บทที่ 3
อนุพันธ์ของฟังก์ชัน
(Derivative of a Function)

3.1 บทนำ

แคลคูลัสเป็นคณิตศาสตร์แขนงหนึ่งซึ่งมีประโยชน์ต่อวิทยาการในสาขาต่าง ๆ มากมาย เช่น ฟิสิกส์ เคมี ชีววิทยา วิศวกรรมศาสตร์ ดาราศาสตร์ เศรษฐศาสตร์ สังคมวิทยา และพฤติกรรมทางจิตวิทยา ตลอดจนเป็นพื้นฐานของการศึกษาคณิตศาสตร์สาขาอื่น ๆ แทบทุกสาขา ผู้ให้กำเนิดวิชาแคลคูลัส คือ ไอแซก นิวตัน (Issac Newton, 1642 - 1727) นักคณิตศาสตร์ชาวอังกฤษ และ กอตต์ฟรีด วิลเฮล์ม ไลบ์นิตซ์ (Gottfried Wilhelm Leibnitz, 1646 - 1716) นักคณิตศาสตร์ชาวเยอรมัน

การหาอนุพันธ์ของฟังก์ชัน เป็นส่วนหนึ่งของวิชาแคลคูลัส ซึ่งกล่าวถึงอัตราการแปรค่าและอัตราการแปรค่าชั่วขณะ ซึ่งมีประโยชน์อย่างกว้างขวางในการแก้ปัญหาต่าง ๆ ซึ่งจะกล่าวในบทที่ 4 เรื่องการประยุกต์ของอนุพันธ์

จากบทที่ 1 เราแบ่งฟังก์ชันออกเป็น 2 พวกใหญ่ ๆ คือ ฟังก์ชันพีชคณิต และฟังก์ชันอดิศัย ดังนั้นการหาอนุพันธ์ของฟังก์ชัน จึงแบ่งออกเป็น 2 ประเภทคือ

(1) อนุพันธ์ของฟังก์ชันพีชคณิต

(2) อนุพันธ์ของฟังก์ชันอดิศัย

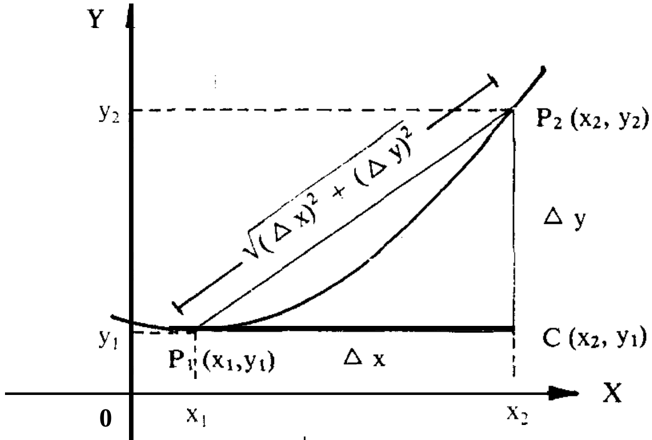
ซึ่งในบทนี้จะกล่าวเฉพาะอนุพันธ์ของฟังก์ชันพีชคณิตเท่านั้น ส่วนอนุพันธ์ของฟังก์ชันทรานเซนเดนตัล จะกล่าวในบทที่ 6

3.2 ปริมาณการแปรค่า (Increment)

กำหนดให้ f เป็นฟังก์ชัน และ $P_1(x_1, y_1)$ และ $P_2(x_2, y_2)$ เป็นจุด 2 จุดบนกราฟของ f

เมื่อ $P_1(x_1, y_1)$ เคลื่อนที่เข้าหา $P_2(x_2, y_2)$ บนกราฟของ f นั้น ค่าของตัวแปร x จะเปลี่ยนจาก x_1 ไปเป็น x_2 และค่าของตัวแปร y จะเปลี่ยนจาก y_1 ไปเป็น y_2 แล้วเรียก $x_2 - x_1$ ว่า ปริมาณการแปรค่าของ x แทนด้วยสัญกรณ์ Δx (อ่านว่า "เดลตา x") และเรียก $y_2 - y_1$

ว่าปริมาณการแปรค่าของฟังก์ชันหรือปริมาณการแปรค่าของ y แทนด้วยสัญกรณ์ Δy (อ่านว่า "เดลตา y") ดังรูป 3.1



รูป 3.1

นั่นคือ $\quad A\ x = x_2 - x_1$ และ $A\ y = y_2 - y_1$

หรือ $\quad x_2 = x_1 + A\ x$ และ $y_2 = y_1 + \Delta y$

ข้อสังเกต

$$\begin{aligned} \Delta y &= y_2 - y_1 \\ &= f(x_2) - f(x_1) \\ &= f(x_1 + A\ x) - f(x_1) \end{aligned}$$

สำหรับการหาระยะทางระหว่างจุด $P_1(x_1, y_1)$ และ $P_2\ (x_2, y_2)$ หาได้โดยอาศัยทฤษฎีบท ของปีทาโกรัส (Pythagoras's theorem) และแทนระยะทางระหว่าง P_1, P_2 ด้วยสัญกรณ์ $|P_1P_2|$ **ดังนั้นจะได้ว่า**

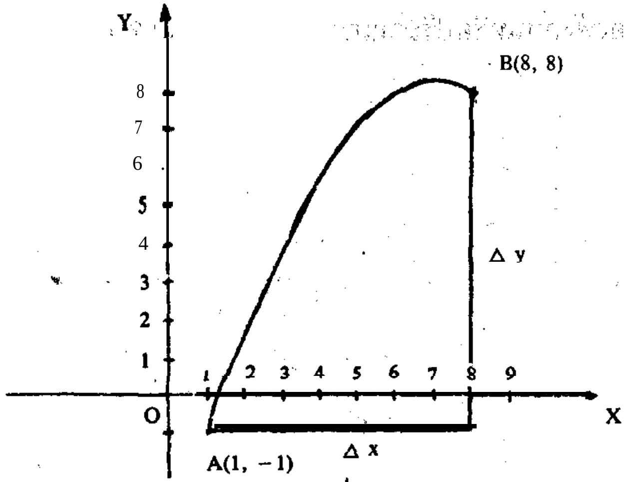
$$\begin{aligned} |P_1P_2| &= \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2} \\ &= \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} \end{aligned}$$

ตัวอย่าง 3.1 กำหนดให้ $y = f(x)$, $A(1, -1)$ และ $B(8, 8)$ อยู่บนเส้นโค้ง $y = f(x)$ ดังรูป 3.2 จงหา Δx, Δy

วิธีทำ

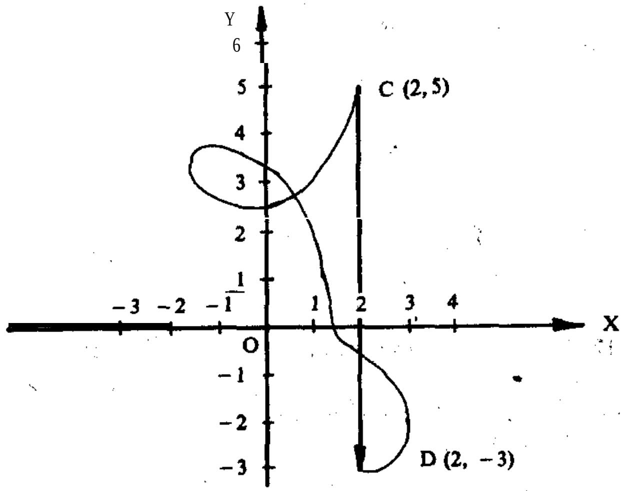
$$\Delta x = 8 - 1 = 7$$

$$\Delta y = 8 - (-1) = 9$$



รูป 3.2

เพราะว่าปริมาณการแปรค่าเป็นจำนวนจริงใด ๆ ดังนั้น ปริมาณการแปรค่าอาจเป็นจำนวนบวก ลบ หรือ ศูนย์ก็ได้ เช่น ปริมาณการแปรค่าจาก C(2,5)ไปยัง D(2,-3) บนเส้นโค้ง ดังรูป 3.3



รูป 3.3

จะได้ $\Delta x = 2 - 2 = 0$ และ $\Delta y = (-3) - 5 = -8$ ซึ่งแสดงว่าปริมาณการแปรค่าของ x มีค่าคงที่ (คือ ไม่เปลี่ยนแปลงนั่นเอง) ในขณะที่ปริมาณการแปรค่าของ y มีค่าลดลง

ตัวอย่าง ๓.๔ วัตถุเคลื่อนที่จากจุด $P_1(-1, 2)$ ไปยังจุด $P_2(2, -2)$ จงหา Δx, Δy และระยะทางระหว่างจุด P_1 และ P_2

วิธีทำ

$$Ax = x_2 - x_1 = 2 - (-1) = 3$$

$$\Delta y = y_2 - y_1 = (-2) - 2 = -4$$

$$|P_1P_2| = \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}$$

$$= \sqrt{3^2 + (-4)^2}$$

$= \sqrt{9 + 16}$

$= 5$

ตัวอย่าง 3.3 กำหนดให้ $y = x^2 - 6x + 8$ เป็นสมการเส้นโค้ง $P_1 (x_1 , y_1)$ $P_2 (x_2 , y_2)$ เป็นจุดบนเส้นโค้งเส้นนี้ จงหาค่าของ Δx , Δy และ $|P_1P_2|$ เมื่อกำหนด

(1) $x_1 = 1$ เปลี่ยนไปเป็น $x_2 = 1.5$

(2) $x_1 = 1$ เปลี่ยนไปเป็น $x_2 = 0.5$

(3) $x_1 = 2$ เปลี่ยนไปเป็น $x_2 = 4$

วิธีทำ (1) ในที่นี้ $x_1 = 1$ และ $x_2 = 1.5$

เพราะฉะนั้น $\Delta x = x_2 - x_1$

$= 1.5 - 1 = 0.5$

จาก $\Delta y = f(x_1 + A\ x) - f(x_1)$

$= f(1.5) - f(1)$

$= [(1.5)^2 - 6(1.5) + 8] - [(1)^2 - 6(1) + 8]$

$= 2.75$

และ $|P_1P_2| = \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}$

$= \sqrt{(0.5)^2 + (-2.75)'}$

$= \sqrt{7.8125}$

$= 2.795$ (โดยประมาณ)

(2) ในที่นี้ $x_1 = 1$ และ $x_2 = 0.5$

ดังนั้น $\Delta x = x_2 - x_1$

$= 0.5 - 1 = -0.5$

จาก $Ay = f(x_1 + A\ x) - f(x_1)$

$= f(0.5) - f(1)$

$= [(0.5)^2 - 6(0.5) + 8] \quad [(1)^2 - 6(1) + 8]$

$= 2.25$

และ $|P_1P_2| = \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}$

$= \sqrt{(-0.5)^2 + (2.25)^2}$

$= \sqrt{5.3125}$

$= 2.305$ (โดยประมาณ)

(3) ในที่นี้ $x_1 = 2$, และ $x_2 = 4$

ดังนั้น $\Delta x = x_2 - x_1$

$= 4 - 2 = 2$

จาก $\Delta y = f(x_1 + \Delta x) - f(x_1)$

$= f(4) - f(2)$

$= [(4)^2 - 6(4) + 8] - [(2)^2 - 6(2) + 8]$

$= 0$

และ $|P_1P_2| = \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}$

$= \sqrt{(2)^2 + 0^2}$

$= 2$

ตัวอย่าง 3.4 วัตถุชิ้นหนึ่งเคลื่อนที่เป็นรูปพาราโบลา $y = x^2$ จากจุด $A(1,1)$ ไปยัง $B(x,y)$ จงแสดงว่า

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = x + 1 \text{ เมื่อ } \Delta x \neq 0$$

วิธีทำ จาก $y = x^2$ เปลี่ยนจาก $A(1,1)$ ไปยัง $B(x,y)$

$\Delta x = x - 1$

$\Delta y = y - 1$

$= x^2 - 1$

เพราะฉะนั้น $\dfrac{\Delta y}{\Delta x} = \dfrac{x^2 - 1}{x - 1}$ เมื่อ $\Delta x \neq 0$ หรือ $x \neq 1$

$= \dfrac{(x - 1)(x + 1)}{(x - 1)}$ เมื่อ $x \neq 1$

$= x + 1$

แบบฝึกหัด 3.1

1. ให้ $P_1(x_1, y_1)$, $P_2(x_2, y_2)$ เป็นจุด 2 จุดบนเส้นที่กำหนด จงหา Δx , Δy ของข้อต่อไปนี้

    (1) $y = 2x^2$ เมื่อ $x_1 = 1$, $x_2 = 3$

    (2) $y = 3x^2 - 2$ เมื่อ $x_1 = 2$, $x_2 = 2.01$

    (3) $y = 2 \sin x$ เมื่อ $x_1 = \frac{\pi}{4}$, $x_2 = \frac{\pi}{2}$

    (4) $y = 3^x$ เมื่อ $x_1 = 2$, $x_2 = 3$

2. กำหนดวัตถุเคลื่อนจาก A ไปยัง B จุด C เกิดจากเส้นตรงในแนวดิ่งที่ผ่าน B และเส้นตรงในแนวนอนที่ผ่าน A ตัดกัน จงหาจุด C, Δx , Δy และ $|AB|$ สำหรับข้อต่อไปนี้

    (1) A $(-1,1)$, B $(1,2)$

    (2) A $(1,2)$, B $(-1,-1)$

    (3) A $(-3,2)$, B $(-1,-2)$

    (4) A $(-1,-2)$, B $(-3,2)$

    (5) A $(-3,1)$, B $(-8,1)$

    (6) A $(0,4)$, B $(0,-2)$

3. อนุภาคเริ่มต้นเคลื่อนที่จาก A $(-3,5)$ ถ้าโคออร์ดิเนตของจุดปลายเปลี่ยนโดยปริมาณการแปรค่า $\Delta x = 6$, $\Delta y = -4$ จงหาโคออร์ดิเนตของจุดปลาย

4. อนุภาคเคลื่อนที่จาก A (x,y) ไปยัง B $(3,-3)$ ถ้ากำหนดให้ $\Delta x = 5$, $\Delta y = 6$ แล้วจงหาค่า x , y

5. ถ้าอนุภาคเคลื่อนที่จาก A $(-2,5)$ ไปยังแกน y ซึ่งกำหนดให้ $\Delta y = 3\,\Delta x$ แล้วจงหาโคออร์ดิเนตของจุดปลาย

3.3 ความชัน และเส้นตรง

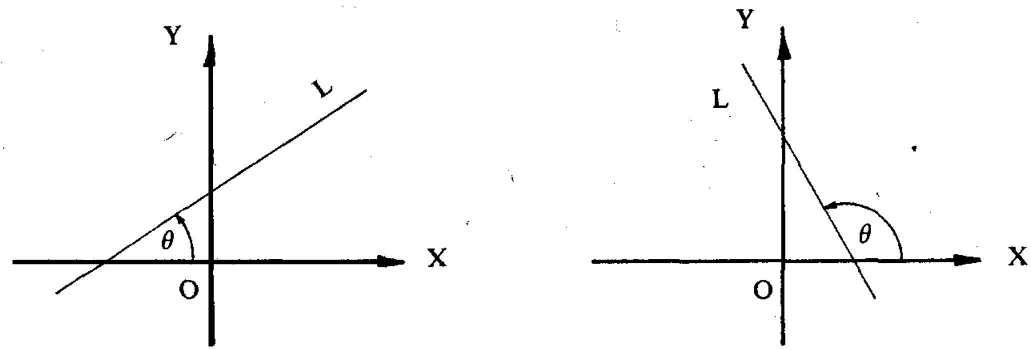
สำหรับความชันของเส้นในระนาบ แบ่งการพิจารณาออกเป็น 2 ประเภท คือ :

(1) ความชันของเส้นตรง

(2) ความชันของเส้นโค้ง

3.3.1 ความชันของเส้นตรง (Slope of a straight line)

กำหนดให้ L เป็นเส้นตรงในระนาบ XY และ θ เป็นมุมที่วัดทวนเข็มนาฬิกา จากแกน X ไปยังเส้นตรง L ดังรูป 3.4



รูป 3.4

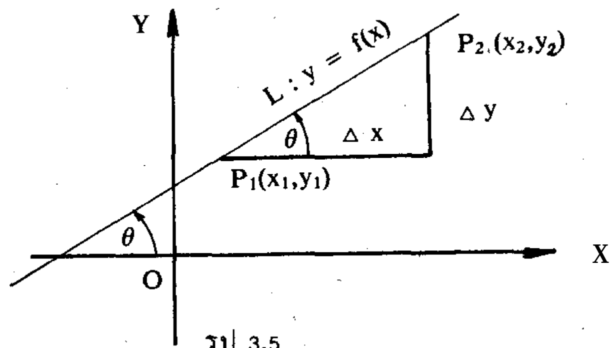
บทนิยาม 3.1 ถ้า θ เป็นมุมที่เส้นตรง L ทำกับแกน x (วัดทวนเข็มนาฬิกา) แล้วเรียก θ ว่ามุมเอียงของเส้นตรง (inclination angle)

ความชันของเส้นตรง คือ ค่าแทนเจนต์ (tangent) ของมุมเอียง

ดังนั้นถ้าให้ m แทนความชันของเส้นตรง L แล้วจะได้ว่า

$$m = \tan \theta$$

ให้ L เป็นเส้นตรงใด ๆ ที่ไม่ขนานกับแกน Y มีสมการเป็น $y = f(x)$ $P_1(x_1,y_1)$ และ $P_2(x_2,y_2)$ เป็นจุด 2 จุด ซึ่งแตกต่างกันบนเส้นตรง L ดังรูป 3.5 แล้ว



รูป 3.5

จะได้ว่า
$$\begin{aligned} m &= \tan \theta \\ &= \frac{\Delta y}{\Delta x} \\ &= \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \end{aligned}$$

$$= \frac{f(x_1 + \Delta x) - f(x_1)}{\Delta x}$$

ตัวอย่าง 3.5 ถ้า L เป็นเส้นตรงที่ทำมุมเอียงกับแกน X เป็นมุม 45° แล้วจงหาความชันของเส้นตรง L

วิธีทำ ให้ $\theta = 45°$

จาก $m = \tan\theta$

$= \tan 45°$

$= 1$

ดังนั้นเส้นตรง L มีความชันเท่ากับ 1

ตัวอย่าง 3.6 ให้ L เป็นเส้นตรงที่ผ่านจุด (3,2) และ (6,8) จงหาความชันของเส้นตรง L

วิธีทำ จาก $m = \dfrac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$

$= \dfrac{8-2}{6-3}$

$= \dfrac{6}{3}$

$= 2$

ดังนั้นเส้นตรง L มีความชันเท่ากับ 2

ข้อสังเกต (1) เส้นตรงที่เอียงไปทางขวาย่อมมีความชันเป็นจำนวนบวก เพราะมุมเอียงน้อยกว่า 90° (มุมแหลม) เส้นตรงที่เอียงไปทางซ้ายย่อมมีความชันเป็นจำนวนลบ เพราะว่ามุมเอียงมากกว่า 90° (มุมป้าน) เส้นตรงที่ขนานกับแกน x มีความชัน เท่ากับ 0 ในขณะที่เส้นตรงที่ขนานกับแกน Y หาค่าความชันไม่ได้

(2) ความชันของเส้นตรง L คือ อัตราการแปรค่าเฉลี่ยของ f(x) ต่อหนึ่งหน่วย Δx ดังนั้นจึงเขียนได้ว่า

$$m = \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

$$= \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

(3) แต่ละคู่ของจุดบนเส้นตรง L ค่าความชันที่หาได้จากแต่ละคู่ของจุดมีค่าเท่ากันเสมอ แสดงว่าความชันของเส้นตรงเป็นค่าคงที่

(4) จาก $m = \frac{\Delta y}{\Delta x}$ เขียนได้อีกแบบหนึ่งว่า $\Delta y = m \Delta x$ ซึ่งหมายความว่าขณะที่อนุภาคเคลื่อนที่ไปตามเส้นตรง L ปริมาณการแปรค่าของ y เป็นสัดส่วนโดยตรงกับปริมาณการแปรค่าของ x โดยมีความชัน m เป็นค่าคงที่ของการแปรผัน เช่นเส้นตรง L ผ่านจุด $P_1(3,2)$-$P_2(6,8)$ ความชันของ L คือ $m = \frac{8-2}{6-3} = 2$ ดังนั้นถ้า $P(x,y)$ และ $Q(x + \Delta x, y + \Delta y)$ เป็นจุดใด ๆ บน L แล้วจะได้ว่า $\Delta y = 2\Delta x$ นั่นคือ เมื่อ x เปลี่ยนไป 1 หน่วย y จะเปลี่ยนไป 2 หน่วย ดังนั้นถ้าเริ่มจากจุด (3,2) เราสามารถหาจุดบน L ได้นับไม่ถ้วนเช่น (4,4), (0, –4), (7,10) เป็นต้น

ตัวอย่าง 3.7 จงหาความชัน และมุมเอียงของเส้นตรง $L : y = x - 3$

วิธีทำ จาก
$$m = \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$
$$= \frac{(x + \Delta x - 3) - (x - 3)}{\Delta x}$$
$$= \frac{\Delta x}{\Delta x}$$
$$= 1$$

ดังนั้น เส้นตรง L มีความชันเท่ากับ 1

ถ้าให้ θ เป็นมุมเอียงของเส้นตรง L

จะได้ว่า $\tan\theta = 1$

$9 = 45”$

แสดงว่า เส้นตรง L ทำมุมเอียงกับแกน x เป็นมุม 45°

ตัวอย่าง 3.8 จงหาความชันของเส้นตรง L ที่มีสมการเป็น $y = 3x + 5$

วิธีทำ จาก
$$m = \frac{f(x + A x) - f(x)}{A x.}$$
$$= \frac{[3(x + \Delta x) + 5] - (3x + 5)}{A x}$$
$$= \frac{3\Delta x}{Ax}$$
$$= 3$$

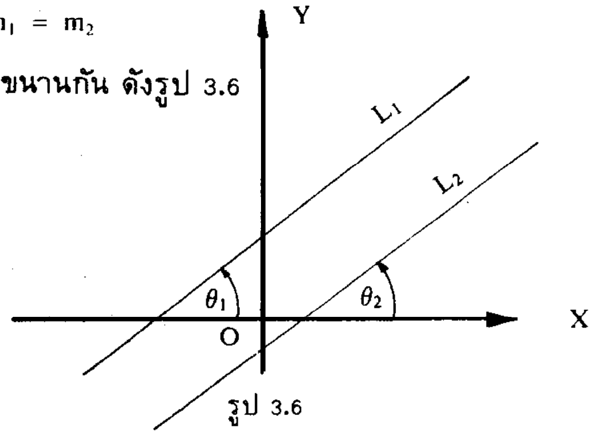
ดังนั้นเส้นตรง L มีความชันเท่ากับ 3

คุณสมบัติของเส้นตรงที่ควรทราบ

(1) **เส้นตรงสองเส้นขนานกันก็ต่อเมื่อความชันเท่ากัน**

ถ้า m_1, m_2 แทนความชันของเส้นตรง L_1, L_2 ยกเว้นเส้นดิ่ง ตามลำดับ ดังนั้นจะได้ว่า $L_1 /\!/ L_2$ ก็ต่อเมื่อ $m_1 = m_2$

พิจารณาเส้นตรง L_1 , L_2 ขนานกัน ดังรูป 3.6



รูป 3.6

จะได้ว่า $\theta_1 = \theta_2$

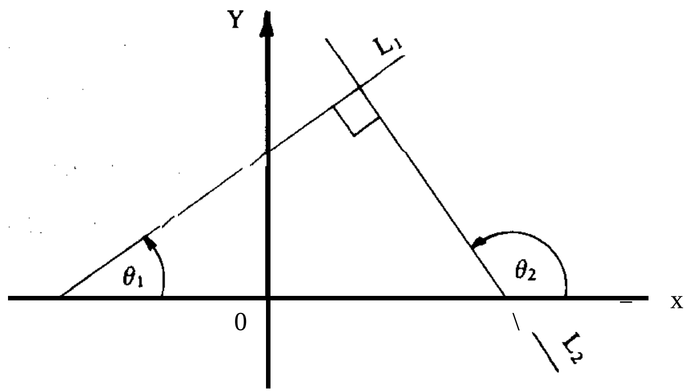
เพราะฉะนั้น $\tan\theta_1 = \tan\theta_2$

ดังนั้น $m_1 = m_2$

(2) เส้นตรงสองเส้นยกเว้นเส้นดิ่ง (Vertical line) ตั้งได้ฉากกัน ก็ต่อเมื่อ ผลคูณของความชันของเส้นตรงทั้งสองมีค่าเท่ากับ -1

นั่นคือ $L_1 \perp L_2$ ก็ต่อเมื่อ $m_1 m_2 = -1$

พิจารณ L_1, L_2 ตั้งได้ฉากกัน และทำมุม θ_1, θ_2 กับแกน X ตามลำดับ ดูรูป 3.7



รูป 3.7

จากรูป $\theta_2 = 90 + \theta_1$

$$\tan\theta_2 = \tan(90 + \theta_1)$$

$$= -\cot\theta_1$$

$$= -\frac{1}{\tan\theta_1}$$

$$m_2 = -\frac{1}{m_1}$$

$$m_1 m_2 = -1$$

นั่นคือ เส้นตรงสองเส้นตั้งฉากกัน ก็ต่อเมื่อผลคูณของความชันของเส้นตรงทั้งสองมีค่าเท่ากับ -1

ตัวอย่าง 3.9 จงแสดงว่าเส้นตรงที่ลากผ่านจุด A (1,2) , B (2,0) ขนานกับเส้นตรงที่ต่อระหว่าง C (4,1) และ D (3,3) และจงแสดงว่าเส้นตรง AB ตั้งฉากกับเส้นตรงที่ลากผ่านจุด P (3,8) และ Q (1,7)

วิธีทำ ให้ m_1 แทนความชันของเส้นตรง AB

$$m_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{0 - 2}{2 - 1} = -2$$

ให้ m_2 แทนความชัน ของเส้นตรง CD คือ

$$m_2 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{3 - 1}{3 - 4} = -2$$

จะได้ว่า $m_1 = m_2$

ดังนั้น เส้นตรง AB ขนานกับเส้นตรง CD

และให้ความชันของ PQ คือ m_3

$$m_3 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{7 - 8}{1 - 3} = \frac{1}{2}$$

จะได้ว่า $m_1 m_3 = (-2)\left(\frac{1}{2}\right) = -1$

เพราะฉะนั้นเส้นตรง AB ตั้งได้ฉากกับเส้นตรง PQ

ตัวอย่าง 3.10 จงแสดงว่า P (3,0), Q (−1,2) และ R (5, −1) อยู่บนเส้นตรงเดียวกัน

วิธีทำ ให้ m_1 แทนความชันของเส้นตรงที่ผ่าน PQ

$$m_1 = \frac{2-0}{-1-3} = -\frac{1}{2}$$

ให้ m_2 แทนความชันของเส้นตรง ที่ผ่าน Q และ R

$$m_2 = \frac{-1-2}{5-(-1)} = -\frac{1}{2}$$

จะได้ว่า $m_1 = m_2$ แสดงว่า PQ กับ QR ขนานกัน แต่เส้นตรงทั้งสองมีจุด Q เป็นจุดร่วม ดังนั้น PQ, QR เป็นเส้นตรงเดียวกัน

แบบฝึกหัด 3.2

1. จงหาความชันของเส้นตรงที่ผ่านจุด 2 จุดต่อไปนี้ พร้อมทั้งหาความชันของเส้นตรงที่ตั้งได้ฉากกับเส้นตรงนั้นด้วย

    (1) (2,1) กับ (3,2)

    (2) (4,1) กับ (−2, −1)

    (3) (0,0) กับ (2, −2)

    (4) (3,1) กับ (3, −4)

    (5) (4, −3) กับ (−3, −3)

    (6) (a+ b,b) กับ (a- b,a)

    (7) (a-b,a+b) กับ (a+b,a-b)

2. จงหาความชันของเส้นตรงต่อไปนี้

    (1) $L_1 : y = -x$

    (2) $L_2 : y = 4$

    (3) $L_3 : y = \frac{3}{2}x - 1$

3. จงหาค่าของ k ที่ทำให้เส้นตรงที่ผ่านจุด A (k,3) และ B (1, −5) มีความชันเท่ากับ 4

4. จงพิจารณาว่าจุด A,B,C,D ในแต่ละข้อต่อไปนี้ เป็นจุดยอดของรูปสี่เหลี่ยมด้านขนานหรือไม่ ในกรณีที่เป็นสี่เหลี่ยมด้านขนานให้บอกด้วยว่าเป็นรูปสี่เหลี่ยมผืนผ้าหรือไม่

(1) A (2,0) B (3, −4) C (L-2) D (0,2)

(2) A (3,0) B (−1,2) C (1,7) D (5,5)

(3) A (3.1) B (2,2) C (0,1) D (1,0)

(4) A (−2,2) B (1,3) C (2,O) D (−1,−1)

(5) A (−1,0) B (0, −1) C (2,0) D (3,2)

5. จงพิจารณาว่าจุด A,B,C ในข้อใดต่อไปนี้ ที่อยู่บนเส้นตรงเดียวกัน

(1) A (1, −2) B (6, −5) c (−10.2)

(2) A (5,1) B (-1,-1) C (8,2)

(3) A (−2,1) B (1,3) C (6, −7)

(4) A (3,1) B (−1,2) c (5,0)

6. จงพิจารณาว่าจุด A,B,C ในข้อใดต่อไปนี้ เป็นจุดยอดของสามเหลี่ยมมุมฉาก

(1) A (−4,2) B (−1, −1) C (1,1)

(2) A (4,4) B (1,2) C (2,1)

(3) A (0, −1) B (4,0) C (3,4)

(4) A (1,2) B (6, −3) C (9,0)

(5) A (2, −1) B (4,3) c (−1, −7)

7. จงหาค่า k ที่ทำให้เส้นตรงที่ผ่าน P (3, −2) และ Q (4,k)

(1) ขนานกับเส้นตรงที่มีความชัน −3

(2) ตั้งได้ฉากกับเส้นตรงที่มีความชัน −3

8. กำหนดให้ เส้นตรงที่ผ่านจุดกำเนิด และ P (x,y) มีความชัน 2 และเส้นตรงที่ผ่านจุด (−1,0) และ P (x,y) มีความชัน 1 จงหาค่า x,y

9. เส้นตรง L ตัดแกน X เป็นระยะ $\sqrt{3}$ หน่วยทางขวามือและตัดแกน Y เหนือแกน X เป็นระยะ 1 หน่วย จงหามุมเอียงที่เส้นตรงทำกับแกน X

10. ให้ $P_1 (x_1,y_1)$ $P_2 (x_2,y_2)$ เป็นจุด 2 จุด จงหาโคออร์ดิเนตของจุดกึ่งกลางของส่วนของเส้นตรง P_1P_2

3.3.2 สมการเส้นตรง (The straight line equations)

สมการเส้นตรง แทนด้วยสมการดีกรี 1 ของตัวแปร 2 ตัวแปร ดังนั้นโลกัสจุด $P(x, y)$ ซึ่งมีสมการเป็นสมการดีกรี 1 แล้วโลกัสจะเป็นเส้นตรง

ในบทนี้จะได้กล่าวถึงรูปแบบของสมการเส้นตรงแบบต่าง ๆ

แบบที่ 1 กำหนดจุด และความชัน (point-slope form)

สมการเส้นตรงที่ผ่านจุด $P_1(x_1, y_1)$ และมีความชัน m เขียนอยู่ในรูป

$$y - y_1 = m(x - x_1)$$

พิสูจน์ ให้ $P(x, y)$ เป็นจุดบนเส้นตรงที่ผ่าน (x_1, y_1)

ดังนั้นความชันของเส้นตรงคือ $\dfrac{y - y_1}{x - x_1}$

$$\text{เพราะฉะนั้น} \quad \frac{y - y_1}{x - x_1} = m$$

$$y - y_1 = m(x - x_1)$$

แบบที่ 2 กำหนดความชัน และ จุดตัดแกน (slope-intercept form)

สมการเส้นตรงซึ่งมีความชันเท่ากับ m และมีจุดตัดแกน y คือ (0, b) เขียนอยู่ในรูป $y = mx + b$

พิสูจน์ ให้ $P(x, y)$ เป็นจุดบนเส้นตรงที่ผ่านจุด (0, b)

ดังนั้นความชันของเส้นตรง คือ $\dfrac{y - b}{x - 0}$

$$\text{เพราะฉะนั้น} \quad \frac{y - b}{x - 0} = m$$

$$y - b = mx$$

$$y = mx + b$$

แบบที่ 3 กำหนดจุด 2 จุด (two-point form)

สมการเส้นตรงซึ่งผ่านจุด $P_1(x_1, y_1)$ และ $P_2(x_2, y_2)$ มีสมการอยู่ในรูป

$$\frac{y-y_1}{x-x_1} = \frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}$$

หรือ $$y-y_1 = \left(\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}\right)(x-x_1)$$

พิสูจน์ ให้ $P(x, y)$ เป็นจุดบนเส้นตรงที่ผ่าน $P_1(x_1, y_1)$, $P_2(x_2, y_2)$

จะได้ความชันของเส้นตรง คือ $\frac{y-y_1}{x-x_1}$

แต่ $\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}$ ก็เป็นความชันของเส้นตรงด้วย

ดังนั้น $$\frac{y-y_1}{x-x_1} = \frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}$$

$$y-y_1 = \left(\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}\right)(x-x_1)$$

แบบที่ 4 กำหนดระยะตัดแกนทั้งสอง (intercept form)

สมการเส้นตรงที่มีระยะตัดแกน x คือ a ระยะตัดแกน y คือ b มีสมการอยู่ในรูป

$$\frac{x}{a}+\frac{y}{b} = 1$$

พิสูจน์ ให้ $P(x, y)$ เป็นจุดบนเส้นตรงซึ่งตัดแกน x ที่ (a, 0) ตัดแกน y ที่ (0, b)

ดังนั้น $$m = \frac{b-0}{0-a}$$

$$= -\frac{b}{a}$$

จากสมการแบบที่ 3 จะได้

$$y-0 = -\frac{b}{a}(x-a)$$

$$ay = -bx+ab$$

$$bx+ay = ab$$

$$\frac{x}{a}+\frac{y}{b} = 1$$

แบบที่ 5 สมการเส้นตรงแบบทั่วไป (general form)

สมการเส้นตรงแบบทั่วไป คือ สมการดีกรี 1 ของตัวแปร x, y ซึ่งเขียนได้อยู่ ในรูป $Ax+By+C = 0$ โดยที่ A, B, C เป็นค่าคงตัว และ A, B ไม่เป็นศูนย์พร้อมกัน อย่างไรก็ตาม สมการเส้นตรงแบบทั่วไป สามารถจัดอยู่ในรูป $y = mx+b$ ได้

นั่นคือ $y = -\frac{A}{B}x - \frac{C}{B}$ $(B \neq 0)$

และได้ว่า ความชันของเส้นตรงคือ $-\frac{A}{B}$ ระยะตัดแกน y คือ $-\frac{C}{B}$

หมายเหตุ (1) เส้นตรงซึ่งขนานกับแกน x และห่างจากแกน x เป็นระยะ a คือสมการ

$y = a$

(2) เส้นตรงซึ่งขนานกับแกน y และห่างจากแกน y เป็นระยะ b คือสมการ

$x = b$

(3) ถ้าเส้นตรง L มีสมการคือ $Ax+By+C = 0$ แล้วจะได้ว่า

1. เส้นตรงที่ขนานกับ L มีสมการเป็น $Ax+By+D = 0$
2. เส้นตรงที่ตั้งได้ฉากกับ L มีสมการเป็น $Bx-Ay+E = 0$

ตัวอย่าง 3.20 จงหาสมการเส้นตรงต่อไปนี้

(1) ผ่านจุด $(-4, 3)$ มีความชัน $\frac{1}{2}$

(2) มีความชัน -3 และ ตัดแกน y ที่ $(0, -4)$

(3) ผ่านจุด $(-2, -3)$ และ $(4, 2)$

(4) มีระยะตัดแกน x และระยะตัดแกน y คือ 5, -3 ตามลำดับ

แนวคิด ใช้รูปแบบของสมการเส้นตรงทั้ง 4 แบบ (1–4) แล้วจัดรูปของคำตอบในแบบของสมการทั่วไป

วิธีทำ (1) จากสมการ $y-y_1 = m(x-x_1)$

ดังนั้น $y - 3 = \frac{1}{2}(x+4)$

$2y-6 = x i 4$

$x-2y+10 = 0$

(2) จากสมการ $Y = mx+b$

ในที่นี้ $m = -3$ และ $b = -4$

ดังนั้น $y = -3x-4$

$3x+y+4 = 0$

(3) จากสมการ $y - y_1 = \frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}(x-x_1)$

ในที่นี้ใช้ $(x_1, y_1) = (-2, -3)$ และ $(x_2, y_2) = (4, 2)$

ดังนั้น $y+3 = (\frac{2+3}{4+2})(x+2)$

$= \frac{5}{6}(x+2)$

$6y+18 = 5x+10$

$5x-6y-8 = 0$

(4) จากสมการ $\frac{x}{a}+\frac{y}{b} = 1$

ในที่นี้ $a = 5, b = -3$

ดังนั้น $\frac{x}{5}+\frac{y}{-3} = 1$

$-3x+5y = -15$

$3x-5y-15 = 0$

ตัวอย่าง 3.21 จงหาสมการเส้นตรงที่ผ่านจุด $(2, -3)$ และ ขนานกับเส้นตรงที่ผ่านจุด $(4, 1)$ และ $(-2, 2)$

แนวคิด หาความชันของเส้นตรงที่ผ่านจุด $(4, 1)$, $(-2, 2)$ และใช้ความจริงที่ว่าเส้นตรงที่ขนานกัน มีความชันเท่ากัน

วิธีทำ ให้ $P(x, y)$ เป็นจุดใด ๆ บนเส้นตรงที่ผ่านจุด $(2, -3)$

ดังนั้นความชันของเส้นตรง คือ $\frac{y+3}{x-2}$

แต่ความชันของเส้นตรงที่ผ่านจุด $(4, 1)$ และ $(-2, 2)$ คือ $\frac{2-1}{-2-4} = -\frac{1}{6}$

ดังนั้น $\frac{y+3}{x-2} = -\frac{1}{6}$

$6y+18 = -x+2$

$x+6y+16 = 0$

ตัวอย่าง 3.22 จงหาสมการเส้นตรงที่ผ่านจุด $(-2, 3)$ และตั้งได้ฉากกับเส้นตรง $2x-3y+6 = 0$

แนวคิด หาความชันของเส้นตรง $2x-3y+6 = 0$ โดยจัดในรูป $y = mx+b$ และใช้ความจริงที่ว่าเส้นตรง 2 เส้นตั้งได้ฉากกัน ผลคูณของความชันมีค่าเท่ากับ -1

วิธีทำ ให้ $P(x, y)$ เป็นจุดใด ๆ บนเส้นตรงที่ผ่านจุด $(-2, 3)$

ดังนั้นความชันของเส้นตรง คือ $\frac{y-3}{x+2}$

จัดรูปสมการ $2x-3y+6 = 0$ ในรูป $y = mx+b$ จะได้

$$y = \frac{2}{3}x+2$$

ดังนั้นสมการ $2x-3y+6$ มีความชันเท่ากับ $\frac{2}{3}$

ดังนั้น $$\left(\frac{y-3}{x+2}\right)\left(\frac{2}{3}\right) = -1$$

$$2y-6 = -3x-6$$

$$3x+2y = 0$$

ตัวอย่าง 3.23 จงหาสมการเส้นตรงซึ่งตั้งได้ฉากกับเส้นตรงที่ผ่านจุด $(7, 4)$ และ $(-1, -2)$ ที่จุดแบ่งครึ่ง

แนวคิด หาจุดกึ่งกลางของส่วนของเส้นตรง และใช้คุณสมบัติของเส้นตรง 2 เส้นตั้งได้ฉากกัน ความชันคูณกันมีค่าเท่ากับ -1

วิธีทำ ให้ $P(x, y)$ เป็นจุดใด ๆ ของเส้นตรงที่แบ่งครึ่ง ตั้งฉากกับส่วนของเส้นตรงที่ผ่านจุด $(7, 4)$ และ $(-1, -2)$

จุดกึ่งกลางคือ $\left(\frac{7-1}{2}, \frac{4-2}{2}\right) = (3, 1)$

ความชันของเส้นตรงคือ $\frac{y-1}{x-3}$

แต่ความชันของเส้นตรงที่ผ่านจุด $(7, 4)$ และ $(-1, -2)$ คือ $\frac{4+2}{7+1} = \frac{3}{4}$

ดังนั้น $$\left(\frac{y-1}{x-3}\right)\left(\frac{3}{4}\right) = -1$$

$$3y-3 = -4x+12$$

$$4x+3y = 15$$

แบบฝึกหัด 3.3

1. จงหาสมการเส้นตรงที่สอดคล้องเงื่อนไขต่อไปนี้

   (1) ผ่านจุด $(0, -3)$ และ $m = -2$

   (2) ผ่านจุด $(0, 3)$ และ $m = -\frac{4}{3}$

2. จงหาสมการเส้นตรงที่ผ่านจุดต่อไปนี้

   (1) $(2, -3)$ และ $(4, 2)$

   (2) $(-4, 1)$ และ $(3, -5)$

3. กำหนดให้จุดยอดของสามเหลี่ยม คือ $A(-5, 6)$, $B(-1, -4)$ และ $C(3, 2)$ จงหาสมการของเส้นมัธยฐานทั้งสามเส้น

4. กำหนด A, B, C เหมือนข้อ 3 จงหาสมการเส้นตรงซึ่งแบ่งครึ่ง และ ตั้งได้ฉากกับด้านทั้งสามของสามเหลี่ยม

5. จงหาสมการเส้นตรงที่ผ่านจุด $(2, 3)$ และ ระยะตัดแกน x ยาวเป็น 2 เท่าของระยะตัดแกน y

6. จงหาค่า k ซึ่งทำให้เส้นตรง $2x+3y+k = 0$ เป็นด้านตรงข้ามมุมฉากซึ่งมีแกนพิกัดเป็นด้านประกอบมุมฉาก และทำให้พื้นที่สามเหลี่ยมมีค่า 27 ตารางหน่วย

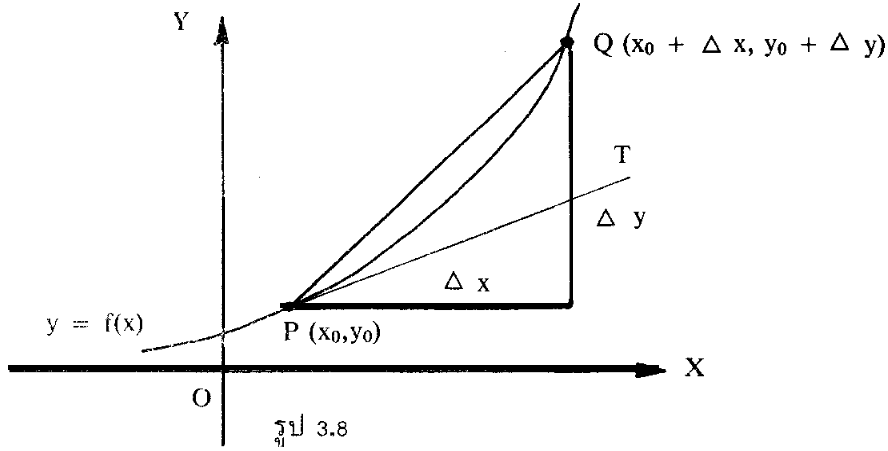
7. จงหาค่า k ซึ่งทำให้เส้นตรง $2x+3ky-13 = 0$ ผ่านจุด $(-2, 4)$

8. จงหาจุดบนเส้นตรง $3x+y+4 = 0$ ซึ่งห่างจากจุด $(-5, 6)$ และ $(3, 2)$ เป็นระยะเท่ากัน

9. จงหาสมการเส้นตรงซึ่งมีระยะตัดแกน x คือ $-\frac{3}{7}$ และ ตั้งได้ฉากกับเส้นตรง $3x+4y-10 = 0$

3.3.3 ความชันของเส้นโค้ง (Slope of a curve)

กำหนดให้ f เป็นฟังก์ชัน และกราฟของ $y = f(x)$ เป็นเส้นโค้ง ดังรูป 3.8



รูป 3.8

ให้ P (x_0, y_0) และ Q $(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y)$ เป็นจุดบนเส้นโค้ง $y = f(x)$

ให้ m_{sec} เป็นความชันของเส้นตรงที่เชื่อมจุด P และ Q

ดังนั้น $$m_{sec} = \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

$$= \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$$

ถ้าให้ P เป็นจุดตรึงแน่น และ Q เคลื่อนที่เข้าใกล้ P ตามเส้นโค้ง $y = f(x)$ ซึ่งแสดงว่า Δx เข้าใกล้ 0 แล้วความชันของเส้นตรงที่เชื่อม PQ จะเข้าใกล้ค่าความชันของเส้นตรง PT ตามรูป 3.8 ซึ่งเป็นเส้นสัมผัสเส้นโค้งที่จุด P

ดังนั้น ความชันของเส้นสัมผัสเส้นโค้ง $y = f(x)$ ที่จุด P (x_0, y_0) หรือเรียกสั้น ๆ ว่า ความชันของเส้นโค้งที่ P (x_0, y_0) คือ

$$m = \lim_{\Delta x \to 0} m_{sec}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$$

ตัวอย่าง 3.11 จงหาความชันของเส้นโค้ง $y = f(x) = x^2$ ที่จุด (x,y) ใด ๆ และที่จุด $(1,1)$

วิธีทำ จาก $f(x) = x^2$

เพราะฉะนั้น $$f(x + \Delta x) = (x + \Delta x)^2$$

$$= x^2 + 2x\Delta x + (\Delta x)^2$$

ดังนั้น $\frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \frac{x^2 + 2x\Delta x + (\Delta x)^2 - x^2}{\Delta x}$

$$= \frac{\Delta x(2x + \Delta x)}{\Delta x}$$

$$= 2x + \Delta x$$

เพราะฉะนั้น $\lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} 2x + \Delta x$

$$= 2x$$

ดังนั้น ความชันของเส้นโค้ง $y = f(x) = x^2$ ที่จุด (x,y) ใด ๆ มีค่าเท่ากับ 2x ที่จุด (1,1) แสดงว่า x = 1, y = 1 ดังนั้นความชันที่จุด (1,1) มีค่าเท่ากับ 2(1) = 2

แบบฝึกหัด 3.4

จงหาความชันของเส้นโค้ง y = f(x) ที่จุด P (x,y) ใด ๆ และที่จุด ซึ่งกำหนดค่า x ให้ในแต่ละข้อต่อไปนี้

1. $y = x^3$ ที่ $x = -1$
2. $y = \sqrt{x}$ ที่ $x = 1$
3. $Y = x^2 - 2x - 3$ ที่ $x = 2$
4. $Y = x^3 - 3x$ ที่ $x = 4$
5. $y = x^2(4x + 3) + 1$ ที่ $x = 1$

3.4 อนุพันธ์ของฟังก์ชัน (Derivative of a function)

โดยทั่ว ๆ ไป สำหรับ y = f(x) จะได้ว่าเมื่อ x มีค่าเปลี่ยนไป ค่าของฟังก์ชัน f(x) ก็เปลี่ยนไปด้วย คือ เมื่อ x เปลี่ยนจาก x ไปเป็น $x + \Delta x$ ค่าของฟังก์ชันจะเปลี่ยนจาก f(x) ไปเป็น $f(x + \Delta x)$

ดังนั้น ปริมาณการแปรค่าของฟังก์ชัน คือ $f(x + \Delta x) - f(x)$ ในขณะที่ปริมาณแปรค่าของ x คือ Δx และเราเรียกอัตราส่วน $\frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$ ว่าอัตราการแปรค่าเฉลี่ย

พิจารณา $y = f(x) = x^2$ ถ้า x เปลี่ยนจาก 2 ไปเป็น 5 คือ ค่า $\Delta x = 3$ จะได้อัตราการแปรค่าเฉลี่ย เท่ากับ 7 ถ้า x เปลี่ยนจาก 2 ไปเป็น 3 อัตราการแปรค่าเฉลี่ยมีค่าเท่ากับ 5 ถ้า x เปลี่ยนจาก 2 ไปเป็น 2.1 อัตราการแปรค่าเฉลี่ยมีค่าเท่ากับ 4.1 และ ถ้า x เปลี่ยนจาก 2 ไปเป็น 2.01 จะได้อัตราการแปรค่าเฉลี่ยเท่ากับ 4.01 ต่อไปเรื่อย ๆ

จะเห็นได้ว่าอัตราการแปรค่าเฉลี่ยของ $y = f(x)$ ขึ้นอยู่กับ Δx ถ้าให้ Δx มีค่าเข้าใกล้ 0 แล้ว อัตราการแปรค่าเฉลี่ยมีค่าเข้าใกล้ค่าคงตัวค่าหนึ่ง เราเรียกอัตราการแปรค่าเฉลี่ยเมื่อ Δx เข้าใกล้ศูนย์นี้ว่า อัตราการแปรค่าชั่วขณะ (instantanous rate of change) ของ $y = f(x)$ ในทางคณิตศาสตร์ เราเรียกอัตราการแปรค่าชั่วขณะของ $y = f(x)$ ที่ x ใด ๆ ว่า "อนุพันธ์" (derivative) ของ $y = f(x)$ ที่ x และเขียนแทนด้วยสัญกรณ์

$$f'(x)\ ,\ y'\ ,\ \frac{dy}{dx}\ ,\ \frac{d\,f(x)}{dx}\ ,\ D\ f(x)\ ,\ Dxy$$

L a

นั่นคือ $f'(x) = \underset{\Delta x \to 0}{\text{Pim}} \dfrac{f(x + A\ x) - f(x)}{A\ x}$

ซึ่งอาจให้เป็นนิยามได้ดังนี้

บทนิยาม 3.2 กำหนดให้ $y = f(x)$ เป็นฟังก์ชันใด ๆ อนุพันธ์ของ $f(x)$ เมื่อเทียบกับ x คือค่าลิมิตของอัตราส่วน $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ เมื่อ Δx เข้าใกล้ศูนย์ โดยที่ค่าลิมิตต้องหาค่าได้

นั่นคือ $f'(x) = \underset{\Delta x \to 0}{\text{Pim}} \dfrac{f(x + \Delta\ x) \quad f(x)}{Ax}$ **เมื่อลิมิตมีค่า**

หมายเหตุ (1) **ถ้า $f'(x)$ หาค่าได้ จะกล่าวว่า $f(x)$ มีอนุพันธ์ที่ x แต่ถ้า $f'(x)$ หาค่าไม่ได้สำหรับ x บางจุด จะกล่าวว่า $f(x)$ ไม่มีอนุพันธ์ที่จุดนั้น**

(2) **อนุพันธ์ของ $f(x)$ ที่ $x = a$** เขียนแทนด้วยสัญกรณ์

$$y'|_{x = a} \quad \text{หรือ} \quad \left(\frac{dy}{dx}\right)_{x = a} \quad \text{หรือ} \quad \left.\frac{dy}{dx}\right|_{x = a}$$

ตัวอย่าง 3.12 **จงหาอนุพันธ์ของ $y = x^2 + x$**

(1) **ที่จุด (x,y) ใด ๆ**

(2) **ที่จุด $x = 3$**

(3) ที่จุด $x = -2$

วิธีทำ (1) ให้ $y = f(x) = x^2 + x$

จาก $f'(x) = \underset{\Delta x \to 0}{\text{Pim}} \dfrac{f(x + A\ x) - f(x)}{AX}$

$$= \underset{A\ x \to 0}{\ell\text{im}} \frac{[(x + A\ x)^2 + (x + A\ x)] - (x^2 + x)}{A\ x}$$

$$= \underset{\Delta x \to 0}{\text{Pim}} \frac{x^2 + 2x\Delta x + (\Delta x)^2 + x + Ax - x^2 - x}{Ax}$$

$$= \underset{\Delta x \to 0}{\text{Pim}} \frac{\Delta x(2x + Ax + 1)}{Ax}$$

$$= \underset{Ax\text{-}O}{\ell\text{im}}\ 2x + \Delta x + 1$$

$$= 2x + 1$$

ดังนั้น อนุพันธ์ของ $y = x^2 + x$ ที่จุด x ใด ๆ คือ $2x + 1$

(2) ณ. ที่จุด $x = 3$ จะได้ว่า

$$f'(3) = 2(3) + 1 = 7$$

(3) ณ. ที่จุด $x = -2$ จะได้ว่า

$$f'(-2) = 2(-2) + I = -3$$

จะเห็นว่าการใช้นิยามหาค่าอนุพันธ์นั้น ยุ่งยากสับสนเพราะต้องอาศัยลิมิตช่วย ซึ่งจะเสียเวลามาก เพื่อให้การคำนวณหาอนุพันธ์สะดวกรวดเร็วยิ่งขึ้น เราจึงสร้างสูตรสำหรับการหาอนุพันธ์ โดยจะกล่าวเป็นทฤษฎีบทต่อไป

3.5 ทฤษฎีบทอนุพันธ์ (Theorems on derivative)

ทฤษฎีบท 3.1 ถ้า $y = f(x) = c$ (ค่าคงตัว)แล้ว $\dfrac{df(x)}{dx} = \dfrac{dc}{dx} = 0$

พิสูจน์ จาก $\dfrac{d}{dx} f(x) = \underset{A\,x \to 0}{\ell\text{im}} \dfrac{f(x + Ax) - f(x)}{Ax}$

$$= \underset{\Delta x \to 0}{\text{Pim}} \frac{c - c}{A\ X}$$

$$= 0$$

ตัวอย่าง 3.13 จงหาค่าของ $f'(x)$ เมื่อ $f(x) = 37$

วิธีทำ

$$f(x) = \frac{df(x)}{dx}$$

$$= \frac{d\,37}{dx}$$

$$= 0$$

ทฤษฎีบท 3.2 ถ้า $y = f(x) = X"$ แล้ว $\frac{d\,f(x)}{dx} = \frac{dx"}{dx} = nx^{n-1}$

เมื่อ n เป็นเลขจำนวนเต็มบวกใด ๆ

พิสูจน์ เพราะว่า $f(x + A\ x) = (x + A\ x)"$

$$\begin{cases} x + A\ x & \text{ถ้า } n = 1 \\ x^2 + 2x\Delta\ x + (A\ x)^2 & \text{ถ้า } n = 2 \\ x^3 + 3x^2\ \Delta\ x + 3x(\Delta\ x)^2 + (\Delta x)^3 & \text{ถ้า } n = 3 \\ x" + nx^{n-1}\ Ax + (\text{เทอมที่มี x และ } Ax)\ (\Delta x)^2 & \text{ถ้า } n > 3 \end{cases}$$

เพราะฉะนั้น $f(x + A\ x) - f(x) =$

$$\begin{cases} \Delta x & \text{ถ้า } n = 1 \\ 2x\Delta\ x + (\Delta\ x)^2 & \text{ถ้า } n = 2 \\ 3x^2\Delta x + 3x\ (\Delta x)^2 + (A x)' & \text{ถ้า } n = 3 \\ nx^{n-1}\Delta x + (\text{เทอมที่มี x และ } \Delta x)(\Delta x)^{2-} & \text{ถ้า } n > 3 \end{cases}$$

เพราะฉะนั้น $\frac{f(x + Ax) - f(x)}{Ax} =$

$$\begin{cases} 1 & \text{ถ้า } n = 1 \\ 2x + Ax & \text{ถ้า } n = 2 \\ 3x^2 + 3x\Delta x + (\Delta x)^2 & \text{ถ้า } n = 3 \\ nx^{n-1} + (\text{เทอมที่มี x และ } Ax)\ (Ax) & \text{ถ้า } n > 3 \end{cases}$$

$$\lim_{Ax - O} \frac{f(x + Ax) - f(x)}{A\ x} = \begin{cases} 1 & \text{ถ้า } n = 1 \\ 2x & \text{ถ้า } n = 2 \\ 3x^2 & \text{ถ้า } n = 3 \\ nx^{n-1} & \text{ถ้า } n > 3 \end{cases}$$

นั่นแสดงว่า $\frac{d\,x^n}{dx} = nx^{n-1}$

ข้อสังเกต เมื่อ $n = 1$ จะได้ว่า $\frac{dx}{dx} = 1$

ตัวอย่าง 3.14, กำหนด $y = x^7$ จงหา y'

วิธีทำ

$$y' = \frac{dy}{dx}$$

$$= \frac{dx^7}{dx}$$

$$= 7x^6$$

ทฤษฎีบท 3.3 ถ้า $f(x) = cu(x)$ เมื่อ $u(x)$ เป็นฟังก์ชันที่มีอนุพันธ์ที่ x

แล้ว $\frac{d\,f(x)}{dx} = \frac{dc\,u(x)}{dx} = \frac{c\,d\,u(x)}{dx}$

พิสูจน์ จาก

$$\frac{d\,f(x)}{dx} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{cu(x + \Delta x) - cu(x)}{\Delta x}$$

$$= c \lim_{\Delta x \to 0} \frac{u(x + \Delta x) - u(x)}{\Delta x}$$

$$= c\frac{d}{dx}u(x)$$

นั่นคือ $\frac{d}{dx}cu = c\frac{du}{dx}$

ตัวอย่าง 3.16 กำหนดให้ $y = 3x^5$ จงหา $\frac{dy}{dx}$

94 **วิธีทำ** จาก

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}3x^5$$

$$= 3\frac{d}{dx}x^5$$

$$= 3(5x^4)$$

$$= 15x^4$$

ทฤษฎีบท 3.4 ถ้า u (x), V(X) เป็นฟังก์ชันของตัวแปร x และ u (x), v(x) มีอนุพันธ์ที่ x แล้ว

$$\frac{d}{dx}[u(x) + v(x)] = \frac{d}{ax}u(x) + \frac{d}{dx}v(x)$$

พิสูจน์ ให้ $f(x) = u(x) + v(x)$

จาก $$\frac{d}{dx}f(x) = \underset{\Delta x \to 0}{\text{Pim}} \frac{f(x + A\ x) - f(x)}{AX}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{[u(x + Ax) + v(x + \Delta x)] - [u(x) + V(x)]}{A\ x}$$

$$= \underset{\Delta x \to 0}{\text{Pim}} \frac{[u(x + \Delta x) - u(x)] + [v(x + Ax) - v(x)]}{A\ x}$$

$$= \underset{\Delta x \to 0}{\text{Pim}} \frac{u(x + \Delta x) - u(x)}{A\ x} + \underset{\Delta x \to 0}{\text{eim}} \frac{v(x + \Delta x) - v(x)}{Ax}$$

$$= \frac{du(x)}{dx} + \frac{dv(x)}{dx}$$

นั่นคือ $$\frac{d}{dx}(u + v) = \frac{du}{dx} + \frac{dv}{dx}$$

ตัวอย่าง 3.16 กำหนดให้ $f(x) = 3x^3 - 4x^2 + 4$ จงหา $f'(x)$

วิธีทำ จาก $$f'(x) = \frac{d}{dx}(3x^3 - 4x^2 + 4)$$

$$= \frac{d}{dx}3x3 + \frac{d}{dx}(-4x^2) + \frac{d}{dx}4$$

$$= 9x^2 - 8x + 0$$

$$= 9x^2 - 8x$$

สำหรับทฤษฎีบท 3.1 - 3.4 กล่าวถึงการหาอนุพันธ์ของโพลิโนเมียลฟังก์ชัน โดยใช้สูตรง่าย $\frac{d}{dx}cx^n = cnx^{n-1}$ และสูตรเกี่ยวกับการหาอนุพันธ์ของผลบวกของฟังก์ชัน

ทฤษฎีบทต่อไปนี้ กล่าวถึงการหาอนุพันธ์ของผลคูณ ผลหาร และตัวยกกำลัง เมื่อเทียบกับ x ดังนี้

ผลคูณ : $y = u(x)\,v(x)$

ผลหาร : $y = \dfrac{u(x)}{v(x)}$

ยกกำลัง : $y = [u(x)]^n$

ทฤษฎีบท 3.5 ถ้า $u(x), v(x)$ เป็นฟังก์ชันของตัวแปร x และ $u(x), v(x)$ มีอนุพันธ์ที่ x แล้ว

$$\frac{d}{dx}\,u(x)\,v(x) = u(x)\frac{d}{dx}v(x) + v(x)\frac{d}{dx}u(x)$$

พิสูจน์ ให้ $f(x) = u(x)\,v(x)$ ดังนั้น

$$\frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \frac{u(x+\Delta x)\,v(x+\Delta x) - u(x)\,v(x)}{\Delta x}$$

$$= \frac{[u(x+\Delta x)v(x+\Delta x) - u(x+\Delta x)v(x)] + [u(x+\Delta x)v(x) - u(x)v(x)]}{\Delta x}$$

$$= u(x+\Delta x)\frac{[v(x+\Delta x) - v(x)]}{\Delta x} + v(x)\frac{[u(x+\Delta x) - u(x)]}{\Delta x}$$

เพราะฉะนั้น $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}$

$$= \lim_{\Delta x\to 0} u(x+\Delta x)\frac{[v(x+\Delta x) - v(x)]}{\Delta x} + \lim_{\Delta x\to 0} v(x)\frac{[u(x+\Delta x) - u(x)]}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x\to 0} u(x+\Delta x)\lim_{\Delta x\to 0}\frac{v(x+\Delta x) - v(x)}{\Delta x} +$$

$$\lim_{\Delta x\to 0} v(x)\lim_{\Delta x\to 0}\frac{u(x+\Delta x) - u(x)}{\Delta x}$$

$$= u(x)\frac{d}{dx}v(x) + v(x)\frac{d}{dx}u(x)$$

นั่นคือ $\dfrac{d}{dx}uv = u\dfrac{d}{dx}v + v\dfrac{du}{dx}$

ตัวอย่าง 3.17 กำหนด $y = (3x^2 - 2x + 1)(2x - 3)$ จงหา y'

วิธีทำ

$$y' = \frac{d}{dx}(3x^2 - 2x + 1)(2x - 3)$$

$$= (3x^2-2x+1)\frac{d}{dx}(2x-3) + (2x-3)\frac{d}{dx}(3x^2-2x+1)$$

$$= (3x^2 - 2x + 1)(2) + (2x - 3)(6x - 2)$$

$$= 6x^2 - 4x + 2 + 12x^2 - 22x + 6$$

$$= 18x^2 \quad 26x + 8$$

ทฤษฎีบท 3.6 ถ้า $u(x), v(x)$ เป็นฟังก์ชันของตัวแปร x และ $u(x), v(x)$ **มีอนุพันธ์ที่ x โดย** ที่ $v(x) \neq 0$ แล้ว

$$\frac{d}{dx}\frac{u(x)}{v(x)} = \frac{v(x)\frac{d}{dx}u(x) - u(x)\frac{d}{dx}v(x)}{[v(x)]^2}$$

พิสูจน์ ให้ $f(x) = \frac{u(x)}{v(x)}$ จะได้ว่า

$$\frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{Ax} = \frac{\frac{u(x+\Delta x)}{v(x+\Delta x)} - \frac{u(x)}{v(x)}}{Ax}$$

$$= \frac{u(x+\Delta x)v(x) - u(x)v(x+\Delta x)}{\Delta x[v(x+\Delta x)v(x)]}$$

$$\cong \frac{[u(x+\Delta x)v(x) - u(x)v(x)] - [u(x)v(x+\Delta x) - u(x)v(x)]}{\Delta x[v(x+\Delta x)v(x)]}$$

$$= \frac{v(x)}{v(x+\Delta x)v(x)}\frac{[u(x+Ax) - u(x)]}{Ax} - \frac{u(x)}{v(x+\Delta x)V(x)}\frac{[v(x+Ax) - V(x)]}{Ax}$$

เพราะฉะนั้น $\frac{d}{dx}f(x) = \lim_{\Delta x \to 0}\frac{f(x+Ax) - f(x)}{Ax}$

$$= \text{Pim}_{\Delta x \to 0}\frac{v(x)}{v(x+\Delta x)v(x)}\frac{[u(x+Ax) - u(x)]}{Ax}$$

$$- \lim_{\Delta x \to 0}\frac{u(x)}{v(x+\Delta x)v(x)}\frac{[v(x+Ax) - v(x)]}{Ax}$$

$$= \frac{v(x)}{[v(x)]''}\frac{du}{dx} - \frac{u(x)}{[v(x)]^2}\frac{dv}{dx}$$

$$= \frac{v(x)\dfrac{du}{dx}(x) - u(x)\dfrac{dv}{dx}(x)}{[v(x)]^2}$$

นั่นคือ $\dfrac{d}{dx}\dfrac{u}{v} = \dfrac{v\dfrac{du}{dx} - u\dfrac{dv}{dx}}{v^2}$

ตัวอย่าง 3.18 จงหาอนุพันธ์ของ $y = \dfrac{2 - x}{2 + x}$, $x \neq -2$

วิธีทำ

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}\left(\frac{2 - x}{2 + x}\right)$$

$$= \frac{(2 + x)\dfrac{d}{dx}(2 - x) - (2 - x)\dfrac{d}{dx}(2 + x)}{(2 + x)^2}$$

$$= \frac{(2 + x)(-1) - (2 - x)(1)}{(2 + x)^2}$$

$$= \frac{-2 - x - 2 + x}{(2 + x)^2}$$

$$= \frac{-4}{(2 + x)^2}$$

ทฤษฎีบท 3.7 ถ้า $u(x)$ เป็นฟังก์ชันของตัวแปร x และมีอนุพันธ์ที่ x แล้ว $\dfrac{d}{dx}[u(x)]^n = n[u(x)]^{n-1}\dfrac{d}{dx}u(x)$, n เป็นจำนวนเต็มบวก .

พิสูจน์ ให้ $f(x), f_1(x), f_2(x), \ldots f_n(x)$ เป็นฟังก์ชันที่มีอนุพันธ์ที่ x และ $f(x) = f_1(x)f_2(x) \ldots f_n(x)$

โดยใช้สูตรผลคูณ จะได้

$$f'(x) = f'_1(x)f_2(x)\,f_3(x)\ldots f_n(x) + f_1(x)[f_2(x)f_3(x)\ldots f_n(x)]'$$

$$= f'_1(x)\,f_2(x)\,f_3(x)\ldots f_n(x) + f_1(x)\,f'_2(x)\,f_3(x)\ldots f_n(x)$$

$$+ f_1(x)f_2(x)f'_3(x)\ldots f_n(x) + \ldots$$

$$+ f_1(x)f_2(x)f_3(x)\ldots f'_n(x)$$

ให้ $f_1(x) = f_2(x) = f_3(x) = \ldots = f_n(x) = u(x)$

ดังนั้น $f(x) = [u(x)]^n$

และ $f'(x) = \frac{d}{dx}[u(x)]^n$

$$= [u(x)]^{n-1}\frac{du}{dx}(x) + [u(x)]^{n-1}\frac{du}{dx} + \ldots$$

$$+ [u(x)]^{n-1}\frac{du}{dx}(x) \quad \text{(บวกกัน n เทอม)}$$

$$= n[u(x)]^{n-1}\frac{du}{dx}(x)$$

นั่นคือ $\frac{du^n}{dx} = nu^{n-1}\frac{du}{dx}$

สำหรับทฤษฎีบท 3.7 นั้น กล่าวในกรณีที่ n เป็นจำนวนเต็มบวก ทฤษฎีบทต่อไปทำให้เราทราบว่า ถ้า n เป็นจำนวนเต็มลบ หรือ จำนวนตรรกยะ สูตรที่ใช้ก็ยังคงเดิม คือ

$$\frac{du^n}{dx} = nu^{n-1}\frac{du}{dx}$$

ทฤษฎีบท 3.8 ถ้า n เป็นจำนวนเต็มลบ และ $u(x)$ มีอนุพันธ์ที่ x และ $u(x) \neq 0$ แล้ว

$$\frac{d}{dx}[u(x)]^n = n[u(x)]^{n-1}\frac{du}{dx}(x)$$

พิสูจน์ ให้ n เป็นเลขจำนวนเต็มลบ

ดังนั้น $n = -m$ เมื่อ m เป็นจำนวนเต็มบวก

$$\frac{d}{dx}[u(x)]^n = \frac{d}{dx}[u(x)]^{-m}$$

$$= \frac{d}{dx}\left(\frac{1}{[u(x)]^m}\right)$$

$$= \frac{[u(x)]^m \frac{d}{dx}(1) - (1)\frac{d}{dx}[u(x)]^m}{[u(x)]^{2m}}$$

$$= \frac{0 - m[u(x)]^{m-1}\frac{d}{dx}u(x)}{[u(x)]^{2m}}$$

$$= -m[u(x)]^{-m-1}\frac{d}{dx}u(x)$$

$$= n[u(x)]^{n-1}\frac{d}{dx}u(x)$$

ตัวอย่าง 3.19 จงหาค่าของ $\frac{d}{dx}(2x^2 - 3)^5$

วิธีทำ $$\frac{d}{dx}(2x^2 - 3)^5 = 5(2x^2 - 3)^4 \frac{d}{dx}(2x^2 - 3)$$

$$= 5(2x^2 - 3)^4 (4x - 0)$$

$$= 20x (2x^2 - 3)^4$$

ตัวอย่าง 3.20 จงหาค่าของ $\frac{d}{dx}(x^2 + 1)^{-4}$

วิธีทำ $$\frac{d}{dx}(x^2 + 1)^{-4} = -4(x^2 + 1)^{-4-1}\frac{d}{dx}(x^2 + 1)$$

$$= -4(x^2 + 1)^{-5}(2x + 0)$$

$$= -8x(x^2 + 1)^{-5}$$

$$= \frac{-8x}{(x^2 + 1)^5}$$

ทฤษฎีบท 3.9 สำหรับจำนวนเต็มบวก n ใด ๆ และ $u(x) > 0$ มีอนุพันธ์ที่ x

แล้ว $$\frac{d}{dx}[u(x)]^{1/n} = \frac{1}{n}[u(x)]^{\frac{1}{n}-1}\frac{d}{dx}u(x)$$

พิสูจน์ ให้ $f(x) = [u(x)]^{1/n}$

เพราะฉะนั้น $[f(x)]^n = u(x)$

$$n[f(x)]^{n-1}\frac{d}{dx}f(x) = \frac{d}{dx}u(x)$$

$$\frac{d}{dx}f(x) = \frac{1}{n[f(x)]^{n-1}}\frac{d}{dx}u(x)$$

$$= \frac{1}{n}[f(x)]^{1-n}\frac{d}{dx}u(x)$$

$$= \frac{1}{n}[(u(x))^{1/n}]^{1-n}\frac{d}{dx}u(x)$$

$$= \frac{1}{n}[u(x)]^{\frac{1}{n}-1}\frac{d}{dx}u(x)$$

บทแทรก สำหรับจำนวนตรรกยะ r ใด ๆ และ $u(x) > 0$ มีอนุพันธ์ที่ x แล้ว

$$\frac{d}{dx}[u(x)]^r = r[u(x)]^{r-1}\frac{d}{dx}u(x)$$

พิสูจน์ ให้ r เป็นจำนวนตรรกยะ

ดังนั้น $r = \frac{p}{q}$, p , q เป็นจำนวนเต็ม และ $q \neq 0$

โดยอาศัย ทฤษฎีบท 3.8 และ ทฤษฎีบท 3.9

เพราะฉะนั้น
$$\begin{aligned}
\frac{d}{dx}[u(x)]^r &= \frac{d}{dx}[u(x)]^{p/q} \\
&= \frac{d}{dx}[(u(x))^{1/q}]^p \\
&= p[(u(x))^{1/q}]^{p-1}\frac{d}{dx}[u(x)]^{1/q} \\
&= p[(u(x))^{1/q}]^{p-1}\cdot\frac{1}{q}[u(x)]^{\frac{1}{q}-1}\frac{d}{dx}u(x) \\
&= \frac{p}{q}[u(x)]^{\frac{p-1}{q}+\frac{1-q}{q}}\frac{d}{dx}u(x) \\
&= \frac{p}{q}[u(x)]^{\frac{p-q}{q}}\frac{d}{dx}u(x) \\
&= \frac{p}{q}[u(x)]^{\frac{p}{q}-1}\frac{d}{dx}u(x)
\end{aligned}$$

เพราะฉะนั้น $\frac{d}{dx}[u(x)]^r = r[u(x)]^{r-1}\frac{d}{dx}u(x)$

ตัวอย่าง 3.20 จงหาค่าของ $f'(x)$ เมื่อกำหนด $f(x) = \sqrt{2x^3 + 4x}$

วิธีทำ
$$\begin{aligned}
f(x) &= (2x3 + 4x)^{\frac{1}{2}} \\
f'(x) &= \frac{d}{dx}(2x' + 4x)^{\frac{1}{2}} \\
&= \frac{1}{2}(2x3 + 4x)^{-\frac{1}{2}}\frac{d}{dx}(2x^3 + 4x) \\
&= \frac{1}{2}(2x3 + 4x)^{-\frac{1}{2}}(6x' + 4) \\
&= \frac{3x^2 + 2}{\sqrt{2x^3 + 4}}
\end{aligned}$$

ตัวอย่าง 3.21 กำหนดให้ $y = \left(\frac{4x^2 - x}{5x3 - 2}\right)^4$ จงหา $\frac{dy}{dx}$

วิธีทำ จาก $y = \left(\frac{4x^2 - x}{5x3 - 2}\right)^4$

เพราะฉะนั้น $\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}\left(\frac{4x^2 - x}{5x^3 - 2}\right)^4$

$$= 4\left(\frac{4x^2 - x}{5x^3 - 2}\right)^3 \frac{d}{dx}\left(\frac{4x^2 - x}{5x^3 - 2}\right)$$

$$= 4\left(\frac{4x^2 - x}{5x3 - 2}\right)^3 \left(\frac{(5x^3-2)\frac{d}{dx}(4x^2-x) - (4x^2-x)\frac{d}{dx}(5x^3-2)}{(5x3 - 2)^2}\right)$$

$$= 4\left(\frac{4x^2-x}{5x^3-2}\right)^3\left(\frac{(5x^3-2)(8x-1)-(4x^2-x)(15x^2-0)}{(5x^3-2)^2}\right)$$

$$= \frac{4(4x^2-x)(-20x^4+10x^3-16x+2)}{(5x3-2)^5}$$

$$= \frac{-8(4x^2-x)(10x^4-5x^3+8x-1)}{(5x3-2)^5}.$$

ตัวอย่าง 3.22 กำหนดให้ $f(x) = \frac{1}{\sqrt{2x^2 + x}}$, $x \neq 0, -\frac{1}{2}$ จงหาค่าของ $f'(1)$

วิธีทำ จาก $f(x) = (2x^2 + x)^{-1/2}$

เพราะฉะนั้น $f'(x) = \frac{d}{dx}(2x^2 + x)^{-1/2}$

$$= -\frac{1}{2}(2x^2 + x)^{-3/2}\frac{d}{dx}(2x^2 + x)$$

$$= -\frac{1}{2}(2x^2 + x)^{-3/2}(4x + 1)$$

$$= \frac{-(4x + 1)}{2(2x^2 + x)^{3/2}}$$

$$f'(1) = -\frac{(4(1) + 1)}{2(2(1)^2 + 1)^{3/2}}$$

$$\frac{-5}{2(x)^{\frac{3}{2}}}$$

$$\frac{-5}{6\sqrt{3}}$$

$$\frac{-5\sqrt{3}}{18}$$

ตัวอย่าง 3.23 จงหาอนุพันธ์ของ f(x) เมื่อกำหนดให้ $f(x) = (x^2 + 1)^3 (x^3 - 1)^2$

วิธีทำ จาก $f(x) = (x^2 + 1)^3 3(x^3 - 1)^2$

$$\frac{d}{dx} f(x) = (x^2 + 1)^3 \frac{d}{dx}(x^3 - 1)^2 + (x^3 \quad 1)^2 \frac{d}{dx}(x^2 + 1)'$$

$$= (x^2 + 1)^3 [2(x^3 - 1) \frac{d}{dx}(x^3 - 1)] +$$

$$(x^3 - 1)^2 \; 3(x^2 + 1)^2 \frac{d}{dx}(x^2 + 1)^2$$

$$= (x^2 + 1)" [2(x^3 \quad 1) (3x^2)] + (x^3 - 1)^2 [3(x^2 + 1)^2 (2x)]$$

$$= 6x^2 (x^2 + 1)^3 (x" - 1) + 6x (x^2 + 1)^2 (x^3 - 1)^2$$

$$= 6x(x^2 + 1)^2 (x^3 - 1) (2x^3 + x - 1)$$

ข้อสังเกต จากทฤษฎีบท 3.9 และบทแทรกจะสังเกตเห็นว่าในการหาอนุพันธ์ของ $[u(x)]^r$ เมื่อ r เป็นจำนวนตรรกยะนั้นต้องกำหนดให้ $u(x) > 0$ มิฉะนั้นอาจเกิดปัญหาขึ้นได้คือ

1) ถ้า $u(x) = 0$ เมื่อ $x = a$ แล้ว การหาอนุพันธ์ $[u(x)]^r$ ที่ $x = a$ จะเกิดการหารด้วย 0 ซึ่งจะกำหนดค่าอนุพันธ์ไม่ได้ เช่น

$$[u(x)]^r = \sqrt{2x - 1} = (2x - 1)^{1/2}$$

$$\frac{d}{dx}[u(x)]^r = \frac{1}{2}(2x - 1)^{-1/2} (2)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2x - 1}}$$ หาอนุพันธ์ที่ $x = \frac{1}{2}$ ไม่ได้

2) ถ้า $u(x) < 0$ เมื่อ $x = a$ ค่าของ $[u(a)]^r$ เมื่อ r เป็นจำนวนตรรกยะ อาจเป็นจำนวนเชิงซ้อน ซึ่งยังไม่ศึกษาในขั้นนี้ เช่น

$$[u(x)]^r = \sqrt{2x - 1} \quad \text{เมื่อ } x \leqslant 0$$

สำหรับกรณี $[u(x)]^r$ เมื่อ r เป็นเลขอตรรกยะ เช่น $(2x-1)^{\sqrt{2}}$ จะสามารถหาอนุพันธ์ได้โดยใช้ลอการิธึม

หมายเหตุ จากทฤษฎีบทที่กล่าวมาแล้วทั้งหมด พอที่จะรวบรวมเป็นสูตรของการหาอนุพันธ์ได้ดังนี้

	เขียนแบบเชิงอนุพันธ์
1. $\frac{dc}{dx} = 0$	1.' $dc = 0$
2. $\frac{dx}{dx} = 1$	
3. $\frac{d}{dx}(u+v) = \frac{du}{dx} + \frac{dv}{dx}$	3.' $d(u+v) = du + dv$
4. $\frac{d}{dx}(uv) = u\frac{dv}{dx} + v\frac{du}{dx}$	4.' $d(uv) = udv + vdu$
5. $\frac{d}{dx}cu = \frac{cdu}{dx}$	5.' $dcu = cdu$
6. $\frac{d}{dx}\left(\frac{u}{v}\right) = \frac{v\frac{du}{dx} - u\frac{dv}{dx}}{v^2}$	6.' $d\left(\frac{u}{v}\right) = \frac{vdu - udv}{v^2}$
7. $\frac{d}{dx}u^n = nu^{n-1}\frac{du}{dx}$	7.' $du^n = nu^{n-1}du$

สำหรับการเขียนแบบเชิงอนุพันธ์เราจะใช้ประโยชน์ในเรื่องการอินทิเกรตต่อไปในบทที่ 5

แบบฝึกหัด 3.5

จงหาอนุพันธ์ของฟังก์ชันต่อไปนี้

1. $y = x^4 + 10x^2 + 7x - 4$
2. $f(x) = x^8 + 2x^6 - 4x' + 6x + 9$
3. $y = x^2(x^3 - 1)$
4. $Y = (x-4)(x^2+5)$
5. $y = ax^2 + bx + c$. a,b,c เป็นค่าคงที่
6. $f(s) = (s-1)^4(s+2)^3$
7. $Y = (3x2+1)^2(x'+2)^{-4}$
8. $f(x) = \left(\frac{x^3-1}{x^3+1}\right)^2$

9. $s = (t^2 - t)^{-2}$

10. $s = (t + t^{-1})^2$

11. $g(x) = \dfrac{3}{x^2} + \dfrac{5}{x^5}$

12. $f(u) = 5u + \dfrac{1}{\sqrt{u}} + \sqrt[3]{u^5}$

13. $y = (x^2 + 1)' \; (x^3 - 2x + 1)'$

14. $y = \dfrac{(x^2 - 1)'}{(x^2 + 1)^2}$

15. $f(x) = \dfrac{ax^2 + b}{\sqrt{a + x}}$

จงหา $f'(x_0)$ เมื่อกำหนด x_0 มาให้

16. $f(x) = (2x^2 + 3x + 4)^{3/5}$, $x_0 = 1$

17. $f(x) = x^2\sqrt{1 + x^2}$, $x_0 = 2$

18. $f(x) = \left(\dfrac{x - 3}{x + 3}\right)^3$, $x_0 = 4$

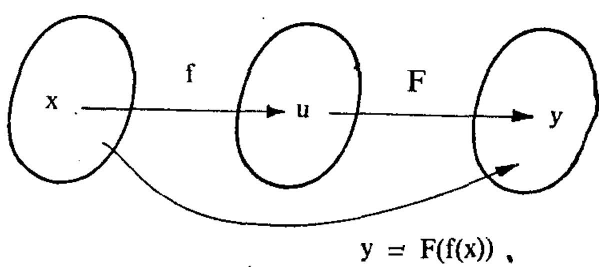
19. $f(x) = \dfrac{2x - 1}{\sqrt{1 + x^2}}$, $x_0 = 0$

20. จงหาอนุพันธ์ของ $f(x) = 2x^2\sqrt{3 - 2x}$ ที่ $x = 0$ และ พิจารณาดูว่า $f(x)$ หาอนุพันธ์ที่จุดใดไม่ได้

3.6 อนุพันธ์ของฟังก์ชันประกอบ (Derivative of a composite function)

กำหนด u เป็นฟังก์ชันของ x นิยามโดย $u = f(x)$ และ y เป็นฟังก์ชันของ u นิยามโดย $y = F(u)$ แล้ว y จะเป็นฟังก์ชันของ x ด้วยนิยามโดย

$$y = F(f(x))$$



รูป 3.9

นั่นคือ y เป็นฟังก์ชันประกอบของ F และ f ดังบทนิยาม 1.36

ทฤษฎีบท 3.10 (ทฤษฎีบทพื้นฐานสำหรับอนุพันธ์)

ให้ F เป็นฟังก์ชันที่มีอนุพันธ์ที่ u และให้ G เป็นฟังก์ชัน นิยามโดย

$$G(h) = \begin{cases} \dfrac{F(u+h) - F(u)}{h} - F'(u) & \text{ถ้า } h \neq 0 \\ 0 & \text{ถ้า } h = 0 \end{cases}$$

แล้ว G จะต่อเนื่องที่ $h = 0$ และ

$$F(u+h) - F(u) = /F'(u) + G(h)/\ h$$

พิสูจน์ จากนิยามของอนุพันธ์จะได้ว่า

$$\operatorname{Pim}_{h - 0} \frac{F(u+h) - F(u)}{h} = F'(u)$$

นั่นคือ $\lim_{h \to 0} G(h) = \lim_{h \to 0} \left(\frac{F(u+h) - F(u)}{h} \quad F'(u) \right)$

$$= \operatorname{Pim}_{h \to 0} \frac{F(u+h) - F(u)}{h} - F'(u)$$

$$= 0$$

ดังนั้น G(h) ต่อเนื่องที่ $h = 0$

เมื่อ $h = 0$ เห็นได้ชัดว่า

$$F(u+h) - F(u) = |F'(u) + G(h)|h$$

และเมื่อ $h \neq 0$ จากนิยามของ G(h) เราได้ว่า สมการนี้เป็นจริงเช่นกัน

นั่นคือ $F(u+h) - F(u) = |F'(u) + G(h)|h$

ทฤษฎีบท 3.11 กฎลูกโซ่ (Chain Rule)

ถ้า $y = F(u)$ เป็นฟังก์ชันที่มีอนุพันธ์ที่ u และ $u = f(x)$ เป็นฟังก์ชันที่มีอนุพันธ์ที่ x แล้ว $y = F(f(x))$ จะเป็นฟังก์ชันที่มีอนุพันธ์ที่ x และ

$$\frac{dy}{dx} = F'(u)\, f'(x)$$

หรือเขียนอีกแบบหนึ่งคือ $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{dy}{du} \cdot \dfrac{du}{dx}$

พิสูจน์ จาก $y = F(f(x))$

เพราะฉะนั้น $\Delta y = F(f(x + \Delta x)) - F(f(x))$

$= F(f(x + \Delta x) - f(x) + f(x)) - F(f(x))$

เพราะว่า $\Delta u = f(x + \Delta x) - f(x)$

เพราะฉะนั้น $\Delta y = F(u + \Delta u) - F(u)$

จากทฤษฎีบท 3.10

$$\Delta y = [F'(u) + G(\Delta u)]\,\Delta u$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = [F'(u) + G(\Delta u)]\,\frac{\Delta u}{\Delta x}$$

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} [F'(u) + G(\Delta u)]\,\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta u}{\Delta x}$$

$$y' = [F'(u) + 0]\,u'(x)$$

$$= F'(f(x))\,f'(x)$$

หรือ $\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx}$

ทฤษฎีบท 3.12 ให้ $y = f(x)$ เป็นฟังก์ชันต่อเนื่อง และมีฟังก์ชันผกผัน ซึ่งต่อเนื่องบนโดเมน $[a,b]$ โดยที่ $x = f^{-1}(y) = g(y)$ แล้ว $g'(y) = \frac{1}{f'(x)}$ หรือ $\frac{dx}{dy} = \frac{1}{\frac{dy}{dx}}$ เมื่อ $f'(x)$ หาค่าได้ และ $f'(x) \neq 0$

พิสูจน์ จาก $y = f(x)$

จะได้ว่า $x = f^{-1}(y) = g(y)$

$x = g(f(x))$

หาอนุพันธ์เทียบกับ x โดยอาศัยทฤษฎีบท 3.11

$$\frac{dx}{dx} = \frac{d}{dx}(g(f(x))$$

$$1 = g'(f(x)\,f'(x)$$

นั่นคือ $g'(y) = \frac{1}{f'(x)}$

หรือ $\frac{dx}{dy} = \frac{1}{\frac{dy}{dx}}$

ตัวอย่าง 3.24 กำหนดให้ $y = u^5$ และ $u = 3x^2 - 2x + 5$ จงหา $\frac{dy}{dx}$

วิธีทำ จาก $y = u^5$ จะได้ $\frac{dy}{du} = 5u^4$

และจาก $u = 3x^2 - 2x + 5$ จะได้ $\frac{du}{dx} = 6x - 2$

จาก $\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx}$

$= (5u^4)(6x - 2)$

$= 5(3x^2 - 2x + 5)^4 (6x - 2)$

ดังนั้น $\frac{dy}{dx} = 10(3x - 1)(3x^2 - 2x + 5)$

ตัวอย่าง 3.25 กำหนดให้ $y = x^4 - 3x^2 + 5x$ จงหา $\frac{dx}{dy}$

วิธีทำ จาก $y = x^4 - 3x^2 + 5x$

$\frac{dy}{dx} = 4x3 - 6x + 5$

am $\frac{dx}{dy} = \frac{1}{\frac{dy}{dx}}$

$= \frac{1}{4x^3 - 6x + 5}$

ตัวอย่าง 3.26 จงใช้กฎลูกโซ่หาอนุพันธ์ของ $y = \frac{1}{(6x^3 + 5x^2 - 3x)^6}$

9 4 a r m ให้ $y = \frac{1}{u^6}$ โดยที่ $u = 6x^3 + 5x^2 - 3x$

เพราะฉะนั้น $\frac{dy}{du} = \frac{du^{-6}}{du}$

$= x - 6u^{-7}$

และ $\frac{du}{dx} = \frac{d}{dx}(6x^3 + 5x^2 - 3x)$

$= 18x^2 + 10x - 3$

ดังนั้น $\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx}$

$$= \left(\frac{-6}{u^7}\right)(18x^2 + 10x - 3)$$

$$= \frac{-6(18x^2 + 10x - 3)}{(6x^3 + 5x^2 - 3x)^7}$$

แบบฝึกหัด 3.6

1. จงหา $\frac{dy}{dx}$ เมื่อ กำหนดให้

   (1) $y = 2u$, $u = 3x$

   (2) $y = 2t^2 + 3t$, $t = 2x$

   (3) $y = u^3 + 2u^2$, $u = x^2 - 1$

   (4) $y = 5t^2 + 6t + 1$, $t = 2x + 1$

2. จงหา $\frac{dx}{dy}$ เมื่อกำหนดให้

   (1) $y = 2x - 3$

   (2) $y = 6\sqrt{x - 1}$

   (3) $y = 2x^3 - x^2 + 6x$

   (4) $y = x^5 + x^4 + x^3 + x^2 + x + 1$

3. จงหาอนุพันธ์ของฟังก์ชันที่กำหนดให้ต่อไปนี้ โดยใช้กฎลูกโซ่

   (1) $f(x) = (4x^2 \quad 5)^{[illegible]}$

   (2) $f(x) \ (x^3 + x \quad \frac{1}{x})^{-2}$

4. จงหา ix เมื่อกำหนด $y = \frac{u^2}{u^2 + 1}$. $u = \sqrt{2x + 1}$

5. จงหา $\frac{dy}{dt}$ เมื่อกำหนดให้ $y = 3u^2 + 1$, $u = \sqrt{2x - 3}$, $x = 3t - 1$

3.7 อนุพันธ์ของฟังก์ชันแฝง (Derivative of implicit Function)

สำหรับฟังก์ชันที่กำหนดโดยสมการที่แสดงถึงความสัมพันธ์ระหว่าง x กับ y นั้น พบว่า บางฟังก์ชันสามารถเขียนแสดงค่า y ในเทอมของ x ได้ง่าย เช่น $x^2 + y^2 = 4$ แล้วจะได้ $y = \pm\sqrt{4 - x^2}$ แต่บางฟังก์ชันไม่สามารถเขียนค่าของ y ในเทอมของ x ได้ เช่น $x^2 + 3xy + y^2 = 4$ เป็นต้น กล่าวคือ ฟังก์ชันที่มีลักษณะแบบแรกนั้น สามารถเขียนอยู่ในรูป $y = f(x)$ ได้ และจะเรียก y ว่าเป็น

ฟังก์ชันชัดเจน (explicit function) ของ x ส่วนฟังก์ชันแบบหลังนั้น เรียกว่า ฟังก์ชันแฝง (implicit-function) ของ x

การหาอนุพันธ์ของฟังก์ชันแฝงนั้น สามารถหาได้โดยการหาอนุพันธ์ของแต่ละข้างของสมการเทียบกับ x โดยคิดว่า y เป็นฟังก์ชันของ x

ตัวอย่าง 3.27 จงหา $\frac{dy}{dx}$ เมื่อกำหนด $x^2 + y^2 = 4$

วิธีทำ จาก $x^2 + y^2 = 4$

หาอนุพันธ์เทียบกับ x ทั้งสองข้าง จะได้

$$\frac{d}{dx}(x^2 + y^2) = \frac{d4}{dx}$$

$$2x + 2y\frac{dy}{dx} = 0$$

$$2y\frac{dy}{dx} = -2x$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-x}{y}$$

ตัวอย่าง 3.28 กำหนดให้ $x^2 + x^3y + y^5 = 3$ จงหา $\frac{dy}{dx}$

วิธีทำ จาก $x^2 + x^3y + y^5 = 3$

หาอนุพันธ์เทียบกับ x ทั้งสองข้าง

$$2x + x^3\frac{dy}{dx} + 3x^2y + 5y^4\frac{dy}{dx} = 0$$

$$\frac{dy}{dx}(x^3 + 5y^4) = -2x - 3x^2y$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-(2x + 3x^2y)}{x^3 + 5y^4}$$

ตัวอย่าง 3.29 จงหาความชันของเส้นสัมผัสเส้นโค้ง $x^2 + x^3y + y^5 = 3$ ที่จุด (2,1)

วิธีทำ จากตัวอย่าง 3.28 จะได้ว่า

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-(2x + 3x^2y)}{x^3 + 5y^4}$$ ซึ่งเป็นความชันของเส้นสัมผัสเส้นโค้ง

$x^2 + x^3y + y^5 = 3$ ที่จุด (x,y) ใด ๆ

ดังนั้น ความชันของเส้นสัมผัสเส้นโค้ง ที่จุด (2,1) คือ

$$\frac{dy}{dx}\Big|_{x=1, y=2} = \frac{-(2(2) + 3(2)^2 (1))}{2^3 + 5(1)^4}$$

$$\frac{16}{13}$$

แบบฝึกหัด 3.7

จงหา $\frac{dy}{dx}$ ของฟังก์ชันที่กำหนดให้ต่อไปนี้

1. $x^3 + 3y^3 = 3$
2. $x^3 + 6xy + 4y^2 = 5$
3. $y + 2\sqrt{xy} + x^4 = 6$
4. $xy^3 + yx^3 - 4 = 0$
5. $\frac{y}{x + y} = 3$
6. $xy = 3$
7. $y^3 - 3y + 4ax^2 = 0$, a เป็นค่าคงที่
8. $\sqrt{x} + \sqrt{y} = \sqrt{a}$
9. $x\sqrt{1 + y} + y\sqrt{1 + x} = 0$
10. $\sqrt{x}y + y^2 = x$
11. $x = \frac{x + y}{X - Y}$
12. $xy(x + y) = 10$

จงหาความชันของเส้นโค้ง ที่จุด (x_0, y_0) ที่กำหนดให้

13. $x^2 - xy + y^3 = -5$ ที่จุด $(1, -2)$
14. $xy^2 - y = x + 4$ ที่จุด $(0, -4)$
15. $x - \sqrt{x}y = 2y$ ที่จุด $(8, 2)$

3.8 อนุพันธ์อันดับสูงกว่า 1

สำหรับฟังก์ชัน $y = f(x)$ ใด ๆ เราเรียก y' หรือ $f'(x)$ หรือ $\frac{dy}{dx}$ ว่าเป็นอนุพันธ์อันดับที่ 1 ของ f(x)ซึ่งจะเขียนว่า$f'(x)$ ถ้า $f'(x)$ มีอนุพันธ์ที่ x แล้วเรียกอนุพันธ์ของ $f'(x)$ ว่า อนุพันธ์อันดับที่ 2 ของ f(x) แทนด้วยสัญลักษณ์ $f''(x)$ หรือ y'' หรือ $\frac{d^2y}{dx^2}$ และถ้า $f''(x)$ มีอนุพันธ์ที่ x

แล้ว เรียกอนุพันธ์ของ $f''(x)$ ว่า อนุพันธ์อันดับที่ 3 ของ $f(x)$ แทนด้วยสัญลักษณ์ $f'''(x)$ หรือ y''' หรือ $\frac{d^3y}{dx^3}$

ในทำนองเดียวกัน ผลลัพธ์จากการหาอนุพันธ์ n ครั้ง ติดต่อกันไป เมื่อ n เป็นจำนวนเต็มบวก ก็จะเรียกว่าอนุพันธ์อันดับที่ n ของ $f(x)$ ซึ่งเขียนแทนด้วย $f^{(n)}(x)$ หรือ $y^{(n)}$ หรือ $\frac{d^ny}{dx^n}$

ตัวอย่าง 3.30 ถ้า $f(x) = x3$ จงหา $f^{(5)}(x)$

วิธีทำ จาก $f(x) = x3$

จะได้

$$
\begin{aligned}
f'(x) &= 5x^4 \\
f''(x) &= 20x3 \\
f'''(x) &= 60x^2 \\
f^{(4)}(x) &= 120x \\
f^{(5)}(x) &= 120
\end{aligned}
$$

ตัวอย่าง 3.31 กำหนดให้ $y = x^4 - 4x3 - 2x$ จงหา y', y'', y'''

วิธีทำ จาก $y = x^4 - 4x3 - 2x$

จะได้

$$
\begin{aligned}
y' &= 4x3 - 12x^2 - 2 \\
y'' &= 12x^2 - 24x \\
y''' &= 24x - 24
\end{aligned}
$$

ตัวอย่าง 3.32 ถ้า $x^2 + y^2 = 3$ จงหา $\frac{d^2y}{dx^2}$

วิธีทำ จาก $x^2 + y^2 = 3$

$$
\begin{aligned}
2x + 2y\frac{dy}{dx} &= 0 \\
\frac{dy}{dx} &= -\frac{x}{y} \\
\frac{d^2y}{dx^2} &= -\left(\frac{y\frac{dx}{dx} - x\frac{dy}{dx}}{y^2}\right) \\
&= -\left(\frac{y - x\frac{dy}{dx}}{y^2}\right)
\end{aligned}
$$

แทนค่า $\frac{dy}{dx}$ ด้วย $-\frac{x}{Y}$

เพราะฉะนั้น $\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{-(y - x(\frac{-x}{Y}))}{y^2}$

$= -(\frac{y^2 + x^2}{y^3})$

ตัวอย่าง 3.33 จงหาค่า n ซึ่งเป็นจำนวนเต็มบวกที่น้อยที่สุดที่ทำให้ $\frac{d^ny}{dx^n} = 0$ **เมื่อกำหนด**

$y = 4x' + 3x^2 - 2x + 5$

วิธีทำ จาก $y = 4x3 + 3x^2 - 2x + 5$

$$\frac{dy}{dx} = 12x^2 + 6x - 2$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = 24x + 6$$

$$\frac{d^3y}{dx^3} = 24$$

$$\frac{d^4y}{dx^4} = 0$$

ดังนั้น n ที่มีค่าน้อยที่สุดที่ทำให้ $\frac{d^ny}{dx^n} = 0$ คือ 4

ข้อสังเกต จากตัวอย่าง 3.33 $\frac{d^ny}{dx^n} = 0$ สำหรับทุก ๆ $n \geqslant 4$

แบบฝึกหัด 3.8

จงหาอนุพันธ์อันดับที่ 2 และอนุพันธ์อันดับที่ 3 ของฟังก์ชันต่อไปนี้

1. $f(x) = x^5 - x^3$
2. $f(x) = \frac{x}{x^2 - 5}$
3. $f(x) = (x - x^2)^8$
4. $f(x) = 2(\sqrt{x} - \frac{1}{\sqrt{x}})$

5. $f(S) = x^2\sqrt{x} + \frac{3}{2}x + 1$

จงหา $\frac{d^2y}{dx^2}$ ของฟังก์ชันต่อไปนี้

6. $x^2 - 5y^2 = 8$

7. $x + xy + y = 4$

8. $y^2 + 3xy = 20$

9. $x^3y + xy' = 5X$

10. $xy + x^2y^2 + y = 5$

11. จงหาอนุพันธ์อันดับที่ 3 ของ $y = \frac{3x^2 + 2x}{x + 1}$

12. จงหาอนุพันธ์อันดับที่ 4 ของ $y = \sqrt{3x - 1}$

13. กำหนดให้ $y = x^4 - 4x^3 + 4x^2 + 8$ จงหาค่า x ที่ทำให้ $\frac{dy}{dx} = 0$

14. จงหาอนุพันธ์อันดับที่ 3 $(\frac{d^3y}{dx^3})$ ของ $x^2 - y^2 = 4$

15. จงหา n ซึ่ง $\frac{d^ny}{dx^n} = 0$ เมื่อกำหนด $y = 3x^2 - 4x^3 + 7x^4 - 11x^5$

3.9 ทฤษฎีบทของอนุพันธ์ที่ควรทราบ

ในตอนต้นจะกล่าวถึงทฤษฎีบทของอนุพันธ์เกี่ยวกับค่าสูงสุด และค่าต่ำสุดของฟังก์ชัน ซึ่งก่อนจะ พิสูจน์ทฤษฎีบท จำเป็นจะต้องทราบบทนิยามต่อไปนี้เสียก่อน

บทนิยาม 3.3 สำหรับฟังก์ชัน f ใด ๆ ถ้า $f(a) \geqslant f(a+h)$ สำหรับ h ที่มีค่าเข้าใกล้ศูนย์แล้ว เรียก f ว่ามีค่าสูงสุดสัมพัทธ์ (relative maximum) ที่ $x = a$

แต่ถ้า $f(a) \geqslant f(x)$ สำหรับทุกค่า x แล้วจะเรียก f ว่ามีค่าสูงสุดสัมบูรณ์ (absolute-maximum) ที่ $x = a$

บทนิยาม 3.4 สำหรับฟังก์ชัน f ใด ๆ ถ้า $f(b) \leqslant f(b+h)$ สำหรับ h ที่มีค่าเข้าใกล้ศูนย์แล้ว เรียก f ว่ามีค่าต่ำสุดสัมพัทธ์ (relative minimum) ที่ $x = b$

แต่ถ้า $f(b) \leqslant f(x)$ สำหรับทุกค่า x แล้วจะเรียก f ว่ามีค่าต่ำสุดสัมบูรณ์ (absolute-minimum) ที่ $x = b$

ทฤษฎีบท 3.13 ให้ $f(x)$ หาค่าได้สำหรับ $a \leqslant x \leqslant b$ และ f มีค่าสูงสุดสัมพัทธ์ หรือต่ำสุดสัมพัทธ์ที่ $x = c$ เมื่อ $a < c < b$ ถ้า $f'(x)$ หาค่าได้ที่ $x = c$ แล้ว $f'(c) = 0$

พิสูจน์ ในที่นี้จะพิสูจน์เฉพาะกรณีที่ f มีค่าต่ำสุดสัมพัทธ์ที่ $x = c$ สำหรับกรณี f มีค่าสูงสุดสัมพัทธ์ ที่ $x = c$ ใช้วิธีการพิสูจน์แบบเดียวกัน

เพราะว่า f มีค่าต่ำสุดสัมพัทธ์ ที่ $x = c$

นั่นคือ $f(c) \leqslant f(c + h)$ สำหรับทุก ๆ ค่า $h \to 0$

เพราะว่า $f'(c) = \lim_{h \to 0} \dfrac{f(c + h) - f(c)}{h}$

กรณีที่ 1 เมื่อ $h > 0$ จะได้ว่า $\dfrac{f(c + h) - f(c)}{h} \geqslant 0$

ดังนั้น $f'(c) \geqslant 0$

กรณีที่ 2 เมื่อ $h < 0$ จะได้ว่า $\dfrac{f(c + h) - f(c)}{h} \leqslant 0$

ดังนั้น $f'(c) \leqslant 0$

เนื่องจาก $f'(x)$ มีค่าที่ $x = c$ ดังนั้น ค่าลิมิตในกรณีที่ 1 และกรณีที่ 2 มีค่าเท่ากัน ซึ่งค่าที่เป็นไปได้ คือ

$$f'(c) = 0$$

ข้อสังเกต ทฤษฎีบท 3.13 นี้ ไม่ได้บอกว่ามีอะไรเกิดขึ้น ถ้ามีค่าสูงสุด หรือต่ำสุดที่ $x = c$ เมื่ออนุพันธ์หาค่าไม่ได้ และไม่ได้บอกว่าเมื่ออนุพันธ์เป็นศูนย์แล้วจะต้องเกิดค่าสูงสุด หรือต่ำสุดเสมอไป

ทฤษฎีบท 3.14 ถ้าฟังก์ชัน f มีอนุพันธ์ที่จุด x แล้ว f ย่อมมีความต่อเนื่องที่ x

พิสูจน์ ให้ f มีอนุพันธ์ที่ $x = x_0$ ดังนั้น

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = f'(x_0)$$

พิจารณา
$$\begin{aligned}
\lim_{x \to x_0} [f(x) - f(x_0)] &= \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \cdot (x - x_0) \\
&= \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \lim_{x \to x_0} x - x_0 \\
&= f'x) \cdot 0 \\
&= 0
\end{aligned}$$

เพราะฉะนั้น $\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$

f ต่อเนื่องที่ $x = x_0$

หมายเหตุ ฟังก์ชันที่มีความต่อเนื่องที่จุด x ไม่จำเป็นต้องมีอนุพันธ์ที่จุด x เสมอไป เช่น $f(x) = |x|$ $f(x)$ มีความต่อเนื่องที่ $x = 0$ แต่ $f(x)$ หาอนุพันธ์ที่ $x = 0$ ไม่ได้ เพราะว่า

$$f'(0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(0+h) - f(0)}{h}$$

$$= \text{Pim}_{h \to 0} \frac{|h| - 0}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{|h|}{h}$$

ซึ่งค่า $\lim_{h \to 0} \frac{|h|}{h}$ หาค่าไม่ได้ (จากเรื่องลิมิตและความต่อเนื่อง) เพราะว่า $\lim_{h \to 0^+} \frac{|h|}{h} = 1$ และ $\lim_{h \to 0^-} \frac{|h|}{h} = -1$

ทฤษฎีบท 3.15 ทฤษฎีบทของ โรลล์ (Roll's theorem) ให้ฟังก์ชัน f มีความต่อเนื่องบนช่วงปิด $[a,b]$ และหาอนุพันธ์ได้ในช่วงเปิด (a,b) ถ้า $f(a) = f(b)$ แล้ว มีจำนวนจริง- $c \in (a,b)$ อย่างน้อยหนึ่งจำนวน ซึ่ง $f'(c) = 0$

พิสูจน์ กรณีที่ 1 ถ้า f เป็นฟังก์ชันคงที่ (constant function) บนช่วง $[a,b]$

ดังนั้น $f(x) = 0$ สำหรับทุก ๆ ค่า $x \in (a,b)$

กรณีที่ 2 ถ้า f เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องบนช่วง $[a,b]$

ดังนั้นจะมีบางค่า x ในช่วง (a,b) ซึ่ง $f(x) > f(a)$ หรือ $f(x) < f(a)$

เพราะฉะนั้น f ต้องมีค่าสูงสุด หรือ ต่ำสุด บน (a,b) โดยใช้ทฤษฎีบท 3.13 จะได้ $c \in (a,b)$ ซึ่ง $f'(c) = 0$

ข้อสังเกต ระหว่าง a กับ b อาจมีอนุพันธ์เป็นศูนย์มากกว่าหนึ่งค่าก็ได้

ตัวอย่าง 3.34 จงแสดงว่า $f(x) = x^3 - 16x$ สอดคล้องกับทฤษฎีบทของโรลล์ บนช่วงปิด $[-4,4]$ และหาว่าอนุพันธ์ของ $f(x)$ มีค่าเท่ากับศูนย์ที่จุดใดบ้าง

วิธีทำ จาก $f(x) = x^3 - 16x$

จะได้ว่า $f(-4) = (-4)^3 - 16(-4) = 0$

$f(4) = (4)^3 - 16(4) = 0$

และเพราะว่า $f'(x) = 3x^2 - 16$ หาค่าได้สำหรับทุก ๆ ค่า $x \in [-4,4]$

ดังนั้น $f(x)$ มีความต่อเนื่องบน $[-4,4]$ และ หาอนุพันธ์ได้บน $(-4,4)$

เพราะฉะนั้น f สอดคล้องกับทฤษฎีบทของโรลล์ ในช่วงปิด $[-4,4]$

จึงต้องมี $x = c$ อย่างน้อย 1 ค่า ซึ่ง $x \in (-4,4)$ ที่ทำให้ $f'(c) = 0$

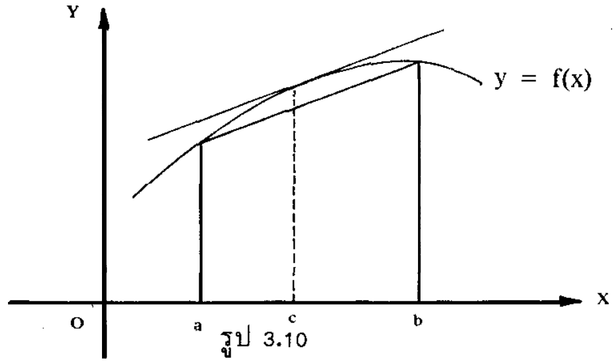
$$f'(c) = 3c^2 - 16 = 0$$

$$c = \frac{\pm 4}{\sqrt{3}}$$

เพราะฉะนั้น อนุพันธ์มีค่าเท่ากับศูนย์ที่ $x = \pm \frac{4}{\sqrt{3}}$

ทฤษฎีบท 3.16 ทฤษฎีบทค่ากลาง (Mean Value Theorem) ฟังก์ชัน f มีความต่อเนื่องบนช่วง $[a,b]$ และมีอนุพันธ์บน (a,b) แล้วจะมี $c \in (a,b)$ ซึ่ง

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$



รูป 3.10

พิสูจน์ สร้างฟังก์ชัน g บน $[a,b]$ โดยกำหนดให้

$$g(x) = f(x) - \frac{[f(b) - f(a)]}{b - a}(x - a)$$

จะเห็นว่า g มีอนุพันธ์บน (a,b) และมีความต่อเนื่องบน $[a,b]$

และ $g(a) = g(b) = f(a)$

ดังนั้น g เป็นฟังก์ชันที่มีคุณสมบัติตามทฤษฎีบทของโรลล์ ดังนั้นจะต้องมีจุด $c \in (a,b)$ ที่ทำให้ $g'(c) = 0$

$$g'(x) = f'(x) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

เพราะฉะนั้น $g'(c) = f'(c) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a} = 0$

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

ตัวอย่าง 3.35 ให้ $f(x) = x^3 - 5x^2 - 3x$ จงแสดงว่าข้อสมมุติของทฤษฎีบทค่ากลางสอดคล้อง

สำหรับ $a = 1,\ b = 3$ **และจงหาค่า** $c \in (1,3)\ \&\ f'(c) = \dfrac{f(b) - f(a)}{b - a}$

วิธีทำ **จาก** $f(x) = x^3 - 5x^2 - 3x$

$f'(x) = 3x^2 - 10x - 3$ หาค่าได้ทุกค่าของ x

ดังนั้น $f'(x)$ มีอนุพันธ์ทุกค่า x และมีความต่อเนื่องทุกค่าของ x **ด้วย**

เพราะว่า $f(1) = -7,\ f(3) = -27$

$$\frac{f(3) - f(1)}{3 - 1} = \frac{-27 - (-7)}{3 - 1}$$

$$= \frac{-20}{2}$$

$$= -10$$

ให้ $f'(c) = -10$ **ดังนั้น**

$$3c^2 - 10c - 3 = -10$$

$$3c^2 - 10c + 7 = 0$$

$$(3c - 7)(c - 1) = 0$$

$$c = \frac{7}{3},\ 1$$

แต่ $1 \notin (1,3)$ ดังนั้น คำตอบที่เป็นไปได้ คือ $c = \dfrac{7}{3}$

แบบฝึกหัด ๓.๙

1. สำหรับ $f(x) = 3x^2 + 6x$ บนช่วง $[-3,0]$ จงหาจุดต่ำสุด หรือสูงสุดของ f

2. จงแสดงว่าข้อต่อไปนี้สอดคล้องกับทฤษฎีบทของโรลล์ และหาค่า c บนช่วงที่กำหนดที่สอดคล้องกับทฤษฎีบทของโรลล์

   1) $f(x) = 2x(x - 1)$, $[0,1]$

   2) $f(x) = x^4 - 2x^2 - 8$, $[-2,2]$

3. สำหรับแต่ละ f(x) ต่อไปนี้ จงแสดงว่าสอดคล้องกับข้อสมมุติของทฤษฎีบทค่ากลางบนช่วงที่กำหนดให้ พร้อมทั้งหาค่า c ที่สอดคล้องกับทฤษฎีบทด้วย

   1) $f(x) = x^2 + 2x - 1$, $[0,1]$

   2) $f(x) = x^{2/3}$, $[0,1]$

   3) $f(x) = \dfrac{x^2 - 3x - 4}{x + 5}$, $[-1,4]$