บทที่ 1
ความรู้พื้นฐานเบื้องต้น
(Some Basic Notions)

1.1 เซต (Set)

เซตเป็นคำหนึ่งในทางคณิตศาสตร์ที่เป็นพจน์อนิยาม (undefined term) ซึ่งจะใช้ก็ต่อเมื่อต้องการบ่งถึงพวก หมู่ หรือกลุ่มของสิ่งของอย่างใดอย่างหนึ่ง โดยต้องทราบแน่นอนว่าสิ่งใดอยู่ในกลุ่มหรือไม่อยู่ในกลุ่ม สิ่งที่อยู่ในกลุ่ม เรียกว่า สมาชิก (element) ของเซต ซึ่งแต่ละกลุ่มอาจมีสมาชิกหรือไม่มีสมาชิกก็ได้

แนวความคิดเรื่องเซตนี้ ผู้ที่ริเริ่มทฤษฎีเซตเป็นนักคณิตศาสตร์ ชาวเยอรมัน ชื่อ เกออร์จ คันตอร์ (Georg Cantor; 1845 – 1918) ซึ่งพบว่าเซตมีบทบาทสำคัญในทางคณิตศาสตร์เกือบทุกแขนง

ตัวอย่างของเซต เช่น

1. เซตของจำนวนเต็มบวกจาก 1 ถึง 10
2. เซตของเกรดในการวัดผลของมหาวิทยาลัยรามคำแหง
3. เซตของไดโนเสาร์ในปัจจุบันนี้

จะพบว่าเซต 1 มีสมาชิก 10 ตัวคือ 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10

เซต 2 มีสมาชิก 3 ตัวคือ G, P, F

ส่วนเซต 3 ไม่มีสมาชิกเลย

เพื่อความสะดวกจะแทนเซตด้วยตัวอักษรตัวใหญ่ A, B, C... และแทนสมาชิกของเซตด้วยอักษรตัวเล็ก a, b, c,...

ถ้า x เป็นสมาชิกของ A เราแทนด้วย $x \in A$ และ ถ้า x ไม่เป็นสมาชิกของ A เราแทนด้วย $x \notin A$

1.2 การเขียนเซต

ในการเขียนเซตเพื่ออธิบายว่าเซตใดเซตหนึ่งประกอบด้วยสมาชิกใดบ้าง มีวิธีการเขียน 2 วิธี คือ

1. เขียนแบบแจกแจงสมาชิก การเขียนแบบนี้ต้องเขียนสมาชิกทุกตัวอยู่ในวงเล็บปีกกา และคั่นระหว่างสมาชิกแต่ละตัวด้วย เครื่องหมายจุลภาค " , " ตัวอย่างเช่น

$A = \{1, 3, 5, 7\}$

$B = \{a, e, i, o, u\}$

สำหรับกรณีที่เซตมีสมาชิกมากไม่สะดวกในการเขียนสมาชิกทุกตัวของเซต เรานิยมเขียนเพียง 3 ตัว ต่อด้วยจุด 3 จุด และตัวสุดท้ายถ้ามี ตัวอย่างเช่น

$A = \{1,2,3,\ldots, 100\}$

$B = \{1,3,5,\ldots\}$

2. เขียนแบบบอกเงื่อนไขของสมาชิก การเขียนแบบนี้อาศัยคุณสมบัติที่สมาชิกของเซตทุกตัวมีร่วมกันอยู่ในรูป

$\{x | P(x)\}$

โดยที่ x เป็นตัวแปรที่เป็นสมาชิก และมีคุณสมบัติ $P(x)$ ร่วมกันอยู่ ส่วนเครื่องหมาย " | " ใช้แทนคำว่า "ซึ่ง" จากตัวอย่างของการเขียนแบบแจกแจงสมาชิก นำมาเขียนแบบบอกเงื่อนไขได้ดังนี้

$A = \{x | x$ เป็นจำนวนนับตั้งแต่ 1 ถึง 100 $\}$

$B = \{x | x$ เป็นจำนวนนับซึ่งเป็นเลขคี่$\}$

1.3 ชนิดของเซต

โดยการพิจารณาสมาชิกของเซตเป็นหลัก เราแบ่งเซตออกได้ดังนี้

1. เซตจำกัด (Finite Set)

บทนิยาม 1.1 เซตจำกัด คือ เซตซึ่งสามารถบอกได้ว่าเซตนั้น มีสมาชิกเป็นจำนวนเท่าใด จำนวนสมาชิกของเซตจำกัด อาจเป็นศูนย์ หรือเป็นจำนวนเต็มบวก เช่น

$A = \{1, 2, 3, 4\}$

$B = \{1, 3, 5, \ldots, 101\}$

$C = \{x|x$ เป็นจำนวนเต็มซึ่งอยู่ระหว่าง 1 กับ 2$\}$

จะเห็นว่า A มีสมาชิก 4 ตัว B มีสมาชิก 101 ตัว และ C ไม่มีสมาชิกเลย หรือกล่าวว่าสมาชิกของ C มีศูนย์ตัว

2. เซตอนันต์ (Infinite Set)

บทนิยาม 1.2 เซตอนันต์ คือ เซตซึ่งไม่ใช่เซตจำกัด กล่าวคือเป็นเซตที่ไม่สามารถบอกได้ว่ามีสมาชิกเป็นจำนวนเท่าใด เช่น

$X = \{1, 3, 5, \ldots\}$

$W = \{x|x$ เป็นจำนวนจริงระหว่าง 0 กับ 1$\}$

3. เซตว่าง (Empty Set, Null Set, Void Set)

บทนิยาม 1.3 เซตว่าง คือ เซตที่ไม่มีสมาชิก หรือ จำนวนสมาชิกเท่ากับศูนย์ ใช้สัญลักษณ์ ϕ หรือ $\{\ \}$

เช่น $A = \{x|x$ เป็นจำนวนนับระหว่าง 3 กับ 4$\}$

$B = \{x|x$ เป็นจำนวนจริงซึ่ง $x^2+1 = 0\}$

จะเห็นว่า A และ B ไม่มีสมาชิกเลย ดังนั้น $A = \phi$ และ $B = \phi$ จากบทนิยาม 1.3 จะพบว่าเซตว่างเป็นเซตจำกัดด้วย

4. เอกภพสัมพัทธ์ (Universal set, Universe)

บทนิยาม 1.4 เอกภพสัมพัทธ์ คือ เซตซึ่งทุก ๆ เซตที่กำลังศึกษา หรือพิจารณาอยู่มีสมาชิกซึ่งเป็นสมาชิกของเซตนี้ทั้งสิ้น ใช้สัญลักษณ์ U แทนเซตจักรวาล

ตัวอย่างเช่น กำลังศึกษารากจำนวนจริงของพหุนาม (polynomial) เอกภพสัมพัทธ์ คือ เซตของจำนวนจริง

1.4 **ความสัมพันธ์ระหว่างเซต** (Relation between Sets)

1. เซตย่อย (Subsets)

บทนิยาม 1.5 เซต A เป็นเซตย่อยของ B ก็ต่อเมื่อสมาชิกทุกตัวของ A เป็นสมาชิกของ B เขียนแทนด้วย $A \subseteq B$

ตัวอย่าง 1.1 กำหนดให้ $A = \{2, 4, 6\}$

$B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

ดังนั้น $A \subseteq B$

ข้อสังเกต สำหรับเซต A ใด ๆ จะได้ว่า $A \subseteq A$ และ $\phi \subseteq A$

2. เซตย่อยแท้ (Proper Subsets)

บทนิยาม 1.6 เซต A เป็นเซตย่อยแท้หรือของ B ก็ต่อเมื่อ สมาชิกทุกตัวของ A เป็นสมาชิกของ B และมีสมาชิกบางตัวของ B ไม่เป็นสมาชิกของ A เขียนแทนด้วย $A \subset B$

ตัวอย่าง 1.2 กำหนดให้ $A = \{2, 3, 4\}$, $B = \{2, 4, 3\}$, $C = \{1, 2, 3, 4\}$

จะได้ว่า $A \subseteq B$, $A \subseteq C$, $B \subseteq C$

$A \subset C$, $B \subset C$

แต่ $A \not\subset B$

3. การเท่ากันของเซต (Equal Set)

บทนิยาม 1.7 เซต A เท่ากับเซต B ก็ต่อเมื่อ $A \subseteq B$ และ $B \subseteq A$ เขียนแทนด้วย $A = B$

ตัวอย่าง 1.3 กำหนดให้ $A = \{2, 4, 5, 8, 13\}$

$B = \{13, 2, 8, 5, 4\}$

จะเห็นว่า $A \subseteq B$ และ $B \subseteq A$

ดังนั้น $A = B$

1.5 เซตกำลัง (Power Set)

บทนิยาม 1.8 กำหนดให้ A เป็นเซตใด ๆ เซตกำลังของ A คือ เซตที่ประกอบด้วยทุกเซตที่เป็นเซตย่อยของ A เขียนแทนด้วย P(A)

นั่นคือ $P(A) = \{B \mid B \subseteq A\}$

ตัวอย่าง 1.4 กำหนดให้ $A = \phi$

เซตย่อยของ A คือ ϕ ดังนั้น $P(A) = \{\phi\}$

กำหนดให้ $A = \{1\}$

เซตย่อยของ A คือ ϕ, $\{1\}$ ดังนั้น $P(A) = \{\phi, \{1\}\}$

กำหนดให้ $A = \{1, 2\}$

เซตย่อยของ A คือ ϕ, $\{1\}$, $\{2\}$, $\{1, 2\}$

ดังนั้น $P(A) = \{\phi, \{1\}, \{2\}, \{1, 2\}\}$

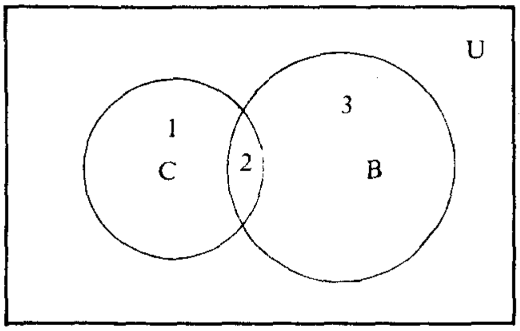
ข้อสังเกต ถ้า n(A) เป็นจำนวนสมาชิกของเซต A ดังนั้น จำนวนเซตย่อยของ A เท่ากับ $2^{n(A)}$ ตัวอย่างเช่น $A = \{a, b, c\}$ จำนวนสมาชิกของ A เท่ากับ $2^3 = 8$ แสดงว่า P(A) มีสมาชิก 8 ตัว

1.6 แผนภาพเวนน์ (Venn Diagram)

แผนภาพเวนน์เป็นแผนภาพที่เขียนแสดงความสัมพันธ์ระหว่างเซต ใช้ประโยชน์ในการศึกษาเกี่ยวกับเซต ผู้ที่นำมาใช้เป็นครั้งแรกเป็นนักคณิตศาสตร์ชาวสวิส ชื่อ เลียวนาร์ด ออยเลอร์ (Leonard Euler; 1707 – 1783) ออยเลอร์นำมาใช้อธิบายความรู้ขั้นพื้นฐานทางตรรกวิทยา ต่อมานักคณิตศาสตร์ชาวอังกฤษ ชื่อ จอห์น เวนน์ (John Venn; 1834 – 1923) ใช้อธิบายแนวความคิดต่าง ๆ ทางคณิตศาสตร์

ในการเขียนแผนภาพแทนเซต ใช้รูปสี่เหลี่ยมผืนผ้าแทนเอกภพสัมพัทธ์ และรูปวงกลมหรือวงรี แทนเซตที่กำลังศึกษา หรือพิจารณา

ให้ U เป็นเซตของนักศึกษาคณะวิทยาศาสตร์ มหาวิทยาลัยรามคำแหง C และ B เป็นเซตของนักศึกษาที่เรียนแคลคูลัส และชีววิทยาตามลำดับ เราอธิบายได้ด้วยแผนภาพเวนน์ ทั้ง C และ B ต่างก็เป็นเซตย่อยของ U ส่วนที่ 1 คือ ส่วนที่อยู่ใน C แต่ไม่อยู่ใน B หมายถึง นักศึกษาที่เรียนแคลคูลัส แต่ไม่เรียนชีววิทยา ส่วนที่ 2 คือ ส่วนที่อยู่ทั้งใน C และ B หมายถึง นักศึกษาที่เรียนแคลคูลัส และชีววิทยา ส่วนที่ 3 หมายถึง นักศึกษาที่เรียนชีววิทยา แต่ไม่เรียนแคลคูลัส แต่สำหรับนักเรียนที่เรียนอย่างใดอย่างหนึ่งหมายถึงเซตบริเวณ 1 หรือ 3 ดังรูป 1.1



รูป 1.1

ซึ่งประโยชน์อีกส่วนหนึ่งของแผนภาพเวนน์ใช้อธิบายการดำเนินการของเซต (Operation of Sets)

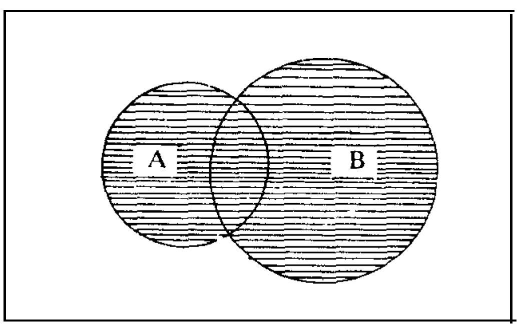
1.7 **การดำเนินการของเซต** (Operation of Sets)

การดำเนินการของเซต มี 4 แบบ คือ

1. ผลผนวก (Union)

บทนิยาม 1.9 กำหนดให้ A, B เป็นเซตใด ๆ ผลผนวกของ A และ B คือ เซตที่มีสมาชิกเป็นสมาชิกของ A หรือ B เขียนแทนด้วย $A \cup B$ เขียนในรูปเซตได้ดังนี้

$$A \cup B = \{x | x \in A \text{ หรือ } x \in B\}$$



รูป 1.2

ตัวอย่าง 1.5 กำหนดให้ $A = \{2, 4, 6, 8, 10, 12\}$, $B = \{1, 4, 9, 16\}$, $C = \{2, 10\}$

จะได้ว่า
$$A \cup B = \{1, 2, 4, 6, 8, 9, 10, 12, 16\}$$
$$A \cup C = \{2, 4, 6, 8, 10, 12\}$$
$$B \cup C = \{1, 2, 4, 9, 10, 16\}$$
$$A \cup A = \{2, 4, 6, 8, 10, 12\} = A$$

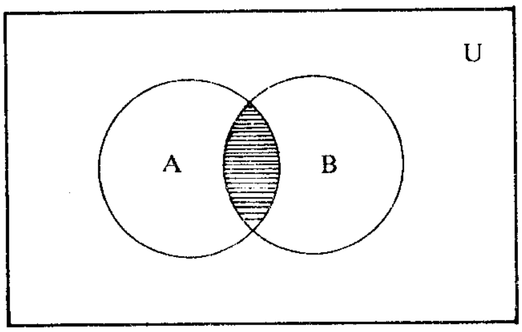
ข้อสังเกต (1) ถ้า $A \subseteq B$ แล้ว $A \cup B = B$

(2) $A \cup A = A$

2. ผลตัด (Intersection)

บทนิยาม 1.10 กำหนดให้ A, B เป็นเซตใด ๆ ผลตัดของ A และ B คือ เซตที่มีสมาชิกเป็นสมาชิกของ A และ B เขียนแทนด้วย $A \cap B$ เขียนในรูปเซตได้ดังนี้

$$A \cap B = \{x \mid x \in A \text{ และ } x \in B\}$$



รูป 1.3

ตัวอย่าง 1.6 จากตัวอย่าง 1.5 จะได้ว่า
$$A \cap B = \{4\}$$
$$A \cap C = \{2, 10\}$$
$$B \cap C = \phi$$
$$A \cap A = \{2, 4, 6, 8, 10, 12\} = A$$

ข้อสังเกต (1) ถ้า $A \subseteq B$ แล้ว $A \cap B = A$

(2) $A \cap A = A$

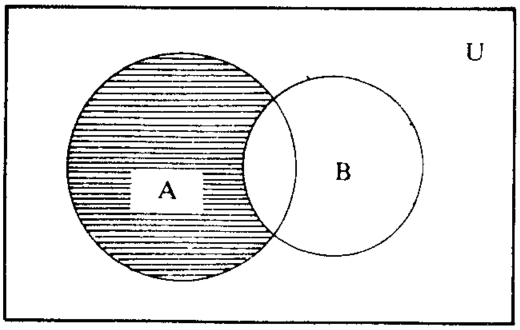
บทนิยาม 1.11 A และ B เป็นเซตต่างสมาชิก (disjoint sets) ก็ต่อเมื่อ สมาชิกของ A และ B ไม่เกี่ยวข้องกัน หรือ $A \cap B = \phi$

จากตัวอย่าง 1.6 B, C เป็นเซตต่างสมาชิก

3. ผลต่าง (Difference)

บทนิยาม 1.12 กำหนดให้ A, B เป็นเซตใด ๆ ผลต่างของ A และ B คือ เซตที่มีสมาชิกอยู่ใน A แต่ไม่อยู่ใน B เขียนแทนด้วย A - B เขียนในรูปเซตดังนี้

$$A - B = \{x | x \in A \text{ และ } x \notin B\}$$



รูป 1.4

บริเวณที่แรเงาคือบริเวณที่แสดง A – B

ตัวอย่าง 1.7 กำหนดให้ $A = \{0, 2, 4, 6, 8\}$

$B = \{2, 4, 8\}$

ดังนั้น $A - B = \{0, 6\}$

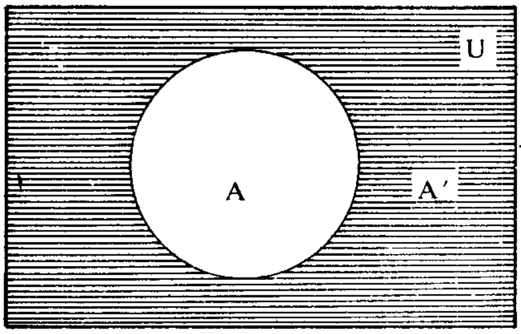
$B - A = \phi$

4. คอมพลีเมนต์ (complement)

บทนิยาม 1.13 กำหนดให้ A เป็นเซตใด ๆ คอมพลีเมนต์ของ A คือ เซตซึ่งมีสมาชิกอยู่ใน U แต่ไม่อยู่ใน A เขียนแทนด้วย A′ เขียนอยู่ในรูปเซตดังนี้

$$A' = \{x | x \in U \text{ และ } x \notin A\}$$

นั่นคือ $A' = U - A$



รูป 1.5

ตัวอย่าง 1.8 กำหนดให้ I แทน เซตของจำนวนเต็ม

E แทน เซตของจำนวนเต็มคู่

ดังนั้น E′ แทน เซตของจำนวนเต็มคี่

ตัวอย่าง 1.9 กำหนดให้

$A = \{1,2,3\}$

$B = \{3,5,7\}$

$C = \{2,4,6\}$

$D = \{1,3\}$

$U = \{1,2,3,\ldots, 10\}$

จะได้ว่า

$A \cup B = \{1,2,3,5,7\}$

$A \cup C = \{1,2,3,4,6\}$

$A \cup D = \{1,2,3\}$

$A \cap B = \{3\}$

$B \cap C = \phi$

$A - D = \{2\}$

$B - D = \{5,7\}$

$A' = \{4,5,6,7,8,9,10\}$

$B' = \{1,2,4,6,8,9,10\}$

ตัวอย่าง 1.10

กำหนดให้ $U = \{x | x$ เป็นจำนวนเต็มที่อยู่ระหว่าง 0 กับ 5$\}$

$A = \{x | x^2 - 2x + 1 = 0\}$

$B = \{x | (x-2)(x-3) = 0\}$

$C = \{2,4\}$

จงหาค่าของ $A \cup B$, $A \cap C$, A', $B - A$ และ $(A \cap B) \cup C$

วิธีทำ จากที่กำหนด $U = \{1,2,3,4\}$

$A = \{1\}$

$B = \{2,3\}$

$C = \{2,4\}$

จะได้ว่า $A \cup B = \{1,2,3\}$

$A \cap C = \phi$

$A' = \{2,3,4\}$

$B - A = \{2,3\}$

$(A \cap B) \cup C = \phi \cup \{2,4\} = \{2,4\}$

1.8 พีชคณิตของเซต (Algebra of Sets)

กำหนดให้ A, B, C เป็นเซตใด ๆ

1. กฎการปิด (Closure law)

$A \cup B$, $A \cap B$ เป็นเซต

2. กฎการเปลี่ยนกลุ่ม (associative law)

$$A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$$

$$A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$$

3. กฎการสลับที่ (commutative law)

$$A \cup B = B \cup A$$

$$A \cap B = B \cap A$$

4. กฎเอกลักษณ์ (Identity law)

$$A \cup \phi = A \quad A \cup U = U$$

$$A \cap \phi = \phi \quad A \cap U = A$$

5. กฎไอเดมโพเทนต์ (Idempotent law)

$$A \cup A = A$$

$$A \cap A = A$$

6. กฎส่วนเติมเต็ม (Complement law)

$$A \cup A' = U; \; A \cap A' = \phi$$

$$(A')' = A; \; \phi' = U$$

$$U' = \phi$$

7. กฎการแจกแจง (distributive law)

$$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$$

$$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$$

8. กฎของ เดอ มอร์กอง (de Morgan's law)

$$(A \cup B)' = A' \cap B'$$

$$(A \cap B)' = A' \cup B'$$

หมายเหตุ ในการเขียนเซต $A \cap B \cap C$ มีความหมาย แต่ $A \cap B \cup C$ ไม่มีความหมาย เพราะไม่ทราบว่าเป็น $(A \cap B) \cup C$ หรือ $A \cap (B \cup C)$ ซึ่งอันที่จริงแล้ว

$$A \cap (B \cup C) \neq (A \cap B) \cup C$$

ตัวอย่าง 1.11 รูปที่ง่ายที่สุดของ $[(A \cup B') \cap B]$ คือ เซตใด

วิธีทำ

$$
\begin{aligned}
[(A \cup B') \cap B'] &= (A \cup B')' \cup B' \\
&= (A' \cap B) \cup B' \\
&= (A' \cup B') \cap (B \cup B') \\
&= (A' \cup B') \cap U \\
&= A' \cup B'
\end{aligned}
$$

1.9 ข้อสรุปเกี่ยวกับเซตที่ควรทราบ

1. ϕ เป็นเซตจำกัด (finite set)
2. $\phi \in P(A)$, $A \in P(A)$
3. $\phi \subseteq A$, $A \subseteq A$, $\phi \subseteq P(A)$
4. ถ้า $A \subseteq \phi$ แล้ว $A = \phi$
5. $A \subseteq A \cup B$, $B \subseteq A \cup B$
6. $A \cap B \subseteq A$, $A \cap B \subseteq B$
7. $A \subseteq B$ ก็ต่อเมื่อ $A \cap B = A$
8. $A \subseteq B$ ก็ต่อเมื่อ $A \cup B = B$
9. $A \subseteq B$ ก็ต่อเมื่อ $A - B = \phi$
10. $A \subseteq B$ ก็ต่อเมื่อ $A \cap B' = \phi$
11. $A \subseteq B$ ก็ต่อเมื่อ $B' \subseteq A'$
12. ถ้า $A \cap B = \phi$ แล้ว $A \subseteq B'$ และ $B \subseteq A'$
13. ถ้า $A \cup B = \phi$ แล้ว $A = B = \phi$
14. $A \cup B = (A - B) \cup (B - A) \cup (A \cap B)$
15. $A - B = A \cap B'$
16. ถ้า $A \subseteq B$ แล้ว $n(A) \leqslant n(B)$; $n(A)$ = จำนวนสมาชิกของ A
17. $A \subseteq B$ ก็ต่อเมื่อ $P(A) \subseteq P(B)$

18. ถ้า $A \subseteq B$ และ $B \subseteq C$ แล้ว $A \subseteq C$

19. $P(A \cap B) = P(A) \cap P(B)$

แต่ $P(A \cup B) \neq P(A) \cup P(B)$

20. $P(A - B) \neq P(A) - P(B)$

แบบฝึกหัด 1.1

1. จงเขียนบรรยายสัญลักษณ์ต่อไปนี้

(1) $P \subseteq Q$ (2) $x \in A$ (3) $y \notin Q$

(4) ϕ (5) $\{0\}$

2. ข้อต่อไปนี้ข้อใดถูกหรือผิด

(1) $2 \in \{1,2,3\}$

(2) $\{2,3\} = \{3,2\}$

(3) $\{2,3\} = \{2,2,3,2,3\}$

(4) $\{2\} \in \{1,2,3\}$

3. จงเขียนเซตต่อไปนี้ในรูปแจกแจงสมาชิก

(1) $\{x \mid x$ เป็นจำนวนนับที่มากกว่า 30 แต่น้อยกว่า 50$\}$

(2) $\{x \mid x$ เป็นชื่อวันในรอบสัปดาห์$\}$

(3) $\{x \mid x^2 - 3x + 2 = 0\}$

(4) $\{x \mid x$ เป็นจำนวนนับที่เป็นเลขคู่ และน้อยกว่า 14$\}$

(5) $\{y \mid y^2 - 2y + 1 = 0\}$

4. จงเขียนเซตต่อไปนี้ในรูปบอกเงื่อนไข

(1) $\{1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$

(2) {ม่วง, คราม, น้ำเงิน, เขียว, เหลือง, แสด, แดง}

(3) $\{a, e, i, o, u\}$

(4) $\left\{\frac{1}{5}, \frac{1}{10}, \frac{1}{15}, \frac{1}{20}, \frac{1}{25}\right\}$

(5) $\{20,40,60,\ldots\}$

5. กำหนดให้ $A = \{1,2,3,4,5,6,7\}$

$B = \{1,2,3,5\}$

$C = \{4,6,8\}$

และ $U = \{1,2,3,\ldots, 10\}$

จงหาค่าของ (1) $A \cap (B \cup C)$ (2) $A \cup (B \cap C)$

(3) $(A \cup B) \cup C$ (4) $(A \cup B) \cap (B \cup C)$

(5) $A - B$ (6) $B - C$

(7) $(A \cap B)'$ (8) C'

(9) $(A - B) \cap C$ (10) $(A \cup B) - C$

6. กำหนดให้ $U = \{1,2,3,\ldots, 9\}$

$A = \{1,2,3,4\}$

$B = \{2,4,6,8\}$

จงหาค่าของ (1) A' (2) B' (3) $(A \cup B)'$

7. จงเขียนเซตย่อยทั้งหมดของเซตที่กำหนดให้

(1) $A = \{1,3,5\}$

(2) $B = \{0,1,2,3,4\}$

และจงหา $P(A)$

8. กำหนดให้ $A = \{x \mid x^2 - 3x + 2 = 0\}$ $B = \{x \mid x$ เป็นเลขคู่ระหว่าง 0 กับ 4$\}$
$C = \{x \mid x = 2 + n, n = 0,1,2\}$ $D = \{x \mid x$ เป็นจำนวนนับที่น้อยกว่า 5$\}$ จงพิจารณาว่าข้อต่อไปนี้ข้อใดถูกต้อง

(1) $A \subseteq B$ (2) $B \subseteq C$ (3) $A \subseteq C$

(4) $A \subseteq D$ (5) $B \subseteq D$ (6) $A = C$

(7) $B = D$ (8) $A = D$ (9) $B \subseteq A$

9. จงยกตัวอย่างเซต A, B, C ซึ่ง

(1) $A \subseteq B \subseteq C$ (2) $A \subseteq B, B \cap C \neq \phi, A \nsubseteq C$

(3) $A \cap B \subseteq C$ (3) $A \cap B = \phi, A \cap C = \phi, B \subseteq C$

ให้เขียนแผนภาพเวนน์ประกอบ

10. กำหนดให้ $A \cap B = \{2,4\}$, $A \cup B = \{2,3,4,5\}$ $A \cap C = \{2,3,\}$ และ $A \cup C = \{1,2,3,4\}$ จงหาเซต A, B, C

1.10 ระบบจำนวน (Number System)

1. **จำนวนธรรมชาติ** (Natural numbers)

จำนวนธรรมชาติ หรือจำนวนนับประกอบด้วย จำนวน 1, 2, 3,... เรามักใช้สัญลักษณ์ N แทนเซตของจำนวนธรรมชาติ กล่าวคือ

$N = \{1, 2, 3,\dots\}$

2. **ศูนย์** (Zero)

ถ้าจะกำหนดเอกภพสัมพัทธ์ คือ เซตของจำนวนธรรมชาติ จะพบว่าไม่มีจำนวนธรรมชาติจำนวนใดเลยที่เป็นผลเฉลยของ "สมการ $x+a = a$ สำหรับจำนวนธรรมชาติ a ใด ๆ" จึงมีการสร้างจำนวนขึ้นมาใหม่ เพื่อให้สมการดังกล่าวมีผลเฉลย จำนวน x ที่เป็นผลเฉลยของสมการนี้ เรียกชื่อว่าศูนย์ (zero) เขียนแทนด้วย 0 และผลเฉลยของสมการนี้มีจำนวนเดียวเท่านั้น กล่าวคือจะไม่มีจำนวนอื่นที่มีสมบัติว่า $x+a = a$ สำหรับจำนวนธรรมชาติ a ใด ๆ เราเรียกเซตของจำนวนธรรมชาติผนวกกับศูนย์ว่า เซตของจำนวนทั้งหมด (Whole numbers) เขียนแทนด้วย W

ดังนั้น $W = \{0, 1, 2,\dots\}$

3. **จำนวนเต็ม** (Integers)

จากการสร้างจำนวนใหม่จากจำนวนธรรมชาติ จะพบว่า ทุกจำนวนธรรมชาติ a จะมีจำนวนธรรมชาติ $-a$ และมีจำนวนเดียวเท่านั้นที่ทำให้ $a+(-a) = 0$ เรียก $-a$ นี้ว่า นิเสธ (negative) ของ a เซตที่เป็นผลผนวกของเซตจำนวนทั้งหมดกับเซตของนิเสธของจำนวนนับทั้งหมดเรียกว่าเซตจำนวนเต็ม (Integers) เขียนแทนด้วย I

ดังนั้น $I = \{\ldots, -2, -1, 0, 1, 2, \ldots\}$

จำนวน 0 เรียกว่า จำนวนเต็มศูนย์

จำนวนนับ 1, 2, 3,... เรียกว่าจำนวนเต็มบวก

จำนวน $-\ldots, -3, -2, -1$ เรียกว่าจำนวนเต็มลบ

4. จำนวนตรรกยะ (Rational numbers)

จำนวนที่เขียนได้ในรูปเศษส่วน $\frac{p}{q}$ โดยที่ p, q เป็นจำนวนเต็ม และ $q \neq 0$ เรียกว่า**จำนวนตรรกยะ** เช่น $\frac{1}{2}, \frac{3}{4}$ หรือ $\frac{7}{5}$ เป็นต้น

จำนวนตรรกยะอาจแสดงได้ในรูปแบบของทศนิยม (decimal) ซึ่งอาจเป็นได้ทั้งทศนิยมรู้จบ (terminating decimal) หรือทศนิยมซ้ำ (repeating decimal) เช่น

$$\frac{7}{4} = 1.75, \quad \frac{2}{3} = 0.666\ldots, \quad \frac{2}{7} = 0.285714285714\ldots$$

เราสามารถเปลี่ยนจำนวนที่อยู่ในรูปแบบของทศนิยมรู้จบ และทศนิยมซ้ำให้เป็นรูปเศษส่วนได้เสมอ เช่น

$$1.75 = 1 + 0.75 = 1 + \frac{75}{100} = \frac{175}{100} = \frac{7}{4}$$

$$0.666\ldots = 0.\dot{6} = \frac{6}{9} = \frac{2}{3}$$

$$0.37\ldots = 0.3\dot{7} = \frac{37-3}{90} = \frac{34}{90} = \frac{17}{45}$$

$$0.285714285714\ldots = 0.\dot{2}8571\dot{4} = \frac{285714}{999999} = \frac{2}{7}$$

เซตของจำนวนตรรกยะเขียนแทนด้วย Q

และ $Q = \{x \mid x = \frac{p}{q}, p, q \in I, q \neq 0\}$

5. จำนวนอตรรกยะ (Irrational numbers)

จำนวนอตรรกยะ คือ จำนวนที่ไม่ใช่จำนวนตรรกยะ กล่าวคือ ไม่สามารถเขียนเป็นเศษส่วนของจำนวนเต็มได้ เช่น $\sqrt{2}, \pi, e$ เป็นต้น จำนวนอตรรกยะอาจเขียนในรูปทศนิยมได้ แต่จะเป็นทศนิยมไม่ซ้ำ เช่น

$\sqrt{2} = 1.414...$

$\pi = 3.41415926535897932384 6...$

$e = 2.71828...$ เป็นต้น

เราเขียนแทนเซตจำนวนอตรรกยะด้วย Q'

6. จำนวนจริง (Real line)

จำนวนจริง คือ ผลผนวกของจำนวนตรรกยะ และจำนวนอตรรกยะ เขียนแทนเซตจำนวนจริงด้วย R ดังนี้

$$R = Q \cup Q'$$

ในระบบจำนวนเราสามารถเขียนแผนภาพโครงสร้างของระบบจำนวนได้ดังนี้

จำนวนจริง (R)

- **จำนวนอตรรกยะ (Q')** $\{\sqrt{2}, e, \pi, \sqrt{3}, ...\}$
- **จำนวนตรรกยะ (Q)** $\{\frac{3}{4}, -\frac{7}{9}, 5, 0, 3.5, 0.7^{\circ}, ...\}$
  - **จำนวนเต็ม (I)** $\{..., -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, ...\}$
    - Whole numbers (W) $\{0, 1, 2, 3, 4, ...\}$
      - **จำนวนธรรมชาติ (N)** $\{1, 2, 3, 4, ...\}$

จะเห็นว่า $N \subseteq W \subseteq I \subseteq Q$

1.11 สมบัติทางพีชคณิตของจำนวนจริง (Algebraic property of real numbers)

ให้ $x, y, z \in R$

(1) สมบัติปิด (closure property)

สมบัติปิดของการบวก : สำหรับทุก ๆ $x, y \in R$ ผลบวกของ x และ y เขียนแทนด้วย $x+y$ มีเพียงหนึ่งค่าเท่านั้น และ $x+y \in R$

สมบัติปิดของการคูณ : สำหรับทุก ๆ $x, y \in R$ ผลคูณของ x และ y เขียนแทนด้วย $x \cdot y$ หรือ xy มีเพียงหนึ่งค่าเท่านั้น และ $x \cdot y \in R$

(2) สมบัติการสลับที่ (Commutative property)

สมบัติสลับที่ของการบวก : สำหรับทุก ๆ $x, y \in R$, $x+y = y+x$

สมบัติสลับที่ของการคูณ : สำหรับทุก ๆ $x, y \in R$, $xy = yx$

ตัวอย่าง 1.12 $2+3 = 3+2$

$2 \cdot 3 = 3 \cdot 2$ #

(3) สมบัติการเปลี่ยนกลุ่มได้ (associative property)

สมบัติการเปลี่ยนกลุ่มได้ของการบวก : สำหรับทุก ๆ $x, y, z \in R$,

$$x+(y+z) = (x+y)+z$$

สมบัติการเปลี่ยนกลุ่มได้ของการคูณ : สำหรับทุก ๆ $x, y, z \in R$

$$x(yz) = (xy)z$$

ตัวอย่าง 1.13 $2+(3+7) = (2+3)+7$

$2 \cdot (3 \cdot 7) = (2 \cdot 3) \cdot 7$ #

(4) สมบัติการแจกแจง (distributive law)

สำหรับทุก ๆ $x, y, z \in R$, $x \cdot (y+z) = x \cdot y + x \cdot z$

ตัวอย่าง 1.14 $2 \cdot (3+5) = 2 \cdot 3 + 2 \cdot 5$ #

(5) การมีเอกลักษณ์ (The existence of identity elements)

เอกลักษณ์สำหรับการบวก : มีสมาชิกของ R เพียงตัวเดียวเท่านั้น คือ 0 ซึ่ง

$$x+0 = x \text{ สำหรับ } x \in R$$

เอกลักษณ์สำหรับการคูณ : มีสมาชิกของ R เพียงตัวเดียวเท่านั้น คือ 1 ซึ่ง

$x \cdot 1 = x$ สำหรับ $x \in R$

(6) **การมีตัวผกผัน** (The existence of invorse element)

ตัวผกผันสำหรับการบวก : สำหรับทุก ๆ $x \in R$ จะมีสมาชิก $-x \in R$ เพียงตัวเดียวเท่านั้นที่ทำให้ $x+(-x) = 0$

ตัวผกผันสำหรับการคูณ : สำหรับทุก ๆ $x \in R-\{0\}$ จะมีสมาชิก $x^{-1} \in R$ และมีเพียงตัวเดียวเท่านั้น ที่ทำให้ $xx^{-1} = 1$

(7) **สมบัติการเท่ากัน**

สมบัติการสะท้อน (reflexive property) : $x = x$

สมบัติการสมมาตร (symmetric property) : ถ้า $x = y$ แล้ว $y = x$

สมบัติการถ่ายทอด (transitive property) : ถ้า $x = y$ และ $y = z$ แล้ว $x = z$

สมบัติการแทนที่ : ถ้า $x = y$ แล้ว สามารถแทน x ด้วย y และแทน y ด้วย x ได้

นอกจากสมบัติที่กล่าวข้างต้นแล้ว ก็ยังมีทฤษฎีบทสำคัญ ๆ ของจำนวนจริงดังต่อไปนี้ สำหรับทุกจำนวนจริง x, y, z

(1) ถ้า $x + z = y + z$ แล้ว $x = y$

(2) ถ้า $x \cdot z = y \cdot z$ และ $z \neq 0$ แล้ว $x = y$

(3) ถ้า $x \cdot y = 0$ แล้ว $x = 0$ หรือ $y = 0$

(4) $x \cdot 0 = 0$

(5) $(-1)x = -x$

(6) $-(-x) = x$

(7) $-(x+y) = -x + (-y)$

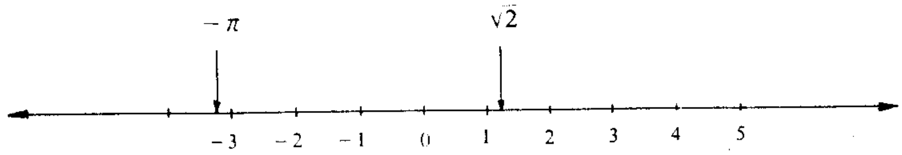
(8) $(-x)Y = -(xy) = x(-y)$

(9) $(-x)(-y) = xy$

สำหรับการลบ เรานิยามอยู่ในรูปการบวก คือ $x - y = x + (-y)$ และ การหารนิยามอยู่ในรูปการคูณ คือ $\frac{x}{y} = x \cdot y^{-1}$ เป็นต้น

1.12 เส้นจำนวนจริง (Real line)

ในทางเรขาคณิตเราแทนจำนวนจริงแต่ละจำนวนด้วยจุดบนเส้นตรง เส้นตรงนี้เรียกว่า **เส้นจำนวน** โดยเริ่มต้นจากการเลือกจุด ๆ หนึ่ง เรียกว่า จุดกำเนิด (origin) ซึ่งแทนด้วย ศูนย์ (0) **สำหรับ**จำนวนจริง x ใด ๆ ถ้า x เป็นจำนวนจริงบวก จุดที่แทนจำนวนจริง x คือ จุดที่อยู่ห่างจาก 0 **ไปทาง**ขวามือ เป็นระยะทาง x หน่วย ถ้า x เป็นจำนวนจริงลบ จุดที่แทนจำนวนจริง x คือ จุดที่อยู่ห่างจาก 0 ไปทางซ้ายมือ เป็นระยะทาง $-x$ หน่วย โดยวิธีนี้จะได้จุดแต่ละจุดบนเส้นตรงแทนจำนวนจริงเพียงจำนวนเดียวเท่านั้น



รูป 1.6 แสดงเส้นจำนวน

1.13 อสมการ (Inequality)

จากการที่เราแทนจำนวนจริงด้วยเส้นจำนวน เราพบว่า จำนวนจริงเป็นผลผนวก (union) ของเซตต่างสมาชิก 3 เซต คือ

(1) จำนวนจริงบวก : R^+

(2) จำนวนจริงลบ : R^-

(3) ศูนย์ : $\{0\}$

ซึ่งนำมาใช้กับนิยามของอสมการดังต่อไปนี้

บทนิยาม 1.14 $x, y \in R$ x มากกว่า y ก็ต่อเมื่อ $x - y \in R^+$
เขียนแทนด้วย $x > y$

บทนิยาม 1.15 $x, y \in R$ x น้อยกว่า y ก็ต่อเมื่อ $x - y \in R^-$
เขียนแทนด้วย $x < y$

บทนิยาม 1.16 สัญกรณ์ $x \geqslant y$ หมายความว่า x มากกว่า y หรือ x เท่ากับ y
$x \leqslant y$ หมายความว่า x น้อยกว่า y หรือ x เท่ากับ y

ข้อสังเกต จากบทนิยาม และเรื่องเส้นจำนวนทำให้ได้ข้อสรุปว่า ถ้า $x \in R^+$ แล้ว $x > 0$ **และถ้า** $x \in R^-$ แล้ว $x < 0$ ดังนั้น $x \in R$ แล้ว $x > 0$ หรือ $x < 0$ หรือ $x = 0$ อย่างใดอย่างหนึ่ง**เท่านั้น**

ตัวอย่าง 1.15 $5 > 2$ เพราะว่า $5 - 2 = 3$ เป็นจำนวนจริงบวก

$-2 < -1$ เพราะว่า $-2-(-1) = -1$ เป็นจำนวนจริงลบ #

กำหนดให้ $a, b \in R$ และ $a < b$ เรานิยามช่วง (intervals) ได้ดังต่อไปนี้

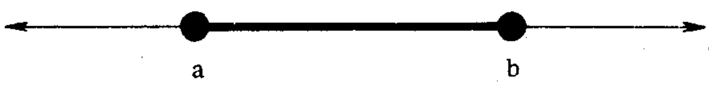
(1) **ช่วงเปิด** (open interval)

ช่วงเปิดจาก a ถึง b เขียนแทนด้วย (a, b) คือ เซต $\{x|x \in R, a < x < b\}$ เขียนรูปบนเส้นจำนวนได้ดังนี้

รูป 1.7

(2) **ช่วงปิด** (closed interval)

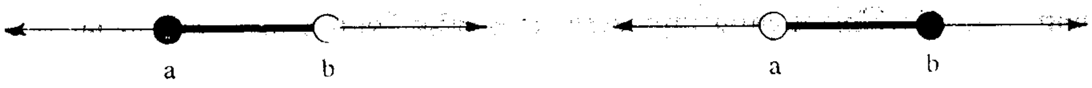
ช่วงปิดจาก a ถึง b เขียนแทนด้วย [a, b] คือ เซต $\{x|x \in R, a \leqslant x \leqslant b\}$ เขียนแทนบนเส้นจำนวนได้ดังนี้



รูป 1.8

(3) **ช่วงครึ่งเปิด** (half-open interval)

ช่วงครึ่งเปิด จาก a ถึง b มี 2 แบบ คือ ครึ่งเปิดทางขวา คือ เซต $\{x|x \in R, a \leqslant x < b\}$ เขียนแทนด้วย [a, b) และครึ่งเปิดทางซ้าย คือ เซต $\{x|x \in R, a < x \leqslant b\}$ เขียนแทนด้วย (a, b] เขียนแทนบนเส้นจำนวนได้ดังนี้



รูป 1.9

(4) ช่วงอนันต์ (infinite interval)

ช่วงอนันต์ แบ่งออกได้เป็น 5 แบบ คือ :

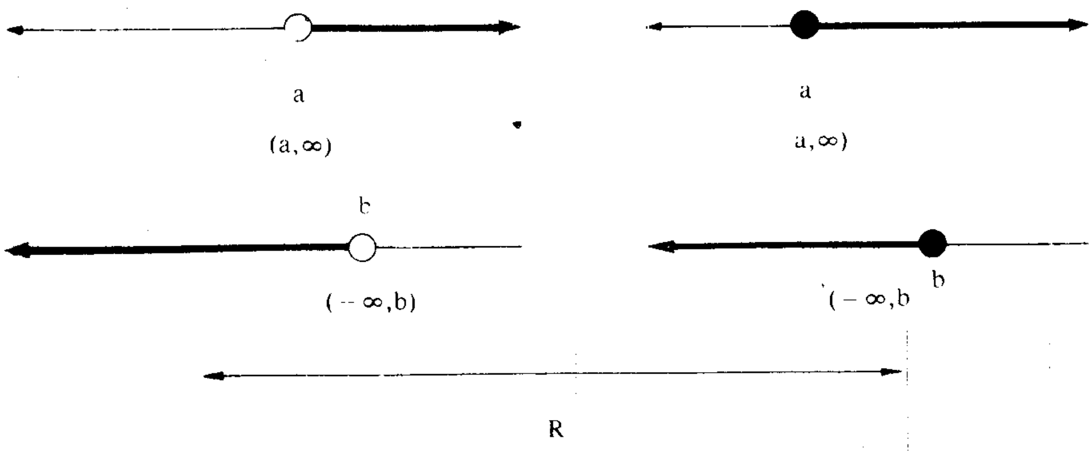
$(a,\infty) \;=\; \{x \mid x > a\}$

$[a,\infty) \;=\; \{x \mid x \geq a\}$

$(-\infty,b) = \{x \mid x < b\}$

$(-\infty,b] = \{x \mid x \leq b\}$

$(-\infty,\infty) =$ R (เซตของจำนวนจริงทั้งหมด)



รูป 1.10 แสดงช่วงอนันต์

หมายเหตุ ∞ อ่านว่า บวกอนันต์ (positive infinity) แทนจำนวนที่มีค่ามากกว่าจำนวนจริงใด ๆ แต่ ∞ ไม่ใช่จำนวนจริง และ $-\infty$ อ่านว่า ลบอนันต์ (negative infinity) แทนค่ามาก ๆ ทางลบ หรือจำนวนที่มีค่าน้อยกว่าจำนวนจริงใด ๆ

ข้อสังเกต 1. **ช่วงที่ไม่รวมจุดปลายทุกจุดเรียกว่า ช่วงเปิด ได้แก่** (a,b), (a,∞) $(-\infty,b)$

2. **ช่วงที่รวมจุดปลายเรียกว่า ช่วงปิด ได้แก่** $[a,b]$, $[a,\infty)$, $(-\infty,b]$

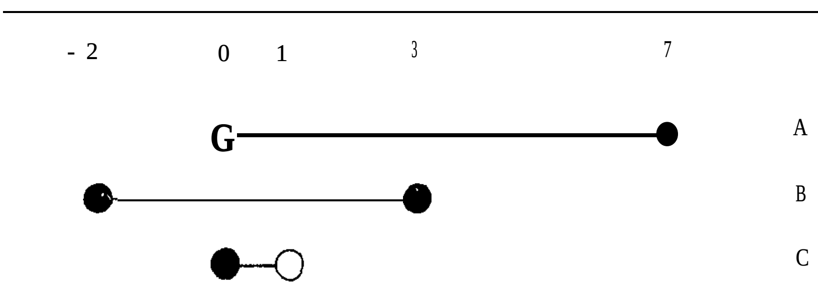
3. ในการเขียนช่วงบนเส้นจำนวน ถ้าช่วงนั้นรวมจุด a ใช้วงกลมทึบที่จุด a และถ้าไม่รวมจุด a จะใช้วงกลมโปร่งที่ a ดังรูป 1.9

ช่วงที่กล่าวมาข้างต้นแบ่งออกเป็น 2 **พวกใหญ่ ๆ คือ** ช่วงที่มีขอบเขต **(bounded interval) ได้แก่** (a,b) , $[a,b)$, $(a,b]$, $[a,b]$ และอีกประเภทหนึ่ง เรียกว่า ช่วงที่ไม่มีขอบเขต **ได้แก่** (a,∞) , $[a,\infty)$, $(-\infty,b)$ $(-\infty,b]$, $(-\infty,\infty)$

ตัวอย่าง 1.15 **กำหนดให้** $A = (0,7]$ $B = [-2,3]$ และ $C = [0,1)$

จงหาค่าของ $A \cap B$, $A \cup C$, $A - B$, $(A \cap B) - C$

วิธีทำ :



รูป **1.11**

จากรูป $A \cap B = \{x \mid 0 < x \leqslant 3\} = (0,3]$

$A \cup C = \{x \mid 0 \leqslant x \leqslant 7\} = [0,7]$

$A - B = \{x \mid 3 < x \leqslant 7\} = (3,7]$

$(A \cap B) - C = (0,3] - [0,1)$

$= [1,3]$ #

ตัวอย่าง 1.16 กำหนดให้ $A = \{x \mid x \in (3,5]\}$

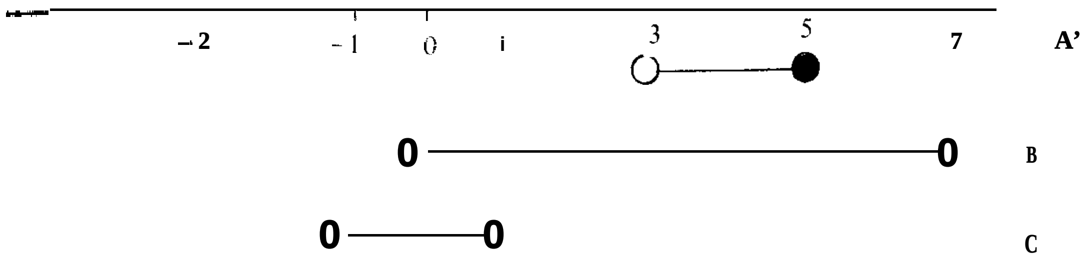
$B = \{x \mid 0 < x \leq 7\}$

และ $C = \{x \mid -1 < x < 1\}$

จงหาค่าของ $(A \cap B) \cap C$

วิธีทำ :

$$
\begin{aligned}
(A \cap B) \cap C &= ((3,5] \cap (0,7]) \cap (-1,1) \\
&= (3,5] \cap (-1,1) \\
&= \phi
\end{aligned}
$$



#

ต่อไปนี้ จะกล่าวถึงสมบัติที่สำคัญบางประการของอสมการ

ให้ $x, y, z, w \in R$

(1) สมบัติไตรวิภาคของจำนวนจริง (trichotomy property) : สำหรับ x, y ใด ๆ $x = y$ หรือ $x < y$ หรือ $x > y$ เท่านั้น

(2) สมบัติการถ่ายทอด (transitive property) : ถ้า $x > y$ และ $y > z$ แล้ว $x > z$

(3) สำหรับจำนวนจริง z ใด ๆ ถ้า $x > y$ แล้ว $x + z > y + z$

(4) ถ้า $x > y$ และ $z > 0$ แล้ว $xz > yz$ และ $\frac{x}{z} > \frac{y}{z}$

(5) ถ้า $x > y$ และ $z < 0$ แล้ว $xz < yz$ และ $\frac{x}{z} < \frac{y}{z}$

(6) ถ้า $x > 0$ และ $y > 0$ แล้ว $xy > 0$ และ $x + y > 0$

(7) $xy > 0$ ก็ต่อเมื่อ $(x > 0$ และ $y > 0)$ หรือ $(x < 0$ และ $y < 0)$ เท่านั้น

(8) $xy < 0$ ก็ต่อเมื่อ $(x > 0$ และ $y < 0)$ หรือ $(x < 0$ และ $y > 0)$ เท่านั้น

(9) $x > 0$ ก็ต่อเมื่อ $\frac{1}{x} > 0$

(10) $x < 0$ ก็ต่อเมื่อ $\frac{1}{x} < 0$

(11) ถ้า $x > y > 0$ และ $z > w > 0$ แล้ว $xz > yw$

(12) $x \neq 0$ ก็ต่อเมื่อ $x^2 > 0$

(13) ถ้า $0 < x < y$ แล้ว $0 < x^2 < y^2$, $\frac{1}{x} > \frac{1}{y} > 0$

1.14 การหาผลเฉลยของอสมการ

การหาผลเฉลยของอสมการ คือ การหาเซตของจำนวนจริงซึ่งสอดคล้องกับอสมการที่กำหนดให้ แบบของอสมการอาจอยู่ในรูป $P(x) \leqslant Q(x)$ หรือ $P(x) < Q(x)$ ก็ได้ ขั้นตอนการหาผลเฉลยของอสมการก็ใช้สมบัติ 1)–13) ของจำนวนจริงที่กล่าวข้างต้น ในการแก้ปัญหาต้องคำนึงถึงเครื่องหมายเป็นสำคัญ

ตัวอย่าง 1.17 จงหาค่า x จากอสมการ $\frac{x+4}{3} < 6 + x$

วิธีทำ คูณทั้ง 2 ข้างด้วย 3 ได้ $x + 4 < 18 + 3x$

บวกด้วย $-3x$ ทั้ง 2 ข้างได้ $-2x + 4 < 18$

บวกด้วย -4 ทั้ง 2 ข้างได้ $-2x < 14$

เอา -2 หารทั้ง 2 ข้าง ได้ $x > -7$

เซตผลเฉลยคือ $\{x \mid x > -7\}$ หรือ $(-7, \infty)$ #

ตัวอย่าง 1.18 จงแก้อสมการ $\frac{x}{x-5} \geqslant 2$

วิธีทำ

$$\frac{x}{x-5} - 2 \geqslant 0$$

$$\frac{x - 2x + 10}{x-5} \geqslant 0$$

$$\frac{-x + 10}{x-5} \geqslant 0$$

$$\frac{x - 10}{x-5} \leqslant 0$$

แสดงว่า $x-10$ และ $(x-5)$ ต้องมีเครื่องหมายต่างกัน แต่ $x \neq 5$

ดังนั้นจะแบ่งได้ 2 กรณี คือ

กรณีที่ 1 $x - 10 \geqslant 0$ และ $x - 5 < 0$

$x \geqslant 10$ และ $x < 5$

ไม่มีค่า x **สำหรับกรณีเช่นนี้**

กรณีที่ 2 $x - 10 \leqslant 0$ และ $x - 5 > 0$

$x \leqslant 10$ และ $x > 5$

เซตผลเฉลย $\{x \mid 5 < x \leqslant 10\}$

จากทั้ง 2 กรณีเรานำมาผนวก (union) กันได้ เซตผลเฉลยของอสมการ คือ $\{x|5 < x \leqslant 10\}$ หรือ $(5, 10]$ #

หมายเหตุ ในการพิจารณาผลเฉลยของแต่ละกรณีเราอาจใช้กราฟช่วยทำให้เข้าใจได้ดียิ่งขึ้น

ตัวอย่าง 1.19 จงหาจำนวนจริง x ที่ทำให้ $x^2 + 4x \leqslant 5$

วิธีทำ

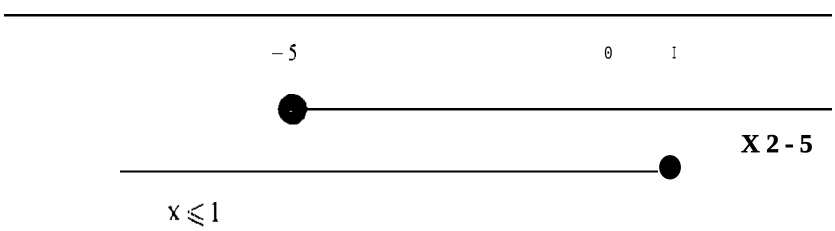
$$x^2 + 4x - 5 \leqslant 0$$

$$(x + 5)(x - 1) \leqslant 0$$

ดังนั้น $x+5$, $x-1$ มีเครื่องหมายตรงข้ามกัน หรือคูณกันเท่ากับ 0

กรณีที่ 1 $x + 5 \geqslant 0$ และ $x - 1 \leqslant 0$

$x \geqslant -5$ และ $x \leqslant 1$



รูป 1.12

ผลเฉลย คือ $-5 \leqslant x \leqslant 1$

กรณีที่ 2 $x + 5 \leqslant 0$ และ $x - 1 \geqslant 0$

$x \leqslant -5$ และ $x \geqslant 1$

รูป 1.13

ผลเฉลยสำหรับกรณีที่ 2 ไม่มี เซตคำตอบคือ ϕ

ดังนั้นผลเฉลยของอสมการ คือ $\{x \mid -5 \leqslant x \leqslant 1\}$ #

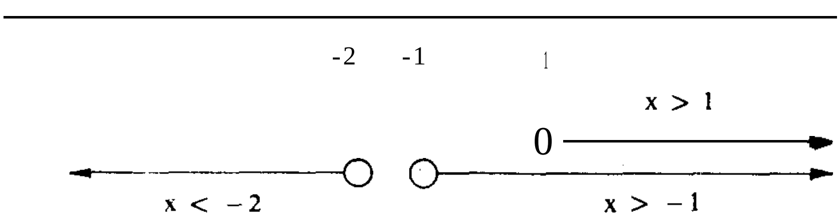
ตัวอย่าง 1.20 จงแก้อสมการ $(x-1)(x+1)(x+2) < 0$

วิธีทำ $(x-1)(x+1)(x+2) < 0$

แสดงว่า มีตัวประกอบตัวหนึ่งเป็นลบ อีก 2 ตัวเป็นบวกหรือลบทั้งหมด

กรณีที่ 1 $x - 1 > 0$, $x + 1 > 0$ และ $x + 2 < 0$

เพราะฉะนั้น $x > 1$, $x > -1$ และ $x < -2$

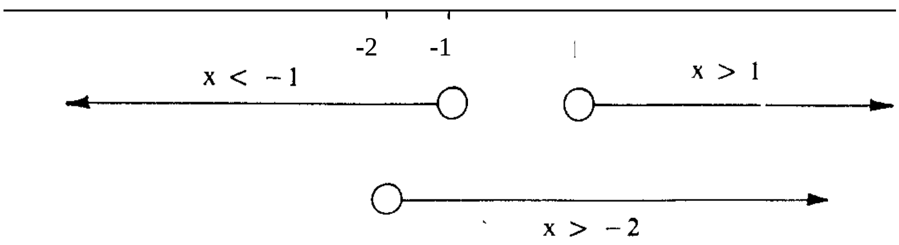


รูป 1.14

จากรูปจะเห็นว่าไม่มี x ค่าใดที่มีสมบัติดังกล่าวพร้อมกัน

กรณีที่ 2 $x - 1 > 0$, $x + 1 < 0$ และ $x + 2 > 0$

เพราะฉะนั้น $x > 1$, $x < -1$ และ $x > -2$

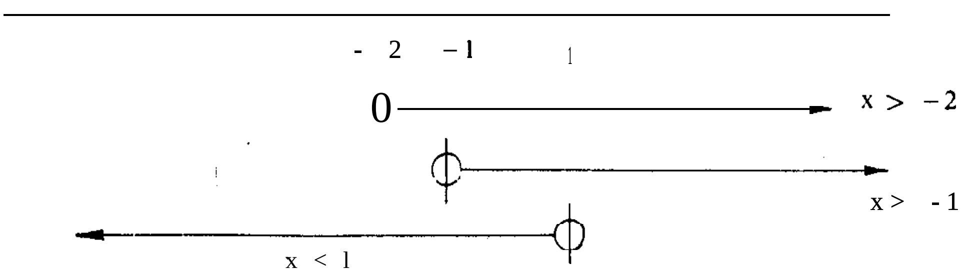


รูป 1.15

จากรูป จะเห็นว่าไม่มี x ค่าใดที่มีสมบัติดังกล่าวพร้อมกัน

กรณีที่ 3 $x - 1 < 0$, $x + 1 > 0$ และ $x + 2 > 0$

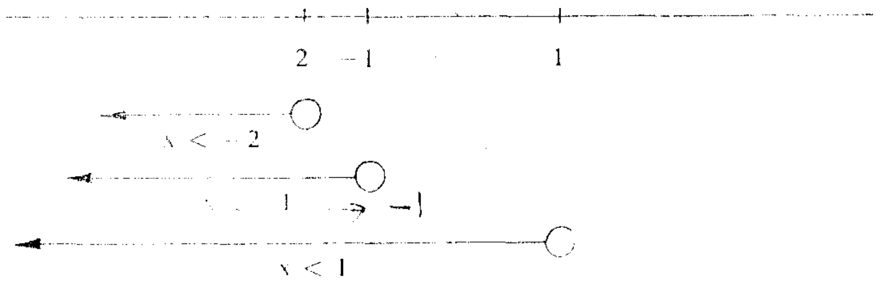
$x < 1$, $x > -1$ และ $x > -2$



รูป 1.16

กรณี 4 $x - 1 < 0$, $x + 1 < 0$ และ $x + 2 < 0$

$x < 1$, $x < -1$ และ $x < -2$



รูป 1.17

ผลเฉลยที่สอดคล้อง คือ $x < -2$ (จากกรณีที่ 4 รูป 1.7)

เซตผลเฉลยของอสมการ คือ $\{x|x < -2$ หรือ $-1 < x < 1\}$ (จากกรณีที่ 3 รูป 1.6)

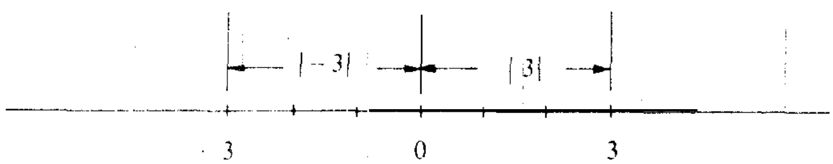
1.15 ค่าสัมบูรณ์ของจำนวนจริง (Absolute value)

บทนิยาม 1.17 ถ้า x เป็นจำนวนจริงแล้ว ค่าสัมบูรณ์ (absolute value) ของ x คือ $|x|$ โดยที่

$$|x| = \begin{cases} x & \text{ถ้า } x \geq 0 \\ -x & \text{ถ้า } x < 0 \end{cases}$$

เช่น $|-2| = 2$, $|5| = 5$, $|0| = 0$

พิจารณา $|3|$, $|-3|$ จะเห็นว่า $|3| = |-3| = 3$ ถ้าสังเกตบนเส้นจำนวนพบว่า 3 และ −3 อยู่ห่างจาก 0 เป็นระยะทางเท่ากัน



รูป 1.18

ในทางเรขาคณิต ค่าสัมบูรณ์ของ x คือ ระยะห่างจาก x ไปยังจุดกำเนิด 0 โดยไม่คำนึงว่า x จะอยู่ทางขวาหรือทางซ้ายของ 0 โดยทั่ว ๆ ไป $|a-b|$ หมายถึง ระยะทางระหว่าง a กับ b ซึ่งเป็นระยะทางเดียวกันกับระยะทางระหว่าง b กับ a

นั่นคือ $|a-b| = |b-a|$

ค่าสัมบูรณ์ของจำนวนจริงมีคุณสมบัติดังต่อไปนี้

สำหรับจำนวนจริง x ใด ๆ

(1) $|x| \geqslant 0$

(2) $|x| = 0$ ก็ต่อเมื่อ $x = 0$

(3) $|x^2| = |x|^2 = x^2$

(4) $-|x| \leqslant x$ 4 $|x|$

(5) $|x+y| \leqslant |x| + |y|$

(6) $|x-y| \geqslant |x| - |y|$

(7) $|x-y| \geqslant |y| - |x|$

(8) ถ้า $a \geqslant 0$, $|x| \leqslant a$ ก็ต่อเมื่อ $-a \leqslant x \leqslant a$

(9) ถ้า $a \geqslant 0$, $|x| \geqslant a$ ก็ต่อเมื่อ $x \geqslant a$ หรือ $x \leqslant -a$

ตัวอย่าง 1.21 จงพิสูจน์ว่า $-|x| \leqslant x \leqslant |x|$

พิสูจน์ (1) ถ้า $x \geqslant 0$ แล้ว $|x| = x$

ดังนั้น $-|x| = -x < x = |x|$

(2) ถ้า $x < 0$ แล้ว $|x| = -x$

$-|x| = -(-x) = x < |x|$

ทั้ง 2 กรณี สรุปได้ว่า

$-|x| \leqslant x \leqslant |x|$ #

ตัวอย่าง 1.22 จงหาค่า x จาก $|2x - 3| = 5$

วิธีทำ $|2x-3| = \begin{cases} 2x-3 & \text{ถ้า } 2x-3 \geqslant 0 \\ -(2x-3) & \text{ถ้า } 2x-3 < 0 \end{cases}$

กรณีที่ 1 $2x-3 = 5$

$2x = 8$

$x = 4$

กรณีที่ 2 $-(2x-3) = 5$

$$2x - 3 = -5$$

$$2x = -2$$

$$x = -1$$

เซตผลเฉลยคือ $\{-1, 4\}$

ตัวอย่าง 1.23 จงหาเซตผลเฉลยของ $|3x-5| \leqslant 4$

วิธีทำ เพราะว่า $-4 \leqslant 3x-5 \leqslant 4$

เอา 5 บวกตลอด จะได้

$$1 \leqslant 3x \leqslant 9$$

เอา 3 หารตลอด

$$\frac{1}{3} \leqslant x \leqslant 3$$

เซตผลเฉลย คือ ช่วงปิด $[\frac{1}{3}, 3]$ #

ตัวอย่าง 1.24 จงหาเซตผลเฉลยของอสมการ $|3x+7| > 5$

วิธีทำ จากสมบัติของ ค่าสัมบูรณ์ จะได้ว่า

$3x+7 > 5$ หรือ $3x+7 < -5$

$3x > -2$ หรือ $3x < -12$

$x > -\frac{2}{3}$ หรือ $x < -4$

เซตผลเฉลย คือ $(-\infty, -4) \cup (-\frac{2}{3}, \infty)$ #

ตัวอย่าง 1.25 จงหาผลเฉลยของอสมการ $|x-1| < 2|x|$

วิธีทำ กรณี $x = 0$ ไม่จริง ดังนั้น เราพิจารณา $x \neq 0$

เพราะฉะนั้น

$$\left|\frac{x-1}{x}\right| < 2$$

$$-2 < \frac{x-1}{x} < 2$$

กรณีที่ 1 $x > 0$ จะได้

$$-2x < x - 1 < 2x$$

นั่นคือ $-2x < x - 1$ และ $x - 1 < 2x$

$3x > 1$ และ $x > -1$

$x > \frac{1}{3}$ และ $x > -1$

เพราะฉะนั้น $x > \frac{1}{3}$

กรณีที่ 2 $x < 0$ จะได้

$$2x < x - 1 < -2x$$

นั่นคือ $2x < x - 1$ และ $x - 1 < -2x$

$x < -1$ และ $3x < 1$

$x < -1$ และ $x < \frac{1}{3}$

เพราะฉะนั้น $x < -1$

ผลเฉลยของอสมการ คือ $x < -1$ หรือ $x > \frac{1}{3}$

เซตผลเฉลย คือ $(-\infty, -1) \cup (\frac{1}{3}, \infty)$

สำหรับโจทย์ในตัวอย่าง 1.25 เราสามารถทำโดยยกกำลังสองทั้งสองข้างได้ ทั้งนี้เพราะว่า ทั้ง 2 ข้างเป็น บวก ดังนั้น

$$
\begin{aligned}
|x - 1| &< 2|x| \\
|x - 1|^2 &< (2|x|)^2 \\
(x - 1)^2 &< 4x^2 \\
x^2 - 2x + 1 &< 4x^2 \\
3x^2 + 2x - 1 &> 0 \\
(x + 1)(3x - 1) &> 0
\end{aligned}
$$

ซึ่งได้ผลเฉลย คือ $x < -1$ หรือ $x > \frac{1}{3}$

1.16 ขอบเขตบน ขอบเขตล่าง (Upper bound, Lower bound)

บทนิยาม 1.18 ถ้า $S \subseteq R$ แล้วเรียก $U \in R$ ว่าขอบเขตบน (upper bound) ของ S ก็ต่อเมื่อ

$x \leq U$ สำหรับทุก ๆ $x \in S$

ถ้า U_0 เป็นขอบเขตบนของ S และ $U_0 \leqslant U$ ทุก U ที่เป็นขอบเขตบนของ S แล้วเรียก U_0 ว่าขอบเขตบนต่ำสุดของ S (least upper bound of S) เขียนแทนขอบเขตบนต่ำสุดด้วย ℓub.S

บทนิยาม 1.19 ถ้า $S \subseteq R$ แล้วเรียก $\ell \in R$ ว่าขอบเขตล่าง (Lower bound) ของ S ก็ต่อเมื่อ $\ell \leqslant x$ สำหรับทุก ๆ $x \in S$

ถ้า ℓ_0 เป็นขอบเขตล่างของ S และ $\ell_0 \geqslant \ell$ ทุก ℓ ที่เป็นขอบเขตล่างของ S แล้ว เรียก ℓ_0 ว่า ขอบเขตล่างสูงสุด (gretest lower bound) ของ S แทนด้วย gℓb. S

เซตที่เป็นเซตย่อยของ R อาจมีทั้งขอบเขตบน ขอบเขตล่าง หรือมีเพียงอย่างใดอย่างหนึ่ง หรือไม่มีเลยก็อาจเป็นได้ สำหรับเซตที่อยู่ในรูป (a, b), [a, b], (a, b], [a, b) มีทั้งขอบเขตบนและขอบเขตล่าง เซตที่อยู่ในรูป $(-\infty, a)$, $(-\infty, a]$ มีเฉพาะขอบเขตบนอย่างเดียว ไม่มีขอบเขตล่าง ส่วนเซตที่อยู่ในรูป (a, ∞), $[a, \infty)$ มีเฉพาะขอบเขตล่างแต่ไม่มีขอบเขตบน และ $(-\infty, \infty)$ ไม่มีทั้งขอบเขตบนและขอบเขตล่าง

ตัวอย่าง 1.26 กำหนด $A = \{1, 2, 3\}$, $B = \{1, 2, 3, 4, 5\}$

จงหาขอบเขตบนของ A ซึ่งเป็นสมาชิกของ B

วิธีทำ ตามบทนิยาม ขอบเขตบนของ A คือ จำนวนที่มากกว่าหรือเท่ากับทุก ๆ ตัวใน A นั่นคือ $x \geqslant 3$

ดังนั้นเซตของจำนวนที่เป็นขอบเขตบนของ A และเป็นสมาชิกของ B ด้วย คือ $\{3, 4, 5\}$

ตัวอย่าง 1.27 กำหนด $S = \left\{\frac{n}{n+1} \mid n \in N\right\}$ จงหาขอบเขตบน ขอบเขตล่าง ขอบเขตบนต่ำสุด ขอบเขตล่างสูงสุดของ S

วิธีทำ เพราะว่า $S \subseteq R$ และ $S = \left\{\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \ldots\right\}$

ทุก ๆ จำนวนใน S น้อยกว่า 1

ขอบเขตบนของ S คือ จำนวนจริงทั้งหลายที่มากกว่า หรือเท่ากับ 1

ขอบเขตบนต่ำสุด คือ 1

ขอบเขตล่างของ S คือ จำนวนจริงทั้งหลายที่น้อยกว่าหรือเท่ากับ $\frac{1}{2}$

ขอบเขตล่างสูงสุด คือ $\frac{1}{2}$ #

ตัวอย่าง 1.28 กำหนด $S = (-3, 7]$ จงหา $\ell ub.\ S$, $g\ell b.\ S$

วิธีทำ จาก S ที่กำหนดจะเห็นว่าขอบเขตบนของ S คือ จำนวนจริงที่มากกว่า**หรือ**เท่ากับ 7 ดังนั้น $\ell ub.\ S = 7$ ในทำนองเดียวกัน

$$g\ell b.\ S = -3$$

$\ell ub.\ S$, $g\ell b.\ S$ อาจเป็นสมาชิกของ S หรือไม่เป็นสมาชิกของ S ก็ได้ #

สมบัติของขอบเขตบน ขอบเขตล่างที่สำคัญมีดังนี้

กำหนดให้ $S \subseteq R$ และ $S \neq \phi$

(1) ถ้า S มีขอบเขตบน แล้ว S มีขอบเขตบนต่ำสุด

(2) ถ้า S มีขอบเขตล่าง แล้ว S มีขอบเขตล่างสูงสุด

แบบฝึกหัด 1.2

1. จงยกตัวอย่างต่อไปนี้
   (1) จำนวนจริงซึ่งไม่ใช่จำนวนตรรกยะ
   (2) จำนวนเต็มซึ่งไม่ใช่จำนวนธรรมชาติ
   (3) จำนวนตรรกยะซึ่งไม่ใช่จำนวนเต็ม

2. กำหนดให้ N = เซตของจำนวนธรรมชาติ
   I = เซตของจำนวนเต็ม
   Q = เซตของจำนวนตรรกยะ
   R = เซตของจำนวนจริง

   แล้วข้อสรุปใดต่อไปนี้ถูกต้อง

(1) $I \subseteq N$	(2) $Q \subseteq R$	(3) $I \subseteq R$
(4) $N \subseteq Q'$	(5) $I \subseteq Q'$	(6) $Q' \subseteq R$
(7) $N \cap Q = \phi$	(8) $N \cap Q' = \phi$	

3. จงบอกว่าจำนวนที่กำหนดให้ต่อไปนี้เป็นสมาชิกของเซตใดบ้างในระบบจำนวน

(1) $3\frac{1}{7}$	(2) 3.1416	(3) $\sqrt[3]{5}$
(4) $0.1\dot{3}\dot{7}$	(5) $0.12012301234,\ldots$	(6) $0.121212\ldots.$
(7) $\sqrt[3]{-8}$	(8) $\sqrt{-8}$	

4. จงพิจารณาว่า ข้อความที่กำหนดให้ต่อไปนี้สอดคล้องกับกฎข้อใดของระบบจำนวน
   (1) ถ้า $A = p(1+rt)$ แล้ว $p(1+rt) = A$
   (2) ถ้า $2(x-3)+4x = 2x-6+4x$ และ $2x-6+4x = 6x-6$ แล้ว $2(x-3)+4x = 6x-6$
   (3) $az = za$ สำหรับทุกจำนวนจริง a, z
   (4) $(12a)b = 12(ab)$ สำหรับทุกจำนวนจริง a, b
   (5) $x^2y+xy^2 = xy(x+y)$ สำหรับทุกจำนวนจริง x, y
   (6) สำหรับจำนวนจริง c ใด ๆ cx เป็นจำนวนจริงทุกจำนวนจริง x
   (7) $5+(a+b) = (5+a)+b$ สำหรับทุกจำนวนจริง a, b
   (8) สำหรับจำนวนจริง y, z ใด ๆ $y+z$ เป็นจำนวนจริง

5. จงเขียนเซตเพียงเซตเดียวแทนเซตต่อไปนี้

(1) $[2,8] \cup (3,9)$ (2) $(0,7) \cup (3,6)$

(3) $[0,\pi] \cap (3,5]$ (4) $(-\pi,\pi) \cap [3,4)$

(5) $(-1, \sqrt{2}) \cap (1.2, \sqrt{5})$

6. กำหนดให้ $A = \{x \mid 0 \leq x < 7\}$

$B = [0,1) \cup (2,3)$

$C = \{x \mid x$ เป็นจำนวนจริงซึ่งอยู่ระหว่าง 1 กับ 5$\}$

จงหา $(A \cup B) \cap C$ และ $(A - B) \cup C$

7. จงหาผลเฉลยของอสมการต่อไปนี้

(1) $3x + 1 \leq 0$

(2) $2x - 3 > 1$

(3) $2x - x^2 \leq -8$

(4) $\frac{3x}{x-1} \leq 5 - \frac{x}{x-4}$

(5) $(x-2)^2 \leq 7$

(6) $(x-3)(x+5)(x-1) < 0$

(7) $\frac{x+1}{x-1} \leq 1$

(8) $(x-6)(x-10) < (x-9)(x-7)$

8. จงหาค่าของ

(1) $|3-7|$ (2) $|0.5 - 3.2|$

(3) $|-3| + |3|$ (4) $\left|\frac{-3}{12}\right|$

9. จงหาค่าของ x ซึ่งสอดคล้องกับอสมการต่อไปนี้

(1) $|x-3| < 1$

(2) $|x+1| > 3$

(3) $|2x-3| \geq |x+2|$

(4) $|x| < 3 - 2x$

(5) $\left|\frac{x-2}{x}\right| \leq 2$

10. **จง**ยกตัวอย่างเซตซึ่งเป็นเซตย่อยของจำนวนจริงและมีสมบัติต่อไปนี้

(1) มีทั้งขอบเขตบน และขอบเขตล่าง

(2) มีเฉพาะขอบเขตบน แต่ไม่มีขอบเขตล่าง

(3) มีเฉพาะขอบเขตล่าง แต่ไม่มีขอบเขตบน

(4) ไม่มีทั้งขอบเขตบนและขอบเขตล่าง

(5) มีขอบเขตบนและขอบเขตล่างเป็นลบทั้งคู่

(6) มีขอบเขตบนเป็นบวกขอบเขตล่างเป็นลบ

1.17 ความสัมพันธ์ (Relation)

คู่อันดับ (Ordered pair)

บทนิยาม 1.20 คู่อันดับ คือ สิ่งที่มีสมาชิกสองตัวมาจับคู่กันโดยคำนึงถึงอันดับก่อนหลังเป็นสำคัญ แทนด้วยสัญลักษณ์ (a, b) อ่านว่า คู่อันดับ a, b และเรียก a ว่าสมาชิกตัวที่ 1 (first element) และ b ว่าสมาชิกตัวที่ 2 (second element)

บทนิยาม 1.21 สำหรับคู่อันดับ (a, b) และ (c, d) ใด ๆ

$(a, b) = (c, d)$ ก็ต่อเมื่อ $a = c$ และ $b = d$

ตัวอย่าง 1.29 จงหาค่า $x \cdot y$ ซึ่งทำให้ $(2+x, 3y) = (4+y, 6)$

วิธีทำ จากการเท่ากันของคู่อันดับ จะได้ว่า

$$2+x = 4+y \qquad \text{..........(1)}$$

$$3y = 6 \qquad \text{..........(2)}$$

จาก (1) และ (2) จะได้ $x = 4$, $y = 2$

ข้อสังเกต คู่อันดับ (a, b) ไม่ใช่เซตซึ่งประกอบด้วย a และ b เพราะว่าเซตซึ่งประกอบด้วย **a, b** เขียนอยู่ในรูป $\{a, b\}$ และข้อสังเกตอีกอย่างหนึ่ง คือ อันดับไม่มีความสำคัญในเรื่องเซต **คือ** $\{a, b\} = \{b, a\}$ แต่ในเรื่องคู่อันดับ อันดับมีความสำคัญ เพราะว่า $(a, b) \neq (b, a)$ เมื่อ $a \neq b$

บทนิยาม 1.22 กำหนดให้ A และ B เป็นเซตใด ๆ ผลคูณคาร์ทีเซียน (cartesian product) ของ A และ B คือ เซตของคู่อันดับซึ่งสมาชิกตัวแรกเป็นสมาชิกของ A และสมาชิกตัวที่ 2 เป็นสมาชิกของ B เขียนแทนด้วย $A \times B$

ดังนั้น $A \times B = \{(a, b) | a \in A, b \in B\}$

ตัวอย่าง 1.20 กำหนดให้ $A = \{1, 2\}$

$B = \{1, 2, 3\}$

จงหา $A \times B$, $B \times A$, $A \times A$ และ $B \times B$

วิธีทำ

$A \times B = \{(1, 1), (1, 2), (1, 3), (2, 1), (2, 2), (2, 3)\}$

$B \times A = \{(1, 1), (1, 2), (2, 1), (2, 2), (3, 1), (3, 2)\}$

$A \times A = \{(1, 1), (1, 2), (2, 1), (2, 2)\}$

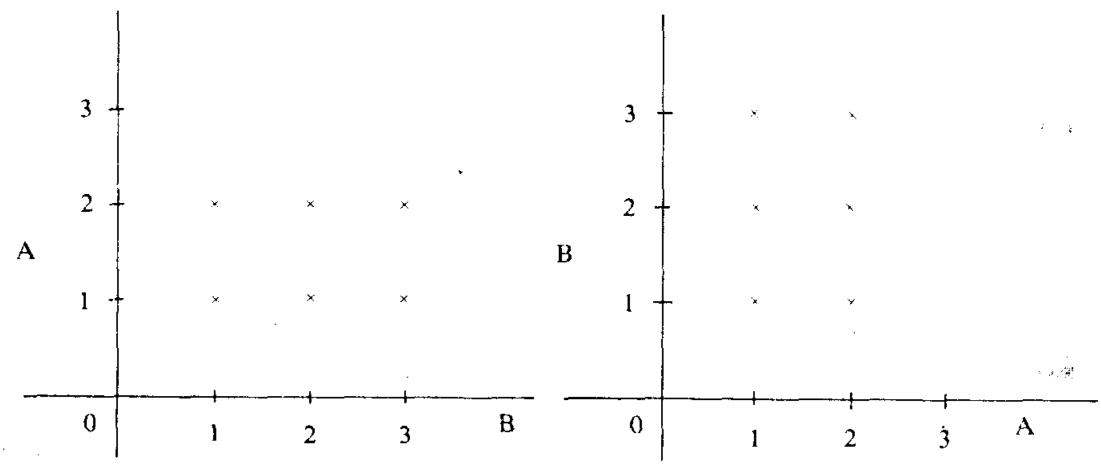
$B \times B = \{(1, 1), (1, 2), (1, 3), (2, 1), (2, 2), (2, 3), (3, 1), (3, 2), (3, 3)\}$ #

ข้อสังเกต 1. ถ้า $A \neq B$ แล้ว $A \times B \neq B \times A$

2. $n(A \times B) = n(A) \times n(B)$

3. $n(A \times A) = [n(A)]^2$

การแสดงว่า $A \times B \neq B \times A$ ทำได้โดยการกำหนดจุดในระนาบ ซึ่งจะเห็นว่าจุดที่ได้จาก $A \times B$ และ $B \times A$ มีบางจุดซึ่งไม่ซ้ำกัน จากตัวอย่าง 1.20 จะได้รูป 1.19



$A \times B$ $B \times A$

รูป 1.19

4. สำหรับเซต A ใด ๆ $A \times \phi = \phi = \phi \times A$

5. $n(A \times B) = n(B \times A)$

บทนิยาม 1.23 กำหนดให้ A, B เป็นเซตใด ๆ ความสัมพันธ์จาก A ไปยัง B (relation from **A to** B) คือ เซตของคู่อันดับซึ่งเป็นเซตย่อยของ $A \times B$ นั่นคือ r เป็นความสัม**พันธ์**จาก A ไปยัง B ก็ต่อเมื่อ $r \subseteq A \times B$

ถ้า $(a,b) \in r$ แล้วเรียกว่า a **มีความสัมพันธ์** r กับ b ใช้**สัญลักษณ์** arb และถ้า $(a,b) \notin r$ แล้ว เรียกว่า a **ไม่มีความสัมพันธ์** r กับ b แทนด้วย $a \not r b$

ตัวอย่าง 1.21 กำหนดให้ $A = \{1,2\}$ และ $B = \{a,b,c\}$

$r_1 = \{(1,b), (2,a), (2,c)\}$

$r_2 = \{(1,a,), (1,b)\}$

จะได้ว่า r_1, r_2 **เป็นความสัมพันธ์จาก** A **ไปยัง** B

(เพราะว่า $r_1, r_2 \subseteq A \times B$)

บทนิยาม 1.24 ถ้า $r \subseteq A \times A$ แล้วเรียก r ว่า ความสัมพันธ์ในเซต A

ตัวอย่าง 1.22 ให้ R แทนเซตของจำนวนจริง

$r_1 = \{(x,y) \mid x,y \in R , x^2 + y^2 = 1\}$

$r_2 = \{(x,y) \mid x, y \in R , x \leqslant y\}$

จะได้ว่า r_1, r_2 เป็นตัวอย่างของความสัมพันธ์ในเซตของจำนวนจริง

บทนิยาม 1.25 ให้ r เป็นความสัมพันธ์จาก A ไปยัง B โดเมน (domain) ของ r คือ **เซตซึ่ง**ประกอบด้วยสมาชิกตัวที่ 1 ของคู่อันดับทั้งหมดใน r เขียนแทนด้วยสัญลัก**ษณ์** D_r

นั่นคือ $D_r = \{a \mid (a, b) \in r\}$

ข้อสังเกต ถ้า r เป็นความสัมพันธ์จาก A ไปยัง B $D_r \subseteq A$

เรนจ์ (range) ของ r คือ เซตซึ่งประกอบด้วยสมาชิกตัวที่ 2 ของคู่อันดับทั้งหมด**ใน r** แทนด้วยสัญลักษณ์ R_r

นั่นคือ $R_r = \{b \mid (a, b) \in r\}$

ข้อสังเกต ถ้า r เป็นความสัมพันธ์จาก A ไปยัง B $R_r \subseteq B$

ตัวอย่าง 1.23 กำหนดให้ $A = \{1,2,3\}$

$B = \{1,3\}$

$r = \{(1,1), (3,1), (2,3)\}$

จะได้ว่า $D_r = \{1,2,3\}$

$R_r = \{1,3\}$ #

ตัวอย่าง 1.24 กำหนดให้ $r = \{(x,y) \mid x,y \in R , y = \sqrt{1 - x}\}$

จงหาโดเมน และ เรนจ์ของความสัมพันธ์ r

วิธีทำ จากสมการ $y = \sqrt{1 - x}$

จะได้ว่า $y \geqslant 0$

สำหรับ x ที่สอดคล้องกับสมการ คือ $1 - x \geqslant 0$

นั่นคือ $x \leqslant 1$

ดังนั้น $D_r = \{x \mid x \leqslant 1\}$

$R_r = \{y \mid y \geqslant 0\}$ #

บทนิยาม 1.26 ให้ r เป็นความสัมพันธ์จาก A ไปยัง B ความสัมพันธ์ผกผันของ r (inverse of a relation r) เขียนแทนด้วย r^{-1} คือ ความสัมพันธ์จาก B ไปยัง A ซึ่งประกอบด้วยคู่อันดับ (b, a) ซึ่ง $(a, b) \in r$

นั่นคือ $r^{-1} = \{(b, a) \mid a \in A, b \in B, (a, b) \in r\}$

ตัวอย่าง 1.26 **กำหนดให้** $A = \{1,2,3\}$

$B = \{1,3\}$

และ $r = \{(1,1), (3,1), (2,3)\}$

จะได้ว่า $r^{-1} = \{(1,1), (1,3), (3,2)\}$ #

ตัวอย่าง 1.28 **กำหนดให้** $r_1 = \{(x,y) \mid x \in R, y \in R$ **และ** $y = x\}$

$r_2 = \{(x,y) \mid x \in R , y \in R$ **และ** $y = 2x + 1\}$

จงหา r_1^{-1} **และ** r_2^{-1}

วิธีทำ จาก $r_1 = \{(x,y) \mid x \in R , y \in R \text{ และ } y = x\}$

$r_1^{-1} = \{(y,x) \mid x \in R , y \in R \text{ และ } y = x\}$

แทน x ด้วย y และแทน y ด้วย x จะได้ว่า

$$r_1^{-1} = \{(x,y) \mid y \in R , x \in R \text{ และ } x = y\}$$
$$= \{(x,y) \mid x \in R , y \in R \text{ และ } y = x\}$$

จาก $r_2 = \{(x,y) \mid x \in R , y \in R \text{ และ } y = 2x + 1\}$

$r_2^{-1} = \{(y,x) \mid x \in R , y \in R \text{ และ } y = 2x + 1\}$

แทน x ด้วย y และแทน y ด้วย x จะได้ว่า

$$r_2^{-1} = \{(x,y) \mid y \in R , x \in R \text{ และ } x = 2y + 1\}$$
$$= \{(x,y) \mid x \in R , y \in R \text{ และ } y = \frac{x-1}{2}\}$$

#

จากตัวอย่างจะสรุปเป็นข้อสังเกตได้ว่า

ข้อสังเกต

1. ถ้า r เป็นความสัมพันธ์ใด ๆ แล้ว จะหา r^{-1} ได้เสมอ
2. โดยทั่ว ๆ ไป $r \neq r^{-1}$ แต่มีบางกรณีที่ $r = r^{-1}$
3. $D_r = R_{r^{-1}}$ และ $D_{r^{-1}} = R_r$

กราฟของความสัมพันธ์

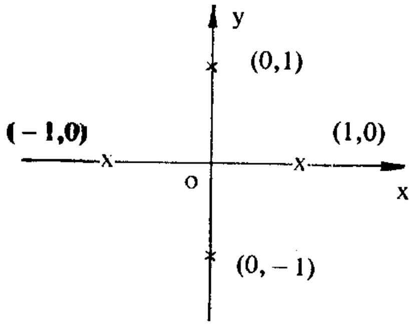
เนื่องจากความสัมพันธ์เป็นเซตของคู่อันดับ ดังนั้นเราจึงสามารถแสดงสมาชิกความสัมพันธ์ด้วยกราฟของจุดในระนาบได้ แต่ต้องคำนึงถึงโดเมน และเรนจ์ของความสัมพันธ์ด้วย ดังตัวอย่าง 1.27

ตัวอย่าง 1.27 ให้ I แทนเซตของจำนวนเต็ม

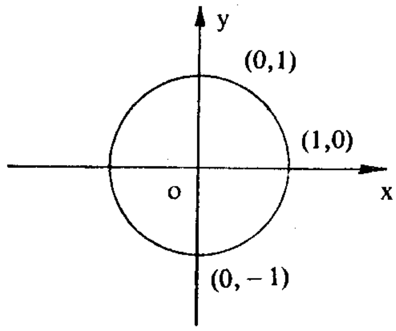
R แทนเซตของจำนวนจริง

$$r_1 = \{(x,y) \mid x \in I , y \in I \text{ และ } x^2 + y^2 = 1\}$$
$$r_2 = \{(x,y) \mid x \in R , y \in R \text{ และ } x^2 + y^2 = 1\}$$

จะได้กราฟของ r_1 และ r_2 ดังรูป 1.20



กราฟของ r_1



กราฟของ r_2

รูป 1.20

1.18 ฟังก์ชัน (Function)

บทนิยาม 1.27 ให้ A และ B เป็นเซต 2 เซตใด ๆ แล้วฟังก์ชันจาก A ไปยัง B เขียนแทนด้วย $f : A \rightarrow B$ คือ เซตของคู่อันดับ ใน $A \times B$ ซึ่งมีคุณสมบัติว่า "ถ้า $(x, y) \in f$ และ $(x, z) \in f$ แล้วได้ว่า $y = z$"

หรืออาจกล่าวได้ว่า ฟังก์ชัน คือ เซตของคู่อันดับซึ่งไม่มีคู่อันดับสองคู่ใด ๆ ในเซตนั้นที่สมาชิกตัวที่สองไม่เท่ากัน แต่สมาชิกตัวที่หนึ่งเท่ากัน

ตัวอย่าง 1.28 กำหนดให้ $A = \{2,3\}$ และ $B = \{a,b,c\}$

$f = \{(2,a), (3,b)\}$

$g = \{(2,a), (3,c), (2,b)\}$

$h = \{(3,a), (2,a)\}$

จะได้ว่า f และ h เป็นฟังก์ชัน แต่ g ไม่เป็นฟังก์ชัน เนื่องจาก $(2, a), (2, b) \in g$ แต่ $a \neq b$

#

ตัวอย่าง 1.29 ตัวอย่างของฟังก์ชันในเซตของจำนวนจริง

$y = 3x - 1$

$y = 2x^2 - x + 1$

$y = \sqrt{x}$

$y = \sqrt{x^2 + 1}$

ตัวอย่างของความสัมพันธ์ที่ไม่เป็นฟังก์ชัน

$$x^2 + y^2 = 1$$

$$y^2 = x + 1$$

$$x + y \geqslant 1$$

ข้อสังเกต 1. เซตของคู่อันดับซึ่งสมาชิกตัวที่ 1 ไม่ซ้ำกันเลยเป็นฟังก์ชัน

2. ทุก ๆ ฟังก์ชันเป็นความสัมพันธ์ แต่ความสัมพันธ์ไม่จำเป็นต้องเป็นฟังก์ชัน

3. ฟังก์ชันเป็นความสัมพันธ์ที่มีคุณสมบัติพิเศษที่ว่าสำหรับสมาชิก x ใด ๆ ใน A นั้นจะมีสมาชิกใน B มีความสัมพันธ์ f กับ x ได้เพียงตัวเดียวเท่านั้น

โดยทั่ว ๆ ไป ถ้า $(x,y) \in f$ แล้วเขียนแทนด้วย $y = f(x)$ และเรียก y ว่า ค่าของฟังก์ชัน-f ที่จุด x บางทีเรียก y เป็นภาพ (image) ของ x ภายใต้ f

เนื่องจากฟังก์ชันเป็นความสัมพันธ์ โดเมนและเรนจ์ของฟังก์ชันจึงนิยามเช่นเดียวกันกับบทนิยามที่กล่าวไว้ในเรื่องของความสัมพันธ์

บทนิยาม 1.28 ถ้า f เป็นฟังก์ชันจาก A ไป B แล้ว

โดเมนของ $f = \{a | a \in A$ และ $(a, b) \in f\}$ แทนด้วย D_f

เรนจ์ของ $f = \{b | b \in B$ และ $(a, b) \in f\}$ แทนด้วย R_f

บทนิยาม 1.29 ให้ f เป็นฟังก์ชันแล้วเรียก f ว่าเป็นฟังก์ชันค่าจริง (real valued function) ก็ต่อเมื่อ $R_f \subseteq R$ (เซตของจำนวนจริง)

บทนิยาม 1.30 ให้ f เป็นฟังก์ชัน แล้วเรียก f ว่าเป็นฟังก์ชันของจำนวนจริง (function of a real variable) ก็ต่อเมื่อ $D_f \subseteq R$

บทนิยาม 1.31 ให้ f เป็นฟังก์ชัน แล้วเรียก f ว่าเป็นฟังก์ชันค่าจริงของจำนวนจริง (real valued function of real variable) ก็ต่อเมื่อ $D_f \subseteq R$, $R_f \subseteq R$

นั่นคือ $f \subseteq R \times R$

บทนิยาม 1.32 ให้ f เป็นฟังก์ชัน แล้วเรียก f ว่าเป็นฟังก์ชันจาก A ไปยัง B (function from A into B) ก็ต่อเมื่อ f เป็นฟังก์ชัน ซึ่ง $D_f = A$ และ $R_f \subseteq B$ เขียนแทนด้วยสัญลักษณ์

$f : A \rightarrow B$ หรือ $A \xrightarrow{f} B$

บทนิยาม 1.33 ให้ f เป็นฟังก์ชัน แล้วเรียก f ว่าเป็นฟังก์ชันจาก A ไปบน B (function from A onto B) ก็ต่อเมื่อ f เป็นฟังก์ชันซึ่ง $D_f = A$ และ $R_f = B$ เขียนแทนด้วย

$$f : A \xrightarrow{\text{บน}} B \text{ หรือ } A \xrightarrow{f(\text{บน})} B$$

ตัวอย่าง 1.30 กำหนดให้ $A = \{1,2,3,4\}$ $B = \{a,b,c\}$

ให้ $f = \{(1,a), (2,a), (3,b), (4,a)\}$

$g = \{(1,a), (2,b), (3,c), (4,c)\}$

จะได้ว่า f เป็นฟังก์ชันจาก A ไปยัง B ส่วน g เป็นฟังก์ชันจาก A ไปยัง B หรือ อาจกล่าวได้ว่า g เป็นฟังก์ชันจาก A ไปบน B ด้วย #

ตัวอย่าง 1.31 ให้ $A = \{2,4,6,8\}$

$B = \{x,y,z,w\}$

และ $f = \{(2,x), (4,z), (6,w), (8,w)\}$

$g = \{(2,y), (4,x), (6,w), (8,z)\}$

$h = \{(2,x), (6,z), (8,w)\}$

จะได้ว่า $f : A \rightarrow B$ เพราะว่า $D_f = A$ และ $R_f \subseteq B$

$g : A \xrightarrow{\text{บน}} B$ เพราะว่า $D_f = A$ และ $R_f = B$

แต่ h เป็นฟังก์ชัน ซึ่ง $D_h \neq A$ ดังนั้น h ไม่เป็นฟังก์ชันจาก A ไปยัง B

แต่ $h : \{2, 6, 8\} \rightarrow B$ #

บทนิยาม 1.34 $f : A \rightarrow B$ เรียกว่าเป็นฟังก์ชันหนึ่งต่อหนึ่ง (one to one function) ถ้า f มีคุณสมบัติว่า $(x_1, y) \in f$ และ $(x_2, y) \in f$ แล้ว $x_1 = x_2$

นั่นคือ ถ้า $f(x_1) = f(x_2)$ แล้ว $x_1 = x_2$ หรือ ถ้า $x_1 \neq x_2$ แล้วจะได้ $f(x_1) \neq f(x_2)$

ถ้า $f : A \rightarrow B$ เป็นฟังก์ชันชนิดหนึ่งต่อหนึ่ง เขียนแทนด้วย

$$f : A \xrightarrow{1-1} B \text{ หรือ } A \xrightarrow[1-1]{f} B$$

ตัวอย่าง 1.32 กำหนดให้ $A = \{a,b,c\}$

$B = \{0,1,2\}$

และให้ $f = \{(a,1), (b,3), (c,2)\}$

จะได้ว่า f เป็นฟังก์ชันชนิดหนึ่งต่อหนึ่ง #

ตัวอย่าง 1.33 จงแสดงว่า $f(x) = 2x + 3$ เป็นฟังก์ชันชนิด 1 – 1

พิสูจน์ ให้ x_1, x_2 เป็นสมาชิกของ D_f

ให้ $f(x_1) = f(x_2)$

จะได้ว่า $2x_1 + 3 = 2x_2 + 3$

$$x_1 = x_2$$

ดังนั้น f เป็นฟังก์ชัน 1 – 1 #

1.10 พีชคณิตของฟังก์ชัน

(Algebra of function)

บทนิยาม 1.35 ให้ f และ g เป็นฟังก์ชัน

1) $f+g$ เป็นฟังก์ชันกำหนดโดย $(f+g)(x) = f(x)+g(x)$
2) $f-g$ เป็นฟังก์ชันกำหนดโดย $(f-g)(x) = f(x)-g(x)$
3) cf เป็นฟังก์ชันกำหนดโดย $(cf)(x) = cf(x)$ เมื่อ c เป็นจำนวนจริงใด ๆ
4) fg เป็นฟังก์ชันกำหนดโดย $(fg)(x) = f(x)g(x)$
5) $\frac{f}{g}$ เป็นฟังก์ชันกำหนดโดย $\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$ เมื่อ $g(x) \neq 0$

สำหรับโดเมนของฟังก์ชันในแต่กรณี คือ ผลตัดของโดเมนของ f กับโดเมนของ g ยกเว้นกรณีที่ 5 ซึ่งโดเมนของฟังก์ชันไม่รวม x ซึ่ง $g(x) = 0$

นั่นคือ $D_{f+g} = D_f \cap D_g$

$D_{f \cdot g} = d_f \cap D_g$, $D_{cf} = D_f$

$D_{\frac{f}{g}} = (D_f \cap D_g) - \{x | g(x) = 0\}$

ตัวอย่าง 1.34 กำหนดให้ $f(x) = x$ และ $g(x) = \sqrt{x}$

1) $(f + g)(x) = f(x) + g(x) = x + \sqrt{x}$
2) $(f - g)(x) = f(x) - g(x) = x - \sqrt{x}$

3) $(fg)(x) = f(x)\,g(x) = x\sqrt{x}$

4) $(\frac{f}{g})(x) = \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{x}{\sqrt{x}} = \sqrt{x}$

5) $(cf)(x) = cf(x) = cx$ เมื่อ c เป็นจำนวนจริงใด ๆ

เพราะว่า โดเมนของ $f = R$

โดเมนของ $g = R^{+} \cup \{0\}$

เพราะฉะนั้น $D_{f+g}, D_{f-g}, D_{fg} = R^{+} \cup \{0\}$

แต่ $D_{\frac{f}{g}} = R^{+}$ (ไม่รวม $x = 0$)

หมายเหตุ ถ้าฟังก์ชันคูณตัวมันเองเขียนแทนในรูปตัวยกกำลัง เช่น

$f^2(x) = f(x)\,f(x)$

$f^3(x) = f(x)\,f(x)\,f(x)$

กำหนดให้ $f(x) = 2x + 1$

เพราะฉะนั้น $f^2(x) = (2x + 1)^2$

1.20 ฟังก์ชันประกอบ

(Composite function)

บทนิยาม 1.36 ให้ $f : A \rightarrow B$ และ $g : B \rightarrow C$ เป็นฟังก์ชันแล้ว ฟังก์ชันประกอบของ g และ f เขียนแทนด้วย $g \circ f$

$g \circ f = \{(x, z) \in A \times C$ โดยที่ $y \in B$ ซึ่ง $(x, y) \in f$ และ $(y, z) \in g\}$

หรือกล่าวได้อีกอย่างหนึ่งว่า

$$g \circ f(x) = g(f(x))$$

ตัวอย่าง 1.35 กำหนดให้ $f(x) = 3x + 2$

$g(x) = 2x$

จงหา $g \circ f(x)$ และ $f \circ g(x)$

วิธีทำ (1) $g \circ f(x) = g(f(x))$

$= g(3x + 2)$

$= 2(3x+2)$

$= 6x+4$

(2) $f\circ g(x) = f(g(x))$

$= 3(2x)+2$

$= 6x+2$

ข้อสังเกต โดยทั่ว ๆ ไป $g\circ f \neq f\circ g$

1.21 ชนิดของฟังก์ชัน

1. ฟังก์ชันพีชคณิต ได้แก่ฟังก์ชันซึ่งเขียนในรูปของตัวแปร และเครื่องหมายในทางพีชคณิต (บวก ลบ คูณ หาร กรณฑ์ ยกกำลัง) เช่น

$$f(x) = 2x + 3x^2 + \sqrt{1-x}$$

$$g(x) = \frac{\sqrt{x^3 + 3x^2 + 1}}{x^2 + 2}$$

ฟังก์ชันพีชคณิตแบ่งย่อยออกได้ดังนี้

1.1 ฟังก์ชันพหุนาม (Polynomial function) ได้แก่ฟังก์ชันในรูปของ

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0$$

โดยที่ a_i เป็นจำนวนจริง $i = 0, 1, 2, \ldots, n$

n เป็นจำนวนเต็มที่ไม่เป็นลบ

ถ้า n เป็นจำนวนเต็มใหญ่ที่สุด ซึ่ง $a_n \neq 0$ เราเรียกว่า f เป็นฟังก์ชันพหุนามดีกรี n เช่น

$f(x) = 2x^3 + 3x^2 + 5$ เป็นฟังก์ชันพหุนามดีกรี 3

1.2 ฟังก์ชันคงที่ (Constant function)

ให้ A และ B เป็นเซตใด ๆ ฟังก์ชันซึ่งกำหนดโดย สำหรับค่า $x \in A$ จะได้ $f(x) = b$ เมื่อ b เป็นสมาชิกตัวหนึ่งของ B เรียกฟังก์ชัน f ว่าฟังก์ชันคงที่

1.3 ฟังก์ชันเอกลักษณ์ (Identity function) ถ้า $A \neq \phi$ ฟังก์ชันเอกลักษณ์บน A หมายถึง $f : A \rightarrow A$ กำหนดโดย

$f(x) = x$ **สำหรับ** $x \in A$

2. ฟังก์ชันอดิสัย (Trancendental function) คือ ฟังก์ชัน ซึ่งไม่ใช่ฟังก์ชันพีชคณิต เช่น ฟังก์ชันตรีโกณ ฟังก์ชันผกผันตรีโกณ ฟังก์ชันลอการิทึม ฟังก์ชันเอกซ์โปเนนเชียล

ตัวอย่างเช่น $f(x) = \sinh x$

$g(x) = x \ln x$

$h(x) = 2x^{x-1} + c^x$ เป็นต้น

แบบฝึกหัด 1.8

1. กำหนดให้ $A = \{-1, -2\}$, $B = \{3, 4, 5\}$ และ $C = \{7, 8\}$ จงหาผลคูณคาร์ทีเซียนต่อไปนี้

   (1) $A \times B$ (2) $A \times C$

   (3) $B \times C$ (4) $C \times B$

2. จงเขียนกราฟของความสัมพันธ์ พร้อมทั้งโดเมน และเรนจ์

   (1) $r_1 = \{(1,1), (2,1), (3,2), (3,3)\}$

   (2) $r_2 = \{(-2,0), (0,2), (2,0)\}$

   (3) $r_3 = \{(x,y) \mid y = x + 3, x \in \{-3, -1, 0, 2\}\}$

   (4) $r_4 = \{(x,y) \in I \times I \mid |y| \leqslant x , 2 \leqslant x \leqslant 2\}$

   (5) $r_5 = \{(x,y) \in R \times R \mid y \leqslant x\}$

3. จงบอกว่าความสัมพันธ์ต่อไปนี้เป็นฟังก์ชันหรือไม่ พร้อมทั้งบอกโดเมนและเรนจ์ด้วย

   (1) $f = \{(-3,0), (0,3), (3,0)\}$

   (2) $g = \{(1,1), (1,4), (1,-3), (0,0), (2,0)\}$

   (3) $h = \{(x,y) \mid y = 6 - 2x , 0 \leqslant x \leqslant 6\}$

   (4) $i = \{(x,y) \mid y^2 = 4x\}$

   (5) $j = \{(x,y) \mid x^2 + y^2 = 4 , y \geqslant 0\}$

4. กำหนด $f(x) = 10x - 7$

   $g(t) = 6 - 2t$

   $h(u) = 3u^2$

   $k(v) = v - v^2$

จงหาค่าของ

(1) $f(1), g(2), h(-1), k(3)$

(2) $f(3) + g(2), h(3) - k(4)$

(3) $\dfrac{f(2)\,g(4)}{k(-2)}$

(4) $4f(-2) - 2g(-3)$

5. กำหนด

$$g(x) = 3 - 2x$$

$$f(x) = 3x + 5$$

$$Q(x) = x^2 - 2x + 1$$

$$P(x) = 2x^2 + 3$$

จงหาค่าของ

(1) $g[f(-1)]$

(2) $g \circ f(x)$ และ $g \circ f(-1)$

(3) $f \circ g(x)$ และ $f \circ g(-1)$

(4) $Q \circ P(t)$ และ $Q \circ P(2)$

(5) $P \circ Q(t)$ และ $P \circ Q(-3)$