f(x_2)$ สำหรับทุก $x_1, x_2 \in [a,b]$ และ $x_1 < x_2$ แล้วเรียก f ว่า เป็นฟังก์ชันลดโดยแท้ (strictly decreasing function) บน $[a,b]$

พิจารณาตัวอย่างต่อไปนี้

(1) $f(x) = 2x + 1$

จะเห็นได้ว่าสำหรับทุก ๆ $x_1 < x_2$ แล้ว $f(x_1) < f(x_2)$ เสมอสำหรับทุกค่า $x_1, x_2 \in (-\infty, \infty)$ ดังรูป 4.7

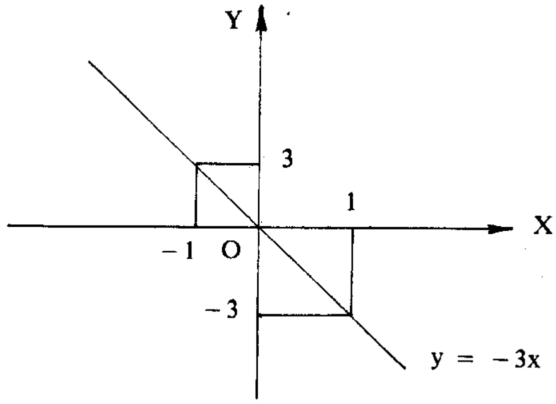
รูป 4.7



จะได้ว่า f(x) เป็นฟังก์ชันเพิ่ม ในช่วง $(-\infty, \infty)$

(2) $g(x) = -3x$

จะเห็นว่า สำหรับทุก ๆ $x_1 < x_2$ แล้ว $f(x_1) > f(x_2)$ เสมอ สำหรับทุกค่า $x_1, x_2 \in (-\infty,\infty)$ ดังรูป 4.8



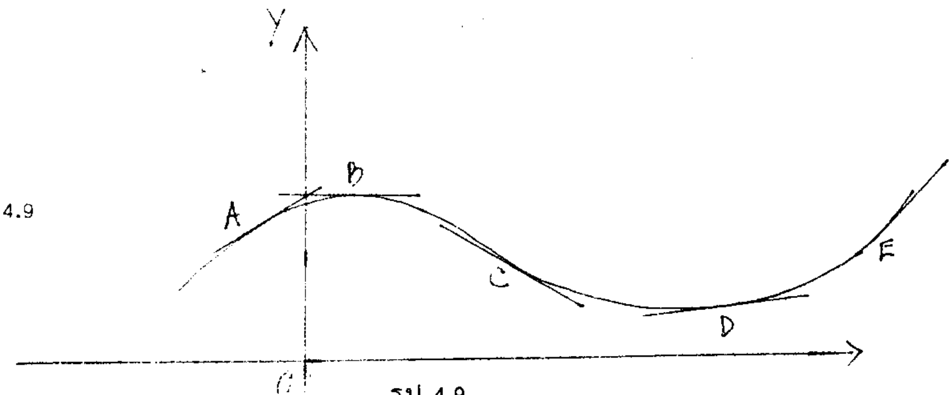
รูป 4.8

จะได้ว่า g(x) เป็นฟังก์ชันลดในช่วง $(-\infty, \infty)$

4.5.2 เครื่องหมายของอนุพันธ์อันดับหนึ่ง $\left(\frac{dy}{dx}\right)$

พิจารณาเส้นโค้ง $y = f(x)$ ดังรูป 4.9

รูป 4.9



รูป 4.9

จุด A,B,C,D และ E เป็นจุดบนเส้นโค้ง $y = f(x)$ พิจารณาความชันของเส้นสัมผัสเส้นโค้ง

ที่จุดเหล่านี้ พบว่า

ที่จุด A และ E เส้นสัมผัสเส้นโค้งมีความชันเป็นบวก และเส้นโค้งมีลักษณะโค้งขึ้น

ที่จุด C เส้นสัมผัสเส้นโค้งมีความชันเป็นลบ และเส้นโค้งมีลักษณะโค้งลง

ที่จุด B และ D เส้นสัมผัสเส้นโค้งมีความชันเป็นศูนย์ และตรงจุดนั้นเส้นโค้งเปลี่ยนจากโค้งขึ้นเป็นโค้งลง และเปลี่ยนจากโค้งลงเป็นโค้งขึ้น

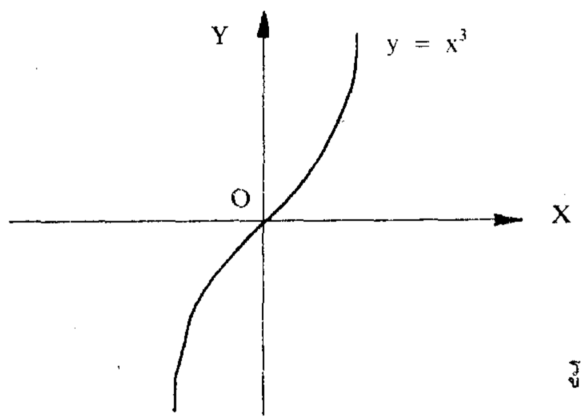
หมายเหตุ ในกรณีที่ความชันของเส้นสัมผัสเส้นโค้งที่จุด ๆ หนึ่งเป็นศูนย์ จุดนั้นไม่จำเป็นต้องเป็นจุดที่เส้นโค้งเปลี่ยนจากโค้งขึ้นเป็นโค้งลง หรือโค้งลงเป็นโค้งขึ้นเสมอไป เช่น

พิจารณาเส้นโค้ง $y = x^3$

$$\frac{dy}{dx} = 3x^2$$

จะได้ว่า $\frac{dy}{dx} = 0$ ที่จุด (0,0)

แต่ถ้าพิจารณารูป 4.10 พบว่าเส้นโค้ง $y = x^3$ เป็นเส้นโค้งซึ่งเพิ่มโดยตลอด จุด (0,0)-จึงไม่ใช่จุดที่เส้นโค้งเปลี่ยนจากโค้งขึ้นเป็นโค้งลง หรือโค้งลงเป็นโค้งขึ้น



รูป 4.10

จากที่กล่าวมาแล้วจะได้ข้อสรุปต่อไปนี้

(1) ถ้า $\frac{dy}{dx} > 0$ เส้นโค้งจะโค้งขึ้น

(2) ถ้า $\frac{dy}{dx} < 0$ เส้นโค้งจะโค้งลง

และนำแนวความคิดอันนี้ไปเขียนเส้นโค้งอย่างคร่าว ๆ ได้ดังตัวอย่าง 4.12

ตัวอย่าง 4.12 จงเขียนกราฟของเส้นโค้ง $y = x^2 - x + 1$

วิธีทำ กำหนดให้ $y = x^2 - x + 1$

$$\frac{dy}{dx} = 2x - 1$$

หาจุดซึ่ง $\frac{dy}{dx} = 0$

เพราะฉะนั้น $2x - 1 = 0$

$$x = \frac{1}{2}$$

แสดงว่าที่ $x = \frac{1}{2}$, $\frac{dy}{dx}$ มีค่าเท่ากับ 0

แบ่งการพิจารณา $\frac{dy}{dx}$ ออกเป็น 2 กรณี คือ เมื่อ $x < \frac{1}{2}$ หรือ เมื่อ $x > \frac{1}{2}$

กรณีที่ 1 $x < \frac{1}{2}$

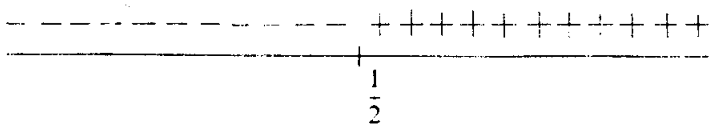
จะได้ว่า $\frac{dy}{dx} = 2x - 1 < 2(\frac{1}{2}) - 1 = 0$

นั่นคือ $\frac{dy}{dx} < 0$

กรณีที่ 2 $x > \frac{1}{2}$

จะได้ว่า $\frac{dy}{dx} > 0$

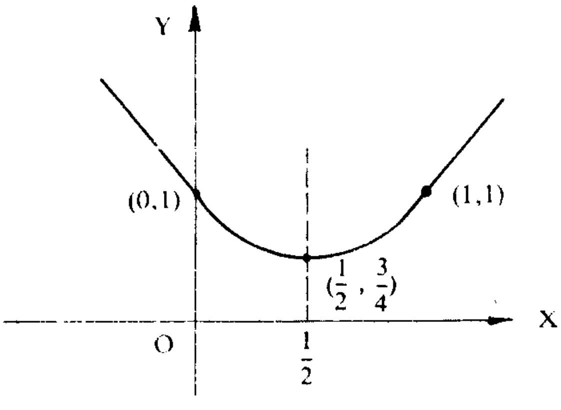
เครื่องหมาย $\frac{dy}{dx}$ แสดงได้ดังรูป 4.11



รูป 4.11

ทั้ง 2 กรณีจะได้ข้อสรุปว่าเมื่อ $x < \frac{1}{2}$

$\frac{dy}{dx} < 0$ แสดงว่าเส้นโค้งโค้งลง และเมื่อ $x > \frac{1}{2}$ $\frac{dy}{dx} > 0$ แสดงว่าเส้นโค้งโค้งขึ้น และที่จุด $x = \frac{1}{2}$ เส้นโค้งจะเปลี่ยนจากโค้งลงเป็นโค้งขึ้น ซึ่งจะเขียนรูปคร่าว ๆ ได้ดังรูป 4.12



รูป 4.12

หมายเหตุ ในทางปฏิบัติถ้าต้องการให้ได้รูปกราฟที่ถูกต้อง ละเอียดขึ้น ต้องสร้างตาราง

กำหนดค่า x, y ประมาณ 3 - 4 จุด เช่น

x	0	$\frac{1}{2}$	1	2
y	1	$\frac{3}{4}$	1	3

ตัวอย่าง 4.13 จงหาค่า x ซึ่งทำให้เส้นโค้ง $y = \frac{1}{6}(x^3 - 6x^2 + 9x + 6)$

(1) โค้งขึ้น

(2) โค้งลง

พร้อมทั้งเขียนกราฟอย่างคร่าว ๆ

วิธีทำ เพราะว่า $y = \frac{1}{6}(x^3 - 6x^2 + 9x + 6)$

เพราะฉะนั้น
$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{6}(3x^2 - 12x + 9)$$
$$= \frac{1}{2}(x^2 - 4x + 3)$$
$$= \frac{1}{2}(x - 1)(x - 3)$$

พิจารณาค่า x ที่ทำให้ $\frac{dy}{dx} = 0$

เมื่อ $\frac{1}{2}(x - 1)(x - 3) = 0$

จะได้ $x = 1, 3$

เพราะฉะนั้นจะแบ่งการพิจารณาออกเป็น 3 กรณี คือ

กรณีที่ 1 $x < 1$

$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{2}(x - 1)(x - 3)$ มีค่าบวก

แสดงว่าเส้นโค้งมีลักษณะโค้งขึ้น

กรณีที่ 2 $1 < x < 3$

$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{2}(x - 1)(x - 3)$ มีค่าลบ

แสดงว่าเส้นโค้งมีลักษณะโค้งลง

กรณีที่ 3 $x > 3$

$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{2}(x - 1)(x - 3)$ มีค่าบวก

แสดงว่าเส้นโค้งมีลักษณะโค้งขึ้น

เครื่องหมายของ $\frac{dy}{dx}$ แสดงได้ดังรูป 4.13

+ + + + + + + + 0 - - - - - - - 0 + + + + + + + +

1   3

รูป 4.13

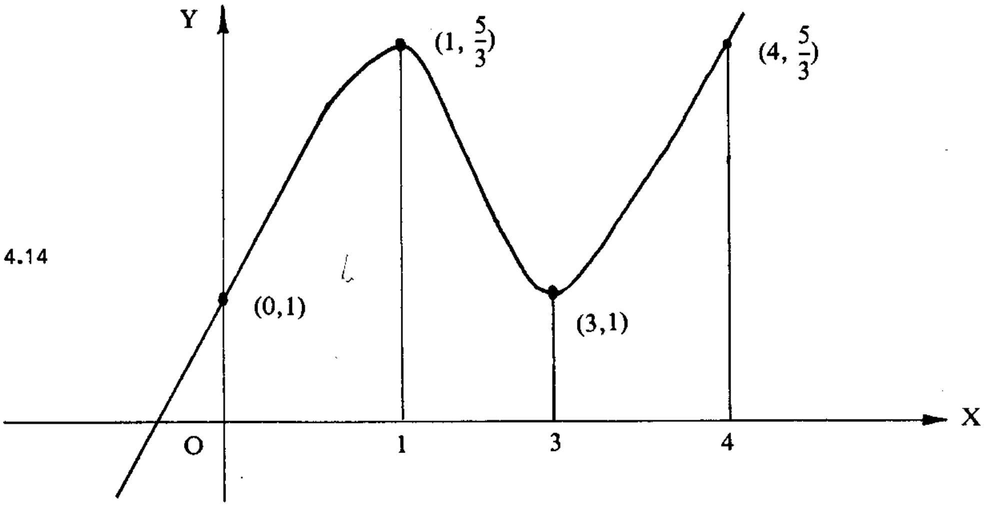
ซึ่งจะเขียนรูปคร่าว ๆ ของเส้นโค้งได้ดับรูป 4.14 แต่ก่อนอื่นต้องหาจุดที่ $\frac{dy}{dx}$ มีค่าเท่ากับ 0

นั่นคือ เมื่อ $x = 1$, $y = \frac{5}{3}$ และ $x = 3$, $y = 1$

เพื่อให้รูปถูกต้องละเอียดขึ้น ควรหาจุดอีก 2 - 3 จุด โดยเฉพาะอย่างยิ่งจุดที่กราฟตัดแกน

x	-1	0	4
y	$-\frac{5}{3}$	1	$\frac{5}{3}$

รูป 4.14



แบบฝึกหัด 4.4

จาก $y = f(x)$ ที่กำหนดให้ต่อไปนี้จงหา

(1) ค่า x ซึ่งทำให้เส้นโค้งโค้งขึ้น

(2) ค่า x ซึ่งทำให้เส้นโค้งโค้งลง

(3) เขียนกราฟอย่างคร่าว ๆ

1. $y = x^2 - 2x + 3$
2. $y = x^3 - 27x + 36$
3. $y = 2x^3 - 3x^2 + 3$
4. $y = (x - 3)^3$
5. $y = \frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} - 2x + \frac{1}{3}$
6. $y = x^4 - 8x^2 + 16$

7. $y = (x + 1)(x - 2)^2$

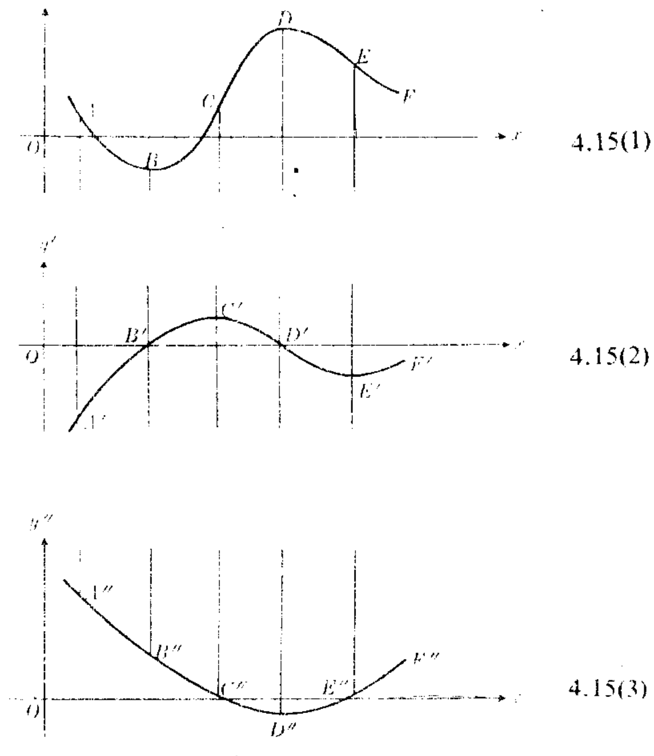
8. $y = \dfrac{(x - 2)^2}{(x + 1)}$

9. $y = (x + 1)(x - 2)^{-2}$

10. $y = \dfrac{x^3}{3} - 2x^2 + 3x + 2$

4.5.3 เครื่องหมายของอนุพันธ์อันดับที่สอง

ในการศึกษาอนุพันธ์อันดับที่สอง ($\frac{d^2y}{dx^2}$) ของเส้นโค้ง $y = f(x)$ อนุพันธ์อันดับที่สองบอกให้ทราบว่าเส้นโค้งมีลักษณะอย่างไร คือ ถ้า $\frac{d^2y}{dx^2}$ มีค่าบวก ลักษณะของเส้นโค้งเป็นเว้าหงาย (concave up) และถ้า $\frac{d^2y}{dx^2}$ มีค่าลบ ลักษณะของเส้นโค้งเป็นเว้าคว่ำ (concave down)



รูป 4.15

พิจารณารูป 4.15 รูป 4.15 (1) คือ เส้นโค้งที่กำหนดให้ สำหรับ 4.15 (2) และ 4.15 (3) แสดงเส้นโค้งของอนุพันธ์อันดับที่ 1 และอนุพันธ์อันดับที่ 2 ตามลำดับ

ส่วนโค้ง ABC เป็นส่วนเว้าหงายในขณะที่ส่วนโค้ง CDE เป็นส่วนเว้าคว่ำ

พิจารณาส่วนโค้ง ABC พบว่า จาก A ไปยัง B ค่า $\frac{dy}{dx}$ มีค่าลบ จาก B ไปยัง C ค่า

$\frac{dy}{dx}$ มีค่าบวก และที่ B $\frac{dy}{dx} = 0$ นั่นคือ ความชันของส่วนโค้งนี้มีค่าเพิ่มขึ้น จึงได้ส่วนโค้ง A'B'C' ดังรูป 4.15(2) ในทำนองเดียวกัน สำหรับอนุพันธ์อันดับที่ 2$\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)$ เนื่องจากความชันของเส้นโค้ง A'B'C' เป็นบวก จึงได้เส้นโค้ง A"B"C" ของ $\frac{d^2y}{dx^2}$ ดังรูป 4.15(3) ประกอบกับการพิจารณาในหัวข้อ 4.5.2 เราสรุปได้ว่า

ถ้า $\frac{d^2y}{dx^2} > 0$ แล้ว เส้นโค้งเว้าหงาย

และในทำนองเดียวกัน

ถ้า $\frac{d^2y}{dx^2} < 0$ แล้ว เส้นโค้งเว้าคว่ำ

บทนิยาม 4.5 จุดซึ่งเส้นโค้งเปลี่ยนจากเว้าคว่ำเป็นเว้าหงาย หรือเปลี่ยนจากเว้าหงายเป็นเว้าคว่ำ เรียกว่า จุดเปลี่ยนเว้า (point of inflection)

ตัวอย่างจุดเปลี่ยนเว้า ได้แก่จุด C และ E ในรูป 4.15 (1)

จุดเปลี่ยนเว้าเกิดขึ้นได้เมื่อ

(1) $\frac{d^2y}{dx^2} = 0$

หรือ (2) $\frac{d^2y}{dx^2}$ **หาค่าไม่ได้**

ตัวอย่าง 4.14 **กำหนดให้** $y = \frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} - 2x + \frac{1}{3}$ **จงหาค่า x ซึ่งทำให้**

(1) เว้าขึ้น

(2) เว้าลง

(3) เว้าคว่ำ

(4) เว้าหงาย

(5) จุดเปลี่ยนเว้า

พร้อมทั้งเขียนกราฟคร่าว ๆ

วิธีทำ จาก $y = \frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} - 2x + \frac{1}{3}$

เพราะฉะนั้น $\frac{dy}{dx} = x^2 - x - 2$

และ $\frac{d^2y}{dx^2} = 2x - 1$

พิจารณา $\frac{dy}{dx} = 0$

จะได้ว่า $x^2 - x - 2 = 0$

$$(x-2)(x+1) = 0$$
$$x = -1, 2$$

เราจะแบ่งการพิจารณาลักษณะของเส้นโค้งเป็น 3 ลักษณะ คือ

กรณีที่ 1 ถ้า $x < -1$

$\frac{dy}{dx} = x^2 - x - 2$ มีค่าเป็นบวก ดังนั้นเส้นโค้งจะมีลักษณะเป็นโค้งขึ้น

กรณีที่ 2 ถ้า $-1 < x < 2$

$\frac{dy}{dx} = x^2 - x - 2$ มีค่าเป็นลบ ดังนั้นเส้นโค้งจะมีลักษณะเป็นโค้งลง

กรณีที่ 3 ถ้า $x > 2$

$\frac{dy}{dx} = x^2 - x - 2$ มีค่าเป็นบวก ดังนั้นเส้นโค้งจะมีลักษณะเป็นโค้งขึ้น

พิจารณา $\frac{d^2y}{dx^2} = 0$

จะได้ว่า $2x - 1 = 0$

$$x = \frac{1}{2}$$

จุดเปลี่ยนเว้าที่ $x = \frac{1}{2}$

เมื่อ $x = \frac{1}{2}$, $y = \frac{(\frac{1}{2})^3}{2} - \frac{(\frac{1}{2})^2}{2} - 2(\frac{1}{2}) + \frac{1}{3}$

$$= \frac{1}{24} - \frac{1}{8} - 1 + \frac{1}{3}$$

$$= 1 - \frac{3}{24} - 24 + 8$$

$$= -\frac{9}{12}$$

จุดเปลี่ยนเว้า คือ $(\frac{1}{2}, -\frac{9}{12})$

พิจารณาเว้าคว่ำ เว้าหงาย แบ่งพิจารณาเป็น 2 กรณีคือ $x < \frac{1}{2}$ และ $x > \frac{1}{2}$

ถ้า $x < \frac{1}{2}$ $\frac{d^2y}{dx^2} = 2x - 1$ มีค่าลบ แสดงว่าสำหรับ $x < \frac{1}{2}$

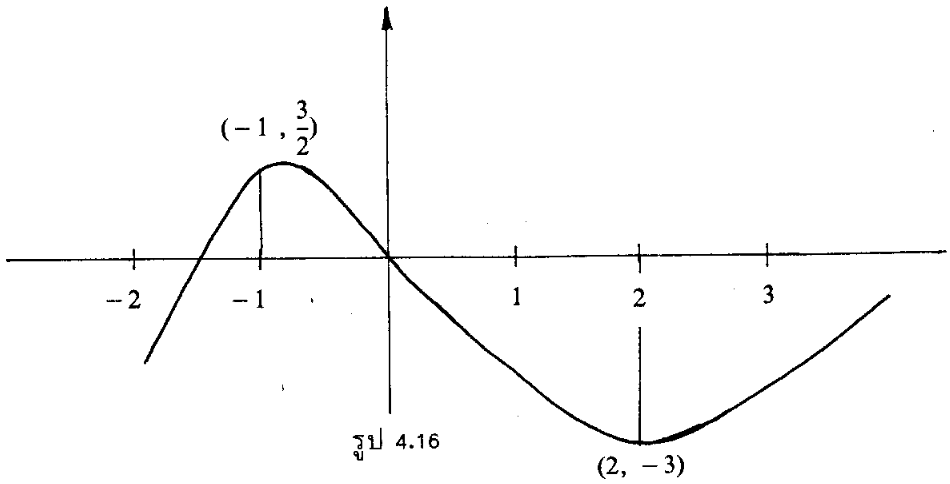
เส้นโค้งจะเป็นเว้าคว่ำ

ถ้า $x > \frac{1}{2}$ $\frac{d^2y}{dx^2} = 2x - 1$ มีค่าบวก แสดงว่า สำหรับ $x > \frac{1}{2}$

เส้นโค้งจะเป็นเว้าหงาย

หาจุดเพื่อประกอบในการเขียนกราฟ

x	-2	-1	1	2	0
y	$-\frac{25}{3}$	$\frac{3}{2}$	$-\frac{11}{6}$	-3	$\frac{1}{3}$



รูป 4.16

แบบฝึกหัด 4.5

จาก $y = f(x)$ ที่กำหนดให้ จงหาค่า x ซึ่ง

(1) เส้นโค้งมีลักษณะโค้งขึ้น

(2) เส้นโค้งมีลักษณะโค้งลง

(3) เว้าหงาย

(4) เว้าคว่ำ

(5) จุดเปลี่ยนเว้า

1. $y = 5x + 12$
2. $y = -\frac{3}{2}x - 9$
3. $y = x^2 - 4x + 3$
4. $y = 4 + 3x - x^3$
5. $y = \frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} - 6x$
6. $y = (x - 3)(x + 1)^2$

7. $y = x^4 - 32x + 48$

8. $y = x^3 - 3x^2 + 2$

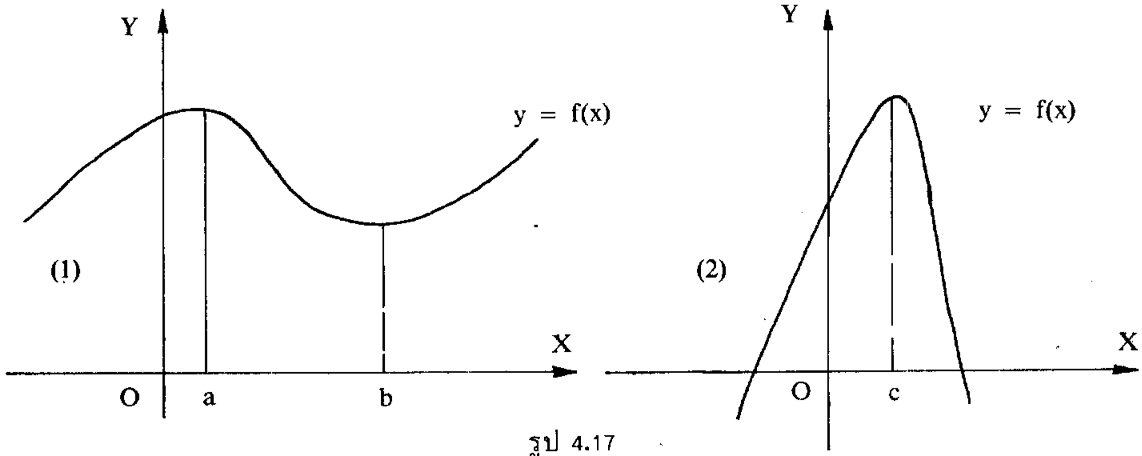
9. $y = \dfrac{x^2}{x^2 - 1}$

10. $y = \dfrac{x}{x + 1}$

4.5.4 ค่าสูงสุดต่ำสุด

จาก 3.9 ได้กล่าวถึงนิยามของค่าสูงสุดสัมพัทธ์ ค่าสูงสุดสัมบูรณ์ ค่าต่ำสุดสัมพัทธ์ และค่าต่ำสุดสัมบูรณ์ไว้แล้ว พร้อมทั้งทฤษฎีบทเกี่ยวกับค่าสูงสุดต่ำสุด

โดยทั่ว ๆ ไปแล้ว เส้นโค้งจะมีค่าสูงสุดสัมพัทธ์ หรือต่ำสุดสัมพัทธ์ หรือมีทั้งสองอย่าง แต่ค่าสูงสุดต่ำสุดสัมบูรณ์อาจหาค่าไม่ได้ ดังนั้น เพื่อที่จะกล่าวถึงค่าสูงสุด ค่าต่ำสุดสัมบูรณ์ จึงได้พิจารณาใช้ช่วงปิด [a,b] ใด ๆ



รูป 4.17

รูป 4.17 (1) ที่ $x = a$ เป็นจุดซึ่งให้ค่าสูงสุดสัมพัทธ์ และที่ $x = b$ ให้ค่าต่ำสุดสัมพัทธ์ และไม่สามารถหาค่าสูงสุดสัมบูรณ์ และต่ำสุดสัมบูรณ์ได้ แต่ในรูป 4.17 (2) ที่ $x = c$ ให้ค่าสูงสุดสัมพัทธ์ และสูงสุดสัมบูรณ์แต่ไม่สามารถหาค่าต่ำสุดได้

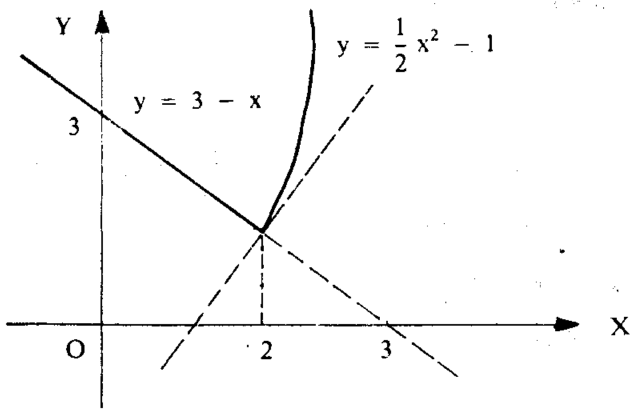
นอกจากนั้นยังได้กล่าวถึงทฤษฎีบทที่ว่า "ถ้า $f(x)$ หาค่าได้สำหรับ $a \leqslant x \leqslant b$ และ f มีค่าสูงสุดสัมพัทธ์ หรือค่าต่ำสุดสัมพัทธ์ ที่ $x = c \in (a,b)$ และ $f'(x)$ หาค่าได้ที่ $x = c$ แล้ว $f'(c) = 0$"- ซึ่งผลจากทฤษฎีบทนี้เราจะได้ว่า ที่ $x = c$ จะเป็นค่าสูงสุดสัมพัทธ์ หรือต่ำสุดสัมพัทธ์ของฟังก์ชัน

แต่ค่าสูงสุด ต่ำสุดอาจเกิดที่จุดซึ่งหาค่าอนุพันธ์ไม่ได้ก็ได้ ดังตัวอย่าง 4.15

ตัวอย่าง 4.15 กำหนดฟังก์ชัน

$$y = f(x) = \begin{cases} 3 - x & \text{สำหรับ } x \leqslant 2 \\ \frac{1}{2}x^2 - 1 & \text{สำหรับ } x > 2 \end{cases}$$

วิธีทำ $y = f(x)$ เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องที่ $x = 2$



รูป 4.18

แต่อนุพันธ์ $\frac{dy}{dx} = \frac{df(x)}{dx}$ หาค่าได้ ก็ต่อเมื่อ

$$\lim_{h \to 0^+} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \to 0^-} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

ที่ $x = 2$,

$$\lim_{h \to 0^+} \frac{f(2+h) - f(2)}{h} = \lim_{h \to 0^+} \frac{\frac{1}{2}(2+h)^2 - 1 - 2 + 1}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0^+} \frac{2 + 2h + h^2/2 - 2}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0^+} 2 + \frac{h}{2} = 2$$

ที่ $x = 2$,

$$\lim_{h \to 0^-} \frac{f(2+h) - f(2)}{h} = \lim_{h \to 0^-} \frac{3 - (2+h) - 1}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0^-} -\frac{h}{h} = -1$$

แสดงว่า

$$\lim_{h \to 0^+} \frac{f(2+h) - f(2)}{h} \neq \lim_{h \to 0^-} \frac{f(2+h) - f(2)}{h}$$

นั่นคือ $f'(2)$ หาค่าไม่ได้

แต่ฟังก์ชันนี้มีค่าต่ำสุดที่ $x = 2$ ดังรูป 4.18

ค่าสูงสุด และต่ำสุดที่จุดปลาย

บทนิยาม 4.6 ถ้า f เป็นฟังก์ชันที่มีขอบเขตบนช่วงปิด $[a,b]$ แล้ว

$\lim_{h \to 0^+} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$ แทนด้วยสัญลักษณ์ $f_+'(a)$ เรียกว่าอนุพันธ์ทางขวาของ f ที่จุด a เมื่อลิมิตหาค่าได้

$\lim\limits_{h \to 0^-} \dfrac{f(b+h) - f(b)}{h}$ แทนด้วยสัญลักษณ์ $f'_-(b)$ เรียกว่าอนุพันธ์ของ f ที่จุด b เมื่อลิมิตหาค่าได้

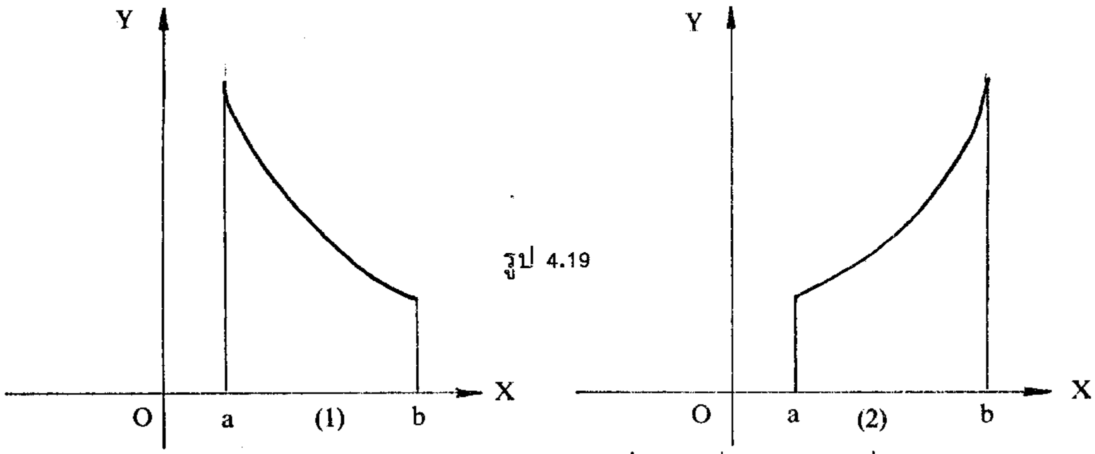
ถ้าโดเมนของฟังก์ชัน f มีขอบเขตบนช่วงปิด $[a,b]$ และถ้า $f'_+(a)$, $f'_-(b)$ หาค่าได้แล้ว จะได้ค่า

ถ้า $f'_+(a) < 0$ แล้ว f มีค่าสูงสุดสัมพัทธ์ที่ a

ถ้า $f'_+(a) > 0$ แล้ว f มีค่าต่ำสุดสัมพัทธ์ที่ a

ถ้า $f'_-(b) < 0$ แล้ว f มีค่าต่ำสุดสัมพัทธ์ที่ b

ถ้า $f'_-(b) > 0$ แล้ว f มีค่าสูงสุดสัมพัทธ์ที่ b



รูป 4.19

จากรูป 4.19 (1) ฟังก์ชัน f มีค่าสูงสุดสัมพัทธ์ที่ a และต่ำสุดสัมพัทธ์ที่ b ส่วนรูป 4.19 (2) ฟังก์ชัน f มีค่าต่ำสุดสัมพัทธ์ที่ a และสูงสุดสัมพัทธ์ที่ b

ข้อควรจำ ค่าสูงสุด หรือค่าต่ำสุดของฟังก์ชันอาจเกิดได้ที่จุด ซึ่ง

(1) อนุพันธ์เป็นศูนย์ (0)

(2) อนุพันธ์หาค่า ค่าไม่ได้

(3) จุดปลายของโดเมนของฟังก์ชัน

จุดที่สอดคล้องกับทั้งสามข้อข้างต้น เรียกว่า จุดวิกฤต (critical point) โดยการเปรียบเทียบค่าฟังก์ชันที่จุดเหล่านี้ จะบอกได้ทันทีว่าจุดใดให้ค่าสูงสุดสัมพัทธ์ ต่ำสุดสัมพัทธ์ สูงสุดสัมบูรณ์ และต่ำสุดสัมบูรณ์ของฟังก์ชัน

ตัวอย่าง 4.16 กำหนดให้ $y = f(x) = |4 - x^2|$ $x \in [-3, 3]$

จงพิจารณาค่าสูงสุดสัมพัทธ์ ค่าต่ำสุดสัมพัทธ์ ค่าสูงสุดสัมบูรณ์ และค่าต่ำสุดสัมบูรณ์ของฟังก์ชันนี้

วิธีทำ เขียน $f(x)$ เสียใหม่จะได้

$$f(x) = \begin{cases} 4 - x^2 & \text{ถ้า} \quad 4 - x^2 \geqslant 0 \\ x^2 - 4 & \text{ถ้า} \quad 4 - x^2 < 0 \end{cases}$$

หรือ

$$f(x) = \begin{cases} 4 - x^2 & \text{ถ้า} \quad x \in [-2, 2] \\ x^2 - 4 & \text{ถ้า} \quad x \in [-3, -2) \cup (2, 3] \end{cases}$$

เพราะฉะนั้น จะได้ว่า

$$f'(x) = \begin{cases} -2x & \text{ถ้า} \quad x \in (-2, 2) \\ 2x & \text{ถ้า} \quad x \in (-3, -2) \text{ หรือ } x \in (2,3) \end{cases}$$

เพราะฉะนั้น จุดวิกฤต ได้แก่

(1) $x = 0$ เนื่องจาก $f'(x) = 0$ ได้ $x = 0$

(2) เพราะว่า $f'_-(2) = -4$ และ $f'_+(2) = 4$ ดังนั้น $f'(2)$ หาค่าไม่ได้ เพราะฉะนั้น $x = 2$ เป็นจุดวิกฤต

ทำนองเดียวกัน $x = -2$ เป็นจุดวิกฤตด้วย

(3) ที่จุดปลาย $x = -3, x = 3$

แต่ค่าของฟังก์ชันหาได้ดังนี้

$$f(0) = 2$$

$$f(2) = f(-2) = 0$$

$$f(3) = f(-3) = 5$$

จะได้ว่า

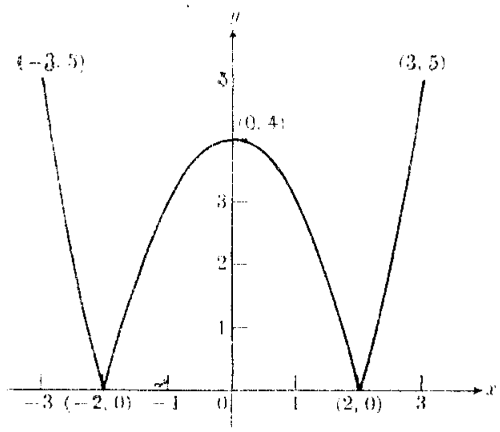
ต่ำสุดสัมพัทธ์ที่ $x = -2, 2$

สูงสุดสัมพัทธ์ที่ $x = -3, 0, 3$

และ ต่ำสุดสัมบูรณ์ที่ $x = -2, 2$

สูงสุดสัมบูรณ์ที่ $x = -3, 3$

ดังรูป 4.20



รูป 4.20

แบบฝึกหัด 4.6

จงหาจุดวิกฤต ค่าสูงสุดสัมพัทธ์ ค่าต่ำสุดสัมพัทธ์ ค่าสูงสุดสัมบูรณ์ และค่าต่ำสุดสัมบูรณ์ของฟังก์ชันต่อไปนี้

1. $f(x) = x^2 - 2x + 3$ ในช่วง $[0,1]$
2. $f(x) = x - x^2$ สำหรับ $x \in [0,1]$
3. $f(x) = x - x^3$ สำหรับ $x \in [0,1]$
4. $f(x) = (x - x^2)^{-1}$ สำหรับ $x \in (0,1)$
5. $f(x) = |x - x^2|$ สำหรับ $x \in [-2,2]$

4.6 โจทย์เกี่ยวกับค่าสูงสุด ค่าต่ำสุด

ในการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์โดยเฉพาะอย่างยิ่ง พีชคณิตมักเจอปัญหาค่าสูงสุดต่ำสุดอยู่เสมอ ซึ่งในการแก้ปัญหาทำได้โดยอาศัยอนุพันธ์ และวิธีการข้างต้น หาค่าสูงสุดต่ำสุดได้

ให้พิจารณาตัวอย่างต่อไปนี้

ตัวอย่าง 4.17 จงหาจำนวนเต็มบวกสองจำนวนซึ่งผลรวม คือ 20 และผลคูณได้ค่ามากที่สุด

วิธีทำ ให้ x เป็นเลขจำนวนหนึ่ง

เพราะฉะนั้นอีกจำนวนคือ $20 - x$

ให้ y เป็นผลคูณของเลข 2 จำนวน

ดังนั้น $y = x(20 - x)$

$= 20x - x^2$

เพราะว่า x และ $20 - x$ เป็นจำนวนบวก

ดังนั้น $0 < x < 20$

$$\frac{dy}{dx} = 20 - 2x$$

พิจารณาค่า x ที่ทำให้ $\frac{dy}{dx} = 0$

$20 - 2x = 0$

$x = 10$

พิจารณา ถ้า $x < 10$ $\frac{dy}{dx} > 0$ แสดงว่า เส้นโค้งมีลักษณะโค้งขึ้น

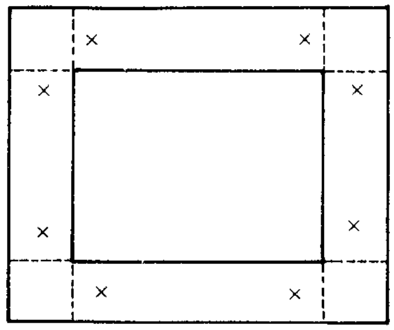
ถ้า $x > 10$ $\frac{dy}{dx} < 0$ แสดงว่า เส้นโค้งมีลักษณะโค้งลง

หรือ พิจารณา $\frac{d^2y}{dx^2} = -2 < 0$ แสดงว่า เป็นเว้าคว่ำ

เพราะฉะนั้น $x = 10$ ให้ค่าสูงสุดสัมบูรณ์

เพราะฉะนั้นเลข 2 จำนวนนี้ คือ 10, 10

ตัวอย่าง 4.18 กระดาษรูปสี่เหลี่ยมจตุรัสยาว ด้านละ 10 นิ้ว ถ้าตัดตรงมุมทั้งสี่ของกระดาษออกเป็นรูปสี่เหลี่ยมจตุรัส เพื่อทำเป็นกล่องให้มีปริมาตรมากที่สุด จงหาปริมาตรของกล่อง



รูป 4.21

กำหนดให้มุมที่ถูกตัดทิ้งเป็นรูปสี่เหลี่ยมจตุรัส ยาวด้านละ x นิ้ว

เพราะฉะนั้น $0 \leqslant x \leqslant 5$

กล่องนี้ ยาวด้านละ $10 - 2x$ และสูง x

ให้ y เป็นปริมาตรของกล่อง

$$\begin{aligned} y &= (10 - 2x)(10 - 2x)(x) \\ &= 100x - 40x^2 + 4x^3, \; 0 \leqslant x \leqslant 5 \end{aligned}$$

พิจารณา $\frac{dy}{dx} = 100 - 80x + 12x$

ค่า x ที่ทำให้ $\frac{dy}{dx} = 0$ คือ

$$\begin{aligned} 100 - 80x + 12x^2 &= 0 \\ 3x^2 - 20x + 25 &= 0 \\ (3x - 5)(x - 5) &= 0 \\ x &= \frac{5}{3}, 5 \end{aligned}$$

เพราะฉะนั้น ที่ $x = 5, \frac{5}{3}$ ค่า $\frac{dy}{dx} = 0$

ถ้า $x < \frac{5}{3}$ $\frac{dy}{dx} > 0$ แสดงว่า เส้นโค้งมีลักษณะโค้งขึ้น

ถ้า $\frac{5}{3} < x < 5$ $\frac{dy}{dx} < 0$ แสดงว่า เส้นโค้งมีลักษณะโค้งลง

ถ้า $x > 5$ $\frac{dy}{dx} > 0$ แสดงว่า เส้นโค้งมีลักษณะโค้งขึ้น

พิจารณา $\frac{d^2y}{dx^2} = -80 + 24x$

หาจุดเปลี่ยนเว้า คือ จุดที่ทำให้ $\frac{d^2y}{dx^2} = 0$

จะได้ $-80 + 24x = 0$

$$x = \frac{10}{3}$$

ถ้า $x < \frac{10}{3}$, $\frac{d^2y}{dx^2} < 0$ แสดงว่า เส้นโค้งเว้าคว่ำ

ถ้า $x > \frac{10}{3}$, $\frac{d^2y}{dx^2} > 0$ แสดงว่า เส้นโค้งเว้าหงาย

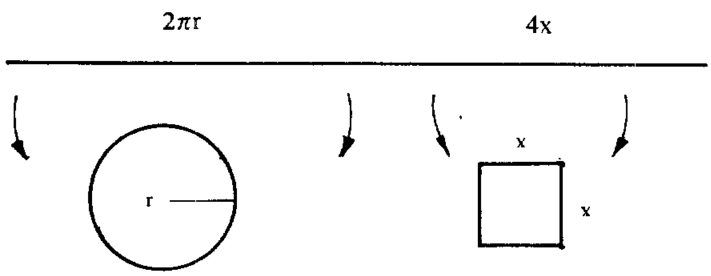
เพราะว่า $x = \frac{5}{3} < \frac{10}{3}$ ดังนั้น ที่ $x = \frac{5}{3}$ เป็นจุดที่ให้ค่าสูงสุดสัมบูรณ์

เพราะฉะนั้น ต้องตัดออกด้านละ $\frac{5}{3}$ นิ้ว

กล่องมีปริมาตร $= (10 - \frac{10}{3})(10 - \frac{10}{3})(\frac{5}{3}) = \frac{2000}{27}$ ลูกบาศก์นิ้ว

ตัวอย่าง 4.19 เส้นลวดยาว 10 นิ้ว ถ้าแบ่งเส้นลวดออกเป็น 2 ส่วน เพื่อนำมางอเป็นวงกลมและรูปสี่เหลี่ยมจตุรัส จะแบ่งเส้นลวดอย่างไรให้ได้ผลรวมของพื้นที่มากที่สุด

วิธีทำ



รูป 4.22

ให้สี่เหลี่ยมจตุรัสยาวด้านละ x นิ้ว

และวงกลมมีรัศมี r นิ้ว

เพราะฉะนั้นผลรวมของพื้นที่ $A = \pi r^2 + x^2$ .....(1)

ลวดที่เอามาดัดเป็นวงกลมยาว $2\pi r$ และลวดที่ดัดเป็นรูปสี่เหลี่ยมจตุรัสยาว $4x$ นิ้ว

จะได้ว่า

$$10 = 2\pi r + 4x$$

$$x = \frac{10 - 2\pi r}{4}$$

แทนค่าใน (1) จะได้

$$A = \pi r^2 + (\frac{10 - 2\pi r}{4})^2,\ 0 \leqslant 2\pi r \leqslant 10$$

$$\frac{dA}{dr} = 2\pi r + 2(\frac{10 - 2\pi r}{4})(-\frac{1}{2}\pi)$$

$$= 2\pi r - \frac{5}{2}\pi + \frac{1}{2}\pi^2 r \quad .....(2)$$

$$\frac{d^2A}{dr^2} = 2\pi + \frac{1}{2}\pi^2 \quad .....(3)$$

จากสมการ (2) หาค่าของ r ซึ่ง $\frac{dA}{dr} = 0$

$$(2\pi + \frac{1}{2}\pi^2)r = \frac{5}{2}\pi$$

$$r = \frac{5}{4 + \pi}$$

ที่ $r = \frac{5}{4 + \pi}$ นั้น ทำให้ค่า $\frac{dA}{dr} = 0$ แสดงว่าที่ $r = \frac{5}{4 + \pi}$ อาจให้ค่าสูงสุด หรือ ค่าต่ำสุด

จากสมการ (3) $\frac{d^2A}{dr^2} > 0$ แสดงว่า เส้นโค้งมีลักษณะเว้าหงาย

ดังนั้น แสดงว่าที่ $r = \frac{5}{4 + \pi}$ ได้พื้นที่น้อยที่สุด

แต่ถ้าพิจารณาที่จุดปลาย $0 \leqslant r \leqslant \frac{10}{2\pi} = \frac{5}{\pi}$ ซึ่งเป็นจุดวิกฤตด้วย

ถ้า $r = 0$, $A = \pi(0)^2 + (\frac{10 - 0}{4})^2 = \frac{25}{4}$

$r = \frac{5}{\pi}$, $A = \pi(\frac{5}{\pi})^2 + 0 = \frac{25}{\pi}$

เพราะฉะนั้น จากโจทย์ข้อนี้จะสรุปได้ว่า ถ้าตัดลวดออกเป็นสองส่วน จะไม่ได้พื้นที่มากที่สุด แต่ถ้าไม่ตัดลวดเลยแล้วเอามาดัดเป็นรูปวงกลมจะได้พื้นที่มากที่สุด โดยที่วงกลมมีรัศมี $\frac{5}{\pi}$ นิ้ว

แบบฝึกหัด 4.7

1. จงแสดงว่าสี่เหลี่ยมผืนผ้าที่กำหนดเส้นรอบรูปมาให้ และมีพื้นที่มากที่สุด คือ สี่เหลี่ยมจตุรัส

2. จงหาขนาดของรูปสี่เหลี่ยมผืนผ้าที่บรรจุในครึ่งวงกลมรัศมี r ซึ่งมีพื้นที่มากที่สุด

3. แผ่นสังกะสีรูปสี่เหลี่ยมผืนผ้ากว้าง 8 นิ้ว ยาว 15 นิ้ว ตัดแต่ละมุมออกเป็นรูปสี่เหลี่ยมจตุรัส เพื่อดัดขึ้นเป็นกล่องด้านบนเปิด จะต้องตัดมุมอย่างไรจึงจะทำให้กล่องมีปริมาตรมากที่สุด

4. กำหนดความยาวของรั้วเท่ากับ L ต้องการล้อมรั้วที่ดินซึ่งมีด้านหนึ่งติดกับแม่น้ำให้ได้พื้นที่มากที่สุดได้อย่างไร

5. เส้นตรงไม่คงที่เส้นหนึ่งผ่านจุด (1,2) ตัดแกน x ที่ A (a, o) และตัดแกน y ที่ (o, b) จงหาพื้นที่ที่น้อยที่สุดของสามเหลี่ยม AOB ถ้า a, b เป็นจำนวนบวก

6. ลวดเส้นหนึ่งยาว L ตัดออกเป็น 2 ส่วน ส่วนหนึ่งนำมาดัดเป็นรูปสี่เหลี่ยมจตุรัส อีกส่วนหนึ่งมาตัดเป็นรูปสามเหลี่ยมด้านเท่า จะต้องตัดลวดอย่างไรจึงจะทำให้

   (1) ผลรวมพื้นที่ทั้งสองมีค่าน้อยที่สุด

   (2) ผลรวมพื้นที่ทั้งสองมีค่ามากที่สุด

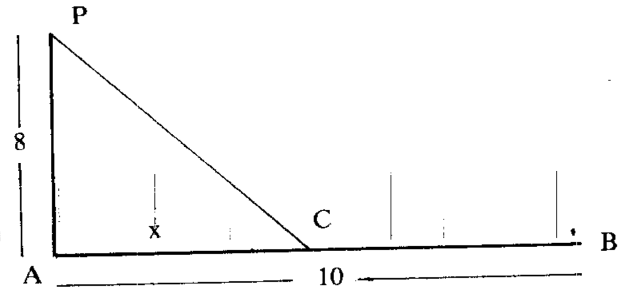
7. จงหาจุดบนเส้นโค้ง $5x^2 - 6xy + 5y^2 = 4$ ซึ่งอยู่ใกล้จุดกำเนิดมากที่สุด

8. จงหาปริมาตรที่มากที่สุดของกรวยกลมที่บรรจุในทรงกลมรัศมี r

9. จงหาปริมาตรที่มากที่สุดของทรงกระบอกที่บรรจุภายในทรงกลมรัศมี r

10. ชายคนหนึ่งพายเรือจากจุด P ซึ่งอยู่ห่างจากแนวฝั่ง AB เป็นระยะทาง 8 กิโลเมตร ดังรูป 4.23 AB ยาว 10 กิโลเมตร ถ้าเขาต้องการถึงจุด B โดยใช้เวลาน้อยที่สุด เขาต้องขึ้นฝั่งที่ใด ถ้าอัตราเร็วในการพายเรือ และเดินเท้าเป็น 3 กิโลเมตรต่อชั่วโมง และ 6 กิโลเมตรต่อชั่วโมง ตามลำดับ

รูป 4.23



(แนะนำ สมมุติให้ขึ้นฝั่งที่จุด C ห่างจาก A x กิโลเมตร)