บทที่ 6
อนุพันธ์และอินทิกรัลของฟังก์ชันทรานเซนเดนตัล

นิยามและสูตรที่ควรทราบ

ฟังก์ชันตรีโกณ

สูตรทั่ว ๆ ไป

1. $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$

2. $\sin(x + y) = \sin x \cos y + \cos x \sin y$

3. $\cos(x + y) = \cos x \cos y - \sin x \sin y$

4. $\sin(x + \frac{\pi}{2}) = \cos x$

5. $\cos(x + \frac{\pi}{2}) = -\sin x$

6. $\sin 2x = 2 \sin x \cos x$

7. $\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x$

   $= 1 - 2\sin^2 x$

   $= 2\cos^2 x - 1$

8. $\sec^2 x = 1 + \tan^2 x$

9. $\operatorname{cosec}^2 x = 1 + \cot^2 x$

10. $\sin x + \sin y = 2 \sin \frac{(x + y)}{2} \cos \frac{(x - y)}{2}$

11. $\cos x + \cos y = 2 \cos \frac{(x + y)}{2} \cos \frac{(x - y)}{2}$

MA 111 (H) 303

สูตรอนุพันธ์

1. $d \sin u = \cos u \, du$
2. $d \cos u = -\sin u \, du$
3. $d \tan u = \sec^2 u \, du$
4. $d \cot u = -\operatorname{cosec}^2 u \, du$
5. $d \sec u = \sec u \tan u \, du$
6. $d \operatorname{cosec} u = -\operatorname{cosec} u \cot u \, du$

สูตรอินทิกรัล

1. $\int \cos u \, du = \sin u + C$
2. $\int \sin u \, du = -\cos u + C$
3. $\int \sec^2 u \, du = \tan u + C$
4. $\int \operatorname{cosec}^2 u \, du = -\cot u + C$
5. $\int \sec u \tan u \, du = \sec u + C$
6. $\int \operatorname{cosec} u \cot u \, du = -\operatorname{cosec} u + C$

บทสรุปเกี่ยวกับฟังก์ชันตรีโกณที่ควรทราบ

1. มุมในจตุภาคทั้งสี่

S	ALL
T	C

ความหมาย ในจตุภาคที่ 1 ค่าฟังก์ชันของมุมในจตุภาคนี้เป็นบวกทั้งหมด ส่วนจตุภาคที่ 2 ค่าฟังก์ชันของมุมจะเป็นบวกเฉพาะ sin และส่วนกลับของ sin เป็นต้น

2. $S = r\theta$ เมื่อ S เป็นส่วนโค้งที่รองรับมุมที่จุดศูนย์กลาง คือ θ และ r เป็นรัศมี

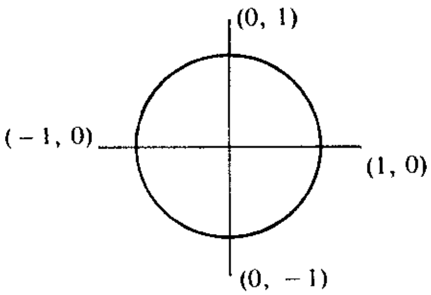
3. 360 องศา $= 2\pi$ เรเดียน

4. $\sin(-\theta) = -\sin\theta$

   $\cos(-\theta) = \cos\theta$

5. $-1 \leqslant \sin\theta \leqslant 1, \ -1 \leqslant \cos\theta \leqslant 1$

6. มุมที่แกน



หมายเหตุ จุด (x, y) ค่า x จะแทน $\cos\theta$, y แทน $\sin\theta$ ตัวอย่างเช่น จุด (1, 0) แสดงว่า

$\cos 0 = 1$

$\sin 0 = 0$ เป็นต้น

ฟังก์ชันตรีโกณผกผัน

บทสรุปทั่ว ๆ ไป

1. $y = \sin x$

   จะได้ $x = \sin^{-1} y$ หรือ $\arcsin y$

   เมื่อ $-\frac{\pi}{2} \leqslant x \leqslant \frac{\pi}{2}$

2. $\sin(\sin^{-1} x) = x$, $\sin^{-1}(\sin x) = x$

3.

ฟังก์ชัน	โดเมน	เรนจ์
$y = \arccos x$	$-1 \leqslant x \leqslant 1$	$0 \leqslant y \leqslant \pi$
$y = \arctan x$	$-\infty < x < \infty$	$-\frac{\pi}{2} < y < \frac{\pi}{2}$

$y = \text{arc cot } x$	$-\infty < x < \infty$	$0 < y < \pi$
$y = \text{arc sec } x$	$\lvert x \rvert \geqslant 1$	$0 \leqslant y \leqslant \pi$
$y = \text{arc cosec } x$	$\lvert x \rvert \geqslant 1$	$-\frac{\pi}{2} \leqslant y \leqslant \frac{\pi}{2}$

4. $\text{arc cos } x = \frac{\pi}{2} - \text{arc sin } x$

สูตรอนุพันธ์

1. $d \text{ arc sin } u = \frac{1}{\sqrt{1 - u^2}} du$
2. $d \text{ arc cos } u = \frac{-1}{\sqrt{1 - u^2}} du$
3. $d \text{ arc tan } u = \frac{1}{1 + u^2} du$
4. $d \text{ arc cot } u = \frac{-1}{1 + u^2} du$
5. $d \text{ arc sec } u = \frac{1}{\lvert u \rvert \sqrt{u^2 - 1}} du$
6. $d \text{ arc cosec } u = \frac{-1}{\lvert u \rvert \sqrt{u^2 - 1}} du$

สูตรอินทิกรัล

1. $\int \frac{du}{\sqrt{1 - u^2}} = \text{arc sin } u + C$
2. $\int \frac{du}{1 + u^2} = \text{arc tan } u + C$
3. $\int \frac{du}{u\sqrt{u^2 - 1}} = \text{arc sec } u + C$

ข้อสังเกต $\text{arc cos } u = \text{arc sec } \frac{1}{u}$

ฟังก์ชันลอการิทึม

บทสรุปทั่ว ๆ ไป

1. เมื่อ a, b เป็นจำนวนบวกใด ๆ และ n เป็นจำนวนตรรกยะ จะได้ว่า

$$\ln (ab) = \ln a + \ln b$$

$$\ln \frac{a}{b} = \ln a - \ln b$$

$$\ln a^n = n \ln a$$

2. $y = \ln x$ เป็นฟังก์ชันต่อเนื่อง ซึ่งมีโดเมนเป็น R^+ (จำนวนจริงบวก)

3. กราฟของ $y = \ln x$

   (1) ต่อเนื่อง และเพิ่มขึ้นโดยตลอด

   (2) โดเมน คือ จำนวนจริงบวก

   (3) เรนจ์ คือ จำนวนจริงทั้งหมด

   (4) $\ln 1 = 0$

   (5) อนุพันธ์อันดับที่ 2 มีค่าเป็นลบโดยตลอดในช่วง $(0, \infty)$ ดังนั้น จึงเป็นโค้งคว่ำ

สูตรอนุพันธ์

$$d \ln u = \frac{1}{u} du$$

สูตรอินทิกรัล

$$\int \frac{1}{u} du = \ln u + C$$

ฟังก์ชันเอกซ์โปเนนเชียล

บทสรุปทั่ว ๆ ไป

1. $y = e^x$ ก็ต่อเมื่อ $x = \ln y, y > 0$

2. $e^{x_1 + x_2} = e^{x_1} \cdot e^{x_2}$

3. $e^{x_1 - x_2} = \dfrac{e^{x_1}}{e^{x_2}}$

4. $e^{rx} = (e^x)^r$ เมื่อ r เป็นตรรกยะ

สูตรอนุพันธ์

$$de^u = e^u \, du$$

สูตรอินทิกรัล

$$\int e^u \, du = e^u + C$$

แบบฝึกหัด 6.1

โจทย์ข้อ 1. ถ้า $y = \operatorname{cosec} x$ แล้ว จงแสดงว่า $\dfrac{dy}{dx} = -\operatorname{cosec} x \cot x$

วิธีทำ

$$y = \operatorname{cosec} x = \frac{1}{\sin x}$$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}\left(\frac{1}{\sin x}\right) = \frac{\sin x \frac{d}{dx}(1) - \frac{d}{dx}(\sin x)}{\sin^2 x}$$

$$= \frac{0 - \cos x}{\sin^2 x}$$

$$= -\left(\frac{1}{\sin x}\right)\left(\frac{\cos x}{\sin x}\right)$$

$$= -\operatorname{cosec} x \cot x$$

$$\therefore \frac{d}{dx} \operatorname{cosec} x = -\operatorname{cosec} x \cot x$$

โจทย์ข้อ 2. ถ้า $y = \cot x$ แล้ว จงแสดงว่า $\frac{dy}{dx} = -\operatorname{cosec}^2 x$

วิธีทำ $y = \cot x = \frac{\cos x}{\sin x}$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}\left(\frac{\cos x}{\sin x}\right) = \frac{\sin x \frac{d}{dx}(\cos x) - \cos x \frac{d}{dx}(\sin x)}{\sin^2 x}$$

$$= \frac{\sin x(-\sin x) - \cos x(\cos x)}{\sin^2 x}$$

$$= \frac{-(\sin^2 x + \cos^2 x)}{\sin^2 x}$$

$$= -\frac{1}{\sin^2 x}$$

$$= -\operatorname{cosec}^2 x$$

$$\therefore \frac{d}{dx}(\cot x) = -\operatorname{cosec}^2 x$$

โจทย์ข้อ 3. จงพิสูจน์โดยนิยามของอนุพันธ์ว่า $\frac{d}{dx}(\cos x) = -\sin x$

วิธีทำ

$$\frac{d}{dx}(\cos x) = \lim_{h\to 0} \frac{\cos(x+h) - \cos x}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{\cos x \cos h - \sin x \sin h - \cos x}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} \left[\cos x\left(\frac{\cos h - 1}{h}\right) - \sin x\left(\frac{\sin h}{h}\right)\right]$$

$$= \lim_{h\to 0} \cos x\left(\frac{\cos h - 1}{h}\right) - \lim_{h\to 0} \sin x\left(\frac{\sin h}{h}\right)$$

$$= \cos x \lim_{h\to 0}\left(\frac{\cos h - 1}{h}\right) - \sin x \lim_{h\to 0}\frac{\sin h}{h}$$

$$= -\cos x \lim_{h\to 0}\left(\frac{1 - \cos h}{h}\right) - \sin x \lim_{h\to 0}\frac{\sin h}{h}$$

$\left[\text{เพราะว่า } \lim_{h\to 0}\left(\frac{1-\cos h}{h}\right) = 0 \text{ และ } \lim_{h\to 0}\frac{\sin h}{h} = 1\right]$

$$= -\cos x \cdot 0 - \sin x \cdot 1$$

$$= -\sin x$$

$$\therefore \frac{d}{dx}(\cos x) = -\sin x$$

โจทย์ข้อ 4. ถ้า $y = \sin kx$ แล้วจงแสดงว่า $y'' + k^2 y = 0$

วิธีทำ โจทย์ข้อนี้ ให้แสดงว่า $y = \sin kx$ คือ คำตอบของสมการเชิงอนุพันธ์

$$y'' + k^2 y = 0$$

จาก $y = \sin kx$

$$\therefore \quad y' = \frac{d}{dx}(\sin kx) = \cos kx \frac{d}{dx}(kx) = k\cos kx$$

และ $y'' = \frac{d}{dx}(k\cos kx) = k(-\sin kx)\frac{d}{dx}(kx) = -k^2\sin kx$

ดังนั้น $y'' + k^2 y = -k^2\sin kx + k^2\sin kx = 0$

นั่นก็คือ $y = \sin kx$ คือคำตอบของสมการเชิงอนุพันธ์นี้

จงหาอนุพันธ์ของฟังก์ชันในข้อ 5 - 14

โจทย์ข้อ 5. $\sin(\tan x)$

วิธีทำ

$$\frac{d}{dx}(\sin(\tan x)) = \cos(\tan x)\frac{d}{dx}(\tan x)$$

$$= \cos(\tan x)\sec^2 x$$

โจทย์ข้อ 6. $\cos(x^4 - x^3)$

วิธีทำ

$$\frac{d}{dx}(\cos(x^4 - x^3)) = -\sin(x^4 - x^3)\frac{d}{dx}(x^4 - x^3)$$

$$= (-\sin(x^4 - x^3))(4x^3 - 3x^2)$$

$$= -(4x^3 - 3x^2)\sin(x^4 - x^3)$$

โจทย์ข้อ 7. $\operatorname{cosec}^3\left(\frac{1}{3}y\right)$

วิธีทำ

ฟังก์ชันที่กำหนดให้เป็นฟังก์ชันของ y ∴ หาอนุพันธ์ของฟังก์ชันเทียบกับ y นั่นก็คือ

$$\frac{d}{dy}\left(\operatorname{cosec}^3\left(\frac{1}{3}y\right)\right) = 3\operatorname{cosec}^2\left(\frac{1}{3}y\right)\frac{d}{dy}\left(\operatorname{cosec}\left(\frac{1}{3}y\right)\right)$$

$$= 3\operatorname{cosec}^2\left(\frac{1}{3}y\right)\left[-\operatorname{cosec}\left(\frac{1}{3}y\right)\cot\left(\frac{1}{3}y\right)\right]\frac{d}{dy}\left(\frac{1}{3}y\right)$$

$$= -3\operatorname{cosec}^3\left(\frac{1}{3}y\right)\cdot\cot\left(\frac{1}{3}y\right)\cdot\frac{1}{3}$$

$$= -\operatorname{cosec}^3\left(\frac{1}{3}y\right)\cot\left(\frac{1}{3}y\right)$$

โจทย์ข้อ 8. $\dfrac{\sin 2x}{1 + \cos 2x}$

วิธีทำ

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{\sin 2x}{1 + \cos 2x}\right) = \frac{(1 + \cos 2x)\frac{d}{dx}(\sin 2x) - \sin 2x\frac{d}{dx}(1 + \cos 2x)}{(1 + \cos 2x)^2}$$

$$= \frac{(1 + \cos 2x)(\cos 2x)(2) - \sin 2x(-\sin 2x)(2)}{(1 + \cos 2x)^2}$$

$$= \frac{2\cos 2x + 2\cos^2 2x + 2\sin^2 2x}{(1 + \cos 2x)^2}$$

$$= \frac{2\cos 2x + 2}{(1 + \cos 2x)^2}$$

$$= \frac{2}{1 + \cos 2x} = \frac{2}{2\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x} = \sec^2 x$$

หรือ ใช้เอกลักษณ์ตรีโกณ ก่อนที่จะหาอนุพันธ์ นั่นก็คือ

$$\frac{\sin 2x}{1 + \cos 2x} = \frac{2\sin x \cos x}{2\cos^2 x} = \frac{\sin x}{\cos x} = \tan x$$

$$\therefore \frac{d}{dx}\left(\frac{\sin 2x}{1 + \cos 2x}\right) = \frac{d}{dx}(\tan x) = \sec^2 x$$

โจทย์ข้อ 9 $x^2 \tan^2 \frac{x}{2}$

วิธีทำ

$$\frac{d}{dx}\left(x^2 \tan^2\left(\frac{x}{2}\right)\right) = x^2 \frac{d}{dx}\left(\tan^2\left(\frac{x}{2}\right)\right) + \tan^2 \frac{x}{2} \cdot \frac{d}{dx}(x^2)$$

$$= x^2 \left(2\tan\left(\frac{x}{2}\right)\right)\left(\sec^2\left(\frac{x}{2}\right)\right)\left(\frac{1}{2}\right) + \left(\tan^2\left(\frac{x}{2}\right)\right)(2x)$$

$$= x\tan\left(\frac{x}{2}\right)\left[x\sec^2\left(\frac{x}{2}\right) + 2\tan\left(\frac{x}{2}\right)\right]$$

โจทย์ข้อ 10. $\frac{1}{3}\sec^3 2x - \sec 2x$

วิธีทำ

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{3}\sec^3 2x - \sec 2x\right)$$

$$= \frac{1}{3}(3\sec^3 2x)(\sec 2x \tan 2x)(2) - 2\sec 2x \tan 2x$$

$$= 2\sec 2x \tan 2x (\sec^2 2x - 1)$$

$$= 2\sec 2x \tan^3 2x \quad (\because \sec^2 2x = 1 + \tan^2 2x)$$

โจทย์ข้อ 11. $\cot^2 x \big/ (1 + x^2)$

วิธีทำ

$$\frac{d}{dx}\left(\cot^2 x \big/ (1 + x^2)\right) = \frac{(1 + x^2)\frac{d}{dx}(\cot^2 x) - \cot^2 x \frac{d}{dx}(1 + x^2)}{(1 + x^2)^2}$$

$$= \frac{(1 + x^2)(2\cot x)(-\operatorname{cosec}^2 x) - (\cot^2 x)(2x)}{(1 + x^2)^2}$$

$$= -2\cot x (1 + x^2)^{-2}\left[(1 + x^2)\operatorname{cosec}^2 x + x\cot x\right]$$

โจทย์ข้อ 12. $\tan(\sin x)$

วิธีทำ

$$\frac{d}{dx}\tan(\sin x) = \sec^2(\sin x)\frac{d}{dx}(\sin x)$$

$$= \cos x \sec^2(\sin x)$$

โจทย์ข้อ 13. $\sqrt{\tan 2x}$

วิธีทำ

$$\frac{d}{dx}(\sqrt{\tan 2x}) = \frac{1}{2}(\tan 2x)^{-\frac{1}{2}}(\sec^2 2x)(2)$$

$$= \frac{\sec^2 2x}{\sqrt{\tan 2x}}$$

โจทย์ข้อ 14. จงหาอนุพันธ์ของข้อต่อไปนี้ และเขียนสูตรอินทิกรัลที่ได้

ก) $2 \sin x \cos x$

วิธีทำ

$$\frac{d}{dx}(2 \sin x \cos x) = \frac{d}{dx}(\sin 2x)$$

$$= (\cos 2x)(2)$$

$$= 2 \cos 2x$$

ดังนั้น $\int 2 \cos 2x \, dx = 2 \sin x \cos x + C$

$$= \sin 2x + C$$

ข) $x \tan x$

วิธีทำ

$$\frac{d}{dx}(x \tan x) = x \frac{d}{dx}(\tan x) + \tan x \frac{dx}{dx}$$

$$= x \sec^2 x + \tan x$$

ดังนั้น $\int (x \sec^2 x + \tan x) \, dx = x \tan x + C$

ค) $\frac{\sin x}{x}$

วิธีทำ

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{\sin x}{x}\right) = \frac{x \frac{d}{dx}(\sin x) - \sin x \frac{dx}{dx}}{x^2}$$

$$= \frac{x \cos x - \sin x}{x^2}$$

ดังนั้น $\int \left(\frac{x \cos x - \sin x}{x^2}\right) dx = \frac{\sin x}{x} + C$

ง) $\dfrac{1}{1 + \tan x}$

วิธีทำ

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{1 + \tan x}\right)$$

$$= \frac{(1 + \tan x)\cdot 0 - 1 \cdot \frac{d}{dx}(1 + \tan x)}{(1 + \tan x)^2}$$

$$= \frac{-\sec^2 x}{(1 + \tan x)^2}$$

ดังนั้น $\displaystyle\int \frac{-\sec^2 x}{(1 + \tan x)^2}\,dx = \frac{1}{1 + \tan x} + C$

จ) $\dfrac{\sin x + \cos x}{\sin x - \cos x}$

วิธีทำ

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{\sin x + \cos x}{\sin x - \cos x}\right)$$

$$= \frac{(\sin x - \cos x)\frac{d}{dx}(\sin x + \cos x) - (\sin x + \cos x)\frac{d}{dx}(\sin x - \cos x)}{(\sin x - \cos x)^2}$$

$$= \frac{(\sin x - \cos x)(\cos x - \sin x) - (\sin x + \cos x)(\cos x + \sin x)}{(\sin x - \cos x)^2}$$

$$= \frac{-(\sin x - \cos x)^2 - (\sin x + \cos x)^2}{(\sin x - \cos x)^2}$$

$$= \frac{-2}{(\sin x - \cos x)^2}$$

$$= \frac{-2}{1 - \sin 2x}$$

ดังนั้น $\displaystyle\int \frac{-2dx}{1 - \sin 2x} = \left(\frac{\sin x + \cos x}{\sin x - \cos x}\right) + C$

โจทย์ข้อ 15. ให้ $f(x) = x^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right)$ เมื่อ $x \neq 0$ และ

$f(0) = 0$ เมื่อ $x = 0$

จงแสดงโดยนิยามของอนุพันธ์ของ f ว่า $f'(0)$ หาค่าได้ และเท่ากับศูนย์

วิธีทำ

$f(x)$ มีความต่อเนื่องที่ $x = 0$ ซึ่งสามารถแสดงได้ว่า

$$\lim_{x \to 0} f(x) = f(0)$$

เมื่อ $f(x)$ มีความต่อเนื่องที่ $x = 0$ ทำให้สามารถพิจารณาต่อไปได้ว่า อนุพันธ์ของ $f(x)$ ที่ $x = 0$ หาค่าได้หรือไม่ นั่นก็คือ พิจารณา

$$\begin{aligned}
f'(0) &= \lim_{h \to 0} \frac{f(h) - f(0)}{h} \\
&= \lim_{h \to 0} \frac{h^2 \sin\left(\frac{1}{h}\right) - 0}{h} \\
&= \lim_{h \to 0} h \sin\left(\frac{1}{h}\right) \\
&= \lim_{u \to \infty} \frac{1}{u} \sin u \qquad \left(u = \frac{1}{h}\right) \\
&= 0 \qquad (\because \lim_{u \to \infty} \frac{1}{u} = 0 \text{ และ } -1 \leqslant \sin u \leqslant 1)
\end{aligned}$$

$\therefore$ $f'(0)$ หาค่าได้ และเท่ากับศูนย์

จงหาค่าของอินทิกรัลในข้อ 16 - 25

โจทย์ข้อ 16 $\int \sec 2x \tan 2x \, dx$

วิธีทำ

$$\begin{aligned}
\int \sec 2x \tan 2x \, dx &= \frac{1}{2} \int \sec 2x \tan 2x \, d(2x) \\
&= \frac{1}{2} \sec 2x + C
\end{aligned}$$

โจทย์ข้อ 17. $\int \cos \frac{\pi}{2} x \, dx$

วิธีทำ

$$\int \cos \frac{\pi}{2} x \, dx = \frac{2}{\pi} \int \cos \frac{\pi}{2} x \, d\left(\frac{\pi}{2} x\right)$$

$$= \frac{2}{\pi} \sin \frac{\pi}{2} x + C$$

โจทย์ข้อ 18. $\int \frac{dx}{\cos^2 x}$

วิธีทำ

$$\int \frac{dx}{\cos^2 x} = \int \sec^2 x \, dx$$

$$= \tan x + C$$

โจทย์ข้อ 19. $\int \frac{\sin \sqrt{\pi x}}{\sqrt{x}} dx$

วิธีทำ

ให้ $u = \sqrt{\pi x}$

$\therefore du = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\pi}{x}} dx$ และได้ $\frac{2}{\sqrt{\pi}} du = \frac{dx}{\sqrt{x}}$

$$\therefore \int \frac{\sin \sqrt{\pi x}}{\sqrt{x}} dx \doteq \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int \sin u \, du$$

$$= -\frac{2}{\sqrt{\pi}} \cos u + C$$

$$= -\frac{2}{\sqrt{\pi}} \cos \sqrt{\pi x} + C$$

โจทย์ข้อ 20. $\int \frac{\sin 3x}{\cos^3 3x}\,dx$

วิธีทำ

ให้ $u = \cos 3x$

$\therefore du = -3 \sin 3x\,dx$

$$\therefore \int \frac{\sin 3x}{\cos^3 3x}\,dx = -\frac{1}{3}\int \frac{du}{u^3}$$

$$= -\frac{1}{3}\left(\frac{u^{-2}}{-2}\right) + C$$

$$= \frac{1}{6}u^{-2} + C$$

$$= \frac{1}{6}(\cos 3x)^{-2} + C$$

$$= \frac{1}{6}\sec^2 3x + C$$

โจทย์ข้อ 21. $\int \sin^5 x\,dx$

วิธีทำ

เขียน $\int \sin^5 x\,dx = \int \sin^4 x \sin x\,dx$

$\because \sin x\,dx = -d(\cos x)$

และ ถ้าใช้เอกลักษณ์ตรีโกณ $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$

จะได้ $\sin^4 x = (1 - \cos^2 x)^2$

ดังนั้น แทนค่าในอินทิกรัลได้

$$\int \sin^4 x \sin x\,dx = \int (1 - \cos^2 x)^2(-d(\cos x))$$

$$= -\int (1 - 2\cos^2 x + \cos^4 x)\,d(\cos x)$$

$$= -\cos x + \frac{2}{3}\cos^3 x - \frac{1}{5}\cos^5 x + C$$

โจทย์ข้อ 22. $\int \tan^5 x \sec^2 x \, dx$

วิธีทำ

$\because \sec^2 x \, dx = d(\tan x)$

$$\therefore \int \tan^5 x \sec^2 x \, dx = \int \tan^5 x \, d(\tan x)$$

$$= \frac{1}{6} \tan^6 x + C$$

โจทย์ข้อ 23. $\int \cot^2 (2x - 6) \, dx$

วิธีทำ

ให้ $u = 2x - 6$

$\therefore du = 2dx$

และใช้เอกลักษณ์ตรีโกณ $\cot^2 u = \operatorname{cosec}^2 u - 1$

ดังนั้น แทนค่าในอินทิกรัลได้

$$\int \cot^2 (2x - 6) \, dx = \frac{1}{2} \int \cot^2 u \, du$$

$$= \frac{1}{2} \int (\operatorname{cosec}^2 u - 1) \, du$$

$$= \frac{1}{2} (-\cot u - u) + C_1$$

$$= \frac{1}{2} \cot (2x - 6) - x + C$$

โจทย์ข้อ 24. $\int \cos^2 \frac{x}{2} \, dx$

วิธีทำ

$$\because \cos^2 \frac{x}{2} = \frac{1 + \cos x}{2}$$

$$\therefore \int \cos^2 \frac{x}{2} \, dx = \frac{1}{2} \int (1 + \cos x) \, dx$$

$$= \frac{1}{2} x + \frac{1}{2} \sin x + C$$

โจทย์ข้อ 25. $\int \sin 3x \cos 5x \, dx$

วิธีทำ

$$\because \quad \sin 3x \cos 5x = \frac{1}{2}(\sin(3x + 5x) + \sin(3x - 5x))$$
$$= \frac{1}{2}(\sin 8x - \sin 2x)$$
$$\therefore \quad \int \sin 3x \cos 5x \, dx = \frac{1}{2} \int (\sin 8x - \sin 2x) \, dx$$
$$= \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{8}(-\cos 8x) + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cos 2x + C$$
$$= -\frac{1}{16} \cos 8x + \frac{1}{4} \cos 2x + C$$

แบบฝึกหัด 6.2

จงหาฟังก์ชันผกผันของฟังก์ชันต่อไปนี้

โจทย์ข้อ 1. $f(x) = x^3 + 1$

วิธีทำ

ให้ $y = x^3 + 1$ จะเห็นว่า ฟังก์ชันผกผันหาได้ เพราะว่า $x^3 + 1$ เป็นฟังก์ชันเพิ่ม

จาก $\quad y = x^3 + 1$

$\quad x^3 = y - 1$

$\therefore \quad x = (y - 1)^{\frac{1}{3}}$ คือ ฟังก์ชันผกผันของ $y = x^3 + 1$

โจทย์ข้อ 2. $f(x) = \sqrt{x + 2}$

วิธีทำ

ให้ $y = \sqrt{x + 2}$ สำหรับ $x \geqslant -2$ พิจารณาได้ว่า ฟังก์ชันนี้เป็นฟังก์ชันเพิ่ม ดังนั้น

สามารถหาฟังก์ชันผกผันได้

จาก $y = \sqrt{x+2}$

$y^2 = x + 2$

$\therefore \quad x = y^2 - 2$ คือ ฟังก์ชันผกผันของ $y = \sqrt{x+2}$

โจทย์ข้อ 3. $f(x) = \sin 2x$

วิธีทำ

ให้ $y = \sin 2x$ และจำกัดค่าของ x ให้อยู่ในช่วง $-\frac{\pi}{4} \leqslant x \leqslant \frac{\pi}{4}$ เพื่อให้ได้ฟังก์ชันเพิ่ม บนช่วงนี้

จาก $y = \sin 2x$

$2x = \arcsin y$

$\therefore \quad x = \frac{1}{2} \arcsin y$ เป็นฟังก์ชันผกผันของ $y = \sin 2x$

โจทย์ข้อ 4. $f(x) = \cos \frac{x}{2}$

วิธีทำ

ให้ $y = \cos \frac{x}{2}$ และจำกัดค่า x อยู่ในช่วง $0 \leqslant x \leqslant 2\pi$

ดังนั้น จะได้ $y = \cos \frac{x}{2}$ เป็นฟังก์ชันลดบนช่วงนี้

จาก $y = \cos \frac{x}{2}$

$\frac{x}{2} = \arccos y$

$\therefore \quad x = 2 \arccos y$ เป็นฟังก์ชันผกผันของ $y = \cos \frac{x}{2}$

จงหาค่าของฟังก์ชันตรีโกณผกผันในข้อต่อไปนี้

หมายเหตุ

การทำโจทย์เกี่ยวกับฟังก์ชันตรีโกณผกผันเหล่านี้ **ต้องตอบค่าในช่วงที่จำกัดสำหรับแต่ละฟังก์ชัน**

MA 111 (H) 321

โจทย์ข้อ 5. arc tan (tan $3\frac{\pi}{4}$)

วิธีทำ

$$\text{arc tan }(\tan \frac{3\pi}{4}) = \text{arc tan }(-1)$$

$$= -\frac{\pi}{4}$$

โจทย์ข้อ 6. arc tan (tan 2π)

วิธีทำ

$$\text{arc tan }(\tan 2\pi) = \text{arc tan }(0)$$

$$= 0$$

โจทย์ข้อ 7. arc sin (sin $\frac{3\pi}{2}$)

วิธีทำ

$$\text{arc sin }(\sin \frac{3\pi}{2}) = \text{arc sin }(-1)$$

$$= -\frac{\pi}{2}$$

โจทย์ข้อ 8. arc cos (cos$(-\frac{\pi}{2})$)

วิธีทำ

$$\text{arc cos }(\cos(-\frac{\pi}{2})) = \text{arc cos }(0)$$

$$= \frac{\pi}{2}$$

โจทย์ข้อ 9. $\text{arc sin}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$

วิธีทำ

ให้ $y = \text{arc sin}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) \quad \therefore \quad \sin y = \frac{\sqrt{3}}{2}$

$\therefore \quad y = \frac{\pi}{3}$ (ต้องเลือกค่าในช่วง $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$)

$\therefore \text{arc sin}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \frac{\pi}{3}$

โจทย์ข้อ 10. $\text{arc cos}\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$

วิธีทำ

ให้ $y = \text{arc cos}\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$

$\therefore \cos y = -\frac{1}{\sqrt{2}}$

$\therefore \quad y = \frac{3\pi}{4}$ (ต้องเลือกค่าในช่วง $[0, \pi]$)

$\therefore \text{arc cos}\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \frac{3\pi}{4}$

โจทย์ข้อ 11. $\text{arc cot}(\sqrt{3})$

วิธีทำ

ให้ $y = \text{arc cot}(\sqrt{3})$

$\therefore \quad \cot y = \sqrt{3}$

$\therefore \quad y = \frac{\pi}{6}$

โจทย์ข้อ 12. arc sec (2)

วิธีทำ

ให้ $y = \text{arc sec}\,(2)$

$\therefore \quad \sec y = 2$

$\therefore \quad y = \frac{\pi}{3}$

จงหาอนุพันธ์ของข้อต่อไปนี้

โจทย์ข้อ 13. $y = \text{arc cot}\, x^2$

วิธีทำ

$$y = \text{arc cot}\, x^2$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-1}{1 + x^2} \cdot \frac{d}{dx}(x^2)$$

$$= \frac{-2x}{1 + x^2}$$

โจทย์ข้อ 14. $y = \arccos \sqrt{x}$

วิธีทำ

$$y = \arccos \sqrt{x}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-1}{\sqrt{1 - (\sqrt{x})^2}} \cdot \frac{d}{dx}(\sqrt{x})$$

$$= -\frac{1}{2\sqrt{x(1 - x)}}$$

โจทย์ข้อ 15. $y = \arcsin (x^2 - 1)$

วิธีทำ

$$y = \arcsin (x^2 - 1)$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\sqrt{1 - (x^2 - 1)^2}} \cdot \frac{d}{dx} (x^2 - 1)$$

$$= \frac{2x}{\sqrt{1 - (x^2 - 1)^2}}$$

โจทย์ข้อ 16. $y = \dfrac{1}{\arcsin x}$

วิธีทำ

$$y = \frac{1}{\arcsin x} = (\arcsin x)^{-1}$$

$$\frac{dy}{dx} = -(\arcsin x)^{-2} \frac{d}{dx} (\arcsin x)$$

$$= -(\arcsin x)^{-2} \cdot \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$$

$$= \frac{-1}{(\arcsin x)^2 \sqrt{1 - x^2}}$$

โจทย์ข้อ 17. $y = \arcsin (\cos x - x^2)$

วิธีทำ

$$y = \arcsin (\cos x - x^2)$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\sqrt{1 - (\cos x - x^2)^2}} \cdot \frac{d}{dx} (\cos x - x^2)$$

$$= \frac{-\sin x - 2x}{\sqrt{1 - (\cos x - x^2)^2}}$$

โจทย์ข้อ 18. $y = (\text{arc sin } 2x + \text{arc tan } x^2)^{3/2}$

วิธีทำ

$$y = (\text{arc sin } 2x + \text{arc tan } x^2)^{3/2}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{3}{2}(\text{arc sin } 2x + \text{arc tan } x^2)^{1/2} \frac{d}{dx}(\text{arc sin } 2x + \text{arc tan } x^2)$$

$$= \frac{3}{2}(\text{arc sin } 2x + \text{arc tan } x^2)^{1/2} \left[\frac{2}{\sqrt{1-(2x)^2}} + \frac{2x}{1+(x^2)^2}\right]$$

$$= \frac{3}{2}(\text{arc sin } 2x + \text{arc tan } x^2)^{1/2} \left[\frac{2}{\sqrt{1-4x^2}} + \frac{2x}{1+x^4}\right]$$

โจทย์ข้อ 19. $y = x^2 \text{ arc cosec } x$

วิธีทำ

$$y = x^2 \text{ arc cosec } x$$

$$\frac{dy}{dx} = x^2 \frac{d}{dx}(\text{arc cosec } x) + \text{arc cosec } x \frac{d}{dx}(x^2)$$

$$= x^2 \frac{-1}{|x|\sqrt{x^2-1}} + \text{arc cosec } x \cdot 2x$$

$$= \frac{-|x|}{\sqrt{x^2-1}} + 2x \text{ arc cosec } x$$

โจทย์ข้อ 20. $y = x/\text{arc cos } x$

วิธีทำ

$$y = x/\text{arc cos } x$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\text{arc cos } x \frac{dx}{dx} - x \frac{d}{dx} \text{arc cos } x}{(\text{arc cos } x)^2}$$

$$= \frac{\text{arc cos } x - x\left(\frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}\right)}{(\text{arc cos } x)^2}$$

$$= (\text{arc cos } x)^{-2}\left(\text{arc cos } x + \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\right)$$

โจทย์ข้อ 21. $y = (1 + \text{arc sec } x)^3$

วิธีทำ

$$y = (1 + \text{arc sec } x)^3$$

$$\frac{dy}{dx} = 3(1 + \text{arc sec } x)^2 \frac{d}{dx}(1 + \text{arc sec } x)$$

$$= 3(1 + \text{arc sec } x)^2 \cdot \frac{1}{|x|\sqrt{x^2 - 1}}$$

$$= \frac{3(1 + \text{arc sec } x)^2}{|x|\sqrt{x^2 - 1}}$$

จงหาอินทิกรัลของข้อต่อไปนี้

โจทย์ข้อ 22. $\int \frac{dx}{\sqrt{4 - x^2}}$

วิธีทำ

$$\int \frac{dx}{\sqrt{4 - x^2}} = \int \frac{dx}{2\sqrt{1 - \left(\frac{x}{2}\right)^2}}$$

$$= \int \frac{d\left(\frac{x}{2}\right)}{\sqrt{1 - \left(\frac{x}{2}\right)^2}}$$

$$= \text{arc sin}\left(\frac{x}{2}\right) + C$$

โจทย์ข้อ 23. $\int \frac{dx}{x\sqrt{9x^2 - 1}}$ (a ต้องแก้เป็น 9 ในโจทย์ข้อนี้)

วิธีทำ

$$\int \frac{dx}{x\sqrt{9x^2 - 1}} = \int \frac{dx}{x\sqrt{(3x)^2 - 1}}$$

$$= \int \frac{d(3x)}{3x\sqrt{(3x)^2 - 1}}$$

$$= \text{arc sec } |3x| + C$$

โจทย์ข้อ 24. $\int \frac{dx}{16 + 9x^2}$

วิธีทำ

$$\int \frac{dx}{16 + 9x^2} = \int \frac{dx}{16\left(1 + \left(\frac{3x}{4}\right)^2\right)}$$

$$= \frac{4}{3} \times \frac{1}{16} \arctan\left(\frac{3x}{4}\right) + C$$

$$= \frac{1}{12} \arctan\left(\frac{3x}{4}\right) + C$$

โจทย์ข้อ 25. $\int \frac{x^2 + 1}{4 + x^2}\, dx$

วิธีทำ

$$\int \frac{x^2 + 1}{4 + x^2}\, dx = \int \left(1 - \frac{3}{4 + x^2}\right) dx$$

$$= \int dx - 3 \int \frac{dx}{4 + x^2}$$

$$= x - \frac{3}{4} \int \frac{dx}{1 + \left(\frac{x}{2}\right)^2}$$

$$= x - \frac{3}{4} \cdot 2 \cdot \arctan\left(\frac{x}{2}\right) + C$$

$$= x - \frac{3}{2} \arctan\left(\frac{x}{2}\right) + C$$

โจทย์ข้อ 26. $\int \frac{2x + 1}{\sqrt{1 - 4x^2}}\, dx$

วิธีทำ

$$\int \frac{2x + 1}{\sqrt{1 - 4x^2}}\, dx = \int \frac{2x}{\sqrt{1 - 4x^2}}\, dx + \int \frac{dx}{\sqrt{1 - 4x^2}}$$

$$= \int \frac{d(x^2)}{\sqrt{1 - 4x^2}} + \int \frac{dx}{\sqrt{1-(2x)^2}}$$

$$= -\frac{1}{4} \cdot \frac{\sqrt{1 - 4x^2}}{\frac{1}{2}} + \frac{1}{2} \text{ arc sin } (2x) + C$$

$$= -\frac{1}{2} \sqrt{1 - 4x^2} + \frac{1}{2} \text{ arc sin } (2x) + C$$

โจทย์ข้อ 27. $\int \frac{dx}{(x + 1)^2 + 4}$

วิธีทำ

$$\int \frac{dx}{(x + 1)^2 + 4} = \frac{1}{4} \int \frac{dx}{1 + \left(\frac{x + 1}{2} \right)^2}$$

$$= \frac{1}{4} \cdot 2 \cdot \text{arc tan} \left(\frac{x + 1}{2} \right) + C$$

$$= \frac{1}{2} \text{ arc tan} \left(\frac{x + 1}{2} \right) + C$$

โจทย์ข้อ 28. $\int \frac{dx}{x^2 + x + 1}$

วิธีทำ

จัด $x^2 + x + 1$ เป็นรูปกำลังสองสมบูรณ์

$\therefore x^2 + x + 1 = (x + \frac{1}{2})^2 + \frac{3}{4}$

$$\therefore \int \frac{dx}{x^2 + x + 1} = \int \frac{dx}{\left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}}$$

$$= \frac{4}{3} \int \frac{dx}{\left(\frac{2x + 1}{\sqrt{3}} \right)^2 + 1}$$

$$= \frac{4}{3} \times \frac{\sqrt{3}}{2} \text{ arc tan} \left(\frac{2x+1}{\sqrt{3}} \right) + C$$

$$= \frac{2}{\sqrt{3}} \text{arc tan} \left(\frac{2x+1}{\sqrt{3}} \right) + C$$

โจทย์ข้อ 29. จงหาค่าของ $\int_{-1/\sqrt{2}}^{1/\sqrt{2}} \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}}$

วิธีทำ

$$\int_{-1/\sqrt{2}}^{1/\sqrt{2}} \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}} = \Big[\text{arc sin } t \Big]_{-1/\sqrt{2}}^{1/\sqrt{2}}$$

$$= \text{arc sin} \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \right) - \text{arc sin} \left(\frac{-1}{\sqrt{2}} \right)$$

$$= \frac{\pi}{4} - \left(-\frac{\pi}{4} \right)$$

$$= \frac{\pi}{2}$$

โจทย์ข้อ 30. จงหาค่าของ $\int_0^5 \frac{dx}{x^2+25}$

วิธีทำ

$$\int_0^5 \frac{dx}{x^2+25} = \frac{1}{25} \int_0^5 \frac{dx}{\left(\frac{x}{5}\right)^2 + 1}$$

$$= \Big[\frac{1}{25} \cdot 5 \text{ arc tan} \left(\frac{x}{5} \right) \Big]_0^5$$

$$= \frac{1}{5} (\text{arc tan } (1) - \text{arc tan } (0))$$

$$= \frac{1}{5} \left(\frac{\pi}{4} - 0 \right)$$

$$= \frac{\pi}{20}$$

แบบฝึกหัด 6.3

โจทย์ข้อ 1. กำหนดให้ $\ell n\, 2 = 0.69315$, $\ell n\, 3 = 1.09861$, $\ell n\, 10 = 2.30259$

จงหาค่าของ $\ell n\, 4$, $\ell n\, 5$, $\ell n\, 9$, $\ell n\, 1.5$, $\ell n\, 1.25$, $\ell n \sqrt{30}$

วิธีทำ

1) $\ell n\, 4 = \ell n\, 2^2 = 2\,\ell n\, 2 = 2(0.69315) = 1.38630$

2) $\ell n\, 5 = \ell n\left(\frac{10}{2}\right)\ \ell n\, 10 - \ell n\, 2 = 2.30259 - 0.69315 = 1.60944$

3) $\ell n\, 9 = \ell n\,(3^2) = 2\,\ell n\, 3 = 2(1.09861) = 2.19722$

4) $\ell n\, 1.5 = \ell n\left(\frac{3}{2}\right) = \ell n\, 3 - \ell n\, 2 = 1.09861 - 0.69315 = 0.40546$

5) $\ell n\, 1.25 = \ln \frac{125}{100} = \ell n\, 5^3 - \ell n\, 10^2 = 3\,\ell n\, 5 - 2\,\ell n\, 10$

$= 3(1.60944) - 2(2.30259)$

$= 0.22314$

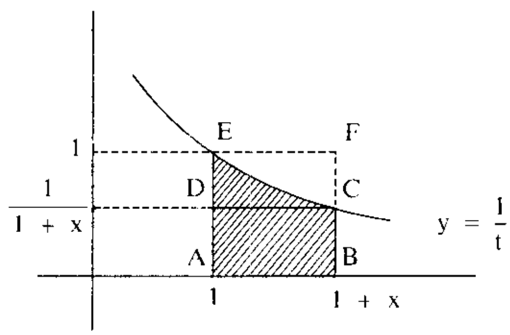
6) $\ell n \sqrt{30} = \frac{1}{2}\,\ell n\, 30 = \frac{1}{2}(\ell n\, 3 + \ell n\, 10) = \frac{1}{2}(1.09861 + 2.30259)$

$= 1.70060$

โจทย์ข้อ 2. ให้ $x > 0$ จงพิสูจน์ว่า $\frac{x}{1+x} < \ell n\,(1+x) < x$

วิธีทำ

จากนิยามของ $\ell n\, x$ คือ พื้นที่ใต้เส้นโค้ง $\frac{1}{t}$ จาก 1 ถึง x



ดังนั้น $\ln(1+x)$ คือ พื้นที่ใต้เส้นโค้ง $\frac{1}{t}$ จาก 1 ถึง $1+x$ ดังรูป

∴ จากรูป จะได้ว่า

พื้นที่สี่เหลี่ยมผืนผ้า ABCD < พื้นที่ใต้เส้นโค้ง $\frac{1}{t}$ จาก 1 ถึง $1+x$ < พื้นที่สี่เหลี่ยมผืนผ้า ABFE

$$\therefore \frac{1}{1+x} \cdot x < \ln(1+x) < 1 \cdot x$$

$$\therefore \frac{x}{1+x} < \ln(1+x) < x$$

โจทย์ข้อ 3. จงพิสูจน์ว่า $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1$

และเปรียบเทียบลิมิตนี้กับอนุพันธ์ของ $\ln x$ ที่ $x = 1$ ว่าสัมพันธ์กันอย่างไร

วิธีทำ จากแบบฝึกหัดข้อ 2 สำหรับ $x > 0$ ได้

$$\frac{x}{1+x} < \ln(1+x) < x$$

$$\therefore \quad \frac{1}{1+x} < \frac{\ln(1+x)}{x} < 1$$

ให้ $x \to 0$

$$\therefore \quad \lim_{x\to 0} \frac{1}{1+x} = 1$$

ดังนั้น $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1$ เพราะว่า ขอบเขตบน และล่าง ต่างก็มีค่าเข้าใกล้ 1 เมื่อ $x\to 0$

ให้ $f(x) = \ln x$ โดยนิยามของอนุพันธ์ได้

$$f'(1) = \lim_{h\to 0} \frac{\ln(1+h) - \ln 1}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{\ln(1+h)}{h} \qquad (\ln 1 = 0)$$

$$= 1$$

∴ อนุพันธ์ของ $\ln x$ ที่ $x = 1$ หาค่าได้ และเท่ากับ 1

จงหาอนุพันธ์ของข้อต่อไปนี้

โจทย์ข้อ 4. $y = \ln x^2$

วิธีทำ

$$y = \ln x^2$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{x^2}\frac{d}{dx}(x^2) = \frac{2x}{x^2} = \frac{2}{x}$$

โจทย์ข้อ 5. $y = \ln(\cos x)$

วิธีทำ

$$y = \ln(\cos x)$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\cos x}\frac{d}{dx}(\cos x) = -\frac{\sin x}{\cos x} = -\tan x$$

โจทย์ข้อ 6. $y = \ln(\ln x)$

วิธีทำ

$$y = \ln(\ln x)$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\ln x}\frac{d}{dx}(\ln x) = \frac{1}{x \ln x}$$

โจทย์ข้อ 7. $y = \ln(\sec x + \tan x)$

วิธีทำ

$$y = \ln(\sec x + \tan x)$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\sec x + \tan x}\frac{d}{dx}(\sec x + \tan x)$$

$$= \frac{1}{\sec x + \tan x}(\sec x \tan x + \sec^2 x)$$

$$= \sec x$$

โจทย์ข้อ 8. $y = \ell n \left(\frac{x+1}{1-x} \right)$

วิธีทำ

$$y = \ell n \left(\frac{x+1}{1-x} \right)$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\left(\frac{x+1}{1-x} \right)} \frac{d}{dx} \left(\frac{x+1}{1-x} \right)$$

$$= \left(\frac{1-x}{1+x} \right) \frac{(1-x)\frac{d}{dx}(x+1) - (x+1)\frac{d}{dx}(1-x)}{(1-x)^2}$$

$$= \left(\frac{1-x}{1+x} \right) \frac{(1-x) - (x+1)(-1)}{(1-x)^2}$$

$$= \frac{2}{1-x^2}$$

โจทย์ข้อ 9. $y = \ell n (x + \sqrt{x^2 + a^2})$ (a = ค่าคงที่)

วิธีทำ

$$y = \ell n (x + \sqrt{x^2 + a^2})$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{x + \sqrt{x^2 + a^2}} \frac{d}{dx} (x + \sqrt{x^2 + a^2})$$

$$= \frac{1}{x + \sqrt{x^2 + a^2}} \left(1 + \frac{2x}{2\sqrt{x^2 + a^2}} \right)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{x^2 + a^2}}$$

โจทย์ข้อ 10. $y = (\ell n\, x)^2 \text{ arc tan } \frac{1}{x}$

วิธีทำ

$$y = (\ell n\, x)^2 \text{ arc tan } \frac{1}{x}$$

$$\frac{dy}{dx} = (\ell n\, x)^2 \frac{d}{dx} \text{ arc tan } \frac{1}{x} + \text{arc tan } \frac{1}{x} \frac{d}{dx} (\ell n\, x)^2$$

$$= (\ell n\, x)^2 \frac{1}{1 + (\frac{1}{x})^2} \cdot \frac{-1}{x^2} + (\text{arc tan } \frac{1}{x})(2\, \ell n\, x)(\frac{1}{x})$$

$$= \frac{-(\ell n\, x)^2}{1 + x^2} + \frac{2}{x}(\ell n\, x) \text{ arc tan } \frac{1}{x}$$

$$= \ell n\, x \left(\frac{2}{x} \text{ arc tan } \frac{1}{x} - \frac{\ell n\, x}{1 + x^2} \right)$$

โจทย์ข้อ 11 $y = (\ell n \cos x)(\ell n \sin x)$

วิธีทำ

$$y = (\ell n \cos x)(\ell n \sin x)$$

$$\frac{dy}{dx} = \ell n \cos x \frac{d}{dx} \ell n \sin x + \ell n \sin x \frac{d}{dx} \ell n \cos x$$

$$= (\ell n \cos x)(\frac{1}{\sin x}) \cos x + (\ell n \sin x)(\frac{1}{\cos x})(-\sin x)$$

$$= \cot x\, \ell n \cos x - \tan x\, \ell n \sin x$$

จงหาค่าอินทิกรัลของข้อต่อไปนี้

โจทย์ข้อ 12. $\int \frac{dx}{1 - 2x}$

วิธีทำ

ให้ $u = 1 - 2x \quad \therefore du = -2dx$

$$\int \frac{dx}{1-2x} = -\frac{1}{2} \int \frac{du}{u} = -\frac{1}{2} \ell n |u| + C$$

$$= -\frac{1}{2} \ell n |1 - 2x| + C$$

โจทย์ 13. $\int \cot x\, dx$

วิธีทำ

$$\int \cot x\, dx = \int \frac{\cos x}{\sin x}\, dx$$

$$= \int \frac{d(\sin x)}{\sin x}$$

$$= \ln(\sin x) + C$$

โจทย์ข้อ 14. $\int \frac{3x^2 + 1}{x^3 + x - 5}\, dx$

วิธีทำ

ให้ $u = x^3 + x - 5 \quad \therefore du = (3x^2 + 1)\, dx$

$$\therefore \int \frac{3x^2 + 1}{x^3 + x - 5}\, dx = \int \frac{du}{u} = \ln|u| + C$$

$$= \ln|x^3 + x - 5| + C$$

โจทย์ข้อ 15. $\int \frac{\ln\sqrt{x}}{\sqrt{x}}\, dx$

วิธีทำ

ให้ $u = \sqrt{x} \quad \therefore du = \frac{1}{2\sqrt{x}}\, dx$

$$\therefore \int \frac{\ln\sqrt{x}}{\sqrt{x}}\, dx = 2 \int \ln u\, du$$

สำหรับอินทิกรัล $\int \ln u\, du$ หาค่าได้โดยเทคนิคการอินทิเกรตทีละส่วน (Integration-by parts) จะได้

$$\int \ln u\, du = u \ln u - u + C_1$$

$$\therefore \int \frac{\ln\sqrt{x}}{\sqrt{x}}\, dx = 2\sqrt{x}\ln\sqrt{x} - 2\sqrt{x} + C$$

$$= 2\sqrt{x}(\ln\sqrt{x} - 1) + C$$

โจทย์ข้อ 16. $\int \frac{1}{x(\ln x)^2}\, dx$

วิธีทำ

ให้ $u = \ln x \quad \therefore du = \frac{dx}{x}$

$$\therefore \int \frac{1}{x(\ell n\, x)^2}\,dx = \int \frac{du}{u^2} = -\frac{1}{u} + C$$

$$= -(\ell n\, x)^{-1} + C$$

โจทย์ข้อ 17. $\int \sec x\, dx$

วิธีทำ

$$\int \sec x\, dx = \int \sec x \cdot \frac{(\sec x + \tan x)}{(\sec x + \tan x)}\,dx$$

$$= \int \frac{\sec^2 x + \sec x \tan x}{\sec x + \tan x}\,dx$$

และเพราะว่า $d(\sec x + \tan x) = (\sec x \tan x + \sec^2 x)\,dx$

ดังนั้น จะได้

$$\int \frac{\sec^2 + \sec x \tan x}{\sec x + \tan x}\,dx = \int \frac{d(\sec x + \tan x)}{\sec x + \tan x}$$

$$= \ell n\,(\sec x + \tan x) + C$$

$$\therefore \int \sec x\, dx = \ell n\,(\sec x + \tan x) + C$$

(เปรียบเทียบกับแบบฝึกหัดข้อ 7 ซึ่งให้หาอนุพันธ์ของ $\ell n\,(\sec x + \tan x)$)

โจทย์ข้อ 18. $\int_0^1 \frac{dx}{3x+1}$

วิธีทำ

$$\int_0^1 \frac{dx}{3x+1} = \left[\frac{1}{3}\,\ell n\,|3x+1|\right]_0^1$$

$$= \frac{1}{3}(\ell n\, 4 - \ell n\, 1)$$

$$= \frac{\ell n\, 4}{3}$$

โจทย์ข้อ 19. $\int_2^4 \frac{(x+1)}{x^2+2x-3}\,dx$ (ลิมิต การอินทิเกรต สำหรับโจทย์ข้อ 19 คือจาก 2 ถึง 4)

วิธีทำ

$$\int_2^4 \frac{x+1}{x^2+2x-3}\,dx = \frac{1}{2}\int_2^4 \frac{d(x^2+2x-3)}{x^2+2x-3}$$

$$= \left[\frac{1}{2}\ln|x^2+2x-3|\right]_2^4$$

$$= \frac{1}{2}(\ln 21 - \ln 5)$$

$$= \frac{1}{2}\ln\left(\frac{21}{5}\right)$$

โจทย์ข้อ 20. จงพิสูจน์ว่า $\int_a^{ab} \frac{1}{u}\,du = \int_1^b \frac{1}{u}\,du$

$(a, b > 0)$

และสำหรับจำนวนเต็ม n ใด ๆ

$$\int_a^{ab} \frac{1}{u^n}\,du = \frac{1}{a^{n-1}}\int_1^b \frac{1}{u^n}\,du \quad (a, b > 0)$$

วิธีทำ

ให้ $x = \frac{u}{a}$ $\therefore dx = \frac{du}{a}$

และเมื่อ $u = a$ ได้ $x = 1$ และ $u = ab$ ได้ $x = b$

$$\therefore \int_a^{ab} \frac{du}{u} = \int_1^b \frac{adx}{ax}$$

$$= \int_1^b \frac{dx}{x} = \int_1^b \frac{du}{u}$$

และ $\int_a^{ab} \frac{du}{u^n} = \int_1^b \frac{adx}{(ax)^n}$

$$= \frac{1}{a^{n-1}}\int_1^b \frac{dx}{x^n} = \frac{1}{a^{n-1}}\int_1^b \frac{du}{u^n}$$

แบบฝึกหัด 6.4

โจทย์ข้อ 1. จงพิสูจน์ว่า $\lim_{x \to 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$

วิธีทำ

จากนิยามอนุพันธ์ของ e^x และ $\frac{d}{dx} e^x = e^x$

พิจารณา $\frac{e^{x+h} - e^x}{h} = e^x \left(\frac{e^h - 1}{h} \right)$

$$\therefore \lim_{h \to 0} \frac{e^{x+h} - e^x}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{e^x (e^h - 1)}{h}$$

$$= e^x \lim_{h \to 0} \frac{e^h - 1}{h}$$

แต่ $\lim_{h \to 0} \frac{e^{x+h} - e^x}{h}$ = อนุพันธ์ของ $e^x = e^x$

ดังนั้น $\lim_{h \to 0} \frac{e^h - 1}{h} = 1$

หมายเหตุ

$\lim_{x \to 0} \frac{e^h - 1}{h}$ คือ อนุพันธ์ของ e^x ที่ $x = 0$ นั่นเอง

$$\therefore \lim_{x \to 0} \frac{e^h - 1}{h} = \frac{d}{dx} e^x \bigg|_{x=0} = e^0 = 1$$

โจทย์ข้อ 2. สำหรับ $x > 0$ จงพิสูจน์ว่า

ก) $1 < e^x$

ข) $1 + x < e^x$

ค) $1 + x + \frac{x^2}{2} < e^x$

ง) พิสูจน์โดยวิธีการอุปนัยทางคณิตศาสตร์ว่า

$$1 + x + \frac{x^2}{2!} + \ldots + \frac{x^n}{n!} < e^x$$

วิธีทำ

ก) $1 < e^x, x > 0$

ให้ $f(x) = e^x - 1, x \geqslant 0$

$\therefore$ $f(0) = 0$ และ $f'(x) = e^x$

แต่ $e^x > 0$ สำหรับทุก ๆ x

$\therefore$ $f'(x) > 0, x \geqslant 0$

นั่นก็คือ f(x) เป็นฟังก์ชันเพิ่มขึ้นโดยตลอด

และเพราะว่า $f(0) = 0$

ดังนั้น $f(x) > 0$ สำหรับ $x > 0$

$\therefore$ $e^x - 1 > 0$

นั่นก็คือ $1 < e^x, x > 0$

ข) $1 + x < e^x, x > 0$

ให้ $g(x) = e^x - (1 + x), x \geqslant 0$

$\therefore$ $g(0) = 0$ และ $g'(x) = e^x - 1$

จากข้อ (ก) ได้ $e^x - 1 > 0, x > 0$

ดังนั้น $g'(x) > 0, x > 0$

นั่นก็คือ g(x) เป็นฟังก์ชันเพิ่มขึ้นโดยตลอด

แต่ $g(0) = 0$

ดังนั้น $g(x) > 0, x > 0$

$\therefore e^x - (1 + x) > 0, x > 0$

นั่นก็คือ $1 + x < e^x, x > 0$

ค) $1 + x + \frac{x^2}{2} < e^x, x > 0$

ให้ $h(x) = e^x - (1 + x + \frac{x^2}{2}), x \geqslant 0$

$\therefore$ $h(0) = 0$ และ $h'(x) = e^x - (1 + x)$

จากข้อ (ข) ได้ $e^x - (1 + x) > 0, x > 0$

ดังนั้น $h'(x) > 0, x > 0$

นั่นก็คือ $h(x)$ เป็นฟังก์ชันเพิ่มขึ้นโดยตลอด

แต่ $h(0) = 0$

$\therefore e^x - (1 + x + \frac{x^2}{2}) > 0,, x > 0$

นั่นก็คือ $1 + x + \frac{x^2}{2} < e^x, x > 0$

ง) $1 + x + \frac{x^2}{2!} + \ldots + \frac{x^n}{n!} < e^x, x > 0$

พิสูจน์โดยวิธีการอุปนัยทางคณิตศาสตร์

เมื่อ $n = 1$ ได้ $1 < e^x, x > 0$ (จากข้อ ก)

สมมุติว่า ถ้า $n = k$ แล้ว $1 + x + \frac{x^2}{2!} + \ldots + \frac{x^k}{k!} < e^x, x > 0$

ดังนั้น ต้องแสดงว่า ถ้า $n = k + 1$ แล้ว $1 + x + \frac{x^2}{2!} + \ldots + \frac{x^{k+1}}{(k + 1)!} < e^x, x > 0$

ให้ $F(x) = e^x - \left(1 + x + \frac{x^2}{2!} + \ldots + \frac{x^{k+1}}{(k + 1)!}\right)$

$\therefore$ $F(0) = 0$ และ $F'(x) = e^x - (1 + x + \frac{x^2}{2!} + \ldots + \frac{x^k}{k!})$

แต่ $e^x - (1 + x + \frac{x^2}{2!} + \ldots + \frac{x^k}{k!}) > 0, x > 0$

(ตามข้อสมมุติว่า อสมการเป็นจริง เมื่อ $n = k$)

ดังนั้น $F(x)$ เป็นฟังก์ชันเพิ่มขึ้นโดยตลอด

แต่ $F(0) = 0$

$\therefore\ F(x) > 0,\ x > 0$

นั่นก็คือ $1 + x + \frac{x^2}{2!} + \ldots + \frac{x^{k+1}}{(k+1)!} < e^x,\ x > 0$

สรุปได้ โดยวิธีทางอุปนัยทางคณิตศาสตร์ว่า

$$1 + x + \frac{x^2}{2!} + \ldots + \frac{x^n}{n!} < e^x,\ x > 0,\ n = 1, 2, 3, \ldots$$

โจทย์ข้อ 4 จงพิสูจน์ว่า $2 < e < 4$

วิธีทำ จากข้อ 3 (ข) $1 + x < e^x,\ x > 0$

ให้ $x = 1 \therefore 2 > e$

สำหรับ $e < 4$ จะพิสูจน์อสมการ $1 - x < e^{-x},\ x > 0$

ในทำนองเดียวกันกับ ข้อ 3

นั่นก็คือให้ $f(x) = e^{-x} - (1 - x)$

$\therefore f(0) = 0$

และ $f'(x) = -e^{-x} + 1 = 1 - e^{-x}$

แต่ $1 < e^x,\ x > 0 \therefore e^{-x} < 1$ หรือ $0 < 1 - e^{-x}$

$\therefore\ f'(x) > 0$

ดังนั้น $f(x)$ เป็นฟังก์ชันเพิ่มขึ้นโดยตลอด และ $f(0) = 0$

$\therefore f(x) > 0,\ x > 0$

นั่นคือ $e^{-x} - (1 - x) > 0$ หรือ $(1 - x) < e^{-x},\ x > 0$

ให้ $x = \frac{1}{2}\ \therefore\ \frac{1}{2} < e^{-1/2} \therefore \frac{1}{4} < e^{-1}\ \therefore\ e < 4$

สรุปได้ $2 < e$ และ $e < 4$

$\therefore\ 2 < e < 4$

จงหาอนุพันธ์ของข้อต่อไปนี้

โจทย์ข้อ 5 $y = xe^x$

วิธีทำ

$$y = xe^x$$

$$\frac{dy}{dx} = x\frac{d}{dx}e^x + e^x\frac{dx}{dx}$$

$$= xe^x + e^x$$

โจทย์ข้อ 6 $y = e^x \ln x$

วิธีทำ

$$y = e^x \ln x$$

$$\frac{dy}{dx} = e^x\frac{d}{dx}\ln x + \ln x\frac{de^x}{dx}$$

$$= \frac{e^x}{x} + e^x \ln x = e^x\left(\frac{1}{x} + \ln x\right)$$

โจทย์ข้อ 7 $y = \ln(x^2e^x)$

วิธีทำ

$$y = \ln(x^2e^x)$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{x^2e^x}\frac{d}{dx}(x^2e^x) = \frac{1}{x^2e^x}\left[x^2\frac{d}{dx}e^x + e^x\frac{dx^2}{dx}\right]$$

$$= \frac{1}{x^2e^x)}(x^2e^x + 2x\,e^x)$$

$$= 1 + \frac{2}{x}$$

โจทย์ข้อ 8 $y = \frac{e^x - 1}{e^x + 1}$

วิธีทำ

$$y = \frac{e^x - 1}{e^x + 1}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{(e^x + 1)\frac{d}{dx}(e^x - 1) - (e^x - 1)\frac{d}{dx}(e^x + 1)}{(e^x + 1)^2}$$

$$= \frac{(e^x + 1)e^x - (e^x - 1)e^x}{(e^x + 1)^2}$$

$$= \frac{2e^x}{(e^x + 1)^2}$$

โจทย์ข้อ 9 $y = e^{\sin^{-1}x}$

วิธีทำ $y = e^{\sin^{-1}x}$

$$\frac{dy}{dx} = e^{\sin^{-1}x} \cdot \frac{d}{dx}(\sin^{-1}x)$$

$$= \frac{e^{\sin^{-1}x}}{\sqrt{1-x^2}}$$

โจทย์ข้อ 10 $y = \text{arc sin } e^x$

วิธีทำ $y = \text{are sin } e^x$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\sqrt{1 - e^{2x}}} \quad \frac{d}{dx}(e^x)$$

$$= \frac{e^x}{\sqrt{1 - e^{2x}}}$$

จงอินทิเกรตข้อต่อไปนี้

โจทย์ข้อ 11 $\int e^{2x+1}\,dx$

วิธีทำ ให้ $u = 2x + 1 \quad \therefore \quad du = 2dx$

$$\therefore \int e^{2x+1}\,dx = \frac{1}{2}\int e^u\,du = \frac{1}{2}e^u + C$$

$$= \frac{1}{2}e^{2x+1} + C$$

โจทย์ข้อ 12 $\int \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}\,dx$

วิธีทำ $\because d(e^x + e^{-x}) = (e^x - e^{-x})\,dx$

$$;\ \int \frac{e^x - e^{-x}}{e^x+e^{-x}}\,dx = \int \frac{d\ (e^x + e^{-x})}{e^x+e^{-x}} \left(= \int \frac{du}{u} \right)$$

$$= \ln(e^x+e^{-x}) + C$$

โจทย์ข้อ 13 $\int \sin x\, e^{\cos x}\,dx$

วิธีทำ $\because \sin x\,dx = -\,d(\cos x)$

$$\therefore \int \sin x\, e^{\cos x}\, dx = -\int e^{\cos x}\, d(\cos x)$$
$$= -e^{\cos x} + C$$

โจทย์ข้อ 14 $\int x e^{x^2+3}\, dx$

วิธีทำ ให้ $u = x^2 + 3 \therefore du = 2x dx$

$$\int x e^{x^2+3}\, dx = \frac{1}{2} \int e^u\, du$$
$$= \frac{1}{2} e^u + C$$
$$= \frac{1}{2} e^{x^2+3} + C$$

โจทย์ข้อ 15 $\int_0^1 e^{2x+1}\, dx$

วิธีทำ จากข้อ 11 $\int e^{2x+1}\, dx = \frac{1}{2} e^{2x+1} + C$

$$\therefore \int_0^1 e^{2x+1}\, dx = \left[\frac{1}{2} e^{2x+1} \right]_0^1$$
$$= \frac{1}{2} (e^3 - e)$$
$$= \frac{e}{2} (e^2 - 1)$$

โจทย์ข้อ 16 $\int_1^{ln2} \frac{e^{-\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}\, dx$

วิธีทำ ให้ $u = -\sqrt{x} \therefore du = -\frac{1}{2\sqrt{x}}\, dx$

$$\therefore \int \frac{e^{-\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}\, dx = -2 \int e^u\, du$$
$$= -2e^u + C$$

$$= -2e^{-\sqrt{x}} + C$$

$$\therefore \int_1^{\ln 2} \frac{e^{-\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}\,dx = \left[-2e^{-\sqrt{x}}\right]_1^{\ln 2}$$

$$= -2\left(e^{-\sqrt{\ln 2}} - e^{-1}\right)$$

โจทย์ข้อ 17 $\int_0^1 xe^{-x^2}\,dx$

วิธีทำ ให้ $u = -x^2 \therefore du = -2\times dx$

$$\therefore \int x\,e^{-x^2}dx = -\frac{1}{2}\int e^u\,du = -\frac{1}{2}e^u + C = -\frac{1}{2}e^{-x^2} + C$$

$$\therefore \int_0^1 x\,e^{-x^2}\,dx = \left[-\frac{1}{2}e^{-x^2}\right]_0^1 = -\frac{1}{2}(e^{-1} - 1)$$

$$= \frac{e-1}{2e}$$

โจทย์ข้อ 18 $\int_e^{e^2} \frac{dx}{x\ln x}$

วิธีทำ

$$\int_e^{e^2} \frac{dx}{x\ln x} = \int_e^{e^2} \frac{d(\ln x)}{\ln x} \quad (\because d\ln x = \frac{dx}{x})$$

$$= \left[\ln(\ln x)\right]_e^{e^2}$$

$$= \ln(\ln e^2) - \ln(\ln e)$$

$$= \ln 2 \quad (\ln e = 1)$$

แบบฝึกหัด 6.5

จงหาอนุพันธ์ของฟังก์ชันต่อไปนี้

โจทย์ข้อ 1 $y = \sinh 3x$

วิธีทำ จากสูตร $\frac{d}{dx}\sinh u = \cosh u\,\frac{du}{dx}$

ดังนั้น $\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx} \sinh 3x$

$$= \cosh 3x \frac{d}{dx}(3x)$$

$$= 3 \cosh 3x$$

โจทย์ข้อ 2 $y = \frac{1}{4} \sinh 2x - \frac{1}{2} x$

วิธีทำ $\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}\left(\frac{1}{4} \sinh 2x - \frac{1}{2} x \right)$

$$= \frac{1}{4}\left(\frac{d}{dx} \sinh 2x \right) - \frac{1}{2} \frac{dx}{dx}$$

$$= \frac{1}{4}(2 \cosh 2x) - \frac{1}{2}$$

$$= \frac{1}{2}(\cosh 2x - 1)$$

$$= \frac{1}{2}(2 \sinh^2 x)$$

$$= \sinh^2 x$$

โจทย์ข้อ 3 $y = \coth \frac{1}{x}$

วิธีทำ จากสูตร $\frac{d}{dx} \coth u = -\operatorname{cosech}^2 u \frac{du}{dx}$

เพราะฉะนั้น $\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx} \coth \frac{1}{x}$

$$= -\operatorname{cosech}^2 \frac{1}{x} \frac{d}{dx}\left(\frac{1}{x} \right)$$

$$= \frac{1}{x^2} \operatorname{cosech}^2 \frac{1}{x}$$

โจทย์ข้อ 4 $y = \sinh \frac{x}{4}$

วิธีทำ $\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}(\sinh \frac{x}{4})$

$$= \cosh \frac{x}{4} \frac{d}{dx}(\frac{x}{4})$$

$$= \frac{1}{4} \cosh \frac{x}{4}$$

โจทย์ข้อ 5 $y = \ln(\cos x)$

หมายเหตุ โจทย์ในหนังสือผิดให้แก้เป็น $y = \ln(\cosh x)$

วิธีทำ $\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx} \ln(\cosh x)$

$$= \frac{1}{\cosh x} \frac{d}{dx}(\cosh x)$$

จากสูตร $\frac{d}{dx} \cosh u = \sinh u \frac{du}{dx}$

ดังนั้น $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\cosh x}(\sinh x)$

$$= \tanh x$$

โจทย์ข้อ 6 $y = \cosh^2 3x$

วิธีทำ โจทย์ข้อนี้ ต้องใช้สูตรอนุพันธ์ของ u^n เสียก่อน

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx} \cosh^2 3x$$

$$= 2 \cosh 3x \frac{d}{dx}(\cosh 3x) \quad (\frac{du^n}{dx} = nu^{n-1} \frac{du}{dx})$$

$$= 2 \cosh 3x (3 \sinh 3x)$$

$$= 6 \cosh 3x \sinh 3x$$

$$= 3 \sinh 6x$$

โจทย์ข้อ 7. $y = \cosh^{-1} e^x$

วิธีทำ

จากสูตร $\frac{d}{dx} \cosh^{-1} u = \frac{1}{\sqrt{u^2 - 1}} \frac{du}{dx}$

เพราะฉะนั้น
$$\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx} \cosh^{-1} e^x$$
$$= \frac{1}{\sqrt{e^{2x} - 1}} \frac{de^x}{dx}$$
$$= \frac{1}{\sqrt{e^{2x} - 1}} (e^x)$$
$$= \frac{e^x}{\sqrt{e^{2x} - 1}} \qquad \#$$

โจทย์ข้อ 8. $y = \coth^{-1} \frac{1}{x}$

วิธีทำ

จากสูตร $\frac{d}{dx} \coth^{-1} u = \frac{1}{1 - u^2} \frac{du}{dx} \ , |u| > 1$

ดังนั้น
$$\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx} \coth^{-1} \frac{1}{x}$$
$$= \frac{1}{1 - (\frac{1}{x})^2} \frac{d}{dx} (\frac{1}{x}) \ ; \ |\frac{1}{x}| > 1$$
$$= \frac{-\frac{1}{x^2}}{1 - \frac{1}{x^2}} \ ; \ |x| < 1$$
$$= \frac{-1}{x^2 - 1} \ ; \ |x| < 1$$
$$= \frac{1}{1 - x^2} \ ; \ |x| < 1$$

โจทย์ข้อ 9. $y = \operatorname{cosech}^{-1}(\cos x)$

วิธีทำ

จากสูตร $\frac{d}{dx} \operatorname{cosech}^{-1} u = \frac{-du/dx}{|u|\sqrt{1+u^2}}, u \neq 0$

ดังนั้น
$$\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx} \operatorname{cosec} h^{-1}(\cos x)$$
$$= \frac{-\frac{d}{dx}\cos x}{|\cos x|\sqrt{1+\cos^2 x}}$$
$$= \frac{\sin x}{|\cos x|\sqrt{1+\cos^2 x}}$$

โจทย์ข้อ 10. $y = \sinh^{-1}\frac{1}{x}$

วิธีทำ

จากสูตร $\frac{d}{dx}\sinh^{-1} u = \frac{1}{\sqrt{1+u^2}}\frac{du}{dx}$

ดังนั้น
$$\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}\sin h^{-1}\frac{1}{x}$$
$$= \frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}}\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{x}\right)$$
$$= \frac{-\frac{1}{x^2}}{\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}}$$
$$= \frac{-1}{x\sqrt{x^2+1}}$$ #

จงหาอินทิกรัลต่อไปนี้

โจทย์ข้อ 11. $\int \sinh\frac{1}{2}x\,dx$

วิธีทำ

ใช้สูตร $\int \sinh u\,du = \cosh u + C$

ดังนั้น จากการจัดรูปจะได้

$$\int \sinh \frac{x}{2} dx = 2 \int \sinh \left(\frac{x}{2}\right) d\left(\frac{x}{2}\right)$$

$$= 2 \cosh \frac{x}{2} + C \qquad \#$$

โจทย์ข้อ 12. $\int \cosh 2x \, dx$

วิธีทำ

ใช้สูตร $\int \cosh u \, du = \sinh u + C$

ดังนั้น จากการจัดรูปจะได้

$$\int \cosh 2x \, dx = \frac{1}{2} \int \cosh 2x \, d\, 2x$$

$$= \frac{1}{2} \sinh 2x + C \qquad \#$$

โจทย์ข้อ 13. $\int \text{cosech } 3x \coth 3x \, dx$

วิธีทำ

ใช้สูตร $\int \text{cosech } u \coth u \, du = -\text{cosech } u + C$

ดังนั้นจากการจัดรูปจะได้

$$\int \text{cosech } 3x \coth 3x \, dx = \frac{1}{3} \int \text{cosech } 3x \coth 3x \, d\, 3x$$

$$= \frac{1}{3}(-\text{cosech } 3x) + C$$

$$= -\frac{1}{3} \text{cosech } 3x + C \qquad \#$$

โจทย์ข้อ 14. $\int \sinh^2 x \, dx$

วิธีทำ

จากสูตร $\sinh^2 x = \dfrac{\cosh 2x - 1}{2}$

ดังนั้น

$$\int \sin h^2 x\, dx = \int \frac{\cos h\, 2x - 1}{2}\, dx$$

$$= \frac{1}{2}\left[\int (\cos h\, 2x - 1)\, dx \right]$$

$$= \frac{1}{2}\int \cos h\, 2x\, dx - \frac{1}{2}\int dx$$

$$= \frac{1}{4}\int \cos h\, 2x\, d\, 2x - \frac{1}{2}\int dx$$

$$= \frac{1}{4}\sin h\, 2x - \frac{x}{2} + C \qquad \#$$

โจทย์ข้อ 15. $\int \cosh \frac{x}{4}\, dx$

วิธีทำ

จากสูตร $\int \cosh u\, du = \sinh u + C$

ดังนั้น $\int \cosh \frac{x}{4}\, dx = 4\int \cosh \frac{x}{4}\, d\frac{x}{4}$

$$= 4\sinh \frac{x}{4} + C \qquad \#$$

โจทย์ข้อ 16. $\int \operatorname{cosech}^2 (1 + 3x)\, dx$

วิธีทำ

จากสูตร $\int \operatorname{cosech}^2 u\, du = -\coth u + C$

โดยการจัดรูปจะได้ว่า

$$\int \operatorname{cosech}^2 (1 + 3x)\, dx = \frac{1}{3}\int \operatorname{cosech}^2 (1 + 3x)\, d(1 + 3x)$$

$$= -\frac{1}{3}\cot h(1 + 3x) + C \qquad \#$$

โจทย์ข้อ 17. $\int \frac{dx}{\sqrt{9x^2 - 25}}$

วิธีทำ

จัดรูปเสียใหม่จะได้ว่า

$$\int \frac{dx}{\sqrt{9x^2 - 25}} = \frac{1}{5}\int \frac{dx}{\sqrt{\left(\frac{3}{5}x\right)^2 - 1}}$$

$$= \int \frac{d\left(\frac{x}{5}\right)}{\sqrt{\left(\frac{3x}{5}\right)^2 - 1}}$$

$$= \frac{1}{3}\int \frac{d\left(\frac{3x}{5}\right)}{\sqrt{\left(\frac{3x}{5}\right)^2 - 1}}$$

ซึ่งสอดคล้องตามสูตร

$$\int \frac{du}{\sqrt{u^2 - 1}} = \cosh^{-1} u + C$$

ดังนั้น จึงสรุปได้ว่า

$$\int \frac{dx}{\sqrt{9x^2 - 25}} = \frac{1}{3}\cosh^{-1}\left(\frac{3x}{5}\right) + C$$ #

โจทย์ข้อ 18. $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 + 9}}$

วิธีทำ

จัดรูปเสียใหม่จะได้ว่า

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 + 9}} = \int \frac{dx}{\sqrt{9 + x^2}}$$

$$= \frac{1}{3}\int \frac{dx}{\sqrt{1 + \left(\frac{x}{3}\right)^2}}$$

$$= \int \frac{d\left(\frac{x}{3}\right)}{\sqrt{1 + \left(\frac{x}{3}\right)^2}}$$

ซึ่งสอดคล้องกับสูตร

$$\int \frac{du}{\sqrt{1 + u^2}} = \sinh^{-1} u + C$$

ดังนั้น จะสรุปได้ว่า

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 + 9}} = \sinh^{-1}\frac{x}{3} + C \qquad \#$$

โจทย์ข้อ 19. $\int \frac{dx}{4 - 9x^2}$

วิธีทำ จัดรูปเสียใหม่จะได้ว่า

$$\int \frac{dx}{4 - 9x^2} = \frac{1}{4}\int \frac{dx}{1 - \left(\frac{3x}{2}\right)^2}$$

$$= \frac{1}{2}\int \frac{d\left(\frac{x}{2}\right)}{1 - \left(\frac{3x}{2}\right)^2}$$

$$= \frac{1}{6}\int \frac{d\left(\frac{3x}{2}\right)}{1 - \left(\frac{3x}{2}\right)^2}$$

ซึ่งสอดคล้องกับสูตร

$$\int \frac{du}{1 - u^2} = \tanh^{-1} u + C \text{ เมื่อ } |u| < 1$$

ดังนั้น จะได้ว่า

$$\int \frac{dx}{4 - 9x^2} = \frac{1}{6}\tanh^{-1}\left(\frac{3x}{2}\right) + C \qquad \#$$

โจทย์ข้อ 20. $\int \frac{dx}{1 - x^2}$

วิธีทำ

จากสูตร $\int \frac{du}{1 - u^2} = \tanh^{-1} u + C$

ดังนั้น $\int \frac{dx}{1 - x^2} = \tanh^{-1} x + C$ #

แบบฝึกหัด 6.6

จงหาอนุพันธ์ของฟังก์ชันต่อไปนี้

โจทย์ข้อ 1. $y = 3^{x^2+1}$

วิธีทำ

ใช้สูตร $\frac{d}{dx} a^u = a^u \ln a \frac{du}{dx}$

ดังนั้น

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx} 3^{x^2+1}$$

$$= 3^{x^2+1} \ln 3 \frac{d}{dx} (x^2 + 1)$$

$$= 2x (3^{x^2+1} \ln 3)$$ #

โจทย์ข้อ 2. $y = 2^{\sec x}$

วิธีทำ

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx} 2^{\sec x}$$

$$= 2^{\sec x} \ln 2 \frac{d}{dx} \sec x$$

$$= 2^{\sec x} \ln 2 (\sec x \tan x)$$ #

โจทย์ข้อ 3. $y = 4^{\cos 4x}$

วิธีทำ

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx} 4^{\cos 4x}$$

MA 111 (H) 355

$$= 4^{\cos 4x} \ln 4 \frac{d}{dx} \cos 4x$$

$$= 4^{\cos 4x} \ln 4 (-4 \sin 4x)$$

$$= -4^{(\cos 4x)+1} \ln 4 (\sin 4x) \qquad \#$$

โจทย์ข้อ 4. $y = a^{x^2 - x}$

วิธีทำ

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx} a^{x^2-x}$$

$$= a^{x^2-x} \ln a \frac{d}{dx}(x^2 - x)$$

$$= a^{x^2-x} \ln a (2x - 1) \qquad \#$$

โจทย์ข้อ 5. $y = (\sin x)^{\tan x}$

วิธีทำ

ใส่ $\log$ ฐาน e ทั้งสองข้าง จะได้

$$\ln y = \ln (\sin x)^{\tan x}$$

$$= \tan x \ln (\sin x)$$

Differentiate เทียบกับ x ทั้งสองข้างจะได้

$$\frac{1}{y}\frac{dy}{dx} = \tan x \frac{d}{dx} \ln (\sin x) + \ln (\sin x) \frac{d}{dx} \tan x$$

$$= \tan x \left(\frac{1}{\sin x} \cdot \cos x\right) + \ln (\sin x) \cdot \sec^2 x$$

$$= 1 + \ln (\sin x) \sec^2 x$$

$$\frac{dy}{dx} = y (1 + \ln (\sin x) \sec^2 x)$$

$$= (\sin x)^{\tan x} [1 + \sec^2 x \ln (\sin x)] \qquad \#$$

โจทย์ข้อ 6. $y = x^x$

วิธีทำ

$$\ln y = \ln x^x$$

$$= x \ln x$$

$$\frac{1}{y}\frac{dy}{dx} = x \frac{d}{dx} \ln x + \ln x \frac{dx}{dx}$$

$$\frac{1}{y}\frac{dy}{dx} = x \cdot \frac{1}{x} + \ln x$$

$$= 1 + \ln x$$

$$\frac{dy}{dx} = y(1 + \ln x)$$

$$= x^x(1 + \ln x)$$ #

โจทย์ข้อ 7. $y = (\ln x)^x$

วิธีทำ

$$\ln y = \ln(\ln x)^x$$

$$= x \ln(\ln x)$$

$$\frac{1}{y}\frac{dy}{dx} = x \frac{d}{dx} \ln(\ln x) + \ln(\ln x) \frac{dx}{dx}$$

$$= x\left(\frac{1}{\ln x} \quad \frac{1}{x}\right) + \ln(\ln x)$$

$$= \frac{1}{\ln x} + \ln(\ln x)$$

$$\frac{dy}{dx} = y\left[\frac{1}{\ln x} + \ln(\ln x)\right]$$

$$= (\ln x)^x\left[\frac{1}{\ln x} + \ln(\ln x)\right]$$ #

โจทย์ข้อ 8. $y = x^{1/x}$

วิธีทำ

$$\ell n\, y = \ell n\, x^{1/x}$$

$$= \frac{1}{x} \ell n\, x$$

$$\frac{1}{y}\frac{dy}{dx} = \frac{1}{x}\frac{d}{dx}\ell n\, x + \ell n\, x \frac{d}{dx}\left(\frac{1}{x}\right)$$

$$= \frac{1}{x}\cdot\frac{1}{x} + \ell n\, x\left(-\frac{1}{x^2}\right)$$

$$= \frac{1}{x^2} - \frac{\ell n\, x}{x^2}$$

$$\frac{dy}{dx} = y\left(\frac{1}{x^2} - \frac{\ell n\, x}{x^2}\right)$$

$$= x^{1/x}\ \frac{(1 - \ell n\, x)}{x^2}$$ #

จงหาค่าอินทิกรัลต่อไปนี้

โจทย์ข้อ 9. $\int 3^x\, dx$

วิธีทำ

ใช้สูตรอินทิกรัล

$$\int a^u\, du = \frac{a^u}{\ell n\, a} + C$$

ดังนั้น จากการจัดรูป จะได้ว่า

$$\int 3^x\, dx = \frac{3^x}{\ell n\, 3} + C$$ #

โจทย์ข้อ 10. $\int 2^{\sec x} \sec x \tan x\, dx$

วิธีทำ

โดยการใช้สูตรในข้อ 9 และการจัดรูปที่จะได้

โจทย์ข้อ 15. $\int_0^{\pi/6} \cos\theta\, 4^{-\sin\theta}\, d\theta$

วิธีทำ

จัดรูปใหม่จะได้

$$\begin{aligned}
\int_0^{\pi/6} \cos\theta \cdot 4^{-\sin\theta}\, d\theta &= \int_0^{\pi/6} 4^{-\sin\theta}\, d\sin\theta \\
&= -\int_0^{\pi/6} 4^{-\sin\theta}\, d(-\sin\theta) \\
&= -\frac{4^{-\sin\theta}}{\ln 4}\Big|_0^{\pi/6} \\
&= \frac{-1}{\ln 4}\left(4^{-1/2} - 4^0\right) \\
&= \frac{-1}{\ln 4}\left(\frac{1}{2} - 1\right) \\
&= \frac{1}{2\ln 4}
\end{aligned}$$

#

$$\int 2^{\sec x} \sec x \tan x \, dx = \int 2^{\sec x} \, d \sec x$$

$$= \frac{2^{\sec x}}{\ell n\, 2} + C \qquad \#$$

โจทย์ข้อ 11. $\int 3^{-\sin\theta} \cos\theta \, d\theta$

วิธีทำ

จัดรูปจะได้

$$\int 3^{-\sin\theta} \cos\theta \, d\theta = \int 3^{-\sin\theta} \, d \sin\theta$$

$$= -\int 3^{-\sin\theta} \, d(-\sin\theta)$$

$$= -\frac{3^{-\sin\theta}}{\ell n\, 3} + C \qquad \#$$

โจทย์ข้อ 12. $\int 3^{\sin x^2} 2x \cos x^2 \, dx$

วิธีทำ

ให้ $u = \sin x^2$

$du = \cos x^2 \, dx^2$

$= 2x \cos x^2 \, dx$

เพราะฉะนั้น จะได้ว่า

$$\int 3^{\sin x^2} 2x \cos x^2 \, dx = \int 3^u \, du$$

$$= \frac{3^u}{\ell n\, 3} + C$$

แทนค่า $u = \sin x^2$ จะได้

$$\int 3^{\sin x^2} 2x \cos x^2 \, dx = \frac{3^{\sin x^2}}{\ell n\, 3} + C \qquad \#$$

โจทย์ข้อ 13. $\int_1^{\sqrt{2}} x\, 2^{-x^2}\, dx$

วิธีทำ

จัดรูปเสียใหม่จะได้

$$\int_1^{\sqrt{2}} x\, 2^{-x^2}\, dx = \int_1^{\sqrt{2}} 2^{-x^2}\, d\,\frac{x^2}{2}$$

$$= \frac{1}{2}\int_1^{\sqrt{2}} 2^{-x^2}\, dx^2$$

$$= -\frac{1}{2}\int_1^{\sqrt{2}} 2^{-x^2}\, d(-x^2)$$

$$= -\frac{1}{2}\left(\frac{2^{-x^2}}{\ell n\, 2}\right)\Bigg|_1^{\sqrt{2}}$$

$$= -\frac{1}{2}\left[\frac{2^{-2}}{\ell n\, 2} - \frac{2^{-1}}{\ell n\, 2}\right]$$

$$= \frac{-1}{2\,\ell n\, 2}\left[\frac{1}{4} - \frac{1}{2}\right]$$

$$= \frac{1}{8\,\ell n\, 2}$$ #

โจทย์ข้อ 14. $\int_0^1 5^{2t-2}\, dt$

วิธีทำ

จัดรูปใหม่จะได้

$$\int_0^1 5^{2t-2}\, dt = \frac{1}{2}\int_0^1 5^{2t-2}\, d(2t-2)$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{5^{2t-2}}{\ell n\, 5}\right)\Bigg|_0^1$$

$$= \frac{1}{2\,\ell n\, 5}(5^0 - 5^{-2})$$

$$= \frac{1}{2\,\ell n\, 5}\left(1 - \frac{1}{25}\right)$$

$$= \frac{24}{50\,\ell n\, 5}$$ #