บทที่ 2
ลิมิต และ ความต่อเนื่อง
(Limit and Continuity)

2.1 ความหมายของลิมิต และบทนิยามของลิมิต

ในการศึกษาเกี่ยวกับลิมิตของฟังก์ชันมีข้อสังเกตว่าค่าลิมิตของฟังก์ชันนั้น แตกต่างกับค่าของฟังก์ชัน ตัวอย่างเช่น กำหนดให้

$$f(x) = x + 5$$

ค่าของฟังก์ชันที่ $x = 2$ คือ การแทนค่า $x = 2$ ลงในสมการที่กำหนดให้ หรือค่าของ $f(2)$-นั่นเอง

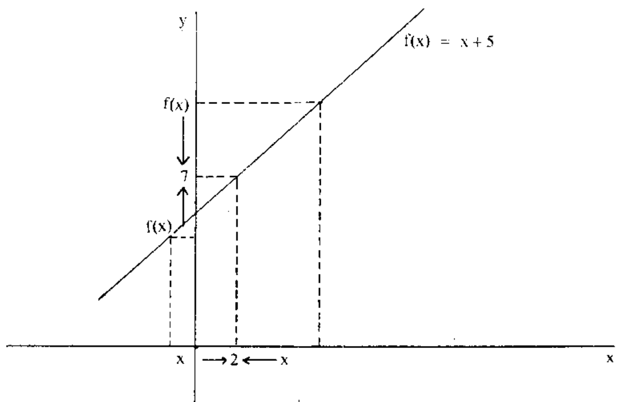
นั่นคือ $f(2) = 2 + 5$

$= 7$

แต่สำหรับลิมิตของฟังก์ชัน หมายถึง เมื่อ x เข้าใกล้ค่า ๆ หนึ่ง แล้ว $f(x)$ มีค่าเข้าใกล้ค่าคงตัว (constant) ค่าหนึ่ง ค่านั้นคือ ลิมิตของฟังก์ชัน $f(x)$ ตัวอย่างเช่น จาก $f(x) = x+5$ เมื่อ x มีค่าเข้าใกล้ 2 ค่าลิมิตของฟังก์ชันเขียนแทนด้วย

$$\lim_{x \to 2} f(x)$$

หรือ $$\lim_{x \to 2} x + 5$$



รูป 2.1

ถ้าพิจารณา กรณีที่ x เข้าใกล้ 2 จะพบว่ามีได้ 2 กรณี คือ x เข้าใกล้ 2 ทางมากกว่า 2 หรือทางขวามือ กับ x เข้าใกล้ 2 ทางน้อยกว่า หรือทางซ้ายมือ ซึ่งจากตารางข้างล่างนี้ จะเห็นลักษณะการเข้าใกล้ค่าคงที่ค่าหนึ่งของ f(x)

กรณีที่ x เข้าใกล้ 2 ทางขวามือ (ทางมากกว่า 2)

x	3	2.1	2.01	2.001	2.0001	...	$2+\frac{1}{10^n}$
f(x) = x + 5	8	7.1	7.01	7.001	7.0001	...	$7+\frac{1}{10^n}$

สำหรับทุกค่า n ซึ่งเป็นจำนวนเต็มบวก

กรณีที่ x เข้าใกล้ 2 ทางซ้ายมือ (ทางน้อยกว่า 2)

x	1	1.9	1.99	1.999	1.9999	...	$2-\frac{1}{10^n}$
f(x) = x + 5	6	6.9	6.99	6.999	6.9999	...	$7-\frac{1}{10^n}$

สำหรับทุกค่า n ซึ่งเป็นจำนวนเต็มบวก

จากตารางข้างบนทั้งสองตารางพบว่า เมื่อ x เข้าใกล้ 2 ไม่ว่าเป็นทางด้านมากกว่า 2 หรือน้อยกว่า 2 ก็ตาม ค่าของฟังก์ชัน f(x) = x + 5 จะมีค่าเข้าใกล้ 7 ในทางคณิตศาสตร์เรียกว่า ลิมิตของ x + 5 เมื่อ x เข้าใกล้ 2 มีค่าเท่ากับ 7 เขียนแทนด้วย

$$\lim_{x\to 2} x + 5 = 7$$

ข้อสังเกต 1 ค่าของ x ในการหาค่าฟังก์ชัน และลิมิตของฟังก์ชันต่างกันคือ ค่าของฟังก์ชันที่ x = a หาได้โดยการแทนค่า x เท่ากับ a ลงไปใน f(x) แต่ค่าลิมิตของฟังก์ชัน คือ ค่าที่ x เข้าใกล้ a ซึ่งมีทั้งทางบวก และทางลบ แต่ไม่ใช่แทนค่า x เท่ากับ a ลงไป

2. จากตัวอย่างข้างต้น $\lim_{x\to a} f(x) = f(a)$ แต่โดยทั่ว ๆ ไปแล้ว ค่าของฟังก์ชัน และค่าของลิมิตจะไม่เท่ากัน

3. ค่าลิมิตของ f(x) เมื่อ x เข้าใกล้ a อาจหาค่าไม่ได้

ตัวอย่าง 2.1 กำหนดให้ $f(x) = \dfrac{\sqrt{x} - 1}{x - 1}$

จงหาค่าของ (1) $\lim\limits_{x \to 1} f(x)$

และ (2) ค่าของ $f(x)$ เมื่อ $x = 1$

วิธีทำ 1) วิธีการหาค่าของ $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{\sqrt{x} - 1}{x - 1}$ เราพิจารณาค่าของ x **ที่เข้าใกล้ 1** **ทั้งในทางที่**มากกว่า 1 และทาง**ที่น้อย**กว่า 1 ว่า ทำให้ $\dfrac{\sqrt{x} - 1}{x - 1}$ **มี**ค่าเข้าใกล้ค่าใด

กรณีที่ x เข้าใกล้ 1 (ในทางที่มากกว่า 1)

x	1.1	1.01	0.001	0.0001
$\dfrac{\sqrt{x} - 1}{x - 1}$	0.04880848	0.4987562	0.499875	0.4999875

จะเห็นได้ว่า $\dfrac{\sqrt{x} - 1}{x - 1}$ เข้าใกล้ 0.5

กรณีที่ x เข้าใกล้ 1 (ในทางที่น้อยกว่า 1)

x	0.9	0.99	0.999	0.9999
$\dfrac{\sqrt{x} - 1}{x - 1}$	0.513167	0.5012562	0.500125	0.500013

จะเห็นได้ว่า $\dfrac{\sqrt{x} - 1}{x - 1}$ เข้าใกล้ 0.5

นั่นคือ $\dfrac{\sqrt{x} - 1}{x - 1}$ มีค่าเข้าใกล้ 0.5 ในขณะที่ x มีค่าเข้าใกล้ 1 ทั้งทางซ้าย และทางขวา

เพราะฉะนั้น $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{\sqrt{x} - 1}{x - 1} = 0.5$ หรือ $\dfrac{1}{2}$

2) ค่าของ $\dfrac{\sqrt{x} - 1}{x - 1}$ ที่ $x = 1$ คือ $\dfrac{\sqrt{1} - 1}{1 - 1} = \dfrac{0}{0}$

ซึ่งเป็นค่าที่ยังไม่ได้กำหนด

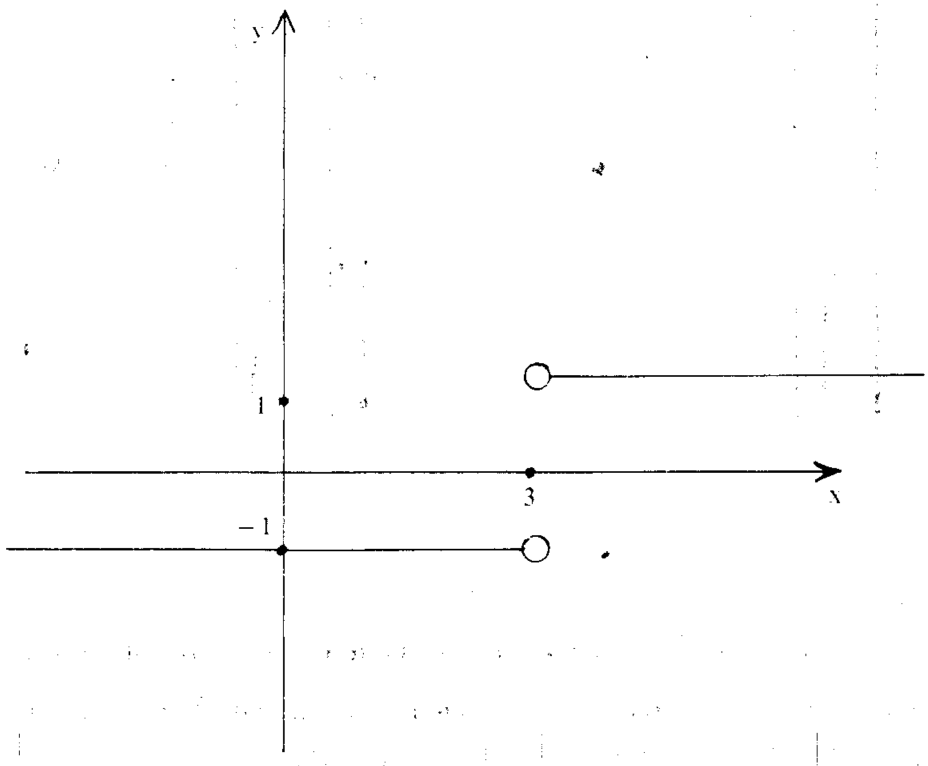
ดังนั้น f(1) หาค่าไม่ได้ #

ตัวอย่าง 2.2 กำหนด

$$f(x) = \begin{cases} -1 & x < 3 \\ 1 & x > 3 \end{cases}$$

จงพิจารณาค่าลิมิตของ f(x) เมื่อ x เข้าใกล้ 3

วิธีทำ



รูป 2.2

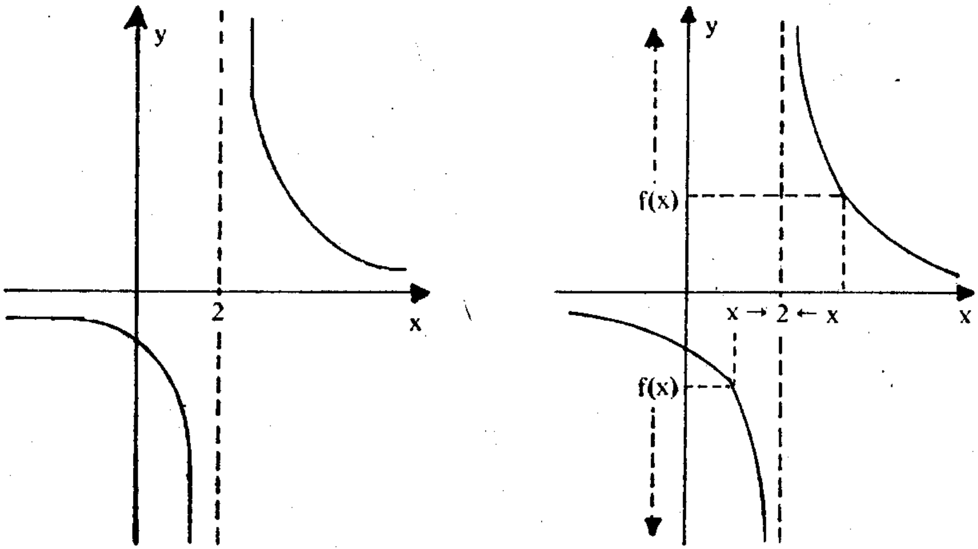
พิจารณาจากรูป 2.2 จะพบว่า ค่าของ f(x) เมื่อ x เข้าใกล้ 3 ทางซ้าย จะมีค่าเข้าใกล้ −1 ในขณะที่ค่าของ f(x) เมื่อ x มีค่าเข้าใกล้ 3 ทางขวา จะมีค่าเข้าใกล้ 1

ในกรณีดังกล่าวนี้เราเรียกว่าลิมิตของ f(x) เมื่อ x มีค่าเข้าใกล้ 3 หาค่าไม่ได้ #

ตัวอย่าง 2.3 กำหนด $f(x) = \frac{1}{x-2}$

จงพิจารณาค่าลิมิตของ $f(x)$ เมื่อ x เข้าใกล้ 2

วิธีทำ



รูป 2.3

จากรูป 2.3 จะพบว่า เมื่อ x เข้าใกล้ 2 ทางขวามือ $f(x)$ จะมีค่ามาก มากกว่าจำนวนจริงบวกทุกจำนวน และเมื่อ x เข้าใกล้ 2 ทางซ้ายมือ $f(x)$ จะมีค่าน้อยมาก น้อยกว่าจำนวนจริงลบทุกจำนวน นั่นคือ เมื่อ x มีค่าเข้าใกล้ 2 $f(x)$ ไม่สามารถที่จะมีค่าเข้าใกล้ค่าคงตัวค่าใดค่าหนึ่งได้

นั่นคือลิมิตของ $f(x)$ เมื่อ x เข้าใกล้ 2 หาค่าไม่ได้ #

โดยทั่วๆ ไปคำกล่าวที่ว่า $\lim_{x \to a} f(x) = L$ หมายถึง สามารถเลือกค่า x ที่เข้าใกล้ a มากพอที่จะให้ค่าของฟังก์ชัน $f(x)$ และค่าลิมิต L มีค่าใกล้เคียงกันได้

ดังนั้นจึงนิยาม $\lim_{x \to a} f(x) = L$ ดังต่อไปนี้

บทนิยาม 2.1 $\lim\limits_{x \to a} f(x) = L$ หมายถึง ทุก ๆ ค่าจำนวนจริง $\in > 0$ จะมีจำนวนจริง[illegible]

ซึ่งถ้า $0 < |x-a| < \delta$ แล้ว $|f(x)-L| < \in$

จากบทนิยามของลิมิตจะพบว่า การเลือก $\delta > 0$ ซึ่ง $0 < |x-a| < \delta$ นั้นจะไม่รวมกรณีที่ $x = a$ เพราะว่าที่ $x = a$ ค่าฟังก์ชั่น $f(x)$ หรือ $f(a)$ อาจจะหาค่าไม่ได้ ดังตัวอย่าง 2.1 ที่กล่าวมาแล้วข้างต้น

2.2 ลิมิตขวา ลิมิตซ้าย (Left-Hand Limit, Right-Hand Limit)

จากหัวข้อ 2.1 ในการหาค่า $\lim\limits_{x \to 2} x+5$ ซึ่งคำตอบคือ 7 นั้น เราทำโดยพิจารณาเลือกค่า x ที่ใกล้เคียงกับ 2 ค่า ทำให้ $x+5$ ใกล้เคียงกับค่าใดค่าหนึ่งโดยพิจารณา x ที่มากกว่า 2 และ x ที่น้อยกว่า 2

ในกรณีการหาค่าลิมิตที่พิจารณาเฉพาะค่า x ที่เข้าใกล้ a ทางที่มากกว่าหรือน้อยกว่าอย่างใดอย่างหนึ่งเท่านั้น เรียกกรณีอย่างนี้ว่า การหาค่าลิมิตข้างเดียว (one-sided limit) ซึ่งแบ่งออกเป็น 2 ประเภท คือ

(1) ลิมิตทางขวามือ

(2) ลิมิตทางซ้ายมือ

นั่นคือ ถ้าพิจารณาเฉพาะค่า x ที่เข้าใกล้ a แต่ในทางที่มากกว่า a เรียกว่า x เข้าใกล้ a ทางขวามือ ใช้สัญลักษณ์ $x \to a^+$ และค่าของ $f(x)$ เมื่อ $x \to a^+$ เรียกว่า ลิมิตทางขวามือ ของ $f(x)$ ใช้สัญลักษณ์

$$\lim_{x \to a^+} f(x) = L$$

ในทางกลับกัน ถ้าพิจารณาค่า x ที่เข้าใกล้ a ในทางที่น้อยกว่า a เรียกว่า x เข้าใกล้ a ทางซ้ายมือ ใช้สัญลักษณ์ $x \to a^-$ และค่าของ $f(x)$ เมื่อ $x \to a^-$ เรียกว่า ลิมิตทางซ้ายมือของ $f(x)$ ใช้สัญลักษณ์

$$\lim_{x \to a^-} f(x) = L$$

บทนิยาม 2.2 $\lim\limits_{x \to a^+} f(x) = L$ หมายความว่า สำหรับทุก ๆ จำนวนจริง $\in > 0$ จะมีจำนวนจริง $\delta > 0$ ซึ่งถ้า $0 < x - a < \delta$ แล้ว $|f(x) - L| < \in$

นั่นคือ สามารถทำให้ f(x) กับ L มีค่าใกล้เคียงกันเพียงใดก็ได้ ถ้าเลือก x ให้ใกล้ a มากพอ โดยพิจารณาเฉพาะค่า x ที่มากกว่า a

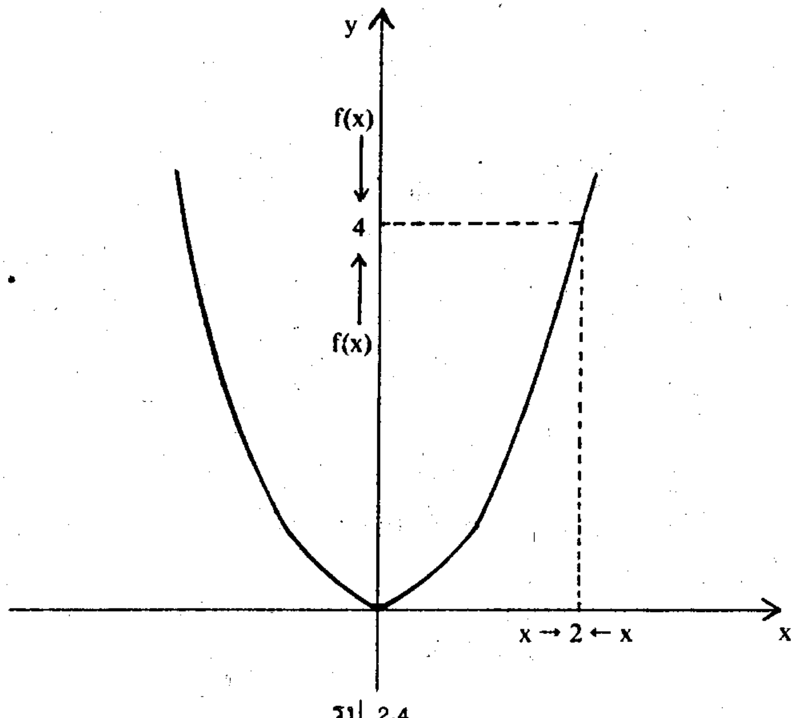
นิยาม 2.3 $\lim\limits_{x \to a^-} f(x) = L$ หมายความว่า สำหรับทุก ๆ $\in > 0$ จะมี $\delta > 0$ ซึ่งถ้า $0 < a - x < \delta$ แล้ว $|f(x) - L| < \in$

นั่นคือ ถ้าเราเลือก x ให้เข้าใกล้ a มากพอโดยพิจารณาเฉพาะ x ที่มีค่าน้อยกว่า a แล้วทำให้ f(x) กับ L มีค่าใกล้เคียงกันได้

พิจารณาตัวอย่างต่อไปนี้

ตัวอย่าง 2.4 จงหาค่าของ $\lim\limits_{x \to 2^+} x^2$ และ $\lim\limits_{x \to 2^-} x^2$

วิธีทำ ค่าของ $\lim\limits_{x \to 2^+} x^2$



รูป 2.4

พิจารณาค่าของ x ที่เข้าใกล้ 2 ทางขวามือ

x	2.1	2.01	2.001	2.0001
x^2	4.41	4.0401	4.004001	4.00040001

จะเห็นว่า เมื่อ x เข้าใกล้ 2 มากเพียงใด f(x) ก็จะเข้าใกล้ 4 มากเท่านั้น

นั่นคือ $\lim_{x \to 2^+} x^2 = 4$

ค่าของ $\lim_{x \to 2^-} x^2$

พิจารณาค่าของ x ที่เข้าใกล้ 2 ทางซ้ายมือ

x	1.9	1.99	1.999	1.9999
x^2	3.61	3.9601	3.996001	3.99960001

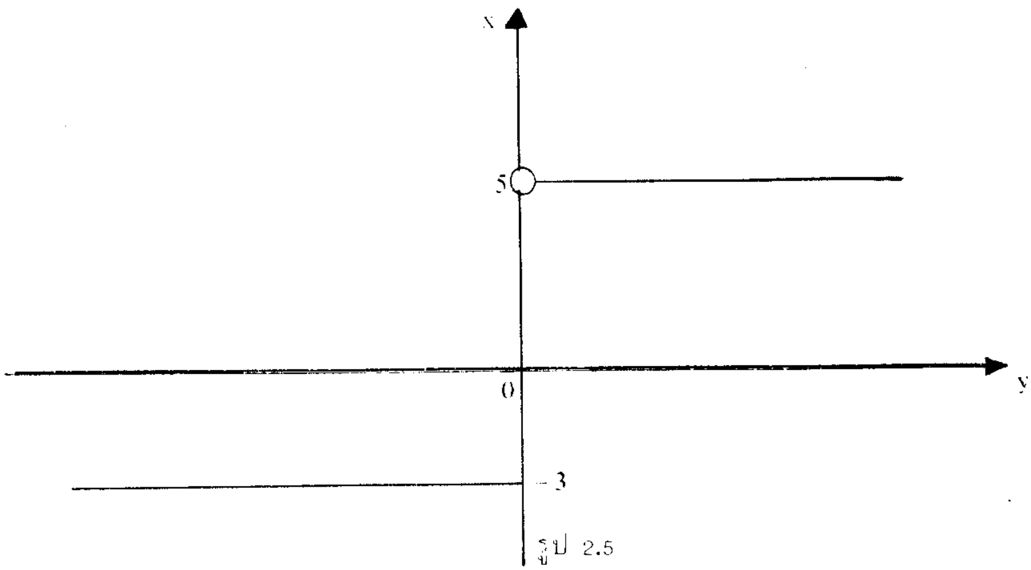
จะเห็นว่า เมื่อ x เข้าใกล้ 2 ทางซ้าย ค่า f(x) จะมีค่าเข้าใกล้ 4

นั่นคือ $\lim_{x \to 2^-} x^2 = 4$ #

ตัวอย่าง 2.5 กำหนดให้

$$f(x) = \begin{cases} -3 & \text{เมื่อ } x \leq 0 \\ 5 & \text{เมื่อ } x > 0 \end{cases}$$

จงหาค่าของ $\lim_{x \to 0^+} f(x)$ และ $\lim_{x \to 0^-} f(x)$



รูป 2.5

วิธีทำ ลิมิตทางขวามือของ f(x) เมื่อ x เข้าใกล้ 0 คือ

$$\lim_{x \to 0^+} f(x) = 5$$

และลิมิตทางซ้ายมือของ f(x) เมื่อ x เข้าใกล้ 0 คือ

$$\lim_{x \to 0^-} f(x) = -3$$

#

จากตัวอย่าง 2.4 และตัวอย่าง 2.5 จะสังเกตเห็นว่า ในตัวอย่าง 2.4 นั้น ค่าของลิมิตทางขวามือเท่ากับค่าของลิมิตทางซ้ายมือ ส่วนตัวอย่าง 2.5 ค่าลิมิตทางขวามือไม่เท่ากับค่าลิมิตทางซ้ายมือ ดังนั้นจะได้ความสัมพันธ์ของลิมิตที่หาค่าได้กับลิมิตทางขวามือ ลิมิตทางซ้ายมือ ดังนิยามข้างล่างนี้

บทนิยาม 2.4 $\lim_{x \to a} f(x) = L$ (หาค่าได้) ก็ต่อเมื่อ $\lim_{x \to a^+} f(x) = \lim_{x \to a^-} f(x) = L$

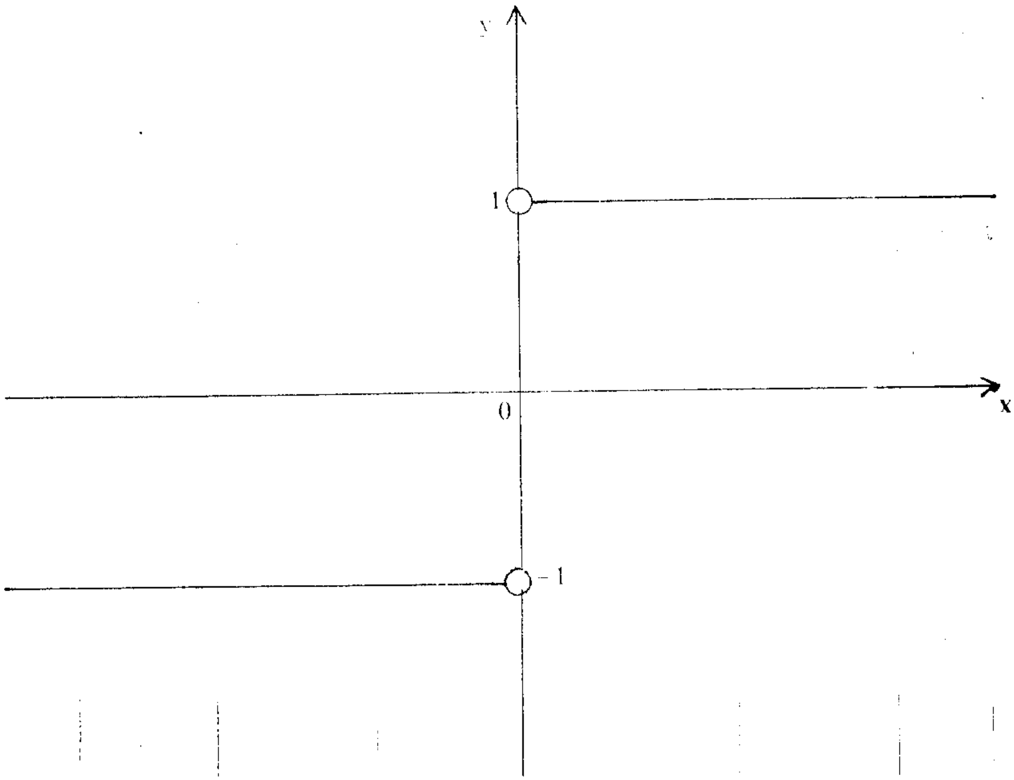
จากตัวอย่าง 2.4 $\lim_{x \to 2} x^2$ หาค่าได้ และมีค่าเท่ากับ 4 แต่ในตัวอย่าง 2.5 $\lim_{x \to 0} f(x)$ หาค่าไม่ได้ เพราะว่า $\lim_{x \to 0^+} f(x) \neq \lim_{x \to 0^-} f(x)$

เพราะว่าจากบทนิยามข้างบน กล่าวว่า ลิมิตหาค่าได้ก็ต่อเมื่อลิมิตทางขวามือ และลิมิตทางซ้ายมือต้องเท่ากัน เพราะฉะนั้น สมบัติอันนี้จึงมีความสำคัญในการหาค่าลิมิต ซึ่งในการหาค่าลิมิตทุกครั้งจะต้องตรวจสอบให้แน่ใจเสียก่อนว่า ลิมิตทางขวามือ และลิมิตทางซ้ายมือ หาค่าได้และมีค่าเท่ากันหรือไม่เสียก่อน

ตัวอย่าง 2.6 กำหนด $f(x) = \begin{cases} -1 & x < 0 \\ 1 & x > 0 \end{cases}$

จงหา $\lim\limits_{x \to 0^+} f(x)$ และ $\lim\limits_{x \to 0} f(x)$

วิธีทำ



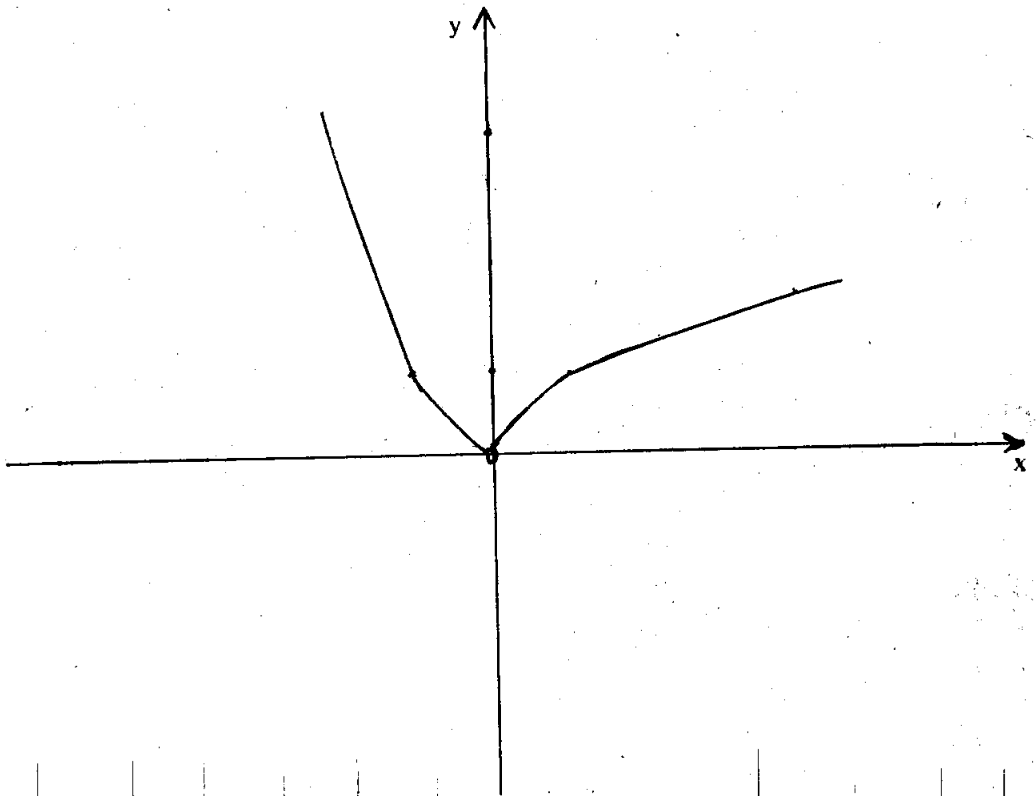
รูป 2.6

จากรูป 2.6 จะได้ว่า $\lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = 1$ และ $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = -1$ #

ตัวอย่าง 2.7 กำหนด $f(x) = \begin{cases} x^2 & x < 0 \\ \sqrt{x} & x > 0 \end{cases}$

จงหาค่า $\lim\limits_{x \to 0^+} f(x)$, $\lim\limits_{x \to 0^-} f(x)$ และ $\lim\limits_{x \to 0} f(x)$

วิธีทำ



รูป 2.7

จากรูปจะได้ว่า $\lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = 0$ และ $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = 0$

และเพราะว่า $\lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = 0 = \lim\limits_{x \to 0^-} f(x)$ จึงได้ว่า $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = 0$ #

ตัวอย่าง 2.8 กำหนด $f(x) = \begin{cases} 0 & x < 0 \text{ และ } x \text{ เป็นอตรรกยะ} \\ 1 & x < 0 \; x \text{ เป็นตรรกยะ} \\ x & x > 0 \end{cases}$

จงพิจารณาลิมิตทางซ้าย ลิมิตทางขวา และลิมิตของ f(x) เมื่อ x เข้าใกล้ 0

วิธีทำ พิจารณา f(x) เมื่อ x เข้าใกล้ 0 ทางซ้าย
จะพบว่าเมื่อ x เข้าใกล้ 0 ทางซ้าย ค่าของ f(x) มีสองค่าคือ 0 และ 1 ดังนี้ เมื่อ x เข้าใกล้ 0 ทางซ้าย f(x) จึงไม่มีค่าเข้าใกล้ค่าคงตัวค่าใดค่าหนึ่ง

นั่นคือ ลิมิตทางซ้ายของ f(x) เมื่อ x เข้าใกล้ 0 หาค่าไม่ได้

พิจารณา f(x) เมื่อ x เข้าใกล้ 0 ทางขวา

จะได้ว่า $\lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = 0$

และเนื่องจากลิมิตทางซ้ายของ f(x) เมื่อ x เข้าใกล้ 0 หาค่าไม่ได้ จึงสรุปได้ว่า ลิมิตของ f(x) เมื่อ x เข้าใกล้ 0 หาค่าไม่ได้ #

ตัวอย่าง 2.9 กำหนดให้ $f(x) = \dfrac{x^2}{3x+4}$ จงหาค่าลิมิตทางขวามือ ลิมิตทางซ้ายมือ และลิมิตของ f(x) เมื่อ x เข้าใกล้ 5

วิธีคิด การหาค่า $\lim\limits_{x \to 5^-} \dfrac{x^2}{3x+4}$ เราพิจารณา x ที่มีค่าเข้าใกล้ 5 แต่ยังคงน้อยกว่า 5

ดังนั้นจะเห็นได้ว่า $\dfrac{x^2}{3x+4}$ มีค่าเข้าใกล้ $\dfrac{5^2}{3(5)+4} = \dfrac{25}{19}$

ดังนั้น $\lim\limits_{x \to 5^-} \dfrac{x^2}{3x + 5} = \dfrac{25}{19}$

เช่นเดียวกันสำหรับ $\lim\limits_{x \to 5^+} \dfrac{x^2}{3x + 5}$ **เราพิจารณา x ที่มีค่าเข้าใกล้ 5 แต่**

มีค่ามากกว่า ดังนั้นจะเห็นว่า $\dfrac{x^2}{3x + 5}$ **มีค่าเข้าใกล้** $\dfrac{5^2}{3(5) + 4} = \dfrac{25}{19}$
เช่นเดียวกัน

ดังนั้น $\lim\limits_{x \to 5^+} \dfrac{x^2}{3x + 5} = \dfrac{25}{19}$

จะได้ว่า ลิมิตทางซ้าย = ลิมิตทางขวา = $\frac{25}{19}$

เพราะฉะนั้น $\lim_{x \to 5} \frac{x^2}{3x+5} = \frac{25}{19}$

วิธีทำ เพราะว่า $\lim_{x \to 5^-} f(x) = \lim_{x \to 5^-} \frac{x^2}{3x+5}$

$= \frac{25}{19}$

และ $\lim_{x \to 5^+} f(x) = \lim_{x \to 5^+} \frac{x^2}{3x+5}$

$= \frac{25}{19}$

ดังนั้น $\lim_{x \to 5} f(x) = \lim_{x \to 5} \frac{x^2}{3x+5}$

$= \frac{25}{19}$

#

ตัวอย่าง 2.10 กำหนดให้ $f(x) = \frac{x^2 - 3x + 2}{x^2 - 4}$

จงหา $\lim_{x \to 1^-} f(x)$, $\lim_{x \to 1^+} f(x)$ และ $\lim_{x \to 1} f(x)$

วิธีคิด พิจารณา $\frac{x^2 - 3x + 2}{x^2 - 4}$ เมื่อ x เข้าใกล้ 1 (ในทางที่น้อยกว่า 1) พบว่า มีค่าเข้าใกล้ $\frac{1 - 3 + 2}{1 - 4} = \frac{0}{-3} = 0$

เพราะฉะนั้น $\lim_{x \to 1^-} \frac{x^2 - 3x + 2}{x^2 - 4} = 0$

เช่นเดียวกัน เมื่อ x เข้าใกล้ 1 (ในทางที่มากกว่า 1)
จะพบว่า ค่าของ $\frac{x^2 - 3x + 2}{x^2 - 4}$ มีค่าเข้าใกล้ $\frac{1 - 3 + 2}{1 - 4} = 0$

วิธีทำ $\lim\limits_{x \to 1^-} \dfrac{x^2 - 3x + 2}{x^2 - 4} = 0$

$\lim\limits_{x \to 1^+} \dfrac{x^2 - 3x + 2}{x^2 - 4} = 0$

เพราะว่า $\lim\limits_{x \to 1^+} \dfrac{x^2 - 3x + 2}{x^2 - 4} = \lim\limits_{x \to 1^-} \dfrac{x^2 - 3x + 2}{x^2 - 4} = 0$

ดังนั้น $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{x^2 - 3x + 2}{x^2 - 4} = 0$

#

ตัวอย่าง 2.11 จงหาค่าของ $\lim\limits_{x \to 4} \dfrac{x^2 - 16}{x - 4}$

วิธีคิด พิจารณา $\dfrac{x^2 - 16}{x - 4} = \dfrac{(x - 4)(x + 4)}{x - 4}$

$= x + 4$

เราตัดทอนได้ เพราะพิจารณา x เข้าใกล้ 4 ไม่ใช่ $x = 4$

เพราะฉะนั้นจะเห็นว่า

$\lim\limits_{x \to 4} \dfrac{x^2 - 16}{x - 4} = \lim\limits_{x \to 4} x + 4$

ซึ่งไม่ว่า x เข้าใกล้ 4 ทางที่มากกว่า 4 หรือ x เข้าใกล้ 4 ทางที่น้อยกว่า 4) ก็ตาม ค่าของ $\dfrac{x^2 - 16}{x - 4}$ หรือ $x + 4$ จะมีค่าเข้าใกล้ 8

วิธีทำ เพราะว่า $\lim\limits_{x \to 4} \dfrac{x^2 - 16}{x - 4} = \lim\limits_{x \to 4} x + 4$

และ $\lim\limits_{x \to 4^+} x + 4 = 8$

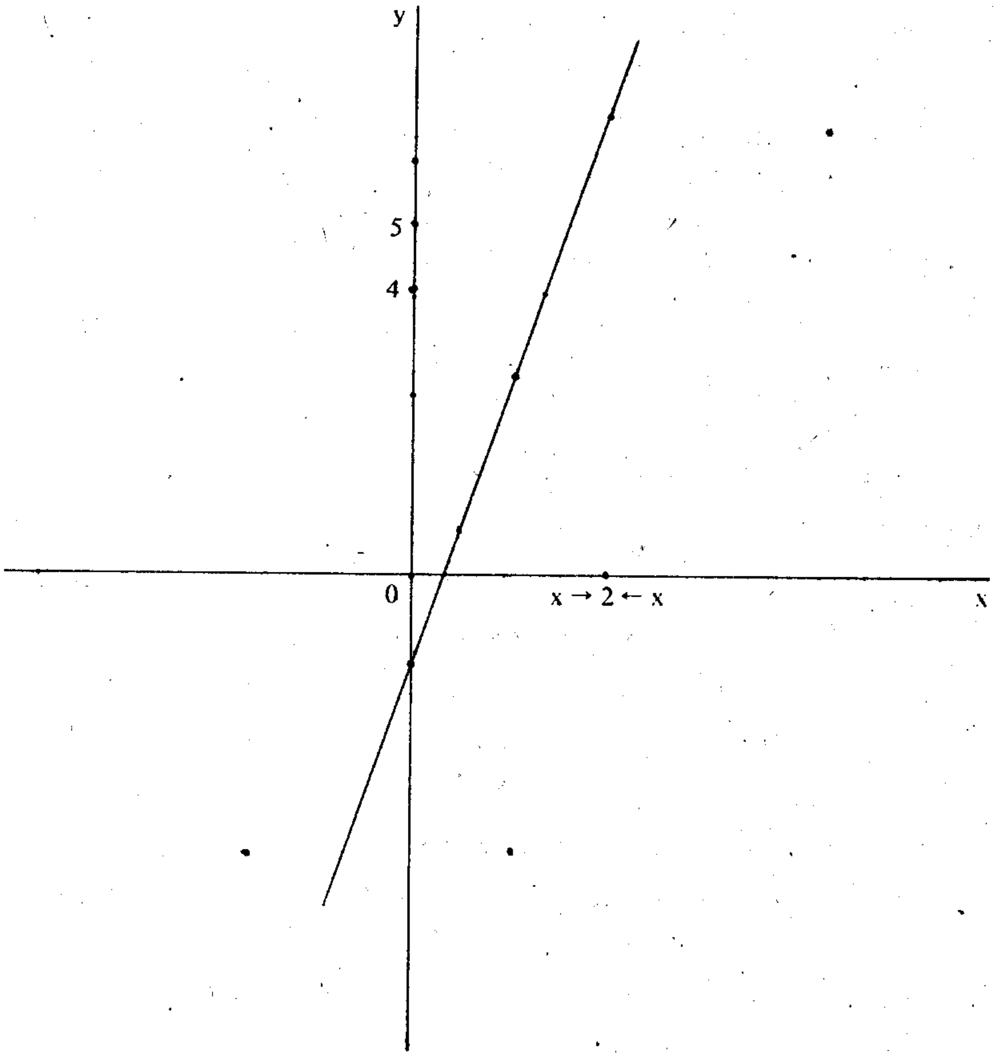
$\lim\limits_{x \to 4^-} x + 4 = 8$

ดังนั้น $\lim\limits_{x \to 4} \dfrac{x^2 - 16}{x - 4} = 8$

ตัวอย่าง 2.12 กำหนดให้

$$f(x) = \begin{cases} 3x - 1 & ; x \neq 2 \\ 4 & ; x = 2 \end{cases}$$

จงหา $\lim_{x \to 2} f(x)$



รูป 2.8

วิธีคิด ถึงแม้ว่าฟังก์ชันที่กำหนดให้นี้จะได้ว่า $f(2) = 4$ ก็ตาม แต่ค่าลิมิตไม่ใช่เป็นการแทนค่า เพราะค่าลิมิต เมื่อ x เข้าใกล้ 2 ต้องพิจารณาจากฟังก์ชัน $f(x) = 3x - 1$

และเมื่อ x เข้าใกล้ 2 ไม่ว่าจะเป็นทางมากกว่า 2 หรือ น้อยกว่า 2 ก็ตาม $3x-1$ จะมีค่าเข้าใกล้ $3(2) - 1 = 5$

เพราะฉะนั้น $\lim_{x \to 2} (3x - 1) = 5$

วิธีทำ เพราะว่า $\lim_{x \to 2^-} f(x) = \lim_{x \to 2^-} 3x - 1$

$= 5$

และ $\lim_{x \to 2^+} f(x) = \lim_{x \to 2^+} 3x - 1$

$= 5$

ดังนั้น $\lim_{x \to 2} f(x) = \lim_{x \to 2} 3x - 1$

$= 5$ #

ตัวอย่าง 2.13 จงหาค่าของ $\lim_{x \to 2} \sqrt{x^2 - 4}$

วิธีคิด พิจารณา x เข้าใกล้ 2 ทางที่ยังมากกว่า 2 อยู่จะได้ว่า $\sqrt{x^2 - 4}$ จะมีค่าเข้าใกล้ 0

นั่นคือ $\lim_{x \to 2^+} \sqrt{x^2 - 4} = 0$

แต่ถ้าพิจารณา x เข้าใกล้ 2 ทางที่น้อยกว่า 2 จะได้ว่า $x^2 - 4$ เข้าใกล้ค่าลบค่าหนึ่งซึ่งค่าของรากเราไม่ทราบว่าเข้าใกล้ค่าใด

นั่นคือ $\lim_{x \to 2^-} \sqrt{x^2 - 4}$ หาค่าไม่ได้

ดังนั้น $\lim_{x \to 2} \sqrt{x^2 - 4}$ หาค่าไม่ได้

วิธีทำ เพราะว่า $\lim_{x \to 2^-} \sqrt{x^2 - 4}$ หาค่าไม่ได้

$\lim_{x \to 2^+} \sqrt{x^2 - 4} = 0$

ดังนั้น $\lim_{x \to 2} \sqrt{x^2 - 4}$ หาค่าไม่ได้

แบบฝึกหัด 2.1

จงพิจารณาว่าฟังก์ชันต่อไปนี้หาลิมิตได้หรือไม่ ถ้าฟังก์ชันใดหาลิมิตได้ จงบอกค่าลิมิตนั้น

1. $\lim\limits_{x \to 0} (2x - 1)$

2. $\lim\limits_{x \to 0} \frac{1}{|x|}$

3. $\lim\limits_{x \to 1} (2 + 5x)$

4. $\lim\limits_{x \to 1} \frac{3}{x + 1}$

5. $\lim\limits_{x \to 2} \frac{1}{3x - 6}$

6. $\lim\limits_{x \to 3} \frac{2x - 6}{x - 3}$

7. $\lim\limits_{x \to 3} \frac{x^2 - 6x + 9}{x - 3}$

8. $\lim\limits_{x \to 0} (x + \frac{1}{x})$

9. $\lim\limits_{x \to 1} (x + \frac{1}{x})$

10. $\lim\limits_{x \to -2} x^2$

11. $\lim\limits_{x \to 0} \frac{4}{x + 1}$

12. $\lim\limits_{x \to 0} \frac{2x - 5x^2}{x}$

13. $\lim\limits_{x \to 1} \frac{x^2 + 1}{x^2 - 1}$

14. $\lim_{x \to 1} \dfrac{x^3 - 1}{x - 1}$

15. $\lim_{x \to 1} \dfrac{x^2 - 1}{x - 1}$

16. $\lim_{x \to 3} \sqrt{a - x^2}$

17. $\lim_{x \to 0} f(x)$ ถ้า $f(x) = \begin{cases} -x^2 & ; x < 0 \\ x^2; & x > 0 \end{cases}$

18. $\lim_{x \to 0} f(x)$ ถ้า $f(x) = \begin{cases} x^2 & ; x < 0 \\ 1 + x & ; x > 0 \end{cases}$

19. $\lim_{x \to 4} f(x)$ ถ้า $f(x) = \begin{cases} x^2 & ; x \neq 4 \\ 0 & ; x = 4 \end{cases}$

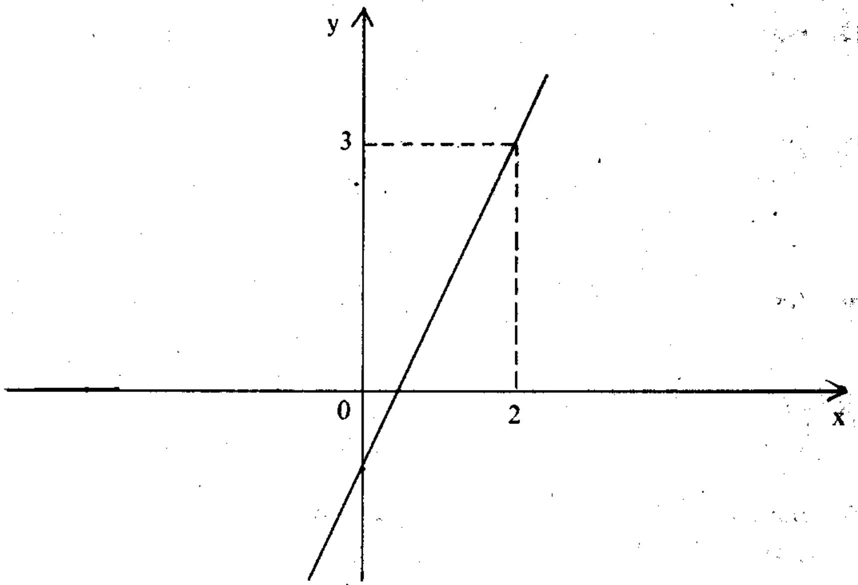
20. $\lim_{x \to 0} f(x)$ ถ้า $f(x) = \begin{cases} 2 & ; x \text{ เป็นจำนวนตรรกยะ} \\ -2 & ; x \text{ เป็นจำนวนอตรรกยะ} \end{cases}$

2.3 การพิสูจน์ลิมิต

จากหัวข้อ 2.1 ได้กล่าวแล้วว่า $\lim_{x \to a} f(x) = L$ **หมายถึง ทุก ๆ** $\in > 0$ **จะมี** $\delta > 0$ **ซึ่ง ถ้า** $0 < |x - a| < \delta$ แล้วจะได้ว่า $|f(x) - L| < \in$ และในหัวข้อ 2.2 **ได้กล่าวถึงการหาค่าลิมิต** เมื่อ x เข้าใกล้ค่าคงที่ a ในตอนนี้จะกล่าวถึงการพิสูจน์ลิมิตโดยใช้บทนิยามของลิมิตที่ได้กล่าวมาแล้วข้างต้น

ตัวอย่าง 2.14 จงแสดงว่า $\lim_{x \to 2} (2x - 1) = 3$ โดยใช้นิยามของลิมิต

พิสูจน์



รูป 2.9

เราต้องการแสดงว่า ทุก ๆ $\in > 0$ จะต้องมี $\delta > 0$ ซึ่งถ้า $0 < |x - 2| < \delta$ แล้ว $|(2x - 1) - 3| < \in$

ให้ $\in > 0$ เป็นจำนวนจริงบวกใด ๆ

เลือก $\delta = \frac{\in}{2}$

ให้ $0 < |x - 2| < \delta$

พิจารณา
$$
\begin{aligned}
|(2x - 1) - 3| &= |2x - 4| \\
&= 2|x - 2| \\
&< 2\delta \\
&= 2\left(\frac{\in}{2}\right) \\
&= \in
\end{aligned}
$$

นั่นคือ $|(2x - 1) - 3| < \in$

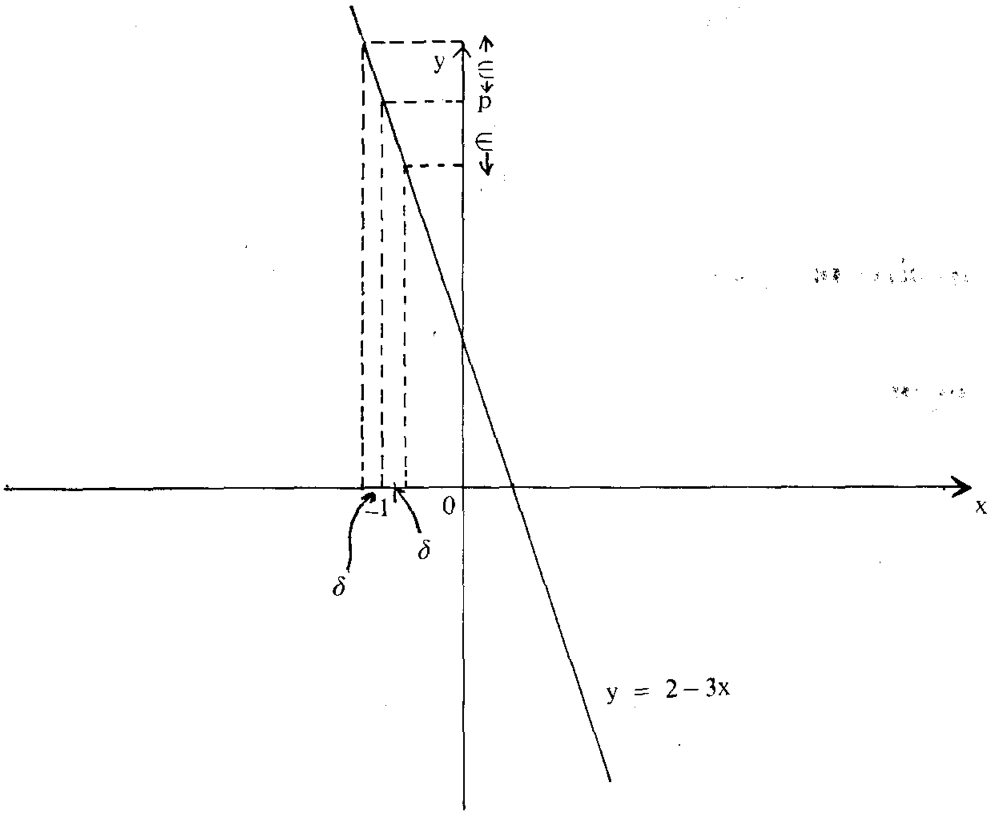
เพราะฉะนั้นจะได้ว่า

$$\lim_{x \to 2} (2x - 1) = 3$$

#

ตัวอย่าง 2.15 จงแสดงว่า $\lim\limits_{x \to -1} (2 - 3x) = 5$ โดยใช้นิยามของลิมิต

พิสูจน์



รูป 2.10

เราต้องแสดงให้ได้ว่า สำหรับทุก ๆ $\in > 0$ จะมี $\delta > 0$ ซึ่งถ้า $0 < |x+1| < \delta$ แล้ว $|(2-3x)-5| < \in$

ให้ $\in$ เป็นจำนวนจริงบวกใด ๆ

เลือก $\delta = \dfrac{\in}{3}$

ให้ $0 < |x + 1| < \delta$

พิจารณา $|(2 - 3x) - 5| = |2 - 3x - 5|$

$= |-3x \quad 3|$

$= 3)x + 1|$

< 36

$$= 3\left(\frac{\epsilon}{3}\right)$$
$$= \epsilon$$

นั่นแสดงว่า $|(2 - 3x) - 5| < \epsilon$

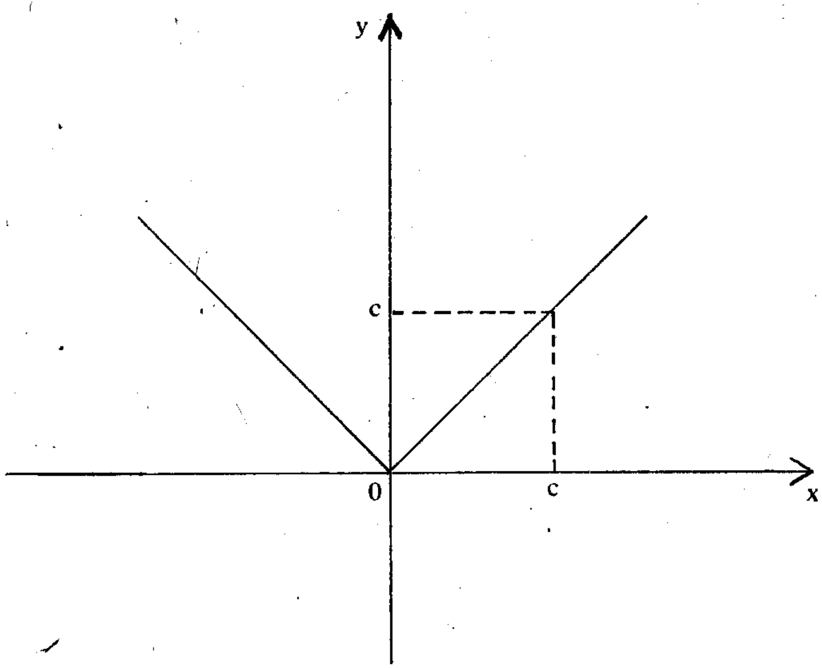
เพราะฉะนั้นจะได้ว่า

$$\lim_{x \to -1} (2 - 3x) = 5$$

#

ตัวอย่าง 2.16 จงแสดงว่า $\lim_{x \to c} |x| = |c|$ โดยนิยามของลิมิต

พิสูจน์



รูป 2.11

จะต้องแสดงว่าสำหรับทุก ๆ $\epsilon > 0$ จะมี $\delta > 0$ ซึ่งถ้า $0 < |x - c| < \delta$ แล้ว $\big| |x| - |c| \big| < \epsilon$

ให้ ϵ เป็นจำนวนจริงบวกใด ๆ

เลือก $\delta = \epsilon$

ให้ $0 < |x - c| < \delta$

พิจารณา $||x| - |c|| \leqslant |x - c|$

$< \delta$

$= \in$

นั่นคือ $||x| - |c|| < \in$

เพราะฉะนั้นจะได้ว่า

$$\lim_{x \to c} |x| = |c|$$ #

ตัวอย่าง 2.17 จงแสดงว่า $\lim_{x \to 4} x^2 + 2x = 24$ โดยใช้นิยามของลิมิต

พิสูจน์ ต้องการแสดงว่าสำหรับทุก ๆ $\in > 0$ จะมี $\delta > 0$ ซึ่งถ้า $0 < |x - 4| < \delta$ แล้ว $|(x^2 + 2x) - 24| < \in$

ให้ $\in$ เป็นจำนวนจริงบวกใด ๆ

แบ่งการพิจารณาออกเป็น 3 กรณีดังนี้

กรณีที่ 1 $\in = 11$

เลือก $\delta = 1$

ให้ $0 < |x - 4| < 1$

พิจารณา $|x^2 + 2x - 24| = |x - 4| |x + 6|$

แต่จาก $|x - 4| < 1$ จะได้ว่า

$$-1 < x - 4 < 1$$

$9 < x+6 < 11$ ซึ่งได้ว่า $-11 < x+6 < 11$

นั่นคือ $|x + 6| < 11$

เพราะฉะนั้นจะได้ว่า

$$|x^2 + 2x - 24| = |x - 4|\,|x + 6|$$
$$< (1)(11)$$
$$= 11$$

เพราะฉะนั้น $|x^2 + 2x - 24| < \in$

กรณีที่ 2 $\in > 11$

เลือก $\delta = 1$

ทำนองเดียวกับตอนที่ 1 จะได้ว่า

$$|x^2 + 2x - 24| < 11 < \in$$

กรณีที่ 3 $\in < 11$

เลือก $\delta = \frac{\in}{11}$

ให้ $0 < |x - 4| < \delta$

เพราะว่า $\in < 11$ ดังนั้น $\frac{\in}{11} < 1$ นั่นคือ $\delta < 1$

เพราะฉะนั้น $|x - 4| < \delta < 1$

จากตอนที่ 1 จะได้ว่า

$$|x + 6| < 11$$

พิจารณา $|x^2 + 2x - 24| = |x - 4|\,|x + 6|$

$$< 11\delta$$
$$= 11\left(\frac{\in}{11}\right)$$
$$= \in$$

เพราะฉะนั้น $|x^2 + 2x - 24| < \in$

สรุปได้ว่า ทั้งสามกรณีไม่ว่า $\in > 0$ จะมีค่ามากกว่า 11 หรือน้อยกว่า 11 หรือเท่ากับ 11 ก็ตาม จะมี $\delta > 0$ (ซึ่งเมื่อ $\in > 11$ เลือก $\delta = 1$ เมื่อ $\in < 11$ เลือก $\delta = \frac{\in}{11}$ เมื่อ $\in = 11$ เลือก $\delta = 1$) ซึ่งถ้า $0 < |x - 4| < \delta$

แล้ว $|x^2 + 2x - 24| < \in$

ดังนั้น $\lim\limits_{x \to 4} x^2 + 2x = 24$ #

หมายเหตุ บางครั้งในการเขียนแบ่งกรณีแบบตัวอย่าง 2.11 ไม่ค่อยนิยมกัน แต่จะเขียนในรูปเลือก $\delta = \min\left\{1, \frac{\in}{11}\right\}$ แทน

คำอธิบาย ในการพิสูจน์ลิมิต $\lim\limits_{x \to a} f(x) = L$ โดยใช้บทนิยามนั้น ปัญหาของการพิสูจน์คือ การเลือก $\delta > 0$ ที่เหมาะสมที่ทำให้ $|f(x) - L| < \in$ สำหรับทุก ๆ $\in > 0$ เมื่อ $0 < |x - a| < \delta$ แต่ในตัวอย่างไม่ได้อธิบายการหา δ ที่ช่วยในการพิสูจน์ แต่ในทางปฏิบัติก่อนที่จะเขียนพิสูจน์จะต้องหา δ เสียก่อน โดยวิธีคิดย้อนกลับจาก $|f(x) - L| < \in$ ว่า δ ควรจะมีค่าเท่าใด แต่การคิดย้อนกลับนี้ไม่ใช่เป็นการพิสูจน์ เป็นเพียงวิธีการหา δ เท่านั้น

พิจารณาการหา δ ในตัวอย่างข้างต้น

จากตัวอย่าง 2.14 เมื่อ $|(2x-1)-3| < \in$

จะได้ $|2x-4| < \in$

นั่นคือ $2|x-4| < \in$

เพราะฉะนั้น $|x-4| < \frac{\in}{2}$

ดังนั้นจึงควรเลือก $\delta = \frac{\in}{2}$ เพื่อที่จะได้ว่า $|(2x-1)-3| < \in$ เมื่อ $0 < |x-4| < \delta$ #

จากตัวอย่าง 2.15 เมื่อ $|(2-3x)-5| < \in$

จะได้ $|-3x-3| < \in$ ซึ่งทำให้ $|-3||x+1| < \in$

ดังนั้น $3|x+1| < \in$

$3|x-(-1)| < \in$

$|x-(-1)| < \frac{\in}{3}$

ดังนั้นจึงเลือก $\delta = \frac{\in}{3}$. #

จากตัวอย่าง 2.16 ก็เช่นเดียวกัน เพราะว่า

$$||x|-|c|| < \in$$

แต่ $||x|-|c|| \leqslant |x-c| < \delta$

ดังนั้นควรเลือก $\delta = \in$

และสำหรับตัวอย่าง 2.17 พิจารณา

$$|x^2 + 2x - 24| < \in$$

$$|x - 4|\,|x + 6| < \in$$

เราทดลองใช้ $\delta = 1$ พบว่า ถ้า $0 < |x - 4| < 1$ แล้วจะได้ว่า $|x + 6| < 11$ ดังนั้นจึงได้ว่า $|x^2 + 2x - 24| < 11$ ซึ่งแสดงว่า ถ้า $0 < |x - 4| < 1$ แล้ว $|x^2 + 2x - 24| < 11$ นั่นคือ ถ้า $\in \geqslant 11$ เลือก $\delta = 1$ และถ้า $\in < 11$ จะเลือก $\delta = \frac{\in}{11}$

แบบฝึกหัด 2.2

จงพิสูจน์ลิมิตต่อไปนี้ โดยอาศัยบทนิยามของลิมิต

1. $\lim\limits_{x\to 3} 5x - 8 = 7$
2. $\lim\limits_{x\to 2} x + 5 = 7$
3. $\lim\limits_{x\to 2} 5x + 1 = 11$
4. $\lim\limits_{x\to 0} \frac{1 \quad 1}{2x + 1}$
5. $\lim\limits_{x\to -2} x - 3 = -5$
6. $\lim\limits_{x\to -3} x^2 + 1 = 10$
7. $\lim\limits_{x\to -3} 2x + 9 = 3$
8. $\lim\limits_{x\to 1} \frac{1}{1 - 2} = -1$

2.4 ทฤษฎีบทของลิมิต (theorems on ℓimits)

ในหัวข้อ 2.3 การพิสูจน์ลิมิตโดยนิยามสำหรับฟังก์ชันบางฟังก์ชัน อาจยุ่งยากซับซ้อน แต่ถ้าใช้ทฤษฎีบทของลิมิตช่วยในการพิสูจน์จะทำให้การพิสูจน์สะดวก รวดเร็ว และง่ายขึ้น และในหัวข้อนี้จะกล่าวถึงทฤษฎีบทของลิมิต และการพิสูจน์

ทฤษฎีบท 2.1 ถ้าลิมิตของฟังก์ชันใดหาค่าได้แล้ว จะมีเพียงค่าเดียวเท่านั้น

นั่นคือ ถ้า $\lim\limits_{x \to a} f(x) = L_1$ และ $\lim\limits_{x \to a} f(x) = L_2$ แล้ว $L_1 = L_2$

พิสูจน์ ให้ $\in$ เป็นจำนวนจริงบวกใด ๆ

เพราะว่า $\lim\limits_{x \to a} f(x) = L_1$

เพราะฉะนั้น จะมี $\delta_1 > 0$ ซึ่ง ถ้า $0 < |x - a| < \delta_1$ แล้ว $|f(x) - L_1| < \frac{\in}{2}$

เพราะว่า $\lim\limits_{x \to a} f(x) = L_2$

เพราะฉะนั้น จะมี $\delta_2 > 0$ ซึ่งถ้า $0 < |x - a| < \delta_2$ แล้ว $|f(x) - L_2| < \frac{\in}{2}$

เลือก $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$

สำหรับ x ซึ่งสอดคล้องกับ

$$0 < |x - a| < \delta$$

จะได้ว่า

$$|f(x) - L_1| < \frac{\in}{2} \text{ และ } |f(x) - L_2| < \frac{\in}{2}$$

พิจารณา

$$\begin{aligned} |L_1 - L_2| &= |f(x) - L_2 + L_1 \quad f(x)| \\ &\leqslant |f(x) - L_2| + |L_1 - f(x)| \\ &= |f(x) \quad L_2| + |f(x) - L_1| \\ &< \frac{\in}{2} + \frac{\in}{2} \end{aligned}$$

นั่นคือ $|L_1 - L_2| < \in$ สำหรับทุก ๆ $\bullet > 0$

เพราะว่า $\in$ เป็นตัวกำหนดไม่เจาะจง (arbitary)

ดังนั้น $|L_1 - L_2| = 0$

จะได้ว่า $L_1 = L_2$ #

ทฤษฎีบท 2.2 ถ้า $f(x) = c$ แล้ว $\lim_{x \to a} f(x) = c$

พิสูจน์ ให้ $\in$ เป็นจำนวนจริงบวกใด ๆ

เพราะว่า $|f(x) - c| = |c - c| = 0$

ดังนั้น $|f(x) - c| < \in$ เสมอไม่ว่าจะเลือก δ เป็นจำนวนจริงบวกใด ๆ ก็ตาม

ทฤษฎีบท 2.3 ถ้า $\lim_{x \to a} f(x) = L$ และ $\lim_{x \to a} g(x) = M$

แล้ว $\lim_{x \to a} [f(x) + g(x)] = L + M$

พิสูจน์ ให้ $\in$ เป็นจำนวนจริงบวกใด ๆ

เพราะว่า $\lim_{x \to a} f(x) = L$

เพราะฉะนั้น จะมี $\delta_1 > 0$ ซึ่งถ้า $0 < |x - a| < \delta_1$ แล้ว $|f(x) - L| < \frac{\in}{2}$

และเพราะว่า $\lim_{x \to a} g(x) = M$

เพราะฉะนั้น จะมี $\delta_2 > 0$ ซึ่งถ้า $0 < |x - a| < \delta_2$ แล้ว $|g(x) - M| < \frac{\in}{2}$

เลือก $\delta = \min \{\delta_1, \delta_2\}$

สำหรับ x ซึ่งสอดคล้องกับ $0 < |x - a| < \delta$

พิจารณา $|[f(x) + g(x)] - (L + M)|$

$$
\begin{aligned}
&= |f(x) - L) + (g(x) - M)| \\
&\leqslant |f(x) - L| + |g(x) - M| \\
&< \frac{\in}{2} + \frac{\in}{2} \\
&= \in
\end{aligned}
$$

นั่นคือ $|[f(x) + g(x)] - (L + M)| < \in$

เพราะฉะนั้น $\lim_{x \to a} [f(x) + g(x)] = L + M$ #

ทฤษฎีบท 2.4 ถ้า $\lim_{x \to a} f(x) = L$ แล้ว $\lim c\, f(x) = cL$

เมื่อ c เป็นจำนวนจริงใด ๆ

พิสูจน์ ในการพิสูจน์ทฤษฎีบทนี้ แยกจากพิสูจน์เป็น 2 กรณี คือ

กรณีที่ 1 $c \neq 0$

ให้ $\in$ เป็นจำนวนจริงบวกใด ๆ

เพราะว่า $\lim_{x \to a} f(x) = L$ ดังนั้น

จะมี $\delta > 0$ ซึ่งถ้า $0 < |x - a| < \delta$ แล้ว $|f(x) - L| < \frac{\in}{|c|}$

สำหรับ x ใด ๆ ซึ่ง $0 < |x - a| < \delta$

พิจารณา
$$\begin{aligned} |cf(x) - cL| &= |c|\,|f(x) - L| \\ &< |c| \left(\frac{\in}{|c|}\right) \\ &= \in \end{aligned}$$

นั่นคือ $|c\, f(x) - cL| < \in$

กรณีที่ 2 $c = 0$

จะเห็นได้ชัดเจนโดยอาศัยทฤษฎีบท 2.2 คือ การพิสูจน์ว่า

$\lim_{x \to a} 0 = 0$

ตัวอย่าง 2.18 $\lim_{x \to 5} (3269) = 3269$

$\lim_{x \to 0} (-79) = -79$

#

ตัวอย่าง 2.19 จงหาค่าของ $\lim_{x \to 2} (3x - 4)$

วิธีทำ

$$
\begin{aligned}
\lim_{x \to 2} (3x - 4) &= \lim_{x \to 2} 3x + \lim_{x \to 2} (-4) \\
&= 3 \lim_{x \to 2} x + \lim_{x \to 2} (-4) \\
&= 3(2) - 4 \\
&= 2 \qquad \#
\end{aligned}
$$

ทฤษฎีบท 2.5 ถ้า $\lim_{x \to a} f(x) = L$ และ $\lim_{x \to a} g(x) = M$ แล้ว $\lim_{x \to a} [f(x)\, g(x)] = LM$

พิสูจน์ ให้ $\in$ เป็นจำนวนจริงบวกใด ๆ

เพราะว่า $\lim_{x \to a} f(x) = L$ และ $\lim_{x \to a} g(x) = M$

เพราะฉะนั้นจะมี $\delta_1 > 0$ ซึ่งถ้า $0 < |x - a| < \delta_1$ แล้ว

$$|f(x) - L| < 1$$

ดังนั้น $|f(x)| < 1 + |L|$

จะมี $\delta_2 > 0$ ซึ่งถ้า $0 < |x - a| < \delta_2$ แล้ว

$$|g(x) - M| < \frac{\in}{2(1 + |L|)}$$

และจะมี $\delta_3 > 0$ ซึ่งถ้า $0 < |x - a| < \delta_3$ แล้ว

$$|f(x) - L| < \frac{\in}{2(1 + |M|)}$$

เลือก $\delta = \min \{\delta_1, \delta_2, \delta_3\}$

ดังนั้นสำหรับ $0 < |x - a| < \delta$ แล้ว

$$
\begin{aligned}
|f(x)\, g(x) - LM| &\leqslant |f(x)\, g(x) - f(x)\, M| + |f(x)\, M - LM| \\
&= |f(x)|\, |g(x) - M| + |M|\, |f(x) - L| \\
&< (1 + |L|) \left(\frac{\in}{2(1 + |L|)}\right) + (1 + |M|) \left(\frac{\in}{2(1 + |M|)}\right)
\end{aligned}
$$

$$= \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2}$$

$$= \epsilon$$

นั่นคือ $|f(x)\,g(x) - LM| < \epsilon$

แสดงว่า $\lim\limits_{x \to a} [f(x)\,g(x)] = LM$ #

ตัวอย่าง 2.20 $\lim\limits_{x \to 4} (3x^2 - 2x + 5)$ มีค่าเท่าใด

วิธีทำ

$$\begin{aligned}
\lim_{x \to 4} (3x^2 - 2x + 5) &= \lim_{x \to 4} 3x^2 + \lim_{x \to 4} (-2x) + \lim_{x \to 4} 5 \\
&= 3\lim_{x \to 4} x^2 - 2\lim_{x \to 4} x + 5 \\
&= 3(\lim_{x \to 4} x)(\lim_{x \to 4} x) - 2(4) + 5 \\
&= 3(4)(4) - 8 + 5 \\
&= 45
\end{aligned}$$ #

ทฤษฎีบท 2.6 ถ้า $\lim\limits_{x \to a} g(x) = M$ โดยที่ $M \neq 0$ แล้ว $\lim\limits_{x \to a} \frac{1}{g(x)} = \frac{1}{M}$

พิสูจน์ ให้ ϵ เป็นจำนวนจริงบวกใด ๆ

จะมี $\delta_1 > 0$ ซึ่ง

ถ้า $0 < |x - a| < \delta_1$ แล้ว $|g(x) - M| < \frac{|M|}{2}$

เพราะฉะนั้น สำหรับ x เช่นนี้จะได้

$$|g(x)| > \frac{|M|}{2}$$

เพราะฉะนั้น $\frac{1}{|g(x)|} < \frac{2}{|M|}$

จะมี $\delta_2 > 0$ ซึ่งถ้า $0 < |x - a| < \delta_2$ แล้ว $|g(x) - M| < \frac{|M|^2 \epsilon}{2}$

เลือก $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$

สำหรับ x ซึ่ง $0 < |x - a| < \delta$

พิจารณา สำหรับ $g(x) \neq 0$

$$\left|\frac{1}{g(x)} - \frac{1}{M}\right| = \frac{|g(x) - M|}{|M|\,|g(x)|}$$

$$\leqslant \frac{2}{|M|^2}|g(x) - M|$$

$$< \frac{2}{|M|^2}\left(\frac{|M|^2}{2}\in\right)$$

$$= \in$$

นั่นคือ $\left|\frac{1}{g(x)} - \frac{1}{M}\right| < \in$

แสดงว่า $\lim\limits_{x\to a} \frac{1}{g(x)} = \frac{1}{M}$

#

ตัวอย่าง 2.21

$$\lim_{x\to 4} \frac{1}{x^2} = \frac{1}{\lim\limits_{x\to 4} x^2} = \frac{1}{16}$$

$$\lim_{x\to -3} \frac{1}{|x|} = \frac{1}{\lim\limits_{x\to -3} |x|} = \frac{1}{|-3|} = \frac{1}{3}$$

ทฤษฎีบท 2.7 ถ้า $\lim\limits_{x\to a} f(x) = L$ และ $\lim\limits_{x\to a} g(x) = M$

โดยที่ $M \neq 0$ แล้ว $\lim\limits_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{L}{M}$

พิสูจน์ พิจารณา $\frac{f(x)}{g(x)} = f(x) \cdot \frac{1}{g(x)}$

$$\lim_{x\to a} \left(\frac{f(x)}{g(x)}\right) = \lim_{x\to a} f(x) \cdot \frac{1}{g(x)}$$

$$= \lim_{x\to a} f(x) \cdot \lim_{x\to a} \frac{1}{g(x)}$$ อาศัยทฤษฎีบท 2.5

$$= \lim_{x\to a} f(x) \cdot \frac{1}{\lim_{x\to a} g(x)}$$ อาศัยทฤษฎีบท 2.6

$$= \frac{\lim_{x\to a} f(x)}{\lim_{x\to a} g(x)}$$

$$= \frac{L}{M}$$

ทฤษฎีบท 2.8 ถ้า $\lim_{x\to a} f(x) = L$ และ $\lim_{x\to a} g(x) = 0$ โดยที่ $L \neq 0$ แล้ว $\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)}$ หาค่าไม่ได้ (does not exist)

พิสูจน์ สมมติมีจำนวนจริง M ซึ่ง

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = M$$

เพราะว่า
$$\begin{aligned} L &= \lim_{x\to a} f(x) \\ &= \lim_{x\to a} \left(\frac{f(x)}{g(x)} \cdot g(x) \right) \\ &= \lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} \cdot \lim_{x\to a} g(x) \\ &= (M)(0) \\ &= 0 \end{aligned}$$

แต่ $L \neq 0$ ดังนั้นจึงเกิดข้อขัดแย้ง

เพราะฉะนั้น $\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)}$ หาค่าไม่ได้

ตัวอย่าง 2.22 $\lim_{x\to 1} \frac{x^2}{x-1}$ หาค่าไม่ได้

$\lim_{x\to 2} \frac{3x-7}{x^2-4}$ หาค่าไม่ได้

แบบฝึกหัด 2.3

จงหาลิมิตของฟังก์ชันต่อไปนี้

1. $\lim\limits_{x\to 5} -30$
2. $\lim\limits_{x\to 2} 5x$
3. $\lim\limits_{x\to 3} \dfrac{x-2}{x+2}$
4. $\lim\limits_{x\to 2} 2x+3$
5. $\lim\limits_{x\to 2} x^2-4x+1$
6. $\lim\limits_{x\to -2} \dfrac{x^2-4}{x^2+2}$
7. $\lim\limits_{t\to 2} \dfrac{t^2+2t+4}{t+2}$
8. $\lim\limits_{t\to 2} \dfrac{t+3}{t+2}$
9. $\lim\limits_{x\to 4} \sqrt{25}+x^2$
10. $\lim\limits_{x\to 4} \dfrac{x-4}{x^2-x-12}$
11. $\lim\limits_{x\to 3} \dfrac{x^3-27}{x^2-9}$
12. $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{x^2-4}{x^2-5x+6}$
13. $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{|x^2+1|}{x+1}$

จาก f(x) ที่กำหนดให้จงหาค่า $\lim\limits_{h\to 0} \dfrac{f(x+h)-f(x)}{h}$

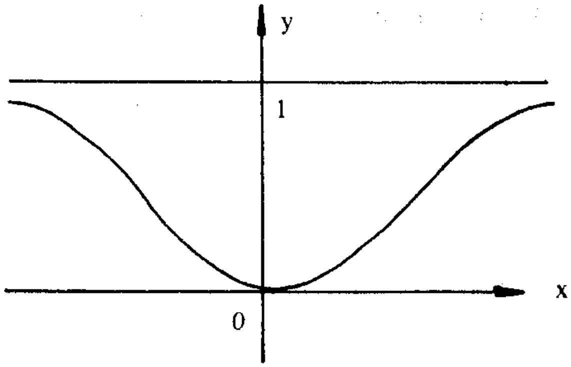
14. $f(x) = 4x^3$
15. $f(x) = \sqrt{2x+3}$

2.5 ลิมิตของฟังก์ชัน เมื่อ x มีค่าเข้าใกล้อนันต์

พิจารณาฟังก์ชัน

$$f(x) = \frac{x^2}{1+x^2}$$

ซึ่งเส้นโค้งที่แทนกราฟของฟังก์ชัน แสดงได้ดังรูป 2.1



รูป 2.12

จากรูป 2.12 จะเห็นว่า ค่าของฟังก์ชันมีค่าน้อยกว่า 1 เสมอ **ถ้าเราเลือก** x **มาค่าหนึ่งแล้ว** หาค่าของ $\frac{x^2}{1+x^2}$ แล้วเลือกค่า x ใหม่ให้มากกว่าเดิม และทำต่อไปอย่างนี้เรื่อย ๆ

สมมุติค่า x ที่เลือก และค่าของ $\frac{x^2}{1+x^2}$ ดังนี้

x	1	10	100	1000	.....
$\frac{x^2}{1+x^2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{100}{101}$	$\frac{10000}{10001}$	$\frac{10^6}{10^6+1}$	.....

จะพบว่า เมื่อ x มีค่ามากขึ้น ค่าของ $f(x) = \frac{x^2}{x^2+1}$ มีค่าเข้าใกล้ 1 มากขึ้น ในกรณีอย่างนี้เรากล่าวว่าลิมิตของ f(x) เมื่อ x มีค่าเข้าใกล้อนันต์มีค่าเท่ากับ 1 เขียนแทนด้วย

$$\lim_{x \to \infty} \frac{x^2}{1+x^2} = 1$$

ในขณะเดียวกันเมื่อ x มีค่าน้อยลง ค่าของ $f(x) = \frac{x^2}{x^2+1}$ มีค่าเข้าใกล้ 1 มากขึ้น ในกรณีอย่างนี้เรากล่าวว่าลิมิตของ f(x) เมื่อ x มีค่าเข้าใกล้ลบอนันต์ มีค่าเท่ากับ 1 เขียนแทนด้วย

$$\lim_{x \to -\infty} \frac{x^2}{1+x^2} = 1$$

จึงจะให้บทนิยามในกรณีทั่วไปได้ดังนี้

บทนิยาม 2.5 $\lim_{x \to \infty} f(x) = L$ ก็ต่อเมื่อ ทุก ๆ $\in > 0$ จะมีจำนวนจริง $N > 0$

ซึ่งถ้า $x > N$ แล้ว $|f(x) - L| < \in$

บทนิยาม 2.6 $\lim_{x \to -\infty} f(x) = L$ ก็ต่อเมื่อทุก ๆ $\in > 0$ จะมีจำนวนจริง $N > 0$

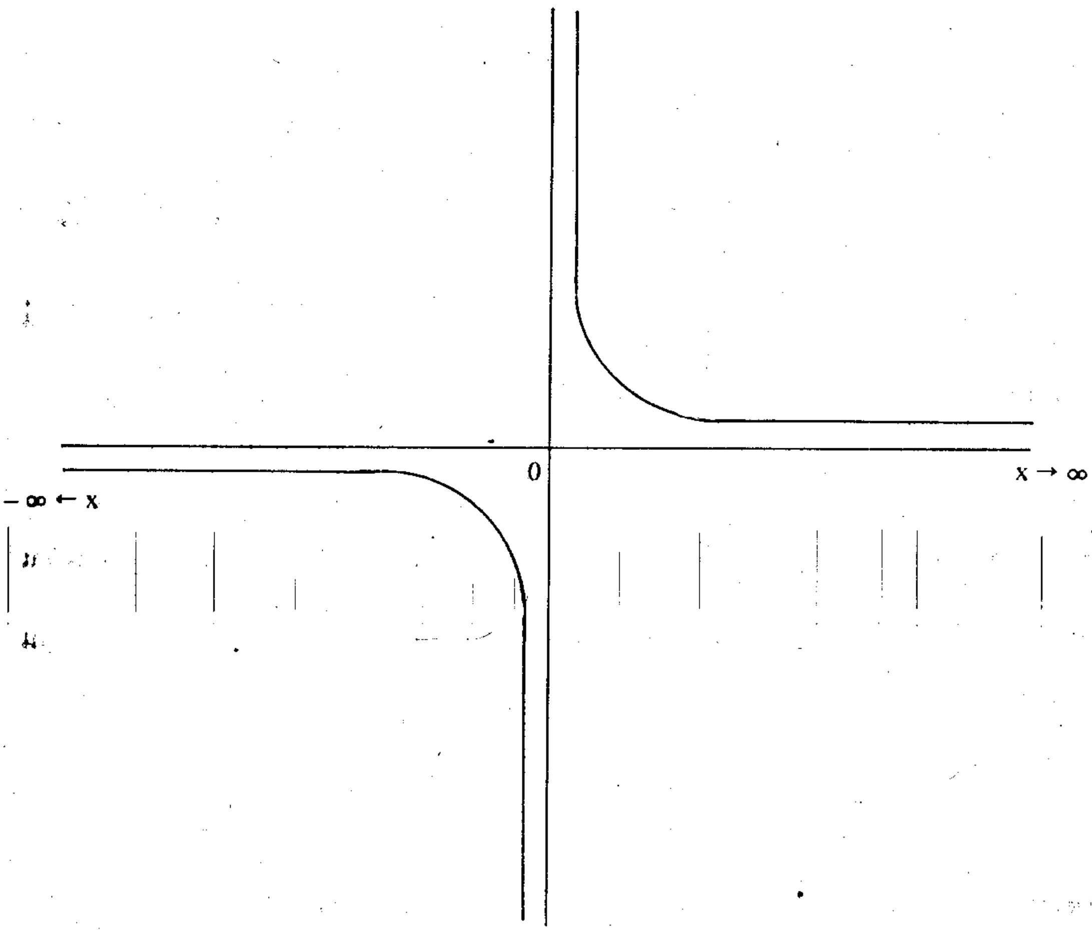
ซึ่งถ้า $x < -N$ แล้ว $|f(x)-L| < \in$

ทฤษฎีบทต่าง ๆ เกี่ยวกับการมีค่าเดียว (uniqueness) ของลิมิต ลิมิตของฟังก์ชันคงที่ ลิมิตของฟังก์ชันที่เท่ากัน ผลบวก ผลคูณ และผลหารของฟังก์ชันยังคงเป็นจริงในกรณีที่ x มีค่าเข้าใกล้อนันต์ด้วย นอกจากนี้เรายังพบความจริงที่ว่า

(1) $\lim_{x \to \infty} \frac{1}{x} = 0$

(2) $\lim_{x \to -\infty} \frac{1}{x} = 0$

ดังรูป 2.13



รูป 2.13

ตัวอย่าง 2.23 จงหาค่าของ $\lim\limits_{x \to \infty}\left(\frac{3x-2}{5x+4}\right)$

วิธีทำ หารทั้งเศษและส่วนด้วย x

$$\frac{3x-2}{5x+4} = \frac{3-\left(\frac{2}{x}\right)}{5+\left(\frac{4}{x}\right)}$$

ในการคำนวณพบว่า

$$\lim_{x \to \infty}\frac{3x-2}{5x+4} = \lim_{x \to \infty}\frac{3-\frac{2}{x}}{5+\frac{4}{x}}$$

$$= \frac{\lim\limits_{x \to \infty} 3-\frac{2}{x}}{\lim\limits_{x \to \infty} 5+\frac{4}{x}}$$

$$= \frac{\lim\limits_{x \to \infty} 3-\lim\limits_{x \to \infty}\frac{2}{x}}{\lim\limits_{x \to \infty} 5+\lim\limits_{x \to \infty}\frac{4}{x}}$$

$$= \frac{3-2\lim\limits_{x \to \infty}\frac{1}{x}}{5+4\lim\limits_{x \to \infty}\frac{1}{x}}$$

$$= \frac{3-2(0)}{5+4(0)}$$

$$= \frac{3}{5}$$ #

ตัวอย่าง 2.24 จงหาค่าของ $\lim\limits_{x \to \infty} = \frac{\sqrt{x^2-1}}{2x+1}$

วิธีทำ เราเขียน $\frac{\sqrt{x^2-1}}{2x+1} = \frac{\sqrt{1-\left(\frac{1}{x^2}\right)}}{2+\frac{1}{x}}$

$$\lim_{x \to \infty}\frac{\sqrt{x^2-1}}{2x+1} = \lim_{x \to \infty}\frac{\sqrt{1-\left(\frac{1}{x^2}\right)}}{2+\frac{1}{x}}$$

$$= \frac{\lim_{x \to \infty} \sqrt{1 - \left(\frac{1}{x^2}\right)}}{\lim_{x \to \infty} 2 + \frac{1}{x}}$$

แต่ $\lim_{x \to \infty} \sqrt{1 - \frac{1}{x^2}} = 1$

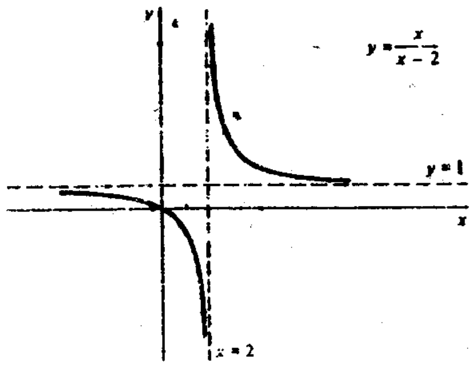
และ $\lim_{x \to \infty} \left(2 + \frac{1}{x}\right) = 2$

เพราะฉะนั้น $\lim_{x \to \infty} \frac{\sqrt{x^2 - 1}}{2x + 1} = \frac{1}{2}$ #

ตัวอย่าง 2.25 กำหนด $f(x) = \frac{x}{x-2}$

จงหาค่า $\lim_{x \to \infty} f(x)$ และ $\lim_{x \to -\infty} f(x)$

วิธีทำ



รูป 2.14

$$\lim_{x \to \infty} \frac{x}{x-2} = \lim_{x \to \infty} \frac{1}{1 - \frac{2}{x}}$$

$$= \frac{\lim_{x \to \infty} 1}{\lim_{x \to \infty} 1 - \lim_{x \to \infty} \frac{2}{x}}$$

$$= \frac{1}{1-0} = 1$$

$$\lim_{x \to \infty} \frac{x}{x-2} = \lim_{x \to \infty} \frac{1}{1-\frac{2}{x}}$$

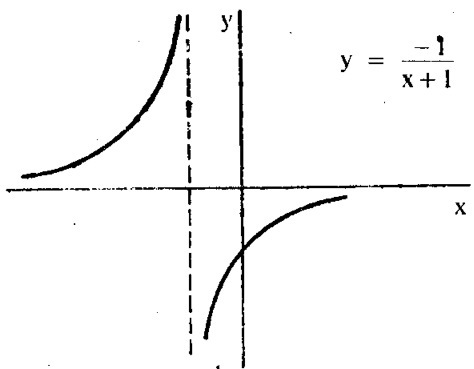
$$= \frac{\lim\limits_{x \to \infty} 1}{\lim\limits_{x \to \infty} 1 - \lim\limits_{x \to \infty} \frac{2}{x}}$$

$$= \frac{1}{1-0} = 1 \qquad \#$$

ตัวอย่าง 2.26 กำหนด $f(x) = -\frac{1}{x+1}$

จงหาค่าของ $\lim\limits_{x \to \infty} f(x)$ และ $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$

วิธีทำ



รูป 2.15

$$\lim_{x \to \infty} -\frac{1}{x+1} = \lim_{x \to \infty} \frac{-\frac{1}{x}}{1+\frac{1}{x}}$$

$$= \frac{\lim\limits_{x \to \infty} -\frac{1}{x}}{\lim\limits_{x \to \infty} 1 + \lim\limits_{x \to \infty} \frac{1}{x}}$$

$$= \frac{0}{1+0} = 0$$

$$\lim_{x \to -\infty} -\frac{1}{x+1} = \lim_{x \to -\infty} \frac{-\frac{1}{x}}{1+\frac{1}{x}}$$

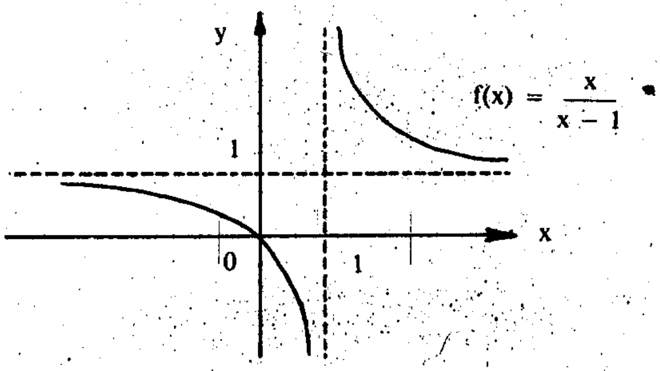
$$= \frac{\lim_{x \to -\infty} -\frac{1}{x}}{\lim_{x \to -\infty} 1 + \lim_{x \to -\infty} \frac{1}{x}}$$

$$= \frac{0}{1+0} = 0 \qquad \#$$

ในบางครั้งอาจเป็นไปได้เหมือนกันที่เมื่อ x เข้าใกล้จำนวนจริง จำนวนหนึ่งหรือ เมื่อ - x เข้าใกล้ค่าอนันต์แล้ว f(x) มีค่าเพิ่มขึ้น หรือลดลงอยู่เรื่อย ๆ อย่างไม่มีขอบเขตจำกัด กล่าวคือ ไม่มีค่าเข้าใกล้จำนวนจริงใด ๆ เลย ในกรณีเช่นนี้เรากล่าวว่าฟังก์ชันไม่มีลิมิต หรือลิมิตหาค่าไม่ได้ ดังตัวอย่างข้างล่างนี้

กำหนดให้ $f(x) = \frac{x}{x-1}$

พิจารณา $\lim_{x \to 1} f(x)$ ซึ่งจะพบว่าถ้าเขียนกราฟของฟังก์ชันจะได้ดังรูป 2.16



รูป 2.16

ซึ่งจะเห็นว่า เมื่อเลือก x ต่าง ๆ กันในทางที่ x เข้าใกล้ 1 ทางขวามือ และทางซ้ายมือ จะพบว่า

x	2	1.1	1.01	1.001	1.0001	....
$\frac{x}{x-1}$	2	11	101	1001	10001	....

หรือ

x	0	0.5	0.9	0.99	0.999	....
$\frac{x}{x-1}$	0	-1	-9	-99	-999	....

จะเห็นว่าไม่ว่าเลือก x เข้าใกล้เคียง 1 ในทางที่มากกว่า 1 หรือในทางที่น้อยกว่า 1 ยิ่ง x เข้าใกล้ 1 มากเพียงใด ค่า $f(x)$ จะมีค่ามากขึ้น หรือน้อยลงอย่างไม่มีขอบเขตจำกัด ในกรณีนี้เรากล่าวว่า $\lim\limits_{x\to 1} f(x)$ หาค่าไม่ได้

จากรูป 2.16 เราพบว่าเมื่อ x เข้าใกล้ 1 ทางขวา $f(x)$ มีค่าเพิ่มขึ้นไม่จำกัด ในขณะเดียวกันเมื่อ x เข้าใกล้ 1 ทางซ้าย $f(x)$ มีค่าลดลงโดยไม่มีขอบเขตจำกัด จึงให้บทนิยามของลิมิตข้างเดียว ในกรณีเช่นนี้ดังต่อไปนี้

บทนิยาม 2.7 $f(x)$ มีค่าเพิ่มขึ้นเรื่อย ๆ ไม่มีขอบเขตจำกัด เมื่อ x เข้าใกล้ a ทางขวามือแทนด้วย $\lim\limits_{x\to a^+} f(x) = \infty$ ก็ต่อเมื่อ สำหรับทุก ๆ จำนวนจริง $N > 0$ จะมีจำนวนจริง $\delta > 0$ ซึ่งถ้าแต่ละ x ที่ $0 < x-a < \delta$ แล้ว $f(x) > N$

หมายเหตุ $\lim\limits_{x\to a^-} f(x) = \infty$ สามารถให้นิยามได้ในทำนองเดียวกัน

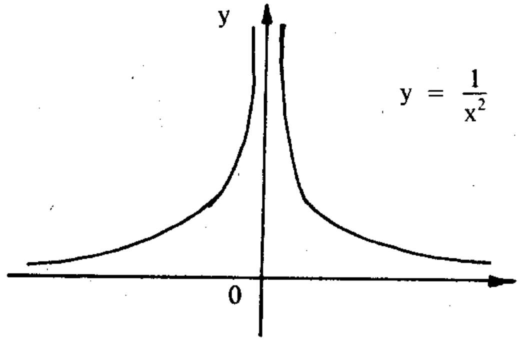
บทนิยาม 2.8 $f(x)$ มีค่าลดลงเรื่อย ๆ ไม่มีขอบเขตจำกัด เมื่อ x เข้าใกล้ a ทางซ้ายมือ เขียนแทนด้วย $\lim\limits_{x\to a^-} f(x) = -\infty$ ก็ต่อเมื่อสำหรับทุก ๆ จำนวนจริง $N > 0$ จะมีจำนวนจริง $\delta > 0$ ซึ่งแต่ละ x ถ้า $0 < a-x < \delta$ แล้ว $f(x) < -N$

หมายเหตุ $\lim\limits_{x\to a^+} f(x) = -\infty$ สามารถให้นิยามได้ในทำนองเดียวกัน

จาก $f(x) = \frac{x}{x-1}$ (รูป 2.16) เราได้ว่า

$\lim\limits_{x\to 1^+} f(x) = \infty$ และ $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x) = -\infty$

พิจารณา $f(x) = \frac{1}{x^2}$ ดังรูป 2.17



รูป 2.17

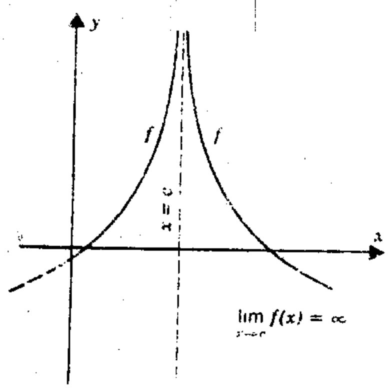
จะพบว่า f(x) มีค่าเพิ่มขึ้นไม่มีขอบเขตจำกัด ในขณะที่ x เข้าใกล้ 0 ทั้งทางซ้ายและทางขวา จึงให้บทนิยามของลิมิตในกรณีดังกล่าวดังนี้

บทนิยาม 2.9 f(x) มีค่าเพิ่มขึ้นไม่มีเซตจำกัด (f(x) มีค่าเข้าใกล้อนันต์) เมื่อ x เข้าใกล้ a เขียนแทนด้วย $\lim\limits_{x \to a} f(x) = \infty$ ก็ต่อเมื่อสำหรับทุก ๆ จำนวนธรรมชาติ $N > 0$ จะมีจำนวนจริง $\delta > 0$ ซึ่งถ้าแต่ละ x ซึ่ง $0 < |x-a| < \delta$ แล้ว $f(x) > N$ และการให้บทนิยาม $\lim\limits_{x \to a} f(x) = -\infty$ ทำได้ในทำนองเดียวกัน

ดังนั้น ในกรณี $f(x) = \frac{1}{x^2}$ (รูป 2.17) จึงได้ว่า $\lim\limits_{x \to a} \frac{1}{x^2} = \infty$

ข้อสังเกต เพราะว่า ∞ ไม่ใช่จำนวนจริง ดังนั้น $\lim\limits_{x \to a} f(x) = \infty$ กับ $\lim\limits_{x \to a} f(x) = L$ จึงมีความหมายแตกต่างกัน

ตัวอย่าง 2.27

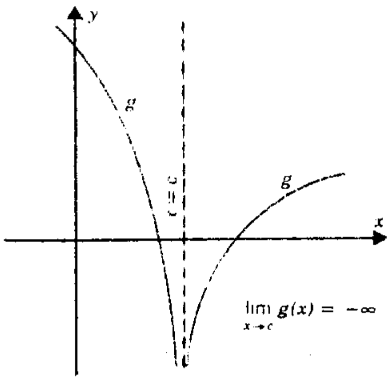


รูป 2.18

กำหนด f(x) ดังรูป 2.18 จะพบว่า ในขณะที่ x เข้าใกล้ c ทั้งทางซ้ายและทางขวา f(x) มีค่าเพิ่มขึ้นโดยไม่มีขอบเขต

ดังนั้น $\lim_{x \to c} f(x) = \infty$ #

ตัวอย่าง 2.28

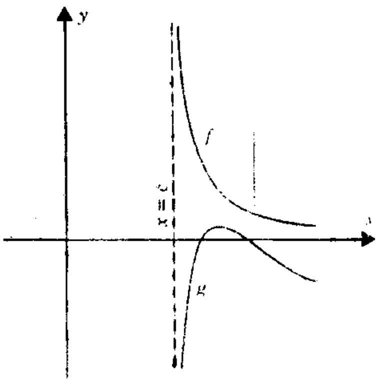


รูป 2.19

กำหนด g(x) ดังรูป 2.19 จะเห็นว่า g(x) มีค่าลดลงโดยไม่มีขอบเขตจำกัด ในขณะที่ x เข้าใกล้ c ทั้งทางซ้ายและทางขวา

ดังนั้น $\lim_{x \to c} g(x) = -\infty$ #

ตัวอย่าง 2.29



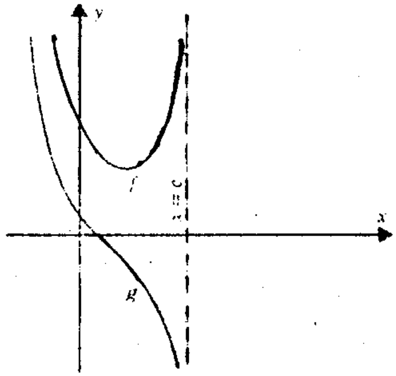
รูป 2.20

กำหนด f(x) และ g(x) ดังรูป 2.20 จะเห็นว่า f(x) มีค่าเพิ่มขึ้นโดยไม่มีขอบเขตจำกัด ในขณะที่ x เข้าใกล้ c ทางขวา และ g(x) มีค่าลดลงโดยไม่มีขอบเขตจำกัด ในขณะที่ x

เข้าใกล้ c ทางขวา

ดังนั้น $\ell\text{im}_{x \to c^+} f(x) = \infty$ และ $\ell\text{im}_{x \to c^+} g(x) = -\infty$ #

ตัวอย่าง 2.30



รูป 2.21

กำหนด f(x) และ g(x) ดังรูป 2.30 จะเห็นว่า f(x) มีค่าเพิ่มขึ้นไม่มีขอบเขตจำกัด ในขณะที่ x เข้าใกล้ c ทางซ้าย และ g(x) มีค่าลดลงไม่มีขอบเขตจำกัด ในขณะที่ x เข้าใกล้ c ทางซ้าย

ดังนั้น $\ell\text{im}_{x \to c^-} f(x) = \infty$ และ $\ell\text{im}_{x \to c^-} g(x) = -\infty$ #

แบบฝึกหัด 2.4

จงหาค่าลิมิตของฟังก์ชันต่อไปนี้

1. $\ell\text{im}_{x \to \infty} \dfrac{2x + 4}{3x - 1}$

2. $\ell\text{im}_{x \to \infty} \dfrac{x^2 + 2x + 5}{2x^2 - 6x + 1}$

3. $\ell\text{im}_{x \to \infty} \dfrac{2x^2 + 7x + 5}{x^3 + 2x + 1}$

4. $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{3x^3 - 2x + 1}{x^2 - 3x - 5}$

5. $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\sqrt{2x^2 + 1}}{x + 3}$

6. $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{\sqrt{x^2 + 4}}{x + 2}$

7. $\lim\limits_{x \to +\alpha} \sqrt{x^2} + a^2 - x$

8. $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{x^2}{1 - x^2}$

9. $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{4}{4 - x^2}$

10. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sqrt{1 + x}}{x}$

11. $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{x^2 + 2x^3}{x - 3x^2}$

12. $\lim\limits_{x \to 2^+} \dfrac{\sqrt{x^2 - 4}}{x - 2}$

13. $\lim\limits_{x \to +\infty} (\sqrt{x^2 + 2x - x})$

14. $\lim\limits_{x \to 2^+} \dfrac{\sqrt{4 - x^2}}{\sqrt{6 - 5x + x^2}}$

15. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{x + 1}{|x|}$

2.6 ลิมิตของฟังก์ชันตรีโกณมิติ

พิจารณาฟังก์ชัน

$$f(\theta) = \frac{\sin \theta}{\theta}$$

เมื่อ θ มีค่าเป็นเรเดียน ฟังก์ชันนี้หาค่าได้สำหรับทุก ๆ ค่าของ θ ยกเว้นที่ $\theta = 0$ **เพราะว่า** $\sin 0 = 0$ ถ้าเราแทนค่า $\theta = 0$ จะได้

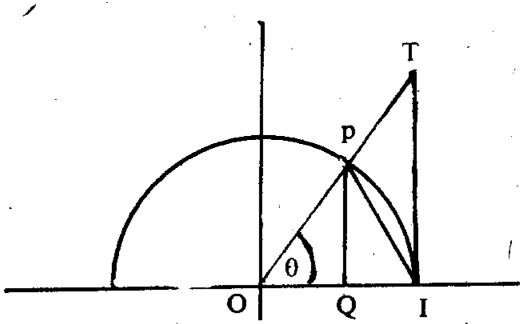
$$f(0) = \frac{\sin 0}{0} = \frac{0}{0}$$

ซึ่งค่านี้ในทางคณิตศาสตร์ไม่ได้ให้ความหมายไว้ อย่างไรก็ตามค่าลิมิต

$$\lim_{\theta \to 0} \frac{\sin \theta}{\theta}$$

หาค่าได้

พิจารณาค่า θ ซึ่งเป็นค่าบวกแต่มีค่าน้อยกว่า $\pi/2$ ดังรูป 2.22



รูป 2.22

จากรูป 2.22 พิจารณาส่วนโค้งของวงกลมหนึ่งหน่วย โดยที่ส่วนโค้ง **PI** ร่องรับมุม θ ที่จุด O

ลากเส้นตั้งฉาก PQ และ TI ดังรูป 2.22

จากรูปพบว่า

พ.ท. $\triangle$ OIP $<$ พ.ท.เซกเตอร์ OIP $<$ พ.ท. $\triangle$ OIT

$$\frac{1}{2}|PQ|\,|OI| < \frac{1}{2}(\theta)(1)^2 < \frac{1}{2}|IT|\,|OI|$$

$$|PQ| < \theta < |IT|$$

$$\frac{|PQ|}{|OP|} < \theta < \frac{|IT|}{|OI|} \quad (\because |OP| = |OI| = 1)$$

$$\sin\theta < \theta < \tan\theta$$

$$1 < \frac{\theta}{\sin\theta} < \frac{1}{\cos\theta}$$

จะได้ว่า $\cos\theta < \dfrac{\sin\theta}{\theta} < 1$

เรามีทฤษฎีบท ทฤษฎีบทหนึ่งกล่าวว่า สำหรับ $g(x) \leqslant f(x) \leqslant h(x)$

ถ้า $\lim_{x\to a} g(x) = L = \lim_{x\to a} h(x)$ แล้ว $\lim_{x\to a} f(x) = L$ ด้วย

เพราะว่า $\lim_{\theta\to 0} \cos\theta = 1$

และ $\lim_{\theta\to 0} 1 = 1$

ดังนั้นจึงสรุปได้ว่า $\lim_{\theta\to 0} \dfrac{\sin\theta}{\theta} = 1$

หมายเหตุ ในการพิสูจน์ พิจารณากรณีที่ θ เป็นค่าบวก $(0 \leqslant \theta \leqslant \frac{\pi}{2})$ แต่จะเห็นว่า $f(\theta) = \dfrac{\sin\theta}{\theta}$ เป็นฟังก์ชันคู่ (even function) ดังนั้น เมื่อแทนค่า θ ด้วย $-\theta$ จะได้

$$f(-\theta) = \frac{\sin(-\theta)}{-\theta} = \frac{-\sin\theta}{-\theta} = \frac{\sin\theta}{\theta} = f(\theta)$$

ดังนั้น เมื่อ θ เข้าใกล้ศูนย์ ไม่ว่าทางขวาหรือทางซ้ายก็ตาม ค่า $\dfrac{\sin\theta}{\theta}$ **มีค่าเข้าใกล้ 1 เสมอ**

ดังนั้น จะได้ทฤษฎีบทว่า

ทฤษฎีบท 2.9 ถ้า θ วัดเป็นเรเดียนแล้ว

$$\lim_{\theta\to 0} \frac{\sin\theta}{\theta} = 1$$

บทแทรก $$\lim_{\theta\to 0} \frac{1-\cos\theta}{\theta} = 0$$

พิสูจน์

$$\begin{aligned}\frac{(1-\cos\theta)}{\theta} &= \frac{(1-\cos\theta)(1+\cos\theta)}{\theta(1+\cos\theta)} \\ &= \frac{\sin^2\theta}{\theta(1+\cos\theta)} \\ &= \frac{\sin\theta}{\theta}\cdot\frac{\sin\theta}{1+\cos\theta}\end{aligned}$$

เพราะฉะนั้น

$$\begin{aligned}\lim_{\theta\to 0}\frac{(1-\cos\theta)}{\theta} &= \lim_{\theta\to 0}\frac{\sin\theta}{\theta}\cdot\lim_{\theta\to 0}\frac{\sin\theta}{1+\cos\theta} \\ &= 1(0) \\ &= 0\end{aligned}$$

#

ตัวอย่าง 2.31 จงหาค่าของ $\lim_{\theta\to 0}\frac{\sin 2\theta}{\theta}$

วิธีทำ เขียน $\frac{\sin 2\theta}{\theta} = \frac{2\sin 2\theta}{2\theta}$

ดังนั้น

$$\begin{aligned}\lim_{\theta\to 0}\frac{\sin 2\theta}{\theta} &= \lim_{\theta\to 0}\frac{2\sin 2\theta}{2\theta} \\ &= 2\lim_{\theta\to 0}\frac{\sin 2\theta}{2\theta} \\ &= 2\lim_{2\theta\to 0}\frac{\sin 2\theta}{2\theta} \\ &= 2(1) \\ &= 2\end{aligned}$$

#

ตัวอย่าง 2.32 จงหาค่าของ $\lim_{x\to 0}\frac{\sin 3x}{\sin 5x}$

วิธีทำ เขียน $\dfrac{\sin 3x}{\sin 5x} = \dfrac{\sin 3x}{x} \cdot \dfrac{x}{\sin 5x}$

เพราะฉะนั้น $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sin 3x}{\sin 5x} = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sin 3x}{x} \cdot \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{x}{\sin 5x}$

$$= 3 \lim_{x \to 0} \frac{\sin 3x}{3x} \quad \frac{1}{5} \lim_{x \to 0} \frac{5x}{\sin 5x}$$

$$= \frac{3}{5} \lim_{3x \to 0} \frac{\sin 3x}{3x} \quad \frac{1}{\lim\limits_{5x \to 0} \dfrac{\sin 5x}{5x}}$$

$$= \frac{3}{5} (1)(1)$$

$$= \frac{3}{5}$$

#

ตัวอย่าง 2.33 จงหาค่าของ $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sin x}{x}$ เมื่อ x เป็นหน่วยองศา

วิธีทำ เพราะว่า $\sin x° = \sin \left(\dfrac{\pi x}{180}\right)$

เพราะฉะนั้น

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = \lim_{x \to 0} \frac{\sin \frac{\pi x}{180}}{x}$$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{\pi}{180} \cdot \frac{\sin \frac{\pi x}{180}}{\frac{\pi x}{180}}$$

$$= \frac{\pi}{180} \lim_{x \to 0} \frac{\sin \frac{\pi x}{180}}{\frac{\pi x}{180}}$$

$$= \frac{\pi}{180} \lim_{\frac{\pi x}{180} \to 0} \frac{\sin \frac{\pi x}{180}}{\frac{\pi x}{180}}$$

$$= \frac{\pi}{180} (1)$$

$$= \frac{\pi}{180}$$

#

แบบฝึกหัด 2.5

จงหาค่าของลิมิตต่อไปนี้

1. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sin 5x}{x}$

2. $\lim\limits_{\theta \to 1} \dfrac{\sin 2(\theta - 1)}{\theta - 1}$

3. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sin 2x}{\sin 5x}$

4. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{x}{\tan x}$

5. $\lim\limits_{\theta \to 0} \dfrac{1 - \cos\theta}{4\theta^2}$

6. $\lim\limits_{\theta \to 0} \dfrac{1}{\theta \cot\theta}$

7. $\lim\limits_{\theta \to \frac{\pi}{2}} \dfrac{\cos\theta}{\frac{\pi}{2} - \theta}$

8. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{x}{\operatorname{cosec}^2 x}$

9. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\cot^2 x}{4x^2}$

10. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{x^3}{\tan^3 3x}$

2.7 ความต่อเนื่อง (continuity) ของฟังก์ชัน

บทนิยาม 2.9 ฟังก์ชัน $f(x)$ มีความต่อเนื่องที่ $x = a$ ก็ต่อเมื่อ

(1) $f(x)$ หาค่าได้ที่ $x = a$ นั่นคือ $f(a)$ มีค่า

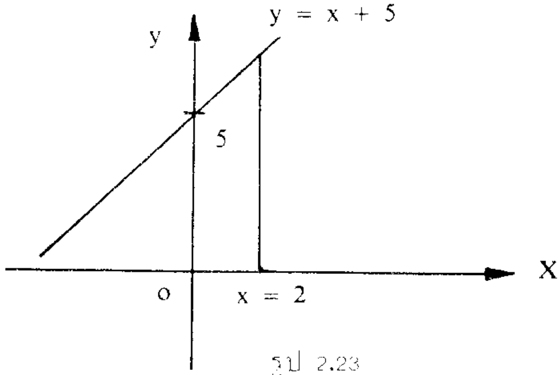
(2) $\lim\limits_{x \to a} f(x) = L$ (หาค่าได้)

(3) $f(a) = L$

จากบทนิยามของความต่อเนื่องของฟังก์ชัน จะเห็นว่าฟังก์ชัน $f(x)$ ต่อเนื่องที่ $x = a$ เมื่อค่าฟังก์ชันและค่าลิมิตที่ $x = a$ หาค่าได้ทั้งสองค่า และทั้งสองค่านั้นต้องเท่ากันด้วย ถ้า $f(x)$ ขาดคุณสมบัติข้อใดข้อหนึ่งในสามข้อดังกล่าวแล้ว f จะไม่ต่อเนื่องที่ $x = a$

ตัวอย่าง 2.34 กำหนดให้ $f(x) = x + 5$ จงพิจารณาว่า f ต่อเนื่องที่ $x = 2$ หรือไม่

วิธีทำ เราสามารถเขียนกราฟได้ดังรูป 2.23



รูป 2.23

จากรูปจะเห็นว่า $f(x)$ ไม่ขาดตอนที่ $x = 2$

พิจารณา $f(2) = 2 + 5 = 7$

$$\lim_{x \to 2} f(x) = \lim_{x \to 2} x + 5$$

$$= 7$$

เพราะฉะนั้น $\lim\limits_{x \to 2} x + 5 = f(2)$

เพราะฉะนั้น f มีความต่อเนื่องที่ $x = 2$ #

ตัวอย่าง 2.35 กำหนด $f(x) = \begin{cases} 2 & \text{ถ้า } x \text{ เป็นจำนวนเต็ม} \\ 1 & \text{ถ้า } x \text{ ไม่เป็นจำนวนเต็ม} \end{cases}$

จงพิจารณาว่า f ต่อเนื่องที่ x = 3 หรือไม่

วิธีทำ เพราะว่า $f(3) = 2$

แต่ $\lim\limits_{x\to 3} f(x) = 1$

เพราะฉะนั้น $\lim\limits_{x\to 3} f(x) \neq f(3)$

แสดงว่า f ไม่ต่อเนื่องที่ x = 3

ตัวอย่าง 2.36 กำหนดให้ $f(x) = \begin{cases} x & \text{ถ้า } 0 \leqslant x \leqslant 10 \\ 0.9x & \text{ถ้า } x > 10 \end{cases}$

จงพิจารณาว่า f ต่อเนื่องที่ x = 10 หรือไม่

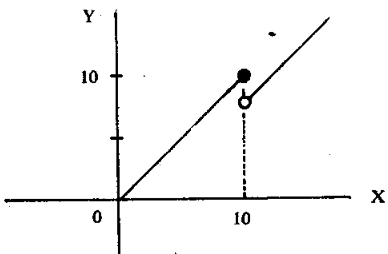
วิธีทำ $f(10) = 10$

และ $\lim\limits_{x\to 10^+} f(x) = 9$

$\lim\limits_{x\to 10^-} f(x) = 10$

ดังนั้น $\lim\limits_{x\to 10} f(x)$ หาค่าไม่ได้

ดังนั้น f ไม่ต่อเนื่องที่ x = 10 เพราะไม่สอดคล้องกับเงื่อนไขข้อ (2) พิจารณารูป 2.22



รูป 2.24

#

บทนิยาม 2.10 ฟังก์ชัน f(x) จะเรียกว่าเป็นฟังก์ชันต่อเนื่องในช่วง [a, b] ก็ต่อเมื่อ f(x) ต่อเนื่องที่ทุก ๆ จุด $x \in [a, b]$

แบบฝึกหัด 2.6

จงพิจารณาว่าฟังก์ชันที่กำหนดให้ต่อไปนี้ต่อเนื่องหรือไม่ พร้อมเขียนรูปกราฟของฟังก์ชัน

1. $$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{ถ้า } x < 1 \\ 0 & \text{ถ้า } x \geqslant 1 \end{cases}$$

2. $$f(x) = \begin{cases} 2 + x & \text{ถ้า } x \neq 3 \\ 4 & \text{ถ้า } x = 3 \end{cases}$$

3. $$f(x) = \begin{cases} x & \text{ถ้า } 0 \leqslant x \leqslant 10 \\ 0.9x + 1 & \text{ถ้า } x > 10 \end{cases}$$

4. $$f(x) = \begin{cases} 3x - 1 & \text{ถ้า } x \leqslant 1 \\ 3x & \text{ถ้า } x > 1 \end{cases}$$

5. $$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2 - 9}{x - 2} & \text{ถ้า } x \neq 2 \\ 2 & \text{ถ้า } x = 2 \end{cases}$$

6. $$f(x). = \begin{cases} \dfrac{x^2 - 4}{x - 2} & \text{ถ้า } x \neq 2 \\ 4 & \text{ถ้า } x = 2 \end{cases}$$

7. $$f(x) = \begin{cases} \dfrac{6}{x - 2} & \text{ถ้า } x \neq 2 \\ 3 & \text{ถ้า } x = 2 \end{cases}$$

8. $$f(x) = \begin{cases} \dfrac{2}{x + 5} & \text{ถ้า } x \neq -5 \\ 0 & \text{ถ้า } x = -5 \end{cases}$$

9. $$f(x) = \begin{cases} -3 & \text{ถ้า } x < 0 \\ 0 & \text{ถ้า } x = 0 \\ x^2 + 1 & \text{ถ้า } x > 0 \end{cases}$$

10. $$f(x) = \begin{cases} 2 + x & \text{ถ้า } x \leqslant -2 \\ 3 - x & \text{ถ้า } -2 < x \leqslant 2 \\ 4x - 1 & \text{ถ้า } x > 2 \end{cases}$$