บทที่ 4
การประยุกต์ของอนุพันธ์

(1) ความเร็ว ความเร่ง

กำหนดสมการการเคลื่อนที่ $s = f(t)$ จะได้

ความเร็ว : $v = \frac{ds}{dt}$

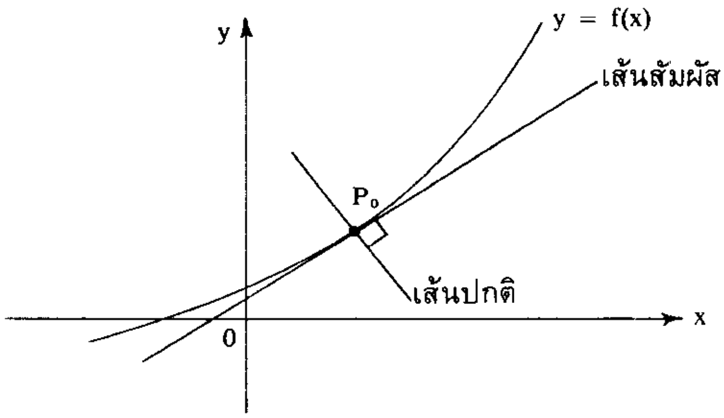
ความเร่ง : $a = \frac{dv}{dt}$

$= \frac{d^2s}{dt^2}$

(2) อัตราสัมพัทธ์

การแก้ปัญหาโจทย์อัตราสัมพัทธ์ ต้องสร้างสมการความสัมพันธ์ของตัวแปรที่เกี่ยวข้อง ซึ่งเป็นฟังก์ชันของตัวแปร t แล้วแก้ปัญหาได้โดยการดิฟเฟอเรนทิเอท สมการที่เกี่ยวข้องเทียบกับตัวแปร t

(3) สมการเส้นสัมผัส เส้นปกติ



MA 111 (H) 141

กำหนด $y = f(x)$, $P_0(x_0, y_0)$

ความชันของเส้นสัมผัส $= \left(\frac{dy}{dx}\right)_{\text{ที่ } x=x_0}$

ความชันของเส้นปกติ $= -\dfrac{1}{\left(\frac{dy}{dx}\right)_{\text{ที่ } x=x_0}}$

ใช้สูตรสมการเส้นตรงที่ผ่านจุด 1 จุด และทราบความชัน

$$y - y_0 = m(x - x_0)$$

ดังนั้น สมการเส้นสัมผัสที่ P_0 คือ

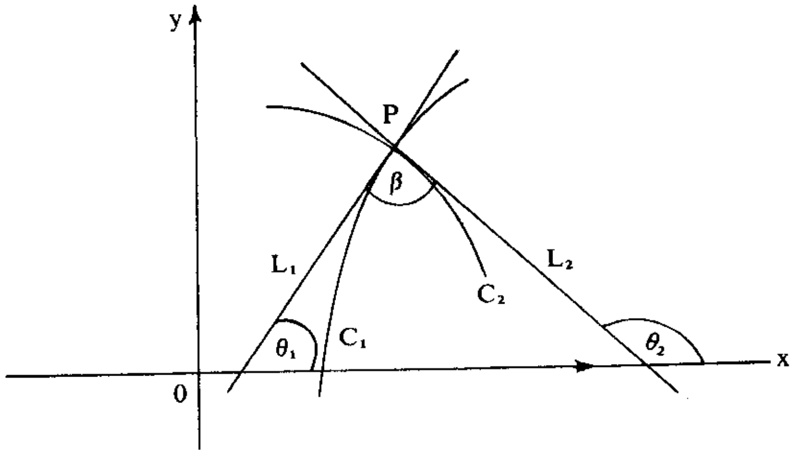
$$y - y_0 = f'(x_0)(x - x_0)$$

และสมการเส้นปกติคือ

$$y - y_0 = \frac{-1}{f'(x_0)}(x - x_0)$$

(4) มุมระหว่างเส้นโค้ง

เส้นโค้ง C_1, C_2 ตัดกันที่จุด P เส้นตรง L_1, L_2 สัมผัสเส้นโค้ง C_1, C_2 ที่ P ตามลำดับ มุมระหว่างเส้นโค้ง คือ มุมระหว่างเส้นตรงทั้งสองนั่นเอง



$$\beta = \theta_2 - \theta_1 \text{ (}\beta\text{ เป็นมุมระหว่างเส้นโค้ง)}$$

$$\tan\beta = \tan(\theta_2 - \theta_1)$$

$$= \frac{\tan\theta_2 - \tan\theta_1}{1 + \tan\theta_2 \tan\theta_1}$$

$$= \frac{m_2 - m_1}{1 + m_2 m_1}$$

โดยมี m_1, m_2 เป็นความชันของ L_1, L_2 ซึ่งคือความชันของเส้นสัมผัสเส้นโค้ง หาได้โดยใช้อนุพันธ์ช่วย

(5) ขั้นตอนในการหามุมระหว่างเส้นโค้ง

1. แก้สมการหาจุดตัด
2. หา m_1, m_2 โดยใช้วิธีการของอนุพันธ์
3. ถ้า $m_1 = m_2$ มุมคือ 0

   $m_1 = -\frac{1}{m_2}$ มุมคือ 90° (กรณีนี้เรียกว่า เส้นโค้ง orthogonal กัน)

กรณีอื่น ๆ ใช้สูตร

$$\tan\beta = \frac{m_2 - m_1}{1 + m_2 m_1}$$

(6) ค่าสูงสุด ต่ำสุด

นิยาม ถ้า $f(x_1) \leqslant f(x_2)$ สำหรับทุก ๆ $x_1, x_2 \in [a, b]$ และ $x_1 < x_2$ แล้วเรียก f ว่าฟังก์ชันเพิ่ม

ถ้า $f(x_1) \geqslant f(x_2)$ สำหรับทุก ๆ $x_1, x_2 \in [a, b]$ และ $x_1 < x_2$ แล้วเรียก f ว่าฟังก์ชันลด

(7) เครื่องหมายของอนุพันธ์อันดับที่ 1 $\left(\frac{dy}{dx}\right)$

1. ถ้า $\frac{dy}{dx} = 0$ แล้วเรียกจุดนั้นว่าจุดวิกฤต
2. ถ้า $\frac{dy}{dx} >$ เส้นโค้งจะโค้งขึ้น

3. ถ้า $\frac{dy}{dx} < 0$ เส้นโค้งจะโค้งลง

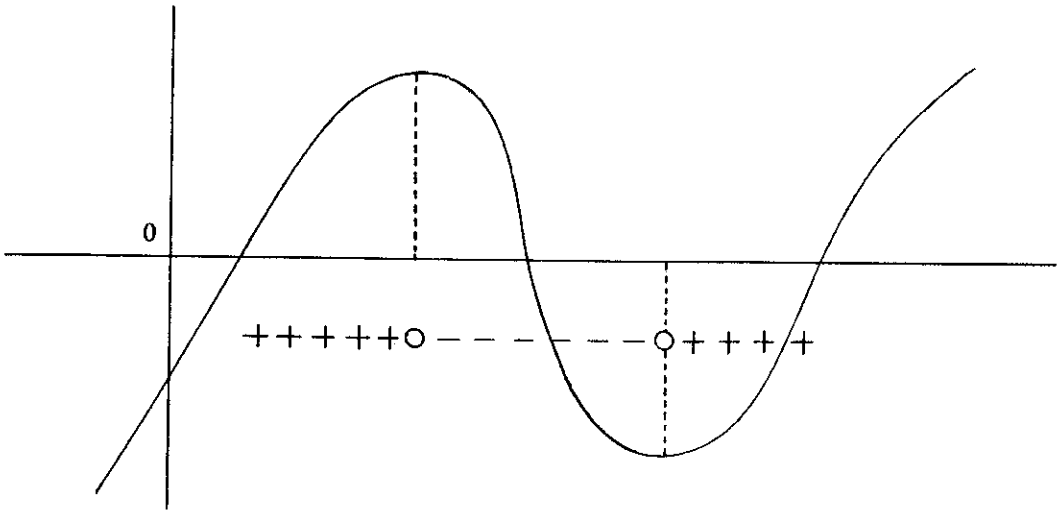
4. ถ้าเครื่องหมายของอนุพันธ์เปลี่ยนจากบวกไปเป็น 0 แล้วเป็นลบ จะได้**จุดสูงสุดสัมพัทธ์**

   (+ + + + + 0 − − − −)

5. ถ้าเครื่องหมายของอนุพันธ์เปลี่ยนจากลบไปเป็น 0 แล้วเป็นบวก จะได้จุดต่ำสุด**สัมพัทธ์**

   (− − − − 0 + + + +)

ดังรูป



(8) เครื่องหมายของอนุพันธ์อันดับที่ 2

1. ถ้า $\frac{d^2y}{dx^2}$ ที่จุดวิกฤต มากกว่า 0 จะได้โค้งหงาย นั่นคือ ได้ค่าต่ำสุดสัมพัทธ์

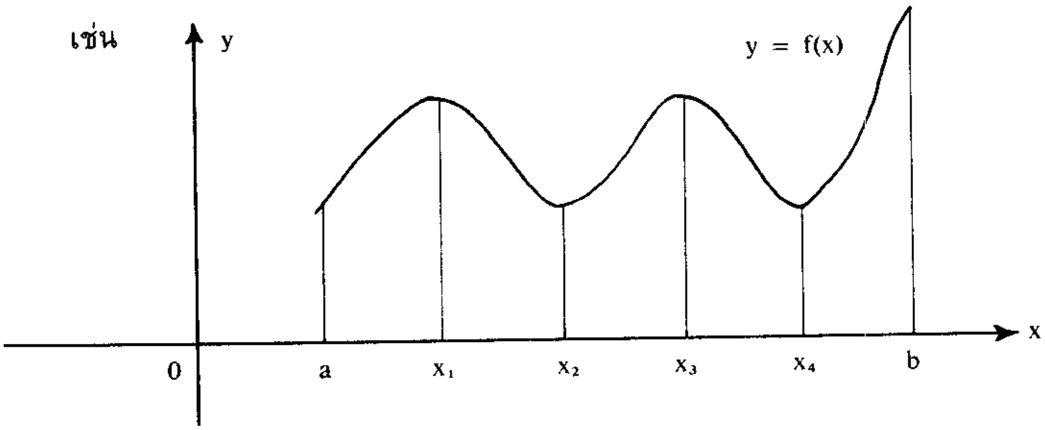
2. ถ้า $\frac{d^2y}{dx^2}$ ที่จุดวิกฤต น้อยกว่า 0 จะได้โค้งคว่ำ นั่นคือ จะได้จุดสูงสุดสัมพัทธ์

3. ค่า x ที่สอดคล้องกับ $\frac{d^2y}{dx^2} = 0$ เรียกว่า **จุดเปลี่ยนเว้า** (point of inflection)

(9) การพิจารณาค่าฟังก์ชันช่วงปิด [a, b]

เรากล่าวถึงค่าสูงสุดสัมบูรณ์ และต่ำสุดสัมบูรณ์ได้ ซึ่งแต่ละค่ามีเพียงค่าเดียว แต่ค่าสูงสุดสัมพัทธ์ และต่ำสุดสัมพัทธ์อาจมีได้หลายค่า

เช่น



จะเห็นว่า ฟังก์ชันมีค่าสูงสุดสัมพัทธ์ ที่ x_1, x_3 และ ที่ b แต่ค่าสูงสุดสัมบูรณ์ คือ ที่ $x = b$

(10) การแก้ปัญหาโจทย์เกี่ยวกับค่าสูงสุด ค่าต่ำสุด

ต้องพยายามสร้างสมการของความสัมพันธ์ของโจทย์ให้ได้ แล้วจึงค่อยใช้วิธีของอนุพันธ์มาแก้ปัญหาโจทย์ต่อไป

แบบฝึกหัด 4.1

โจทย์ข้อ 1. จงหาความเร็ว (v) ความเร่ง (a) ณ. เวลา t ใด ๆ เมื่อ

(1) $s = 2t^2 + 5t - 3$

วิธีทำ

$$\text{ความเร็ว } v = \frac{ds}{dt}$$

$$= \frac{d}{dt}(2t^2 + 5t - 3)$$

$$= 4t + 5 \qquad \#$$

ความเร่ง a $= \dfrac{dv}{dt}$

$= \dfrac{d}{dt}(4t + 5)$

$= 4$ #

(2) $S = \frac{1}{2}gt^2 + v_0t + s_0$ เมื่อ g, v_0, s_0 เป็นค่าคงที่

วิธีทำ

ความเร็ว v $= \dfrac{ds}{dt}$

$= \dfrac{d}{dt}(\frac{1}{2}gt^2 + v_0t + s_0)$

$= gt + v_0$ #

ความเร่ง a $= \dfrac{dv}{dt}$

$= \dfrac{d}{dt}(gt + v_0)$

$= g$ #

(3) $S = t^2 - 3t + 2$

วิธีทำ

ความเร็ว v $= \dfrac{ds}{dt}$

$= \dfrac{d}{dt}(t^2 - 3t + 2)$

$= 2t - 3$ #

ความเร่ง a $= \dfrac{dv}{dt}$

$= \dfrac{d}{dt}(2t - 3)$

$= 2$ #

(4) $S = (2t + 3)^2$

วิธีทำ

$$\text{ความเร็ว } v = \frac{ds}{dt}$$

$$= \frac{d}{dt}(2t + 3)^2$$

$$= 2(2t + 3)\frac{d}{dt}(2t + 3)$$

$$= 4(2t + 3)$$

$$= 8t + 12 \qquad \#$$

$$\text{ความเร่ง } a = \frac{dv}{dt}$$

$$= \frac{d}{dt}(8t + 12)$$

$$= 8 \qquad \#$$

(5) $S = 64t - 16t^2$

วิธีทำ

$$\text{ความเร็ว } v = \frac{ds}{dt}$$

$$= \frac{d}{dt}(64t - 16t^2)$$

$$= 64 - 32t \qquad \#$$

$$\text{ความเร่ง } a = \frac{dv}{dt}$$

$$= \frac{d}{dt}(64 - 32t)$$

$$= -32 \qquad \#$$

MA 111 (H) 147

โจทย์ข้อ 2. จงหาความเร็ว, ความเร่ง เมื่อ $t = 1, 5$ ของ $S = f(t)$ ในข้อ 1

(1) **วิธีทำ** $v = 4t + 5$

$a = 4$

เมื่อ $t = 1$

ความเร็ว $v = 4(1) + 5 = 9$

ความเร่ง $a = 4$

เมื่อ $t = 5$

ความเร็ว $v = 4(5) + 5 = 25$

ความเร่ง $a = 4$

(2) **วิธีทำ** $v = gt + v_0$

$a = g$

เมื่อ $t = 1$

ความเร็ว $v = g(1) + v_0 = g + v_0$

ความเร่ง $a = g$

เมื่อ $t = 5$

ความเร็ว $v = g(5) + v_0 = 5g + v_0$

ความเร่ง $a = g$

(3) **วิธีทำ** $v = 2t - 3$

$a = 2$

เมื่อ $t = 1$

ความเร็ว $v = 2(1) - 3 = -1$

ความเร่ง $a = 2$

เมื่อ $t = 5$

ความเร็ว $v = 2(5) - 3 = 7$

ความเร่ง $a = 2$

(4) **วิธีทำ** $v = 8t + 12$

$a = 8$

เมื่อ $t = 1$

ความเร็ว $v = 8(1) + 12 = 20$

ความเร่ง $a = 8$

เมื่อ $t = 5$

ความเร็ว $v = 8(5) + 12 = 52$

ความเร่ง $a = 8$

(5) **วิธีทำ** $v = 64 - 32t$

$a = -32$

เมื่อ $t = 1$

ความเร็ว $v = 64 - 32(1) = 64 - 32 = 32$

ความเร่ง $a = -32$

เมื่อ $t = 5$

ความเร็ว $v = 64 - 32(5) = 64 - 160 = 96$

ความเร่ง $a = -32$

โจทย์ข้อ 3. วัตถุเคลื่อนที่ในแนวราบมีสมการการเคลื่อนที่

$S = t^3 - 9t^2 + 24t$ จงหา

1. เมื่อใดที่ S เพิ่มขึ้น, เมื่อใดที่ S ลดลง
2. เมื่อใดที่ v เพิ่มขึ้น, เมื่อใดที่ v ลดลง
3. จงหาระยะทางและความเร็วเมื่อ $a = 0$
4. จงหาระยะทางทั้งหมด เมื่อเวลาผ่านไป 5 วินาที เมื่อระยะทางมีหน่วยเป็นเมตร

วิธีทำ $v = \frac{ds}{dt} = \frac{d}{dt}(t^3 - 9t^2 + 24t)$

$= 3t^2 - 18t + 24 = (3t - 6)(t - 4)$

$$a = \frac{dv}{dt} = \frac{d}{dt}(3t^2 - 18t + 24)$$

$$= 6t - 18$$

(1) S เพิ่มขึ้นเมื่อ $v > 0$

นั่นคือ $3(t-2)(t-4) > 0$

เมื่อ $t < 2$ หรือ $t > 4$

นั่นคือ S มีค่าเพิ่มขึ้นเมื่อ $t < 2$ หรือ $t > 4$

S ลดลงเมื่อ $v < 0$

นั่นคือ $3(t-1)(t-4) < 0$

เมื่อ $2 < t < 4$

นั่นคือ S มีค่าลดลงเมื่อ $2 < t < 4$

(2) v เพิ่มขึ้นเมื่อ $a > 0$

นั่นคือ $6t - 18 > 0$

เมื่อ $t > 3$

นั่นคือ v เพิ่มขึ้นเมื่อ $t > 3$

v ลดลงเมื่อ $a < 0$

นั่นคือ $6t - 18 < 0$

เมื่อ $t < 3$

นั่นคือ v ลดลงเมื่อ $t < 3$

(3) เมื่อ $a = 0$

หรือ $6t - 18 = 0$

$$t = \frac{18}{6} = 3$$

เมื่อ $t = 3$

$$S = 3^3 - 9(3)^2 + 24(3) = 27 - 81 + 72 = 18$$

$$v = 3(3)^2 - 18(3) + 24 = 27 - 54 + 24 = -3$$

(4) เมื่อ $t = 5$

$$s = (5)^3 - 9(5)^2 + 24(5)$$
$$= 125 - 225 + 120$$
$$= 20 \text{ เมตร}$$

#

โจทย์ข้อ 4 น้ำในสระว่ายน้ำแห่งหนึ่งถูกปล่อยออกจากสระเพื่อทำความสะอาดสระ ถ้า Q เป็นปริมาณน้ำที่ไหลออกมา ณ เวลา t ใด ๆ หลังจากเปิดน้ำออกโดย

$$Q = 200(30 - t)^2$$

จงหาความเร็วของปริมาณน้ำที่ไหลออกจากสระเมื่อเวลาผ่านไป 10 วินาที

วิธีทำ ความเร็วของน้ำที่ไหลออก ณ เวลา t ใด ๆ คือ v เมื่อ

$$v = \frac{dQ}{dt}$$

$$= \frac{d}{dt}(200(30 - t)^2)$$

$$= 200 \frac{d}{dt}(30 - t)^2$$

$$= 200[2(30 - t)] \frac{d}{dt}(30 - t)$$

$$= 400(30 - t)(-1)$$

$$= -400(30 - t)$$

เมื่อ $t = 10$ วินาที

$$v = -400(30 - 10) = -400(20)$$
$$v = -8000 \text{ หน่วย : วินาที}$$

โจทย์ข้อ 5 โยนวัตถุจากพื้นด้วยความเร็ว 160 ฟุตต่อวินาที และเคลื่อนที่ได้ทาง

$S = 160t - 16t^2$ ณ เวลา t ใด ๆ

จงหา 1. ระยะทางและเวลาที่วัตถุขึ้นไปสูงสุด

2. ความเร็วเมื่อวัตถุอยู่ระดับ 256 ฟุต จากพื้นดิน

$$v = \frac{ds}{dt} = \frac{d}{dt}(160t - 16t^2)$$

$$= 160 - 32t$$

$$a = \frac{dv}{dt} = \frac{d}{dt}(160 - 32t)$$

$$= -32$$

(1) เมื่อวัตถุเคลื่อนที่ขึ้นไปสูงสุด ความเร็ว $v = 0$ นั่นคือ

$$160 - 32t = 0$$

$$32t = 160$$

$$t = 5$$

นั่นคือ วัตถุขึ้นไปสูงสุดหลังจากโยนแล้ว 5 วินาที

และ ระยะทาง $S = 160(5) - 16(5)^2$

$= 800 - 400$

$= 400$ ฟุต

(2) เมื่อ $S = 256$ ฟุต

นั่นคือ $160t - 16t^2 = 256$

$$16t^2 - 160t + 256 = 0$$

$$(2t - 16)(8t - 16) = 0$$

$$t = 8, 2$$

เมื่อ $t = 2$

$v = 160 - 32(2) = 160 - 64$

$= 96$ ฟุตต่อวินาที

เมื่อ $t = 8$

$v = 160 - 32(8) = 160 - 256$

$= -96$ ฟุตต่อวินาที

หมายเหตุ : การโยนวัตถุจากพื้นดิน ณ จุดที่ห่างจากพื้นดิน f ฟุตนั้น วัตถุจะผ่าน ณ จุดนั้นสองหนคือตอนวิ่งขึ้นสู่ท้องฟ้า และตอนที่ตกลงมาจากท้องฟ้าสู่พื้นดิน

แบบฝึกหัด 4.2

โจทย์ข้อ 1 ให้ A เป็นพื้นที่ของวงกลมรัศมี r จงหาความสัมพันธ์ระหว่าง $\frac{dA}{dt}$ กับ $\frac{dr}{dt}$

วิธีทำ

$$\text{พื้นที่วงกลม } A = \pi r^2$$

$$\text{ดังนั้น } \frac{dA}{dt} = \frac{d}{dt}(\pi r^2)$$

$$= \pi \frac{d}{dt}(r^2)$$

$$= 2\pi r \frac{dr}{dt}$$

โจทย์ข้อ 2 ให้ v เป็นปริมาตรของทรงกลมรัศมี r จงหาความสัมพันธ์ระหว่าง $\frac{dv}{dt}$ กับ $\frac{dr}{dt}$ และถ้ารัศมีเท่ากับ 3, $\frac{dr}{dt} = 3$ จงหา $\frac{dv}{dt}$

วิธีทำ

$$\text{ปริมาตรของทรงกลม } v = \frac{4}{3}\pi r^3$$

$$\text{ดังนั้น } \frac{dv}{dt} = \frac{4}{3}\pi \frac{d}{dt}(r^3)$$

$$= 4\pi r^2 \frac{dr}{dt}$$

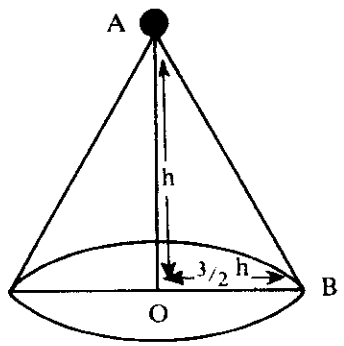
$$\text{ถ้า } r = 3, \quad \frac{dr}{dt} = 3$$

$$\frac{dv}{dt} = 4\pi (3)^2 \bullet 3$$

$$= 108\pi$$

โจทย์ข้อ 3 ข้าวเปลือกไหลออกจากเครื่องกองบนพื้นดินเป็นรูปกรวยด้วยอัตรา 10 ลูกบาศก์ฟุตต่อวินาที ถ้ารัศมีของปากกรวย เป็น $1\frac{1}{2}$ เท่าของส่วนสูงเสมอ จงหาว่าส่วนสูงจะเพิ่มขึ้นเร็วเท่าไร เมื่อกรวยนี้สูง 5 ฟุต

วิธีทำ



ให้ h เป็นส่วนสูงของกรวยมีหน่วยเป็นฟุต

$r = OB$ เป็นรัศมีของกรวยยาว $\frac{3}{2}h$ มีหน่วยเป็นฟุต

ปริมาตรของกรวย $v = \frac{1}{3}\pi r^2 h$

$$= \frac{1}{3}\pi\left(\frac{3}{2}h\right)^2 h \quad \because r = \frac{3h}{2}$$

$$v = \frac{1}{3}\pi\cdot\frac{9}{4}h^2\cdot h = \frac{3}{4}\pi h^3$$

ดังนั้น $$\frac{dv}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\frac{3}{4}\pi h^3\right)$$

$$= \frac{9}{4}\pi h^2\frac{dh}{dt}$$

ถ้า $\frac{dv}{dt} = 10$ ฟ^{3}ต่อวินาที, $h = 5$

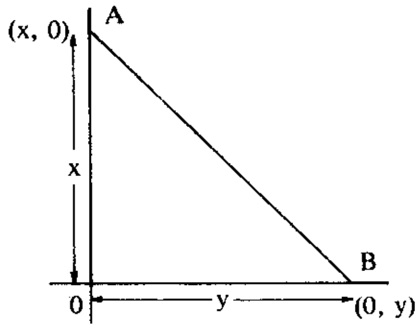
จะได้ $$10 = \frac{9}{4}\pi(5)^2\frac{dh}{dt}$$

$$\frac{40}{225\pi} = \frac{dh}{dt}$$

นั่นคือ ส่วนสูงจะเพิ่มขึ้น $\frac{40}{225\pi}$ ฟุตต่อวินาที

โจทย์ข้อ 4. จุด A เคลื่อนที่ตามแกน X ด้วยความเร็ว a ฟุตต่อวินาที ขณะที่จุด B เคลื่อนที่ตามแกน Y ด้วยความเร็ว b ฟุตต่อวินาที จงหาระยะทางระหว่าง A และ B จะเปลี่ยนแปลงอย่างไร เมื่อ A อยู่ที่จุด (x, 0) แล้ว B อยู่ที่จุด (0, y)

วิธีทำ



ให้ AO = x, BO = y, L = ระยะทาง AB

$$\frac{dx}{dt} = a, \quad \frac{dy}{dt} = b$$

เพราะว่าระยะ L $= \sqrt{(AO)^2 + (BO)^2}$

$$= \sqrt{x^2 + y^2}$$

$$\frac{dL}{dt} = \frac{d}{dt}(x^2 + y^2)^{1/2}$$

$$\frac{dL}{dt} = \frac{1}{2}(x^2 + y^2)^{-1/2} \frac{d}{dt}(x^2 + y^2)$$

$$= \frac{1}{2}(x^2 + y^2)^{-1/2}(2x\frac{dx}{dt} + 2y\frac{dy}{dt})$$

$$= \frac{1}{2}(x^2 + y^2)^{-1/2}(2x\frac{dx}{dt}) + \frac{1}{2}(x^2 + y^2)^{-1/2}(2y\frac{dy}{dt})$$

$$= (x\frac{dx}{dt} + y\frac{dy}{dt}) \quad (x^2 + y^2)^{-1/2}$$

$$= \frac{xa + yb}{(x^2 + y^2)^{1/2}} \because \frac{dx}{dt} = a, \frac{dy}{dt} = b$$

$$= \frac{xa + yb}{\sqrt{x^2 + y^2}}$$

นั่นคือ ระยะทาง L จะเปลี่ยนแปลง $= \dfrac{xa + yb}{\sqrt{x^2 + y^2}}$ ฟุตต่อวินาที

โจทย์ข้อ 5. บอลลูนรูปทรงกลม ชายคนหนึ่งปล่อยแก๊สเข้าไปในบอลลูนด้วยอัตราเร็ว 100 ลูกบาศก์ฟุตต่อวินาที อยากทราบว่ารัศมีของบอลลูนจะเพิ่มขึ้นเร็วเท่าไร เมื่อรัศมีของบอลลูนเป็น 3 ฟุต

วิธีทำ

ให้ v เป็นปริมาตรของบอลลูน

r เป็นรัศมีของบอลลูน

$\dfrac{dv}{dt} = 100$ ลูกบาศก์ฟุตต่อวินาที แล้ว

$$v = \frac{4}{3}\pi r^3$$

$$\frac{dv}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\frac{4}{3}\pi r^3\right)$$

$$= \frac{4}{3}\pi \frac{d}{dt}(r^3)$$

$$= 4\pi r^2 \frac{dr}{dt}$$

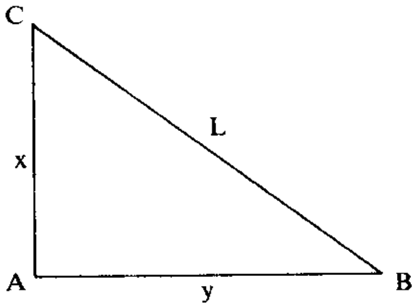
$$100 = 4\pi(3^2)\frac{dr}{dt} \quad \because \frac{dv}{dt} = 100,\ r = 3$$

$$\frac{25}{9\pi} = \frac{dr}{dt}$$

นั่นคือ รัศมีบอลลูนจะเพิ่มขึ้น $= \dfrac{25}{9\pi}$ ฟุตต่อวินาที

โจทย์ข้อ 6. บอลลูนสูงจากพื้นดิน 200 ฟุต ลอยขึ้นด้วยความเร็วคงที่ 15 ฟุตต่อวินาที รถยนต์คันหนึ่งวิ่งผ่านใต้บอลลูน ไปบนถนนตรงด้วยความเร็วคงที่ 45 ไมล์ต่อชั่วโมง จงหาว่าระยะทางระหว่างรถยนต์และบอลลูนเปลี่ยนแปลงเร็วเท่าไร หลังจาก 1 วินาทีผ่านไป

วิธีทำ



ให้ C เป็นจุดที่บอลลูนลอยอยู่สูงจากพื้นดิน x ฟุต

AB เป็นจุดที่รถยนต์วิ่งผ่านบอลลูนได้ระยะทาง y ฟุต

BC เป็นระยะห่างระหว่างบอลลูนและรถยนต์ยาว L ฟุต แล้ว

$$L = \sqrt{x^2 + y^2} = (x^2 + y^2)^{1/2}$$

$$\frac{dL}{dt} = \frac{d}{dt}(x^2 + y^2)^{1/2}$$

$$= \frac{1}{2}(x^2 + y^2)^{-1/2}\frac{d}{dt}(x^2 + y^2)$$

$$= \frac{1}{2}(x^2 + y^2)^{-1/2}\left(2x\frac{dx}{dt} + 2y\frac{dy}{dt}\right)$$

$$= (x^2 + y^2)^{-1/2}\left(x\frac{dx}{dt} + y\frac{dy}{dt}\right)$$

$$= \left(x\frac{dx}{dt} + y\frac{dy}{dt}\right) \quad (x^2 + y^2)^{1/2} \qquad \text{..........(1)}$$

ภายหลัง 1 วินาที y = 45 ไมล์ต่อชั่วโมง หรือ 66 ฟุตต่อวินาที

x = 200 ฟุต

$\frac{dx}{dt}$ = 15 ฟุตต่อวินาที

$$\frac{dy}{dt} = 66 \text{ ฟุตต่อวินาที}$$

แทนค่าในสมการ (1)

$$\frac{dL}{dt} = \frac{(200 \times 15) + (66 \times 66)}{\sqrt{(200)^2 + (66)^2}}$$

$$= \frac{3000 + 4356}{\sqrt{44356}}$$

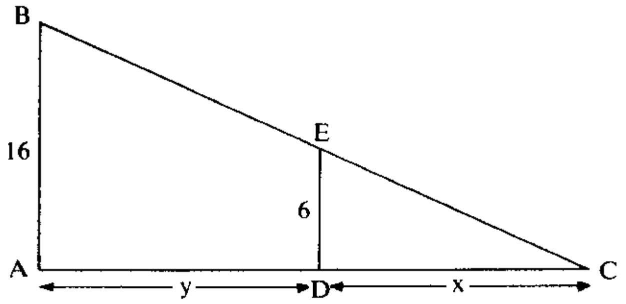
$$\approx \frac{7356}{210.6}$$

$$= 34.92$$

นั้นคือ บอลลูน และรถยนต์จะห่างจากกัน = 34.92 ฟุตต่อวินาที

โจทย์ข้อ 7. ชายคนหนึ่งสูง 6 ฟุต เดินด้วยความเร็ว 5 ฟุตต่อวินาที เดินเข้าหาเสาไฟฟ้าในตอนกลางคืน โดยที่เสาไฟฟ้ามีหลอดไฟสูงจากพื้น 16 ฟุต จงหาความเร็วของเงาในการเคลื่อนที่

วิธีทำ



ให้ B เป็นหลอดไฟอยู่สูงจากพื้น 16 ฟุต

DE เป็นความสูงของชายคนนั้นสูง 6 ฟุต

DC เป็นความยาวของเงายาว x ฟุต

AD เป็นระยะห่างจากชายคนนั้นอยู่ห่างโคนเสาไฟฟ้า y ฟุต

สามเหลี่ยม ABC คล้ายกับ สามเหลี่ยม DCE จะได้ว่า

$$\frac{DC}{DE} = \frac{AC}{AB}$$

$$\frac{x}{6} = \frac{x + y}{16}$$

$$16x = 6x + 6y$$

$$10x = 6y$$

$$x = \frac{3}{5}y$$

$$\frac{dx}{dt} = \frac{3}{5}\frac{dy}{dt} \qquad \text{..........(1)}$$

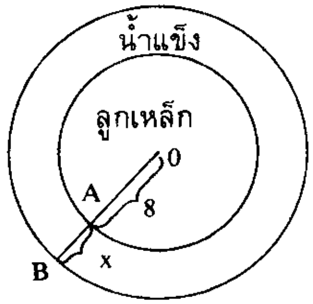
เมื่อ $\frac{dy}{dt} = 5$ ฟุตต่อวินาที แทนค่าในสมการ (1) จะได้

$$\frac{dx}{dt} = \frac{3}{5} \times 5 = 3$$

นั่นคือ เงาจะหดสั้นลงด้วยความเร็ว = 3 ฟุตต่อวินาที

โจทย์ข้อ 8. ลูกเหล็กทรงกรมรัศมี 8 นิ้ว ปกคลุมด้วยน้ำแข็งอย่างสม่ำเสมอโดยรอบ ถ้าน้ำแข็งละลายด้วยความเร็ว 10 ลูกบาศก์นิ้วต่อวินาที จงหาความหนาของน้ำแข็งเปลี่ยนไปอย่างไร ในขณะที่น้ำแข็งหนา 2 นิ้ว

วิธีทำ



ให้ ลูกเหล็กรัศมี = OA = 8 นิ้ว

AB เป็นความหนาของน้ำแข็งที่ปกคลุมลูกเหล็ก = x นิ้ว

v เป็นปริมาตรของน้ำแข็งที่ปกคลุมลูกเหล็ก ซึ่ง

v = ปริมาตรทรงกลมรัศมี OB − ปริมาตรทรงกลมรัศมี OA

$$= \frac{4}{3}\pi(8 + x)^3 - \frac{4}{3}\pi 8^3$$

$$= \frac{4}{3}\pi((8 + x)^3 - 8^3)$$

$$\frac{dv}{dt} = \frac{4}{3}\pi \frac{d}{dt}((8 + x)^3 - 8^3)$$

$$= \frac{4}{3}\pi\left(\frac{d}{dt}(8 + x)^3 - \frac{d}{dt}8^3\right)$$

$$= \frac{4}{3}\pi\left(3(8 + x)^2 \frac{d}{dt}(8 + x)\right)$$

$$= \frac{4}{3}\pi\left(3(8 + x)^2 \frac{dx}{dt}\right) \quad \text{..........(1)}$$

เมื่อ $\frac{dv}{dt}$ = 10 ลูกบาศก์นิ้วต่อวินาที, x = 2 นิ้ว

จากสมการ (1) จะได้

$$10 = \frac{4}{3}\pi\left(3(8 + 2)^2 \frac{dx}{dt}\right)$$

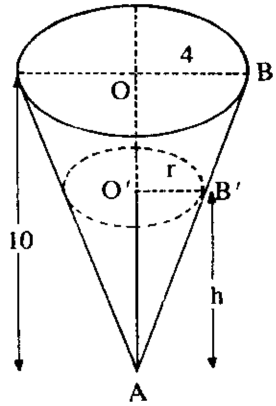
$$= 400\pi \frac{dx}{dt}$$

$$\frac{1}{40\pi} = \frac{dx}{dt}$$

นั้นคือ ความหนาน้ำแข็งลดลง = $\frac{1}{40\pi}$ นิ้วต่อวินาที

โจทย์ข้อ 9. น้ำไหลออกจากกรวยซึ่งปากกรวยมีเส้นผ่าศูนย์กลาง 8 ฟุต และสูง 10 ฟุต ด้วยอัตราเร็วคงที่ คือ 5 ลูกบาศก์ฟุตต่อวินาที จงหาว่าระดับน้ำจะลดลงด้วยความเร็วอย่างไร ขณะที่น้ำสูง 6 ฟุต

วิธีทำ



ให้ AO′ เป็นระดับความสูงของน้ำที่ลดลง = h ฟุต

O′B′ เป็นรัศมีของผิวน้ำในกรวย = r ฟุต

v เป็นปริมาตรของน้ำเป็นลูกบาศก์ฟุต

จะได้ว่า

$$\text{ปริมาตร } v = \frac{1}{3}\pi r^2 h \qquad \text{..........(1)}$$

จาก สามเหลียม AOB คล้ายกับสามเหลี่ยม AO′B′ จะได้

$$\frac{h}{r} = \frac{10}{4} = \frac{5}{2}$$

$$r = \frac{2}{5}h$$

แทนค่า r ในสมการ (1)

$$v = \frac{1}{3}\pi\left(\frac{2}{5}h\right)^2 h = \frac{4}{75}\pi h^3$$

$$\frac{dv}{dt} = \frac{4}{75}\pi\frac{dh^3}{dt}$$

$$= \frac{12}{75}\pi h^2\frac{dh}{dt} \qquad \text{..........(2)}$$

เมื่อ $\frac{dv}{dt} = 5,\ h = 6,$ แทนค่าในสมการ (2)

$$5 = \frac{12\pi}{75}(6)^2\frac{dh}{dt}$$

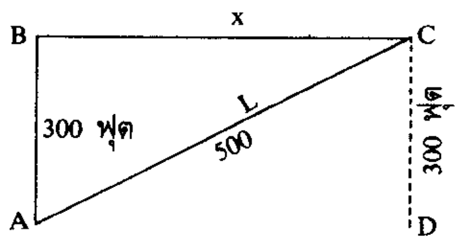
$$\frac{5 \times 75}{12 \times 36\pi} = \frac{dh}{dt}$$

$$\frac{125}{144\pi} = \frac{dh}{dt}$$

นั่นคือ น้ำจะลดลง $= \frac{125}{144\pi}$ ฟุตต่อวินาที

โจทย์ข้อ 10. เด็กคนหนึ่งเล่นว่าว โดยที่ว่าวสูงจากพื้นดิน 300 ฟุต ลมพัดว่าวไปในแนวระดับด้วยความเร็ว 25 ฟุตต่อวินาที จงหาค่าเด็กชายคนนี้จะต้องปล่อยเชือกออกไปด้วยความเร็วเท่าไร เมื่อว่าวอยู่ห่างจากเด็กคนนั้น 500 ฟุต

วิธีทำ



ให้ C เป็นว่าวอยู่สูงจากพื้น 300 ฟุต

AC เป็นระยะห่างระหว่างเด็กกับว่าว L ฟุต

BC เป็นระยะที่ว่าวลอยไปในแนวระดับ x ฟุต

จากสามเหลี่ยม ABC

$$AC^2 = AB^2 + BC^2$$

$$L^2 = (300)^2 + x^2 \qquad \text{..........(1)}$$

$$\frac{d}{dt} L^2 = \frac{d}{dt}(300)^2 + \frac{dx^2}{dt}$$

$$2L \frac{dL}{dt} = 2x \frac{dx}{dt}$$

$$\frac{dL}{dt} = \frac{x}{L} \frac{dx}{dt} \qquad \text{..........(2)}$$

จากสมการ (1) ถ้า $L = 500$ แล้ว $x = 400$

และโจทย์กำหนด $\frac{dx}{dt} = 25$ ฟุตต่อวินาที แทนค่าใน (2) จะได้

$$\frac{dL}{dt} = \frac{400}{500} \times 25$$

$$= 20$$

นั้นคือ เชือกว่าวปล่อยออกไปด้วยความเร็ว = 20 ฟุตต่อวินาที

แบบฝึกหัด 4.3

โจทย์ข้อ 1. จงหาสมการเส้นสัมผัสเส้นโค้งที่จุด (1, 0) ของเส้นโค้ง

$$y^2 - 2x - 4y + 2 = 0$$

วิธีทำ

ความชันของเส้นสัมผัสเส้นโค้ง $y^2 - 2x - 4y + 2 = 0$ ณ จุด (x, y) ใด ๆ คือ

$$\frac{d}{dx}(y^2 - 2x - 4y + 2) = \frac{d}{dx}(0)$$

$$2y\frac{dy}{dx} - 2 - 4\frac{dy}{dx} = 0$$

$$(2y - 4)\frac{dy}{dx} = 2$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{2}{2y - 4}$$

นั้นคือ ความชันของเส้นสัมผัสเส้นโค้ง $y^2 - 2x - 4y + 2 = 0$ ที่จุด (x, y) ใด ๆ คือ

$$\frac{dy}{dx} = \frac{2}{2y - 4}$$

ถ้า $x = 1, y = 0$

ความชันของเส้นสัมผัส $m_1 = \frac{2}{-4} = \frac{-1}{2}$

สมการเส้นสัมผัสเส้นโค้งที่จุด (1, 0) คือ

$$
\begin{aligned}
y - 0 &= m_1 (x - 1) \\
y &= -\frac{1}{2}(x - 1) \\
2y &= -x + 1 \\
x + 2y - 1 &= 0
\end{aligned}
$$

โจทย์ข้อ 2. จงหาสมการเส้นปกติของเส้นโค้ง $xy + 2x - 5y - 2 = 0$ ที่จุด (3, 2)

วิธีทำ

ความชันของเส้นสัมผัสเส้นโค้ง $xy + 2x - 5y - 2 = 0$ ที่จุด (x, y) ใด ๆ คือ

$$
\begin{aligned}
\frac{d}{dx}(xy + 2x - 5y - 2) &= \frac{d}{dx} 0 \\
x\frac{dy}{dx} + y + 2 - 5\frac{dy}{dx} &= 0 \\
(x - 5)\frac{dy}{dx} &= -y - 2 \\
\frac{dy}{dx} &= \frac{-y - 2}{x - 5}
\end{aligned}
$$

ความชันของเส้นสัมผัสเส้นโค้งที่จุด (x, y) ใด ๆ คือ

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-y - 2}{x - 5}$$

ถ้า $x = 3, y = 2$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-2 - 2}{3 - 5} = \frac{-4}{-2} = 2$$

ความชันเส้นสัมผัส $m_1 = 2$

สมการเส้นปกติของเส้นโค้งที่จุด (3, 2) คือ

$$y - 2 = \frac{-1}{m_1}(x - 3)$$

$$y - 2 = \frac{-1}{2}(x - 3)$$

$$2y - 4 = -x + 3$$

$$x + 2y - 7 = 0$$

โจทย์ข้อ 3. จงหาสมการเส้นสัมผัสเส้นโค้ง $y = x^3 - 6x + 2$ และขนานกับเส้นตรง $y = 6x - 2$

วิธีทำ

ความชันของเส้นตรง $y = 6x - 2$ คือ

$$m_1 = 6 \qquad \text{..........(1)}$$

ความชันของเส้นสัมผัสเส้นโค้งที่จุด (x, y) ใด ๆ คือ

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}(x^3 - 6x + 2)$$

$$= 3x^2 - 6$$

ให้ m_2 เป็นความชันของเส้นสัมผัสเส้นโค้ง

$$m_2 = 3x^2 - 6 \qquad \text{..........(2)}$$

เพราะว่า เส้นสัมผัสเส้นขนานกับเส้นตรง $y = 6x - 2$ จะได้ว่า

$$m_2 = m_1$$

$$3x^2 - 6 = 6$$

$$3x^2 - 12 = 0$$

$$x^2 - 4 = 0$$

$$x = \pm 2$$

แทนค่า $x = \pm 2$ ในสมการเส้นโค้ง $y = x^3 - 6x + 2$ แล้ว $y = -2, 6$

ถ้า $x = 2, y = -2, m_2 = 6$ แล้วสมการเส้นสัมผัสสัมผัสเส้นโค้งที่จุด $(2, -2)$ คือ

$$y - (-2) = m_2(x - 2)$$
$$y + 2 = 6(x - 2)$$
$$y + 2 = 6x - 12$$
$$6x - y - 14 = 0$$

ถ้า $x = -2, y = 6, m_2 = 6$ แล้วสมการเส้นสัมผัสสัมผัสเส้นโค้งที่จุด $(-2, 6)$ คือ

$$y - 6 = m_2(x - (-2))$$
$$y - 6 = 6(x + 2)$$
$$y - 6 = 6x + 12$$
$$6x - y + 18 = 0$$

โจทย์ข้อ 4. จงหาสมการเส้นปกติของเส้นโค้ง $xy - y + 2x = 0$ และขนานกับเส้นตรง $y + 2x = 0$

วิธีทำ

ความชันของเส้นตรง $y + 2x = 0$ คือ

$$m_1 = -2 \qquad \text{..........(1)}$$

ความชันของเส้นสัมผัสสัมผัสเส้นโค้ง $xy - y + 2x = 0$ ที่จุด (x, y) ใด ๆ คือ

$$\frac{d}{dx}(xy - y + 2x) = \frac{d}{dx}(0)$$
$$x\frac{dy}{dx} + y - \frac{dy}{dx} + 2 = 0$$
$$(x - 1)\frac{dy}{dx} = -y - 2$$
$$\frac{dy}{dx} = \frac{-y - 2}{x - 1}$$

นั่นคือ ความชันของเส้นสัมผัสสัมผัสเส้นโค้ง ณ จุด (x, y) ใด ๆ

$$m_2 = \frac{-y - 2}{x - 1} \qquad \text{..........(2)}$$

เพราะว่าเส้นปกติขนานกับเส้นตรง $y + 2x = 0$

ดังนั้น เส้นปกติมีความชัน $m_3 = m_1 = -2$ ....(3)

เพราะว่าเส้นสัมผัสตั้งฉากกับเส้นตรง $y + 2x = 0$

เพราะฉะนั้น $m_1 m_2 = -1$

$$(-2)\left(\frac{-y-2}{x-1}\right) = -1$$

$$\frac{-y-2}{x-1} = \frac{1}{2}$$

$$-2y - 4 = x - 1$$

$$-2y - 3 = x$$

แทนค่า x ในสมการเส้นโค้ง $xy - y + 2x = 0$

$$(-2y-3)y - y + 2(-2y-3) = 0$$

$$-2y^2 - 3y - y - 4y - 6 = 0$$

$$-2y^2 - 8y - 6 = 0$$

$$2y^2 + 8y + 6 = 0$$

$$(y+3)(2y+2) = 0$$

$$y = -1, -3$$

ถ้า $y = -1, x = -1, m_3 = -2$ แล้วสมการเส้นปกติที่ผ่านจุด $(-1, -1)$ คือ

$$y - (-1) = m_3(x - (-1))$$

$$y + 1 = -2(x+1)$$

$$y + 1 = -2x - 2$$

$$2x + y + 3 = 0$$

ถ้า $y = -3, x = 3, m_3 = -2$ แล้วสมการเส้นปกติที่ผ่านจุด $(3, -3)$ คือ

$$y - (-3) = m_3(x - 3)$$

$$y + 3 = -2(x-3)$$

$$y + 3 = -2x + 6$$

$$2x + y - 3 = 0$$

โจทย์ข้อ 5. จงหาสมการเส้นสัมผัส และสมการเส้นปกติของเส้นโค้ง $y^2 - 2x + 3y = 4xy$- ที่จุด $(0, -3)$

วิธีทำ

ความชันของเส้นสัมผัสเส้นโค้ง ณ. จุด (x, y) ใด ๆ คือ

$$\frac{d}{dx}(y^2 - 2x + 3y) = \frac{d}{dx}(4xy)$$

$$2y\frac{dy}{dx} - 2 + 3\frac{dy}{dx} = 4\left(x\frac{dy}{dx} + y\right)$$

$$2y\frac{dy}{dx} + 3\frac{dy}{dx} - 4x\frac{dy}{dx} = 4y + 2$$

$$(2y - 4x + 3)\frac{dy}{dx} = 4y + 2$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{4y + 2}{2y - 4x + 3}$$

นั้นคือ ความชันของเส้นสัมผัสสัมผัสเส้นโค้ง ณ. จุด (x, y) ใดคือ

$$m_1 = \frac{4y + 2}{2y - 4x + 3}$$

ถ้า $x = 0, y = -3$

$$m_1 = \frac{4(-3) + 2}{2(-3) - 4(0) + 3} = \frac{-12 + 2}{-6 + 3}$$

$$= \frac{-10}{-3} = \frac{10}{3} \qquad \text{..........(1)}$$

สมการเส้นสัมผัสสัมผัสเส้นโค้ง ณ. จุด $(0, -3)$ คือ

$$y - (-3) = m_1(x - 0)$$

$$y + 3 = \frac{10}{3}(x)$$

$$3y + 9 = 10x$$

$$10x - 3y - 9 = 0$$

ให้ m_2 เป็นความชันของเส้นปกติ ซึ่ง

$$m_2 \cdot m_1 = -1$$

$$m_2 = \frac{-1}{m_1}$$

$$= \frac{-3}{10} \quad \text{จากสมการ (1)}$$

สมการเส้นปกติของเส้นโค้งผ่านจุด $(0, -3)$ คือ

$$y - (-3) = m_2 (x - 0)$$

$$y + 3 = \frac{-3}{10} (x)$$

$$3x + 10y + 30 = 0$$

โจทย์ข้อ ๖. จงแสดงว่า เส้นตรงสองเส้นที่ลากจากจุด $(\frac{3}{2}, 0)$ ไปสัมผัสกับเส้นโค้ง $x^2 - 4y + 4 = 0$ ต้องตั้งได้ฉากกัน

วิธีทำ

ความชันของเส้นสัมผัสสัมผัสเส้นโค้ง ณ จุด (x, y) ใด ๆ คือ

$$\frac{d}{dx}(x^2 - 4y + 4) = \frac{d}{dx}(0)$$

$$2x - 4\frac{dy}{dx} + \frac{d}{dx}(4) = 0$$

$$2x - 4\frac{dy}{dx} + 0 = 0$$

$$-4\frac{dy}{dx} = -2x$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x}{2}$$

นั้นคือ ความชันของเส้นสัมผัสเส้นโค้ง ณ. จุด (x, y) ใด ๆ คือ

$$m_1 = \frac{x}{2} \qquad \text{..........(1)}$$

แต่ความชันของเส้นโค้งที่ผ่านจุด $(\frac{3}{2}, 0)$ กับจุด (x, y) ใด ๆ บนเส้นโค้ง คือ

$$\frac{y - 0}{x - \frac{3}{2}} = m_2 \qquad \text{..........(2)}$$

แต่สมการ (1) กับสมการ (2) เพราะเป็นเส้นตรงเดียวกัน

$$\frac{y}{x - \frac{3}{2}} = \frac{x}{2}$$

$$2y = x^2 - \frac{3}{2}x$$

$$4y = 2x^2 - 3x \qquad \text{..........(3)}$$

จากสมการเส้นโค้ง

$$x^2 - 4y + 4 = 0$$

$$x^2 + 4 = 4y \qquad \text{..........(4)}$$

จากสมการ (3) เท่ากับสมการ (4)

$$2x^2 - 3x = x^2 + 4$$

$$x^2 - 3x - 4 = 0$$

$$(x - 4)(x + 1) = 0$$

$$x = -1, 4$$

แทนค่า x ในสมการ (4)

$$y = \frac{5}{4}, 5$$

ดังนั้น จุด $(-1, \frac{5}{4})$ และ $(4, 5)$ เป็นจุดสัมผัสสองจุดบนเส้นโค้ง
และความชันของเส้นสัมผัสที่ผ่านจุด $(\frac{3}{2}, 0)$ กับจุด $(-1, \frac{5}{4})$ บนเส้นโค้ง คือ

$$m_3 = \frac{x}{2} = -\frac{1}{2}$$

และความชันของเส้นสัมผัสที่ผ่านจุด $(\frac{3}{2}, 0)$ กับจุด $(4, 5)$ บนเส้นโค้งคือ

$$m_4 = \frac{x}{2} = \frac{4}{2} = 2$$

เพราะว่า $m_3 \cdot m_4 = -\frac{1}{2} \cdot 2 = -1$

แสดงว่า เส้นสัมผัสทั้งสองเส้นตั้งฉากกัน ณ จุด $(\frac{3}{2}, 0)$

โจทย์ข้อ 7. จงแสดงว่าเส้นตรงสองเส้นที่ลากจากจุด $(-p, 0)$ ไปสัมผัสเส้นโค้ง $y^2 = 4px$ ตั้งได้ฉากกัน

วิธีทำ

หาความชันของเส้นสัมผัส ณ จุด (x, y) ใด ๆ

$$\frac{dy^2}{dx} = \frac{d}{dx}(4px)$$

$$2y\frac{dy}{dx} = 4p$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{2p}{y} \qquad \text{...........(1)}$$

ให้จุด (x_1, y_1) และ (x_2, y_2) เป็นจุดสัมผัสบนเส้นโค้ง $y^2 = 4px$
ดังนั้น ความชันของเส้นสัมผัส ณ. จุด (x_1, y_1) คือ

$$m_1 = \frac{2p}{y_1}$$

และความชันของเส้นสัมผัส ณ. จุด (x_2, y_2) คือ

$$m_2 = \frac{2p}{y_2}$$

เพราะว่า ความชันของเส้นตรงผ่านจุด $(-p, 0)$ กับ (x_1, y_1) คือ

$$m_3 = \frac{y_1}{x_1 + p}$$

และความชันของเส้นตรงผ่านจุด $(-p, 0)$ กับ (x_2, y_2) คือ

$$m_4 = \frac{y_2}{x_2 + p}$$

เพราะว่าเส้นสัมผัสกับเส้นตรงที่ผ่านจุด $(-p, 0)$ และ (x_1, y_1) คือ เส้นเดียวกัน
จึงได้ว่า

$$m_1 = m_3$$

$$\frac{2p}{y_1} = \frac{y_1}{x_1 + p}$$

$$2px_1 + 2p^2 = y_1^2$$

$$2px_1 + 2p^2 = 4px \qquad \because y_1^2 = 4px_1$$

$$2p^2 = 2x_1p$$

$$p = x_1$$

เพราะว่า เส้นสัมผัสกับเส้นตรงที่ผ่านจุด $(-p, 0)$ และ (x_2, y_2) คือ เส้นเดียวกัน
จึงได้ว่า

$$m_2 = m_4$$

$$\frac{2p}{y_2} = \frac{y_2}{x_2 + p}$$

$$2px_2 + 2p^2 = y_2^2$$

$$2px_2 + 2p^2 = 4px_2 \qquad \because y_2^2 = 4px_2$$

$$2p^2 = 2px_2$$

$$p = x_2$$

แสดงว่า จุด (x_1, y_1) และ (x_2, y_2) อยู่บนเส้น $x = p$

เพราะว่า $y^2 = 4px$

$$y = \pm 2\sqrt{px}$$

$$y = \pm 2p$$

แสดงว่า $x = p$ หนึ่งค่าจะให้ค่า y สองค่าคือ $y = +2p$ และ $y = -2p$

ให้ $y_1 = 2p, y_2 = -2p$

จาก $$m_1m_2 = \frac{2p}{y_1} \cdot \frac{2p}{y_2} = \frac{4p^2}{2p\cdot(-2p)} = -1$$

แสดงว่า เส้นสัมผัสที่ลากจากจุด $(-p, 0)$ ไปสัมผัสเส้นโค้ง $y^2 = 4px$ ตั้งได้ฉากกัน

โจทย์ข้อ 8 เส้นสัมผัสเส้นโค้ง $y = x^3$ ที่จุด $(1, 1)$ ตัดเส้นโค้งนี้หรือไม่ถ้าตัดจงหาจุดตัดนั้น

วิธีทำ ความชันของเส้นสัมผัสสัมผัสเส้นโค้ง ณ จุด (x,y) ใด ๆ คือ

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}(x^3)$$

$$= 3x^2$$

นั่นคือความชันของเส้นสัมผัสเส้นโค้ง ณ จุด (x, y) ใด ๆ คือ

$$m_1 = 3x^2$$

ถ้า $x = 1, y = 1$

$$m_1 = 3(1^2) = 3$$

สมมุติว่าให้เส้นสัมผัสที่ผ่านจุด $(1, 1)$ ตัดเส้นโค้งที่จุด (x_1, y_1) ดังนั้น ความชันของเส้นตรงที่ผ่านจุด $(1, 1)$ กับ $(x_1, y_1) \quad = \quad m_1$

$$\frac{y_1 - 1}{x_1 - 1} = 3$$

$$y_1 - 1 = 3x_1 - 3$$

$$y_1 = 3x_1 - 3 + 1$$

$$= 3x_1 - 2 \qquad (2)$$

เพราะว่าจุด (x_1, y_1) อยู่บนเส้นโค้ง $y = x^3$ จึงได้ว่า

$$y_1 = x_1^3 \qquad (3)$$

สมการ (2) = สมการ (3)

$$3x_1 - 2 = x_1^3$$

$$x_1^3 - 3x_1 + 2 = 0$$

$$(x_1 - 1)(x_1^2 + x_1 - 2) = 0$$

$$(x_1 - 1)(x_1 - 1)(x_1 + 2) = 0$$

$$x_1 = 1, -2$$

แทนค่า $x_1 = 1, -2$ ในสมการ (3)

$$y_1 = 1, -8$$

เพราะฉะนั้นเส้นสัมผัสตัดเส้นโค้ง $y = x^3$ ที่จุด $(-2, -8)$

โจทย์ข้อ 9 ถ้าเส้นสัมผัสที่ลากจากจุด P (1,5) ไปสัมผัสกับเส้นโค้ง $y = x^3$ ณ จุด $P_1 (x_1, y_1)$ จงหาจุด $P_1 (x_1, y_1)$ และจุด $P_1 (x_1, y_1)$ มีได้จากกว่า 1 จุด หรือไม่เพราะเหตุใด

วิธีทำ หาความชันของเส้นผัสสัมสัมผัสเส้นโค้ง $y = x^3$ ณ จุด (x, y) ใด ๆ

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}(x^3) = 3x^2$$

ณ จุด $P_1 (x_1, y_1)$ ความชันของเส้นสัมผัส ณ จุดนี้คือ

$$m_2 = 3x_1^2 \qquad (1)$$

และความชันของเส้นที่ลากผ่านจุด P (1,5) กับ $P_1 (x_1, y_1)$ คือ

$$m_2 = \frac{y_1 - 5}{x_1 - 1} \qquad (2)$$

แต่เส้นทั้งสองเป็นเส้นตรงเดียวกัน ความชันต้องเท่ากัน

$$m_1 = m_2$$

$$3x_1^2 = \frac{y_1 - 5}{x_1 - 1}$$

$$3x_1^3 - 3x_1^2 = y_1 - 5 \qquad (3)$$

เพราะจุด $P_1 (x_1, y_1)$ อยู่บนเส้นโค้ง $y = x^3$ จึงได้

$$y_1 = x_1^3 \qquad (4)$$

$$3y_1 = 3x_1^3$$

แทนค่า ในสมการ (3)

$$3y_1 - 3x_1^2 = y_1 - 5$$

$$2y_1 + 5 = 3x_1^2$$

$$2x_1^3 + 5 = 3x_1^2 \because y_1 = x_1^3$$

$$2x_1^3 - 3x_1^2 + 5 = 0$$

$$(x_1 + 1)(2x_1^2 - 5x_1 + 5) = 0$$

$$\text{จาก } x_1 + 1 = 0$$

$$x_1 = -1$$

$$\text{จาก } 2x_1^2 - 5x_1^1 + 5 = 0$$

$$x_1 = \frac{-(-5) \pm \sqrt{(-5)^2 - 4(2)(5)}}{2(2)}$$

$$= \frac{5 \pm \sqrt{25 - 40}}{4}$$

$$= \frac{5 \pm \sqrt{-15}}{4} \text{ เป็นจินตภาพ}$$

ดังนั้น $x_1 = -1$ แต่ $x_1 = \frac{5 \pm \sqrt{-15}}{4}$ เป็นจินตภาพ ซึ่งเราไม่ใช้

เมื่อ $x_1 = -1, y_1 = -1$

ดังนั้นจุด $P_1(x_1, y_1) = (-1, -1)$ และมีเพียง 1 จุด

เพราะว่าสำหรับ $x_1 = \frac{5 \pm \sqrt{-15}}{4}$ เป็นจินตภาพจึงไม่ใช้

โจทย์ข้อ 10. จงหาเส้นปกติของเส้นโค้ง $x^2 - y^2 = 5$ ซึ่งขนานกับเส้นตรง $2x + 3y = 10$ ว่ามีทั้งหมดกี่เส้น จงเขียนเส้นโค้ง และเส้นต่าง ๆ

วิธีทำ

ความชันของเส้นสัมผัสสัมผัสเส้นโค้ง $x^2 - y^2 = 5$ ณ จุด (x, y) ใด ๆ คือ

$$\frac{d}{dx}(x^2 - y^2) = \frac{d}{dx}(5)$$

$$2x - 2y\frac{dy}{dx} = 0$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-2x}{-2y} = \frac{x}{y}$$

นั้นคือ ความชันของเส้นสัมผัสสัมผัสเส้นโค้ง ณ จุด (x, y) ใด ๆ คือ

$$m_1 = \frac{x}{y} \qquad \text{..........(1)}$$

ความชันของเส้นตรง $2x + 3y = 10$ คือ

$$m_2 = -\frac{2}{3} \qquad \text{..........(2)}$$

เพราะว่า เส้นปกติขนานกับเส้นตรง แต่เส้นสัมผัสตั้งฉากกับเส้นปกติ ดังนั้น เส้นสัมผัสตั้งฉากกับเส้นตรง ซึ่งจะได้ว่า

$$m_1 \cdot m_2 = -1$$

$$\frac{x}{y} \cdot \left(-\frac{2}{3}\right) = -1$$

$$\frac{-2x}{3y} = -1$$

$$-2x = -3y$$

$$x = \frac{3}{2}y \qquad \text{..........(3)}$$

เพราะว่า จุด (x, y) อยู่บนเส้นโค้ง $x^2 - y^2 = 5$ ....(4)

แทนค่า $x = \frac{3}{2}y$ ในสมการ (4)

$$\left(\frac{3}{2}y\right)^2 - y^2 = 5$$

$$\frac{9}{4}y^2 - y^2 = 5$$

$$9y^2 - 4y^2 = 20$$

$$5y^2 = 20$$

$$y^2 = 4$$

$$y = \pm 2$$

แทนค่า $y = \pm 2$ ในสมการ (3)

$$x = \pm 3$$

นั่นคือ จุดที่เส้นสัมผัสสัมผัสเส้นโค้งคือ จุด $(3, 2)$ และ $(-3, -2)$

จากสมการ (1) ความชันของเส้นสัมผัสที่ผ่านจุด $(3, 2)$, $(-3, -2)$

$$m_1 = \frac{3}{2}$$

ให้ความชันของเส้นปกติของเส้นโค้ง ที่จุด $(3, 2)$ และ $(-3, -2)$ คือ

$$m_2 = -\frac{1}{m_1} = -\frac{2}{3}$$

และสมการเส้นปกติที่จุด $(3, 2)$ คือ

$$y - 2 = m_2(x - 3)$$

$$y - 2 = -\frac{2}{3}(x - 3)$$

$$3y - 6 = -2x + 6$$

$$2x + 3y - 12 = 0$$

สมการเส้นปกติที่จุด $(-3, -2)$ คือ

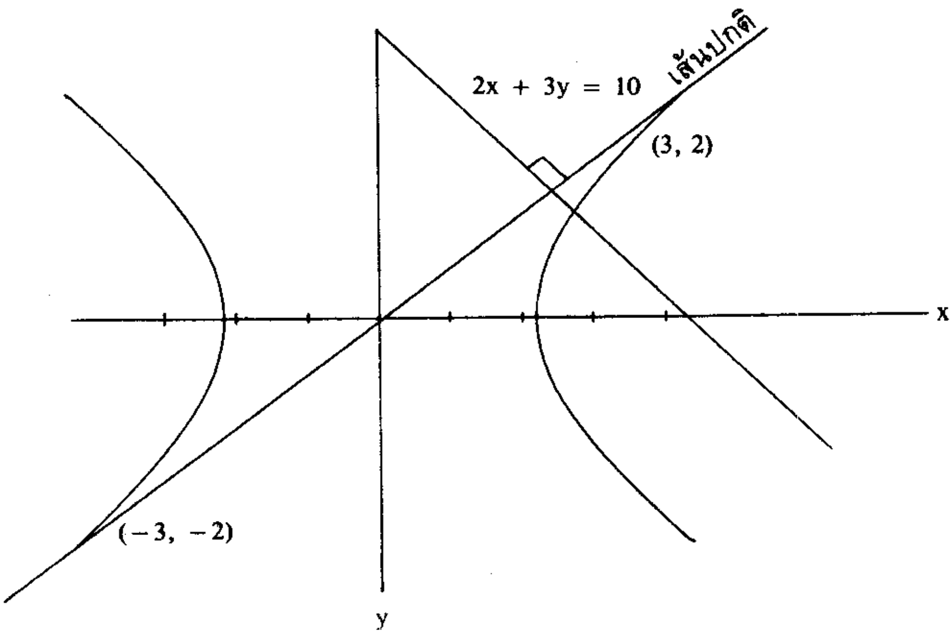
$$y - (-2) = m_2(x - (-3))$$

$$y + 2 = -\frac{2}{3}(x + 3)$$

$$3y + 6 = -2x - 6$$

$$2x + 3y + 12 = 0$$

เส้นโค้งและเส้นต่าง ๆ แสดงดังรูป



#

โจทย์ข้อ 11. เส้นปกติของเส้นโค้ง $y = x^2 + 2x - 3$ ที่จุด (1, 0) ตัดกับเส้นโค้งที่จุดใดบ้าง จงหาจุดตัดเหล่านั้น

วิธีทำ

ความชันของเส้นสัมผัสสัมผัสเส้นโค้งที่จุด (x, y) ใด ๆ คือ

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}(x^2 + 2x - 3)$$

$$= 2x + 2$$

นั้นคือ ความชันของเส้นสัมผัสสัมผัสเส้นโค้งที่จุด (1, 0) คือ

$$m_1 = 2(1) + 2 = 4$$

ให้ m_2 เป็นความชันของเส้นปกติของเส้นโค้งที่จุด (1, 0) ซึ่ง

$$m_1 m_2 = -1$$

$$m_2 = \frac{-1}{m_1}$$

$$= \frac{-1}{4}$$

สมการเส้นปกติของเส้นโค้งที่จุด (1, 0) คือ

$$y - 0 = m_2(x - 1)$$

$$y = -\frac{1}{4}(x - 1)$$

$$4y = -x + 1$$

$$x + 4y - 1 = 0 \qquad \text{..........(1)}$$

ให้เส้นปกติ $x + 4y - 1 = 0$ ตัดกับเส้นโค้งที่จุด (x_1, y_1)
นั้นคือ จุด (x_1, y_1) จะอยู่บนเส้นปกติ และได้ว่า

$$x_1 + 4y_1 - 1 = 0$$

$$x_1 = 1 - 4y_1 \qquad \text{..........(2)}$$

และจุด (x_1, y_1) จะอยู่บนเส้นโค้ง $y = x^2 + 2x - 3$ และได้ว่า

$$y_1 = x_1^2 + 2x_1 - 3 \qquad \text{..........(3)}$$

จากสมการ (2) $x_1 = 1 - 4y_1$ แทนในสมการ (3)

$$\begin{aligned} y_1 &= (1 - 4y_1)^2 + 2(1 - 4y_1) - 3 \\ &= 1 - 8y_1 + 16y_1^2 + 2 - 8y_1 - 3 \\ &= 16y_1^2 - 16y_1 \\ 16y_1^2 - 17y_1 &= 0 \\ y_1(16y_1 - 17) &= 0 \\ y_1 &= 0, \frac{17}{16} \end{aligned}$$

แทนค่า y_1 ในสมการ (2)

$$x_1 = 1, -\frac{13}{4}$$

นั้นคือ เส้นปกติตัดกับเส้นโค้ง $y = x^2 + 2x - 3$ ที่จุดจุด $(1, 0)$ และ $\left(-\frac{13}{4}, \frac{17}{16}\right)$

โจทย์ข้อ 12. จงแสดงว่า เส้นโค้ง $2x^2 + 3y^2 = 5$ และเส้นโค้ง $y^2 = x^3$ ตัดกันเป็นมุมฉาก

วิธีทำ

ความชันของเส้นสัมผัสสัมผัสเส้นโค้ง $2x^2 + 3y^2 = 5$ ที่จุด (x, y) ใด ๆ คือ

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx}(2x^2 + 3y^2) &= \frac{d}{dx}(5) \\ 4x + 6y\frac{dy}{dx} &= 0 \\ \frac{dy}{dx} &= -\frac{4x}{6y} = -\frac{2x}{3y} \end{aligned}$$

นั้นคือ ความชันของเส้นสัมผัสสัมผัสเส้นโค้ง ณ จุด (x, y) ใด ๆ คือ

$$m_1 = \frac{-2x}{3y} \qquad \text{..........(1)}$$

ความชันของเส้นสัมผัสสัมผัสเส้นโค้ง $y^2 = x^3$ ณ จุด (x, y) ใด ๆ คือ

$$\frac{d}{dx}(y^2) = \frac{d}{dx}(x^3)$$

$$2y\frac{dy}{dx} = 3x^2$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{3x^2}{2y}$$

นั้นคือ ความชันของเส้นสัมผัสสัมผัสเส้นโค้ง ณ จุด (x, y) ใด ๆ คือ

$$m_2 = \frac{3x^2}{2y} \qquad \text{..........(2)}$$

ให้จุด (x_1, y_1) เป็นจุดตัดกันของเส้นโค้ง $2x^2 + 3y^2 = 5$ และ $y^2 = x^3$

และความชันของเส้นโค้ง $2x^2 + 3y^2 = 5$ ณ จุด (x_1, y_1) คือ

$$m_1 = \frac{-2x_1}{3y_1} \qquad \text{..........(3)}$$

ความชันของเส้นโค้ง $y^2 = x^3$ ณ จุด (x_1, y_1) คือ

$$m_2 = \frac{3x_1^2}{2y_1} \qquad \text{..........(4)}$$

เพราะว่า

$$m_1 \cdot m_2 = \frac{-2x_1}{3y_1} \cdot \frac{3x_1^2}{2y_1}$$

$$= \frac{-x_1^3}{y_1^2} \qquad \text{..........(5)}$$

เพราะว่า จุด (x_1, y_1) อยู่บนเส้นโค้ง $y^2 = x^3$ แล้ว

$$y_1^2 = x_1^3 \text{ หรือ}$$

$$1 = \frac{x_1^3}{y_1^2}$$

แทนค่า $\frac{x_1^3}{y_1^2}$ = ในสมการ (5)

$$m_1 m_2 = -1$$

แสดงว่าเส้นสัมผัสเส้นโค้ง $2x^2 + 3y^2 = 5$ และ $y^2 = x^3$ ณ จุด (x_1, y_1) ตั้งฉากกัน เพราะฉะนั้น เส้นโค้งทั้งสองตัดกันเป็นมุมฉาก

โจทย์ข้อ 13. จงหาค่า c ซึ่งเส้นตรง $y = 12x + c$ สัมผัสเส้นโค้ง $y = x^3$

วิธีทำ

ให้เส้นตรง $y = 12x + c$ สัมผัสเส้นโค้ง $y = x^3$ ที่จุด (x_1, y_1)
แล้วจะได้ว่าจุด (x_1, y_1) อยู่บนเส้นทั้งสอง
ถ้าจุด $(x_1 y_1)$ อยู่บนเส้นตรง $y = 12x + c$ จะได้

$$y_1 = 12x_1 + c \qquad \text{..........(1)}$$

ถ้าจุด (x_1, y_1) อยู่บนเส้นโค้ง $y = x^3$ จะได้

$$y_1 = x_1^3 \qquad \text{..........(2)}$$

สมการ (1) = สมการ (2)

$$x_1^3 = 12x_1 + c$$

$$x_1^3 - 12x_1 - c = 0 \qquad \text{..........(3)}$$

ความชันของเส้นสัมผัสสัมผัสเส้นโค้งที่จุด (x, y) คือ

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}(x^3)$$

$$= 3x^2$$

นั่นคือ ความชันของเส้นสัมผัสสัมผัสเส้นโค้งที่จุด (x, y) ใด ๆ คือ

$$m_1 = 3x^2$$

ถ้า $x = x_1$, $y = y_1$ แล้ว
ความชัน $m_1 = 3x_1^2$ ....(4)
ความชันของเส้นตรง $y = 12x + c$ คือ

$$m_2 = 12 \qquad \text{..........(5)}$$

แต่เส้นตรง $y = 12x + c$ สัมผัสเส้นโค้ง $y = x^3$ ที่จุด (x_1, y_1)

ดังนั้น ความชัน m_1 = ความชัน m_2

$$3x_1^2 = 12 \quad \text{จากสมการ (4) และ (5)}$$

$$x_1^2 = 4$$

$$x_1 = \pm 2$$

จากสมการ (3) ถ้า $x_1 = 2$

$$\begin{aligned} c &= x_1^3 + 12x_1 \\ &= 2^3 + 12(2) \\ &= 8 + 24 \\ &= 32 \end{aligned}$$

จากสมการ (3) ถ้า $x_1 = -2$

$$\begin{aligned} c &= x_1^3 + 12x_1 \\ &= (-2)^3 + 12(-2) \\ &= -8 - 24 \\ &= -32 \end{aligned}$$

โจทย์ข้อ 14. จงหาค่า m เมื่อเส้นตรง $y = mx$ สัมผัสเส้นโค้ง $y^2 + x^2 - 4x + 3 = 0$

วิธีทำ

ให้จุด (x_1, y_1) เป็นจุดสัมผัสของเส้นตรง $y = mx$ กับเส้นโค้ง $y^2 + x^2 - 4x + 3 = 0$

เพราะว่าจุด (x_1, y_1) อยู่บนเส้นตรง $y = mx$ จะได้ว่า

$$y_1 = mx_1 \qquad \text{.................(1)}$$

เพราะว่า จุด (x_1, y_1) อยู่บนเส้นโค้ง $y^2 + x^2 - 4x + 3 = 0$ จะได้ว่า

$$y_1^2 + x_1^2 - 4x_1 + 3 = 0 \qquad \text{..........(2)}$$

จากสมการ (1) แทนค่า $y_1 = mx_1$ ในสมการ (2) จะได้

$$(mx_1)^2 + x_1^2 - 4x_1 + 3 = 0$$

$$m^2x_1^2 + x_1^2 - 4x_1 + 3 = 0 \qquad \text{..........(3)}$$

ความชันของเส้นสัมผัสสัมผัสเส้นโค้ง $y^2 + x^2 - 4x + 3 = 0$ ณ จุด (x, y) ใด ๆ คือ

$$\frac{d}{dx}(y^2 + x^2 - 4x + 3) = \frac{d}{dx}(0)$$

$$2y\frac{dy}{dx} + 2x - 4 = 0$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{4 - 2x}{2y}$$

$$= \frac{2 - x}{y}$$

นั่นคือ ความชันของเส้นสัมผัสสัมผัสเส้นโค้ง ณ จุด (x, y) ใด ๆ คือ

$$m_1 = \frac{2 - x}{y}$$

ถ้า $x = x_1, y = y_1$ แล้ว

$$m_1 = \frac{2 - x_1}{y_1} \qquad \text{..........(4)}$$

และความชันของเส้นตรง $y = mx$ คือ

$$m_2 = m \qquad \text{..........(5)}$$

แต่เส้นตรง $y = mx$ สัมผัสเส้นโค้งนี้ที่จุด (x_1, y_1) ดังนั้น

$$\text{ความชัน } m_1 = \text{ความชัน } m_2$$

$$\frac{2 - x_1}{y_1} = m$$

$$2 - x_1 = my_1 \qquad \text{..........(6)}$$

จากสมการ (1) $y_1 = mx_1$ แทนในสมการ (6) จะได้

$$2 - x_1 = m(mx_1)$$

$$2 - x_1 = m^2x_1$$

$$2x_1 - x_1^2 = m^2x_1^2 \quad \text{เอา } x_1 \text{ คูณทั้งสองข้าง}$$

$$2x_1 = m^2x_1^2 + x_1^2$$

แทนค่า $m^2x_1^2 + x_1^2 = 2x_1$ ในสมการ (3) จะได้

$$m^2x_1^2 + x_1^2 - 4x_1 + 3 = 0$$

$$2x_1 - 4x_1 + 3 = 0$$

$$-2x_1 + 3 = 0$$

$$2x_1 = 3$$

$$2x_1 = 3$$

$$x_1 = \frac{3}{2}$$

แทนค่า $x_1 = \frac{3}{2}$ ในสมการ (7)

$$2 - \frac{3}{2} = m^2\left(\frac{3}{2}\right)$$

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} = m^2$$

$$\frac{1}{3} = m^2$$

$$\frac{1}{\sqrt{3}} = m$$

โจทย์ข้อ 15. จงหามุมระหว่างเส้นโค้งสองเส้นต่อไปนี้

(1) $3x + y = 5$

$2x - y = 4$

วิธีทำ

ความชันของเส้นตรง $3x + y = 5$ คือ

$$m_1 = -3 \qquad \text{..........(1)}$$

ความชันของเส้นตรง $2x - y = 4$ คือ

$$m_2 = 2 \qquad \text{..........(2)}$$

ให้ β เป็นมุมระหว่างเส้นตรงทั้งสอง

$$\tan\beta = \frac{m_2 - m_1}{1 + m_2m_1}$$

$$= \frac{2 - (-3)}{1 + 2(-3)}$$

$$= \frac{5}{1 - 6}$$

$$= -1$$

$$\beta = \tan^{-1}(-1) \qquad \#$$

(2) $y = x^2, xy = 1$

วิธีทำ

หาจุดตัดของเส้นโค้งทั้งสองจาก

$$y = x^2 \qquad \text{.........(1)}$$

$$xy = 1 \qquad \text{..........(2)}$$

แทนค่า $y = x^2$ ในสมการ (2)

$$x.(x^2) = 1$$

$$x^3 = 1$$

$$x = 1$$

แทนค่า $x = 1$ ในสมการ (2)

$$y = 1$$

เพราะฉะนั้นจุด (1, 1) เป็นจุดตัดกันของเส้นโค้งทั้งสอง

ความชันของเส้นโค้งสัมผัสสัมผัสเส้นโค้ง $y = x^2$ ณ จุด (x, y) ใด ๆ คือ

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}(x^2)$$

$$= 2x$$

ถ้า $x = 1, y = 1$ แล้ว

$$\frac{dy}{dx} = 2(1) = 2$$

นั่นคือ ความชันของเส้นสัมผัสสัมผัสเส้นโค้ง $y = x^2$ ณ จุด (1, 1) คือ

$$m_1 = 2 \qquad \text{..........(3)}$$

ความชันของเส้นสัมผัสสัมผัสเส้น $xy = 1$ ณ จุด (x, y) ใด ๆ คือ

$$\frac{d}{dx}(xy) = \frac{d}{dx}(1)$$

$$x\frac{dy}{dx} + y = 0$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-y}{x}$$

ถ้า $x = 1, y = 1$ แล้ว

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-1}{1} = -1$$

นั้นคือ ความชันของเส้นสัมผัสสัมผัสเส้นโค้ง $xy = 1$ ณ จุด (1, 1) คือ

$$m_2 = -1 \qquad \text{..........(4)}$$

ให้ β เป็นมุมระหว่างเส้นสัมผัสทั้งสอง

$$\tan\beta = \frac{m_2 - m_1}{1 + m_2m_1}$$

$$\tan\beta = \frac{-1 - 2}{1 + (-1)2}$$

$$= \frac{-3}{-1}$$

$$= 3$$

$$\beta = \tan^{-1}(3)$$

(3) $x^2 + y^2 = 16,\ y^2 = 6x$

วิธีทำ

หาจุดตัดของเส้นโค้งทั้งสอง

$$x^2 + y^2 = 16 \qquad \text{..........(1)}$$

$$y^2 = 6x \qquad \text{..........(2)}$$

แทนค่า $y^2 = 6x$ ในสมการ (1)

$$x^2 + 6x = 16$$

$$x^2 + 6x - 16 = 0$$

$$(x + 8)(x - 2) = 0$$

$$x = 2, -8$$

แทนค่า $x = 2, -8$ ในสมการ (2) จะได้

$$y = \pm 2\sqrt{3} \text{ จินตภาพ เมื่อ } x = -8$$

เพราะฉะนั้น จุดตัดของเส้นโค้งทั้งสอง คือจุด $(2, 2\sqrt{3})$ และ $(2, -2\int 3)$

ความชันของเส้นสัมผัสสัมผัสเส้นโค้ง $x^2 + y^2 = 16$ ณ จุด (x, y) ใด ๆ คือ

$$\frac{d}{dx}(x^2 + y^2) = \frac{d}{dx}(16)$$

$$2x + 2y\frac{dy}{dx} = 0$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-x}{y}$$

ถ้า $x = 2, y = 2\sqrt{3}$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-2}{2\sqrt{3}} = \frac{-1}{\sqrt{3}}$$

ถ้า $x = 2, y = -2\sqrt{3}$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-2}{-2\sqrt{3}} = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

นั่นคือ ความชันของเส้นสัมผัสสัมผัสเส้นโค้ง $x^2 + y^2 = 16$ ณ จุด

$$\left.\begin{aligned} (2, 2\sqrt{3})\ m_1 &= \frac{-1}{\sqrt{3}} \\ (2, -2\sqrt{3})\ m_1' &= \frac{1}{\sqrt{3}} \end{aligned}\right\} \qquad (1)$$

ความชันของเส้นสัมผัสสัมผัสเส้นโค้ง $y^2 \doteq 6x$ ณ จุด (x, y) ใด ๆ คือ

$$\frac{d}{dx}(y^2) = \frac{d}{dx}(6x)$$

$$2y\frac{dy}{dx} = 6$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{3}{y}$$

ถ้า $x = 2, y = 2\sqrt{3}$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{3}{2\sqrt{3}}$$

ถ้า $x = 2, y = -2\sqrt{3}$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{3}{-2\sqrt{3}}$$

นั้นคือ ความชันของเส้นสัมผัสสัมผัสเส้นโค้ง $y^2 = 6x$ ณ จุด

$$\left.\begin{array}{lcl} (2, 2\sqrt{3}) \text{ คือ } m_2 & = & \dfrac{3}{2\sqrt{3}} \\ (2, -2\sqrt{3}) \text{ คือ } m_2' & = & \dfrac{-3}{2\sqrt{3}} \end{array}\right\} \quad (2)$$

ให้ β_1 และ β_2 เป็นมุมระหว่างเส้นโค้งทั้งสอง ณ จุดตัดทั้งสอง

$$\tan\beta_1 = \frac{m_2 - m_1}{1 + m_2 m_1}$$

$$= \left(\frac{3}{2\sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{3}}\right) \Big/ 1 + \frac{3}{2\sqrt{3}} \cdot \left(\frac{-1}{\sqrt{3}}\right)$$

$$= \frac{5}{2\sqrt{3}} \Big/ 1 - \frac{3}{6}$$

$$= \frac{5}{2\sqrt{3}} \cdot 2$$

$$= \frac{5}{\sqrt{3}}$$

$$= \frac{5\sqrt{3}}{3}$$

$$\beta_1 = \tan^{-1}\left(\frac{5\sqrt{3}}{3}\right)$$

$$\tan\beta_2 = \frac{m_2' - m_1'}{1 + m_2'm_1'}$$

$$= \left(\frac{-3}{2\sqrt{3}} - \frac{1}{\sqrt{3}}\right) \Big/ 1 - \frac{3}{2\sqrt{3}} \cdot \frac{1}{\sqrt{3}}$$

$$= \frac{-5}{2\sqrt{3}} \Big/ 1 - \frac{1}{2}$$

$$= \frac{-5}{2\sqrt{3}} \cdot 2 = \frac{-5}{\sqrt{3}} = \frac{-5\sqrt{3}}{3}$$

$$\beta_2 = \tan^{-1}\left(\frac{-5\sqrt{3}}{3}\right)$$

(4) $x^2 - 2x + y = 4,\ x - y = 2$

วิธีทำ

หาจุดตัดของเส้นทั้งสอง

$$x^2 - 2x + y = 4 \qquad \text{..........(1)}$$

$$x - y = 2$$

$$y = x - 2 \qquad \text{..........(2)}$$

แทนค่า $y = x - 2$ ในสมการ (1)

$$x^2 - 2x + (x - 2) = 4$$

$$x^2 - x - 2 - 4 = 0$$

$$x^2 - x - 6 = 0$$

$$(x - 3)(x + 2) = 0$$

$$x = -2, 3$$

แทนค่า x ในสมการ (2)

$$y = -4, 1$$

จะได้จุด $(-2, -4)$ และจุด $(3, 1)$ เป็นจุดตัดของเส้นโค้งทั้งสอง

ความชันของเส้นสัมผัสสัมผัสเส้นโค้ง $x^2 - 2x + y = 4$ ณ จุด (x, y) ใด ๆ คือ

$$\frac{d}{dx}(x^2 - 2x + y) = \frac{d}{dx}(4)$$

$$2x - 2 + \frac{dy}{dx} = 0$$

$$\frac{dy}{dx} = 2 - 2x$$

ถ้า $x = -2, y = -4$

$$\frac{dy}{dx} = 2 - 2(-2)$$

$$= 6$$

ถ้า $x = 3, y = 1$

$$\frac{dy}{dx} = 2 - 2(3)$$

$$= -4$$

นั่นคือ ความชันของเส้นสัมผัสสัมผัสเส้นโค้ง ณ จุด

$$\left.\begin{aligned} (-2, -4)\ m_1 &= 6 \\ (3, 1)\ m_1' &= -4 \end{aligned}\right\} (3)$$

และความชันของเส้นตรง $x - y = 2$ คือ

$$m_2 = 1 \qquad \text{..........(4)}$$

เพราะว่า เส้นตรงตัดเส้นโค้ง ณ จุด $(-2, -4)$ และ $(3, 1)$

เพราะฉะนั้น มุมระหว่างเส้นทั้งสองมีสองมุม คือ β_1 และ β_2

$$\tan \beta_1 = \frac{m_2 - m_1}{1 + m_2 m_1}$$

$$= \frac{1 - 6}{1 + 1(6)}$$

$$= \frac{-5}{7}$$

$$\beta_1 = \tan^{-1}\left(\frac{-5}{7}\right)$$

และ $$\tan\beta_2 = \frac{m_2 - m_1'}{1 + m_2 m_1'}$$

$$= \frac{1-(-4)}{1+(1)(-4)}$$

$$= \frac{5}{1-4} = \frac{5}{-3}$$

$$\beta_2 = \tan^{-1}\left(\frac{-5}{3}\right)$$

(5) $x + y - y^2 + 4 = 0, x = y^2$

วิธีทำ

หาจุดตัดของเส้นทั้งสอง

$$x + y - y^2 + 4 = 0 \quad \text{..........(1)}$$

$$x = y^2 \quad \text{..........(2)}$$

แทนค่า $x = y^2$ ในสมการ (1)

$$y^2 + y - y^2 + 4 = 0$$

$$y + 4 = 0$$

$$y = -4$$

แทนค่า $y = -4$ ในสมการ (2)

$$x = (-4)^2 = 16$$

จุด (16, −4) เป็นจุดตัดของเส้นทั้งสอง

ความชันของเส้นสัมผัสสัมผัสเส้นโค้ง $x + y - y^2 + 4 = 0$ ณ จุด (x, y) ใด ๆ คือ

$$\frac{d}{dx}(x + y - y^2 + 4) = \frac{d}{dx}(0)$$

$$1 + \frac{dy}{dx} - 2y\frac{dy}{dx} = 0$$

$$(1 - 2y)\frac{dy}{dx} = -1$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-1}{1 - 2y}$$

$$= \frac{1}{2y - 1}$$

ถ้า $x = 16, y = -4$ แล้ว

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{2(-4) - 1}$$

$$= \frac{1}{-9}$$

นั้นคือ ความชันเส้นสัมผัสสัมผัสเส้นโค้ง ณ จุด $(16, -4)$ คือ

$$m_1 = \frac{-1}{9} \qquad \text{..........(3)}$$

ความชันของเส้นสัมผัสสัมผัสเส้นโค้ง $x = y^2$ ณ จุด (x, y) ใด ๆ คือ

$$\frac{d}{dx}(x) = \frac{d}{dx}(y^2)$$

$$1 = 2y\frac{dy}{dx}$$

$$\frac{1}{2y} = \frac{dy}{dx}$$

ถ้า $x = 16, y = -4$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{2(-4)} = \frac{1}{-8}$$

นั้นคือ ความชันของเส้นสัมผัสสัมผัสเส้นโค้ง ณ จุด $(16, -4)$ คือ

$$m_2 = \frac{-1}{8} \qquad \text{..........(4)}$$

ให้ β เป็นมุมระหว่างเส้นโค้งทั้งสอง

$$\tan\beta = \frac{m_2 - m_1}{1 + m_2 m_1}$$

$$= \left(-\frac{1}{8} + \frac{1}{9}\right) \Big/ 1 + \left(-\frac{1}{8} \cdot -\frac{1}{9}\right)$$

$$= \frac{-1}{72} \Big/ 1 + \frac{1}{72}$$

$$= \frac{-1}{72} \Big/ \frac{73}{72}$$

$$= \frac{-1}{72} \cdot \frac{72}{73} = \frac{-1}{73}$$

$$\beta = \tan^{-1}\left(\frac{-1}{73}\right)$$

แบบฝึกหัด 4.4

โจทย์ข้อ 1. จงหาค่า x ที่ทำให้เส้นโค้งโค้งขึ้น ค่า x ที่ทำให้เส้นโค้งโค้งลง และเขียนกราฟคร่าว ๆ ถ้า

$$y = x^2 - 2x + 3$$

วิธีทำ

เพราะว่า

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}(x^2 - 2x + 3)$$

$$= 2x - 2$$

หาค่า x ที่ทำให้ $\frac{dy}{dx} = 0$

ให้ $\frac{dy}{dx} = 0$

$$2x - 2 = 0$$

$$x = 1$$

เพราะฉะนั้น เมื่อ $x = 1$ แล้ว $\frac{dy}{dx} = 0$

พิจารณา $\frac{dy}{dx}$ เมื่อ $x > 1$ แล้ว $x < 1$

กรณีที่ 1 ถ้า $x > 1$

$$\frac{dy}{dx} = 2x - 2 \text{ มีค่าเป็นบวก}$$

แสดงว่า เส้นโค้งจะโค้งขึ้น

กรณีที่ 2. ถ้า $x < 1$

$$\frac{dy}{dx} = 2x - 2 \text{ มีค่าเป็นลบ}$$

แสดงว่า เส้นโค้งจะโค้งลง

เครื่องหมายของ $\frac{dy}{dx}$ แสดงได้ดังรูป 4.1

− − − − − − − − − − − − − − 0 + + + + + + + + + + + + + +

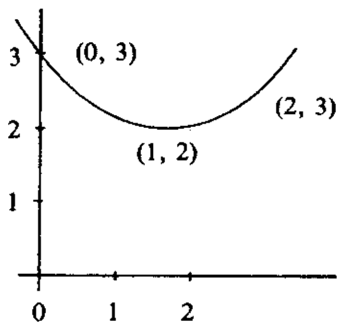
1

รูป 4.1

ลองหาจุดอื่น ๆ อีกสองสามจุด

x	0	1	2
y	3	2	3

และเขียนรูปคร่าว ๆ ของเส้นโค้งได้ดังรูป 4.2



รูป 4.2

โจทย์ข้อ 2. จงหาค่า x ที่ทำให้เส้นโค้งโค้งขึ้น, ค่า x ที่ทำให้เส้นโค้งโค้งลง และเขียนกราฟคร่าว ๆ ถ้า $y = x^3 - 27x + 36$

วิธีทำ

เพราะว่า

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}(x^3 - 27x + 36)$$

$$= 3x^2 - 27$$

หาค่า x ที่ทำให้ $\frac{dy}{dx} = 0$

ให้ $\frac{dy}{dx} = 0$

$$3x^2 - 27 = 0$$

$$x^2 = 9$$

$$x = \pm 3$$

เพราะฉะนั้น $x = 3$ และ $x = -3$ แล้ว $\frac{dy}{dx} = 0$

พิจารณา $\frac{dy}{dx}$ เมื่อ $x < -3$, $-3 < x < 3$, $x > 3$

กรณีที่ 1 เมื่อ $x < -3$

$$\frac{dy}{dx} = 3x^2 - 27 \text{ มีค่าบวก}$$

แสดงว่า เส้นโค้ง ๆ ขึ้น

กรณีที่ 2. เมื่อ $-3 < x < 3$

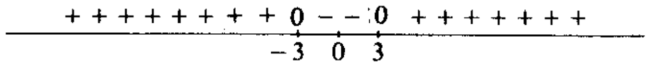
$$\frac{dy}{dx} = 3x^2 - 27 \text{ มีค่าลบ}$$

แสดงว่า เส้นโค้ง ๆ ลง

กรณีที่ 3. เมื่อ $x > 3$

$$\frac{dy}{dx} \quad = \quad 3x^2 - 27 \text{ มีค่าบวก}$$

เครื่องหมายของ $\frac{dy}{dx}$ แสดงได้ดังรูป 4.3

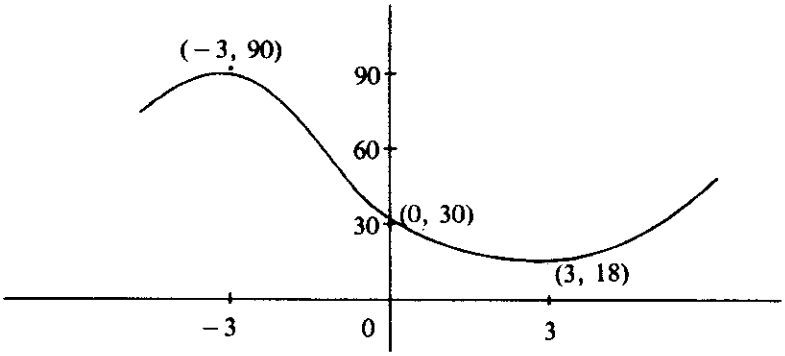


รูป 4.3

ลองหาจุดอื่น ๆ อีกสองสามจุด

x	−3	0	3
y	90	36	18

และเขียนกราฟคร่าว ๆ ของเส้นโค้งได้ดังรูป 4.4



รูป 4.4

โจทย์ข้อ 3. จงหาค่า x ที่ทำให้เส้นโค้ง ๆ ขึ้น, ค่า x ที่ทำให้เส้นโค้ง ๆ ลง และเขียนกราฟคร่าว ๆ

ถ้า $y = 2x^3 - 3x^2 + 3$

วิธีทำ

เพราะว่า

$$\frac{dy}{dx} \quad = \quad \frac{d}{dx}(2x^3 - 3x^2 + 3)$$

$$= \quad 6x^2 - 6x$$

หาค่า x ที่ทำให้ $\frac{dy}{dx} = 0$

ให้ $\frac{dy}{dx} = 0$

$$6x^2 - 6x = 0$$

$$x^2 - x = 0$$

$$x(x-1) = 0$$

$$x = 0, 1$$

เพราะฉะนั้น เมื่อ $x = 0$ และ $x = 1$ แล้ว $\frac{dy}{dx} = 0$

พิจารณา $\frac{dy}{dx}$ เมื่อ $x < 0,\ 0 < x < 1,\ x > 1$

กรณีที่ 1. เมื่อ $x < 0$

$\frac{dy}{dx} = 6x^2 - 6x$ มีค่าบวก

แสดงว่า เส้นโค้ง ๆ ขึ้น

กรณีที่ 2. เมื่อ $0 < x < 1$

$\frac{dy}{dx} = 6x^2 - 6x$ มีค่าลบ

แสดงว่าเส้นโค้ง โค้งลง

กรณีที่ 3. เมื่อ $x > 1$

$\frac{dy}{dx} = 6x^2 - 6x$ มีค่าบวก

แสดงว่าเส้นโค้ง โค้งขึ้น

และเครื่องหมายของ $\frac{dy}{dx}$ แสดงได้ดังรูป 4.5

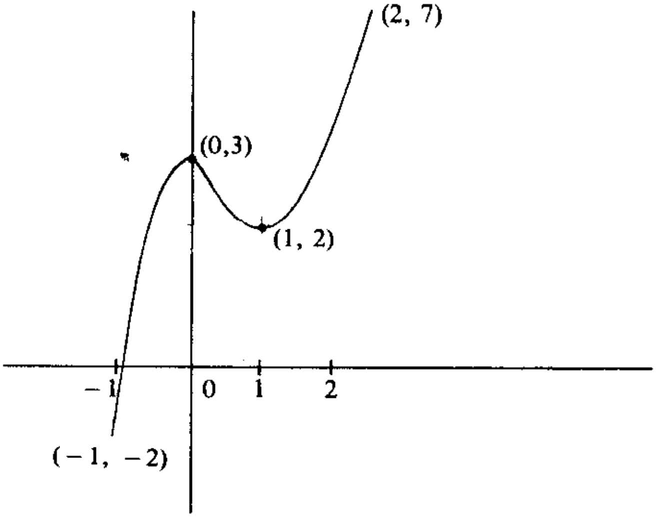
$$\begin{array}{c} +\,+\,+\,+\,+\,+\,+\,0\,-\,-\,-\,-\,0\,+\,+\,+\,+\,+\,+ \\ \hline \qquad\qquad 0 \qquad\quad 1 \qquad\qquad \end{array}$$

รูป 4.5

ลองหาจุดอื่น ๆ อีกสองสามจุด

x	−1	0	1	2
y	−2	3	2	7

และเขียนกราฟคร่าวของเส้นโค้งได้ดังรูป 4.6



รูป 4.6

โจทย์ข้อ 4. จงหาค่า x ที่ทำให้เส้นโค้ง ๆ ขึ้น, ค่า x ที่ทำให้เส้นโค้ง ๆ ลง และเขียนกราฟคร่าว ๆ

ถ้า $y = (x - 3)^3$

วิธีทำ

เพราะว่า $\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}(x - 3)^3$

$= 3(x - 3)^2 \frac{d}{dx}(x - 3)$

$= 3(x - 3)^2$

หาค่า x ที่ทำให้ $\frac{dy}{dx} = 0$

ให้ $\frac{dy}{dx} = 0$

$$3(x-3)^2 = 0$$
$$(x-3)^2 = 0$$
$$x = 3$$

เพราะฉะนั้น $x = 3$ แล้ว $\frac{dy}{dx} = 0$

พิจารณา $\frac{dy}{dx}$ เมื่อ $x < 3$ และ $x > 3$

กรณีที่ 1. เมื่อ $x < 3$

$$\frac{dy}{dx} = 3(x-3)^2 \text{ มีค่าบวก}$$

แสดงว่าเส้นโค้ง โค้งขึ้น

กรณีที่ 2. เมื่อ $x > 3$

$$\frac{dy}{dx} = 3(x-3)^2 \text{ มีค่าบวก}$$

แสดงว่าเส้นโค้ง โค้งขึ้น

และเครื่องหมาย $\frac{dy}{dx}$ แสดงได้ดังรูป 4.7

+ + + + + + + + 0 + + + + + + + + + + +

3

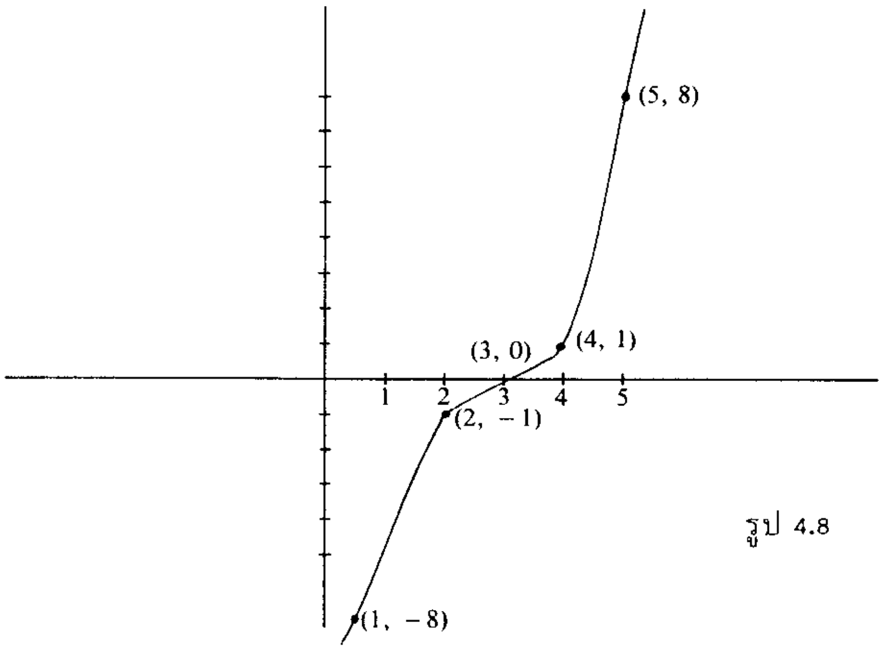
รูป 4.7

เพราะว่า $\frac{dy}{dx}$ เป็นบวกเสมอ เมื่อ $x \neq 3$ แสดงว่า เส้นกราฟโค้งขึ้นเสมอ

ลองหาจุดอื่น ๆ อีกสองสามจุด

x	−1	2	3	4	5
y	−8	−1	0	1	8

เขียนกราฟคร่าว ๆ ของเส้นโค้งได้ดังรูป 4.8



รูป 4.8

โจทย์ข้อ 5. จงหาค่า x ที่ทำให้เส้นโค้ง ๆ ขึ้น, ค่า x ที่ทำให้เส้นโค้ง ๆ ลง และเขียนกราฟคร่าว ๆ

ถ้า $y = \frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} - 2x + \frac{1}{3}$

วิธีทำ

เพราะว่า $\frac{dy}{dx} \quad 1 = \frac{d}{dx}\left(\frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} - 2x + \frac{1}{3}\right)$

$= x^2 - x - 2$

หาค่า x ที่ทำให้ $\frac{dy}{dx} = 0$

ให้ $\frac{dy}{dx} = 0$

$x^2 - x - 2 = 0$

$(x - 2)(x + 1) = 0$

$x = 2, -1$

เพราะฉะนั้น $x = 2, -1$ แล้ว $\frac{dy}{dx} = 0$

พิจารณา $\frac{dy}{dx}$ เมื่อ $x < -1$, $-1 < x < 2$ และ $x > 2$

กรณีที่ 1. เมื่อ $x < -1$

$$\frac{dy}{dx} = x^2 - x - 2 \text{ มีค่าบวก}$$

แสดงว่าเส้นโค้ง ๆ ขึ้น

กรณีที่ 2. เมื่อ $-1 < x < 2$

$$\frac{dy}{dx} = x^2 - x - 2 \text{ มีค่าลบ}$$

แสดงว่าเส้นโค้ง ๆ ลง

กรณีที่ 3. เมื่อ $x > 2$

$$\frac{dy}{dx} = x^2 - x - 2 \text{ มีค่าบวก}$$

แสดงว่าเส้นโค้ง ๆ ขึ้น

และเครื่องหมายของ $\frac{dy}{dx}$ แสดงได้ดังรูป 4.9

+ + + + + 0 - - - - - 0 + + + + +

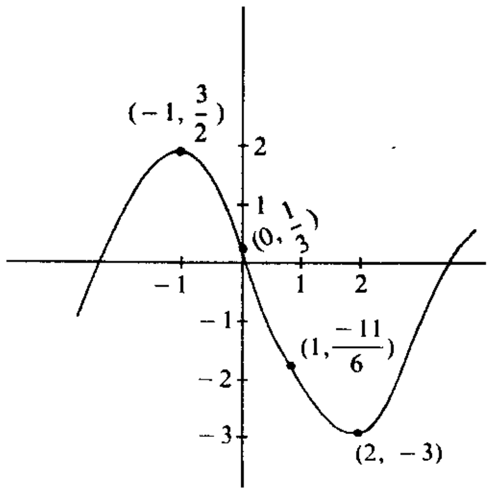
$-1 \quad 0 \quad 2$

รูป 4.9

ลองหาจุดอื่น ๆ อีกสองสามจุด

x	-1	0	1	2
y	$\frac{3}{2}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{-11}{6}$	-3

เขียนกราฟคร่าว ๆ ของเส้นโค้งได้ดังรูป 4.10



รูป 4.10

โจทย์ข้อ 6. จงหาค่า x ที่ทำให้เส้นกราฟโค้งขึ้น, ค่า x ที่ทำให้เส้นกราฟโค้งลง, และเขียนกราฟคร่าว ๆ

ถ้า $y = x^4 - 8x^2 + 16$

วิธีทำ

$$\text{พิจารณา } \frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}(x^4 - 8x^2 + 16)$$

$$= 4x^3 - 16x$$

หาค่า x ที่ทำให้ $\frac{dy}{dx} = 0$

ให้ $$\frac{dy}{dx} = 0$$

$$4x^3 - 16x = 0$$

$$x^3 - 4x = 0$$

$$x(x^2 - 4) = 0$$

$$x = 0, +2, -2$$

เพราะฉะนั้น เมื่อ $x = -2, 0, 2$ แล้ว $\frac{dy}{dx} = 0$

พิจารณา $\frac{dy}{dx}$ เมื่อ $x < -2,\ -2 < x < 0, 0 < x < 2$ และ $x > 2$

กรณีที่ 1. เมื่อ $x < -2$

$$\frac{dy}{dx} = 4x^3 - 16x \text{ มีค่าลบ}$$

แสดงว่า เส้นโค้ง ๆ ลง

กรณีที่ 2. เมื่อ $-2 < x < 0$

$$\frac{dy}{dx} = 4x^3 - 16x \text{ มีค่าบวก}$$

แสดงว่า เส้นโค้ง ๆ ขึ้น

กรณีที่ 3. เมื่อ $0 < x < 2$

$$\frac{dy}{dx} = 4x^3 - 16x \text{ มีค่าลบ}$$

แสดงว่า เส้นโค้ง ๆ ลง

กรณีที่ 4. เมื่อ $x > 2$

$$\frac{dy}{dx} = 4x^3 - 16x \text{ มีค่าบวก}$$

แสดงว่า เส้นโค้ง ๆ ขึ้น

เครื่องหมายของ $\frac{dy}{dx}$ แสดง ได้ดังรูป 4.11

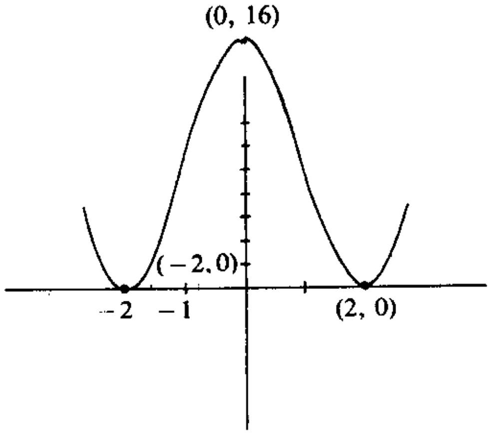
$$\begin{array}{ccccccc} - - - - - & 0 & + + + + + + & 0 & - - - - - - & 0 & + + + + + + \\ \hline & -2 & & 0 & & 2 & \end{array}$$

รูป 4.11

ลองหาจุดอื่น ๆ อีกสองสามจุด

x	-2	-1	0	2
y	0	9	16	0

เขียนกราฟคร่าว ๆ ได้ดังรูป 4.12



รูป 4.12

โจทย์ข้อ 7. จงหาค่า x ที่ทำให้เส้นโค้ง ๆ ขึ้น, ค่า x ที่ทำให้เส้นโค้ง ๆ ลง และเขียนกราฟคร่าว ๆ

ถ้า $y = (x + 1)(x - 2)^2$

วิธีทำ

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}(x + 1)(x - 2)^2$$

เพราะว่า

$$= (x + 1)\frac{d}{dx}(x - 2)^2 + (x - 2)^2\frac{d}{dx}(x + 1)$$

$$= 2(x + 1)(x - 2) + (x - 2)^2$$

$$= (x - 2)(2x + 2 + x - 2) = (x - 2)(3x)$$

หาค่า x ที่ทำให้ $\frac{dy}{dx} = 0$

ให้ $\frac{dy}{dx} = 0$

$$3x(x - 2) = 0$$

$$x = 0, 2$$

เพราะฉะนั้น เมื่อ $x = 0$, และ $x = 2$ แล้ว $\frac{dy}{dx} = 0$

พิจารณา $\frac{dy}{dx}$ เมื่อ $x < 0, 0 < x < 2,$ และ $x > 2$

กรณีที่ 1. เมื่อ $x < 0$

$$\frac{dy}{dx} = 3x(x-2) \text{ มีค่าบวก}$$

แสดงว่า เส้นโค้ง ๆ ขึ้น

กรณีที่ 2. เมื่อ $0 < x < 2$

$$\frac{dy}{dx} = 3x(x-2) \text{ มีค่าลบ}$$

แสดงว่า เส้นโค้ง ๆ ลง

กรณีที่ 3. เมื่อ $x > 2$

$$\frac{dy}{dx} = 3x(x-2) \text{ มีค่าบวก}$$

แสดงว่า เส้นโค้ง ๆ ขึ้น

เครื่องหมายของ $\frac{dy}{dx}$ แสดงได้ ดังรูป 4.1.3

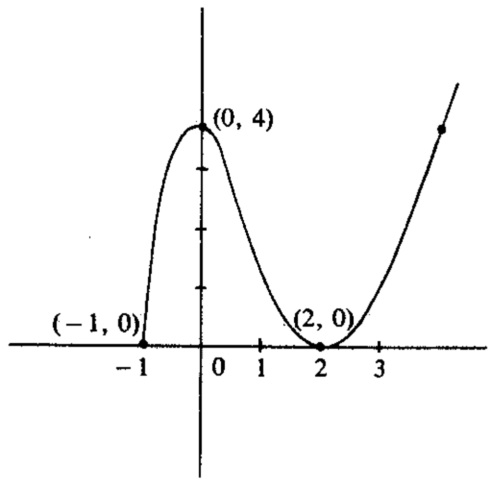
$$\underline{+ + + + + 0 - - - - 0 + + + +}$$
$$0 \qquad\qquad 2$$

รูป 4.13

ลองหาจุดอื่น ๆ อีกสองสามจุด

x	−1	0	1	2	3
y	0	4	2	0	4

เขียนกราฟคร่าว ๆ ได้ดังรูป 4.14



รูป 4.14

โจทย์ข้อ 8. จงหาค่า x ที่ทำให้เส้นโค้ง ๆ ขึ้น, ค่า x ที่ทำให้เส้นโค้งโค้งลง และเขียนกราฟคร่าว ๆ

ถ้า $y = \dfrac{(x-2)^2}{(x+1)}$

วิธีทำ

เพราะว่า
$$y = (x+1)^{-1}(x-2)^2$$
$$\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}(x+1)^{-1}(x-2)^2$$
$$= (x+1)^{-1}\frac{d}{dx}(x-2)^2 + (x-2)^2\frac{d}{dx}(x+1)^{-1}$$
$$= 2(x-2)(x+1)^{-1} - (x+1)^{-2}(x-2)^2$$
$$= \frac{2(x-2)}{(x+1)} - \frac{(x-2)^2}{(x+1)^2} = (x-2)\left(\frac{2}{x+1} - \frac{(x-2)}{(x+1)^2}\right)$$

หาค่า x ที่ทำให้ $\dfrac{dy}{dx} = 0$

ให้ $\dfrac{dy}{dx} = 0$

$$(x-2)\left(\frac{2}{x+1} - \frac{(x-2)}{(x+1)^2}\right) = 0$$

ถ้า $(x - 2) = 0$ แล้ว $x = 2$

ถ้า $\frac{2}{x+1} - \frac{(x-2)}{(x+1)^2} = 0$ แล้ว $\frac{2}{x+1} = \frac{x-2}{(x+1)^2}$ หรือ $x = -4$

เพราะฉะนั้น เมื่อ $x = 2$ และ $x = -4$ แล้ว $\frac{dy}{dx} = 0$

พิจารณา $\frac{dy}{dx}$ เมื่อ $x < -4$, $-4 < x < 2$ แล้ว $x > 2$

กรณีที่ 1. เมื่อ $x < -4$

$$\frac{dy}{dx} = (x-2)\left(\frac{2}{x+1} - \frac{(x-2)}{(x+1)^2}\right) \text{ มีค่าบวก}$$

แสดงว่า เส้นโค้ง ๆ ขึ้น

กรณีที่ 2. เมื่อ $-4 < x < 2$

$$\frac{dy}{dx} = (x-2)\left(\frac{2}{x+1} - \frac{(x-2)}{(x+1)^2}\right) \text{ มีค่าลบ}$$

แสดงว่า เส้นโค้ง ๆ ลง

กรณีที่ 3. เมื่อ $x > 2$

$$\frac{dy}{dx} = (x-2)\left(\frac{2}{x+1} - \frac{(x-2)}{(x+1)^2}\right) \text{ มีค่าบวก}$$

แสดงว่า เส้นโค้ง ๆ ขึ้น

เครื่องหมายของ $\frac{dy}{dx}$ แสดงได้ดังรูป 4.15

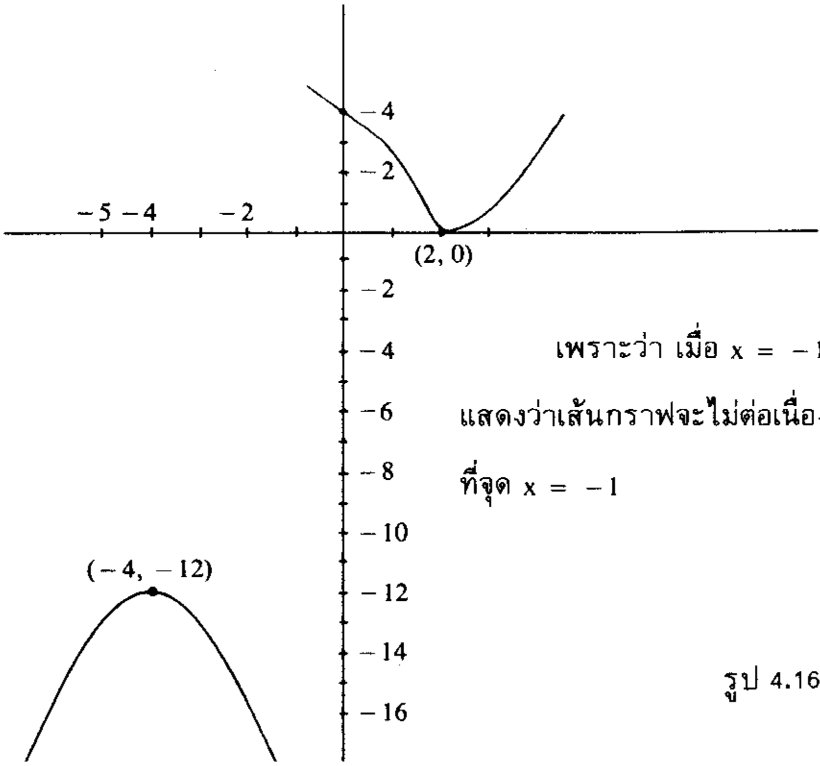
+ + + + + + 0 − − − − − − − − − 0 + + + + +

−4 0 2

ลองหาจุดอื่น ๆ อีกสองสามจุด

x	−5	−4	−20	2	3
y	$-\frac{49}{4}$	−12	−164	0	$\frac{1}{4}$

เขียนกราฟคร่าว ๆ ได้ดังรูป 4.16



เพราะว่า เมื่อ $x = -1$, y หาค่าไม่ได้ แสดงว่าเส้นกราฟจะไม่ต่อเนื่องกันที่จุด $x = -1$

รูป 4.16

โจทย์ข้อ 9. จงหาค่า x ที่ทำให้เส้นโค้ง ๆ ขึ้น, ค่า x ที่ทำให้เส้นโค้ง ๆ ลง และเขียนกราฟคร่าว ๆ

ถ้า $y = (x + 1)(x - 2)^{-2}$

วิธีทำ

เพราะว่า $$\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}(x + 1)(x - 2)^{-2})$$

$$= (x + 1)\frac{d}{dx}(x - 2)^{-2} + (x - 2)^{-2}\frac{d}{dx}(x + 1)$$

$$= -2(x - 2)^{-3}(x + 1) + (x - 2)^{-2}$$

$$= \frac{1}{(x - 2)} - \frac{2(x + 1)}{(x - 2)^{-3}}$$

หาค่า x ที่ทำให้ $\frac{dy}{dx} = 0$

ให้ $\frac{dy}{dx} = 0$

$$\frac{1}{(x-2)^2} - \frac{2(x+1)}{(x-2)^3} = 0$$

$$\frac{1}{(x-2)^2} = \frac{2(x+1)}{(x-2)^3}$$

$$1 = \frac{2x+2}{x-2} \quad \text{เมื่อ } x \neq 2$$

$$x - 2 = 2x + 2$$

$$-4 = x$$

เพราะฉะนั้น เมื่อ $x = -4$ แล้ว $\frac{dy}{dx} = 0$

พิจารณา $\frac{dy}{dx}$ เมื่อ $x < -4$ และ $x > -4$

กรณีที่ 1. เมื่อ $x < -4$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{(x-2)^2} - \frac{2(x+1)}{(x-2)^3} \quad \text{มีค่าลบ}$$

แสดงว่า เส้นโค้ง ๆ ลง

กรณีที่ 2. เมื่อ $x > -4$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{(x-2)^2} - \frac{2(x+1)}{(x-2)^3} \quad \text{มีค่าบวก}$$

แสดงว่า เส้นโค้ง ๆ ขึ้น

เครื่องหมาย $\frac{dy}{dx}$ แสดงได้ดังรูป 4.17

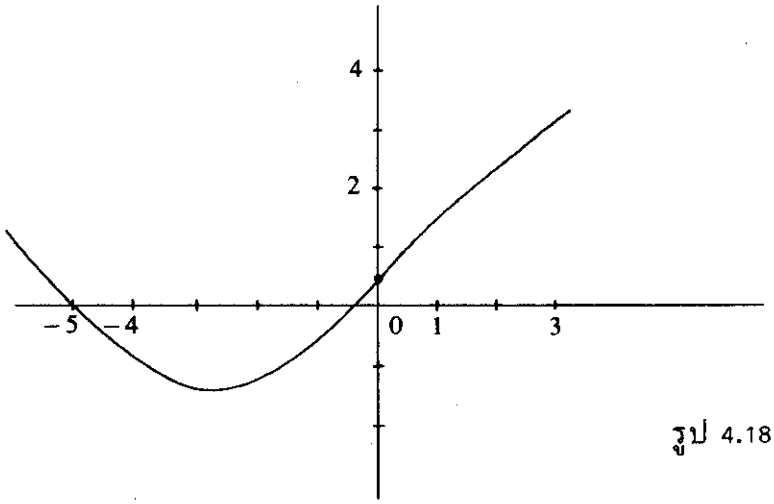
```
------0+++++++++ +++++++++
──────┼─────────┼────┼──────
     -4         0    2
```

รูป 4.17

ลองหาจุดอื่น ๆ อีกสองสามจุด

x	-5	-4	0	1	3
y	$\frac{-4}{49}$	$\frac{-1}{12}$	$\frac{1}{4}$	2	4

เขียนกราฟคร่าว ๆ ได้ดังรูป 4.18



รูป 4.18

เส้นโค้งจะไม่ต่อเนื่องกัน เพราะว่าที่ $x = 2$, y หาค่าไม่ได้

โจทย์ข้อ 10. จงหาค่า x ที่ทำให้เส้นโค้ง ๆ ขึ้น, ค่า x ที่ทำให้เส้นโค้ง ๆ ลง และเขียนกราฟคร่าว ๆ

ถ้า $y = \frac{x^3}{3} - 2x^2 + 3x + 2$

วิธีทำ

เพราะว่า $\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}\left(\frac{x^3}{3} - 2x^2+3x+2\right)$

$= x^2-4x+3$

หาค่า x ที่ได้ว่า $\frac{dy}{dx} = 0$

ให้ $$\frac{dy}{dx} = 0$$

$$x^2 - 4x + 3 = 0$$

$$(x-3)(x-1) = 0$$

$$x = 1, 3$$

เพราะฉะนั้น เมื่อ $x = 1$, และ $x = 3$ แล้ว $\frac{dy}{dx} = 0$

พิจารณา $\frac{dy}{dx}$ เมื่อ $x < 1$, $1 < x < 3$, และ $x > 3$

กรณีที่ 1. เมื่อ $x < 1$

$\frac{dy}{dx} = x^2 - 4x + 3$ มีค่าบวก

แสดงว่า เส้นโค้ง ๆ ขึ้น

กรณีที่ 2. เมื่อ $1 < x < 3$

$\frac{dy}{dx} = x^2 - 4x + 3$ มีค่าลบ

แสดงว่า เส้นโค้ง ๆ ลง

กรณีที่ 3. เมื่อ $x > 3$

$\frac{dy}{dx} = x^2 - 4x + 3$ มีค่าบวก

แสดงว่า เส้นโค้ง ๆ ขึ้น

เครื่องหมายของ $\frac{dy}{dx}$ แสดงดังรูป 4.19

```
+ + + + + + + + 0 - - - - 0 + + + + +
________________|_________|__________
                1         3
```

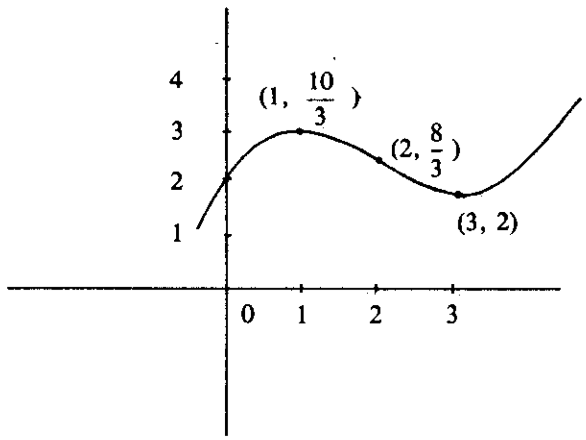
รูป 4.19

MA 111 (H) 211

ลองหาจุดอื่น ๆ อีกสองสามจุด

x	0	1	2	3
y	2	$3\frac{1}{3}$	$2\frac{2}{3}$	2

เขียนกราฟคร่าว ๆ ได้ดังรูป 4.20



รูป 4.20

แบบฝึกหัด 4.5

โจทย์ข้อ 1. จงหาค่า x ซึ่งเส้นโค้งมีลักษณะโค้งขึ้น, ค่า x ซึ่งเส้นโค้งมีลักษณะโค้งลง, ค่า x ซึ่งโค้งหงาย, ค่า x ซึ่งโค้งคว่ำ, และจุดเปลี่ยนเว้า

ถ้า $y = 5x + 12$

วิธีทำ

พิจารณา $\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}(5x + 12)$

$= 5$

เพราะว่า $\frac{dy}{dx} = 5$ มีค่าเป็นบวกเสมอ

แสดงว่า เส้นโค้งจะโค้งขึ้นตลอด

เพราะฉะนั้น เส้นโค้งจะไม่โค้งลง, ไม่หงาย, ไม่คว่ำ และไม่มีจุดเปลี่ยนเว้า

โจทย์ข้อ 2. จงหาค่า x ซึ่งเส้นโค้งมีลักษณะโค้งขึ้น, ค่า x ซึ่งเส้นโค้งมีลักษณะโค้งลง, ค่า x ซึ่งโค้งหงาย, ค่า x ซึ่งโค้งคว่ำ, และจุดเปลี่ยนเว้า

ถ้า $y = -\frac{3}{2}x - 9$

วิธีทำ

พิจารณา $\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}\left(-\frac{3}{2}x - 9\right)$

$= -\frac{3}{2}$

เพราะว่า $\frac{dy}{dx} = -\frac{3}{2}$ มีค่าเป็นลบเสมอ

แสดงว่าเส้นโค้งจะโค้งลงตลอด

เพราะฉะนั้น เส้นโค้งจะไม่โค้งขึ้น, ไม่หงาย, ไม่คว่ำ และไม่มีจุดเปลี่ยนเว้า

โจทย์ข้อ 3. จงหาค่า x ซึ่งเส้นโค้งมีลักษณะโค้งขึ้น, ค่า x ซึ่งเส้นโค้งมีลักษณะโค้งลง ค่า x ซึ่งโค้งหงาย, ค่า x ซึ่งโค้งคว่ำ, และจุดเปลี่ยนเว้า

ถ้า $y = x^2 - 4x + 3$

วิธีทำ

พิจารณา $\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}(x^2 - 4x + 3)$

$= 2x - 4$

และ $\frac{d^2y}{dx^2} = 2$

ให้ $\frac{dy}{dx} = 0$

$2x - 4 = 0$

$x = 2$

เพราะฉะนั้น เมื่อ $x = 2$ แล้ว $\frac{dy}{dx} = 0$

พิจารณา เมื่อ $x < 2$ และ $x > 2$

กรณีที่ 1. เมื่อ $x < 2$

$\frac{dy}{dx} = 2x - 4$ มีค่าเป็นลบ

แสดงว่า เส้นโค้ง ๆ ลง

กรณีที่ 2. เมื่อ $x > 2$

$\frac{dy}{dx} = 2x - 4$ มีค่าเป็นบวก

แสดงว่า เส้นโค้ง ๆ ขึ้น

และจาก $\frac{d^2y}{dx^2} = 2$ มีค่าเป็นบวก

แสดงว่า เส้นโค้ง ๆ หงายอย่างเดียว จึงไม่มีจุดเปลี่ยนเว้า

โจทย์ข้อ 4. จงหาค่า x ซึ่งเส้นโค้งมีลักษณะโค้งขึ้น, ค่า x ซึ่งเส้นโค้งมีลักษณะโค้งลง, ค่า x ซึ่งโค้งหงาย, ค่า x ซึ่งโค้งคว่ำ, และจุดเปลี่ยนเว้า

ถ้า $y = 4 + 3x - x^3$

วิธีทำ

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}(4 + 3x - x^3)$$

$$= 3 - 3x^2$$

และ $$\frac{d^2y}{dx^2} = -6x$$

พิจารณา เมื่อ $$\frac{dy}{dx} = 3 - 3x^2$$

ให้ $$\frac{dy}{dx} = 0$$

$$3 - 3x^2 = 0$$

$$3x^2 = 3$$

$$x^2 = 1$$

$$x = \pm 1$$

เพราะฉะนั้น เมื่อ $x = -1$ และ $x = 1$ แล้ว $\frac{dy}{dx} = 0$

พิจารณา เมื่อ $x < -1$, $-1 < x < 1$ และ $x > 1$

กรณีที่ 1. เมื่อ $x < -1$

$\frac{dy}{dx} = 3 - 3x^2$ มีค่าลบ

แสดงว่า เส้นโค้ง ๆ ลง

กณีที่ 2 เมื่อ $-1 < x < 1$

$\frac{dy}{dx} = 3 - 3x^2$ มีค่าบวก

แสดงว่า เส้นโค้ง ๆ ขึ้น

กรณีที่ 3. เมื่อ $x > 1$

$\frac{dy}{dx} = 3 - 3x^2$ มีค่าลบ

แสดงว่า เส้นโค้ง ๆ ลง

พิจารณา $\frac{d^2y}{dx^2} = -6x$

ให้ $\frac{d^2y}{dx^2} = 0$

$$-6x = 0$$

$$x = 0$$

เมื่อ $x = 0$, แล้ว $y = 4$

เพราะฉะนั้น จุด (0, 4) เป็นจุดเปลี่ยนเว้า

พิจารณา เมื่อ $x > 0$ และ $x < 0$

กรณีที่ 1. เมื่อ $x > 0$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = -6x \text{ มีค่าลบ}$$

แสดงว่า เส้นโค้ง ๆ คว่ำ

กรณีที่ 2. เมื่อ $x < 0$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = -6x \text{ มีค่าบวก}$$

แสดงว่า เส้นโค้ง ๆ หงาย

โจทย์ข้อ 5. จงหาค่า x ซึ่งเส้นโค้ง ๆ ขึ้น ค่า x ซึ่งเส้นโค้ง ๆ ลง, ค่า x ซึ่งเส้นโค้ง ๆ หงาย, ค่า x ซึ่งเส้นโค้ง ๆ คว่ำ และหาจุดเปลี่ยนเว้า

ถ้า $$y = \frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} - 6x$$

วิธีทำ

พิจารณา $$\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}\left(\frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} - 6x\right)$$

$$\frac{dy}{dx} = x^2 - x - 6$$

และ $$\frac{d^2y}{dx^2} = 2x - 1$$

พิจารณา $$\frac{dy}{dx} = x^2 - x - 6$$

ให้ $$\frac{dy}{dx} = 0$$

$$x^2 - x - 6 = 0$$

$$(x-3)(x+2) = 0$$

$$x = -2, 3$$

เพราะฉะนั้น เมื่อ $x = -2$ และ $x = 3$ แล้ว $\frac{dy}{dx} = 0$

พิจารณาเมื่อ $x < -2$, $-2 < x < 3$ และ $x > 3$

กรณีที่ 1. เมื่อ $x < -2$

$$\frac{dy}{dx} = x^2 - x - 6 \text{ มีค่าบวก}$$

แสดงว่า เส้นโค้ง ๆ ขึ้น

กรณีที่ 2. เมื่อ $-2 < x < 3$

$$\frac{dy}{dx} = x^2 - x - 6 \text{ มีค่าลบ}$$

แสดงว่า เส้นโค้ง ๆ ลง

กรณีที่ 3. เมื่อ $x > 3$

$$\frac{dy}{dx} = x^2 - x - 6 \text{ มีค่าบวก}$$

แสดงว่า เส้นโค้ง ๆ ขึ้น

พิจารณา $\frac{d^2y}{dx^2} = 2x - 1$

ให้ $\frac{d^2y}{dx^2} = 0$

$$2x - 1 = 0$$

$$x = \frac{1}{2}$$

เมื่อ $x = \frac{1}{2}$ แล้ว $y = \frac{-13}{12}$

นั่นคือ เมื่อ $x = \frac{1}{2}$ แล้ว $\frac{d^2y}{dx^2} = 0$

แสดงว่า จุด $(\frac{1}{2}, \frac{-13}{12})$ เป็นจุดเปลี่ยนเว้า

พิจารณา เมื่อ $x < \frac{1}{2}$ และ $x > \frac{1}{2}$

กรณีที่ 1. เมื่อ $x < \frac{1}{2}$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = 2x - 1 \text{ มีค่าลบ}$$

แสดงว่า เส้นโค้ง ๆ คว่ำ

กรณีที่ 2. เมื่อ $x > \frac{1}{2}$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = 2x - 1 \text{ มีค่าบวก}$$

แสดงว่า เส้นโค้ง ๆ หงาย

โจทย์ข้อ 6. จงหาค่า x ซึ่งเส้นโค้ง ๆ ขึ้น, ค่า x ซึ่งเส้นโค้ง ๆ ลง, ค่า x ซึ่งเส้นโค้ง ๆ หงาย, ค่า x ซึ่งเส้นโค้ง ๆ คว่ำ, และจุดเปลี่ยนเว้า

ถ้า $y = (x - 3)(x + 1)^2$

วิธีทำ

พิจารณา
$$\begin{aligned}
\frac{dy}{dx} &= \frac{d}{dx}((x-3)(x+1)^2) \\
&= (x-3)\frac{d}{dx}(x+1)^2 + (x+1)^2\frac{d}{dx}(x-3) \\
&= 2(x+1)(x-3) + (x+1)^2 \\
&= (x+1)(2x - 6 + x + 1) \\
&= (x+1)(3x-5) \\
&= 3x^2 - 2x - 5
\end{aligned}$$

และ
$$\frac{d^2y}{dx^2} = 6x - 2$$

พิจารณา $\frac{dy}{dx} = 3x^2 - 2x - 5$

ให้ $\frac{dy}{dx} = 0$

$$3x^2 - 2x - 5 = 0$$

$$(3x - 5)(x + 1) = 0$$

$$x = \frac{5}{3}, -1$$

เพราะฉะนั้น เมื่อ $x = \frac{5}{3}$ และ $x = -1$ แล้ว $\frac{dy}{dx} = 0$

พิจารณา เมื่อ $x < -1$, $-1 < x < \frac{5}{3}$ และ $x > \frac{5}{3}$

กรณีที่ 1. เมื่อ $x < -1$

$\frac{dy}{dx} = (x + 1)(3x - 5)$ มีค่าบวก

แสดงว่า เส้นโค้ง ๆ ขึ้น

กรณีที่ 2. เมื่อ $-1 < x < \frac{5}{3}$

$\frac{dy}{dx} = (x + 1)(3x - 5)$ มีค่าลบ

แสดงว่า เส้นโค้ง ๆ ลง

กรณีที่ 3. เมื่อ $x > \frac{5}{3}$

$\frac{dy}{dx} = (x + 1)(3x - 5)$ มีค่าบวก

แสดงว่า เส้นโค้ง ๆ ขึ้น

พิจารณา $\frac{d^2y}{dx^2} = 6x - 2$

ให้ $\frac{d^2y}{dx^2} = 0$

$$6x - 2 = 0$$

$$x = \frac{1}{3}$$

เมื่อ $x = \frac{1}{3}, y = \frac{-128}{27}$ แล้ว $\frac{d^2y}{dx^2} = 0$

เพราะฉะนั้น จุด $(\frac{1}{3}, \frac{-128}{27})$ เป็นจุดเปลี่ยนเว้า

พิจารณา เมื่อ $x < \frac{1}{3}$ และ $x > \frac{1}{3}$

กรณีที่ 1. เมื่อ $x < \frac{1}{3}$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = 6x - 2 \text{ มีค่าลบ}$$

แสดงว่าเส้นโค้ง ๆ คว่ำ

กรณีที่ 2. เมื่อ $x > \frac{1}{3}$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = 6x - 2 \text{ มีค่าบวก}$$

แสดงว่า เส้นโค้ง ๆ หงาย

โจทย์ข้อ 7. จงหาค่า x ซึ่งเส้นโค้ง ๆ ขึ้น, ค่า x ซึ่งเส้นโค้ง ๆ ลง, ค่า x ซึ่งเส้นโค้ง ๆ หงาย, ค่า x ซึ่งเส้นโค้ง ๆ คว่ำ และจุดเปลี่ยนเว้า

ถ้า $y = x^4 - 32x + 48$

วิธีทำ

พิจารณา $\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}(x^4 - 32x + 48)$

$= 4x^3 - 32$

และ $\frac{d^2y}{dx^2} = 12x^2$

พิจารณา $\frac{dy}{dx} = 4x^3 - 32$

ให้ $\frac{dy}{dx} = 0$

$$4x^3 - 32 = 0$$

$$4x^3 = 32$$

$$x^3 = 8$$

$$x = 2$$

เพราะฉะนั้น เมื่อ $x = 2$ แล้ว $\frac{dy}{dx} = 4x^3 - 32 = 0$

พิจารณา เมื่อ $x < 2$ และ $x > 2$

กรณีที่ 1. เมื่อ $x < 2$

$$\frac{dy}{dx} = 4x^3 - 32 \text{ มีค่าลบ}$$

แสดงว่า เส้นโค้ง ๆ ลง

กรณีที่ 2. เมื่อ $x > 2$

$$\frac{dy}{dx} = 4x^3 - 32 \text{ มีค่าบวก}$$

แสดงว่า เส้นโค้ง ๆ ขึ้น

พิจารณา $\frac{d^2y}{dx^2} = 12x^2$

ให้ $\frac{d^2y}{dx^2} = 0$

$$12x^2 = 0$$

$$x = 0$$

เมื่อ $x = 0$ แล้ว $y = 48$ และ $\frac{d^2y}{dx^2} = 0$

แสดงว่า จุด (0, 48) เป็นจุดเปลี่ยนเว้า

พิจารณา เมื่อ $x < 0$ และ $x > 0$

กรณีที่ 1. เมื่อ $x < 0$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = 12x^2 \text{ มีค่าบวก}$$

แสดงว่า เส้นโค้ง ๆ หงาย

กรณีที่ 2. เมื่อ $x > 0$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = 12x^2 \text{ มีค่าบวก}$$

แสดงว่า เส้นโค้ง ๆ หงาย

โจทย์ข้อ 8. จงหาค่า x ซึ่งเส้นโค้ง ๆ ขึ้น, ค่า x ซึ่งเส้นโค้ง ๆ ลง, ค่า x ซึ่งเส้นโค้ง ๆ หงาย, ค่า x ซึ่งเส้นโค้ง ๆ คว่ำ และจุดเปลี่ยนเว้า

ถ้า $y = x^3 - 3x^2 + 2$

วิธีทำ

พิจารณา
$$\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}(x^3 - 3x^2 + 2)$$
$$= 3x^2 - 6x$$
$$= 3x(x - 2)$$
$$\frac{d^2y}{dx^2} = 6x - 6$$

พิจารณา
$$\frac{dy}{dx} = 3x(x - 2)$$

ให้
$$\frac{dy}{dx} = 0$$
$$3x(x - 2) = 0$$
$$x = 0, 2$$

เพราะฉะนั้น เมื่อ $x = 0$, และ $x = 2$, $\frac{dy}{dx} = 0$

พิจารณา $\frac{dy}{dx}$ เมื่อ $x < 0, 0 < x < 2$ และ $x > 2$

กรณีที่ 1. เมื่อ $x < 0$

$$\frac{dy}{dx} = 3x(x - 2) \text{ มีค่าบวก}$$

แสดงว่า เส้นโค้ง ๆ ขึ้น

กรณีที่ 2. เมื่อ $0 < x < 2$

$$\frac{dy}{dx} = 3x(x - 2) \text{ มีค่าลบ}$$

แสดงว่า เส้นโค้ง ๆ ลง

กรณีที่ 3. เมื่อ $x > 2$

$$\frac{dy}{dx} = 3x(x - 2) \text{ มีค่าบวก}$$

แสดงว่า เส้นโค้ง ๆ ขึ้น

พิจารณา $$\frac{d^2y}{dx^2} = 6x - 6$$

ให้ $$\frac{d^2y}{dx^2} = 0$$

$$6x - 6 = 0$$

$$x = 1$$

เมื่อ $x = 1$ แล้ว $y = 0$ และ $\frac{d^2y}{dx^2} = 0$

เพราะฉะนั้น จุด $(1, 0)$ เป็นจุดเปลี่ยนเว้า

พิจารณา เมื่อ $x < 1$ และ $x > 1$

กรณีที่ 1. เมื่อ $x < 1$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = 6x - 6 \text{ มีค่าลบ}$$

แสดงว่า เส้นโค้ง ๆ คว่ำ

กรณีที่ 2. เมื่อ $x > 1$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = 6x - 6 \text{ มีค่าบวก}$$

แสดงว่า เส้นโค้ง ๆ หงาย

โจทย์ข้อ 9. จงหาค่า x ซึ่งเส้นโค้ง ๆ ขึ้น, ค่า x ซึ่งเส้นโค้ง ๆ ลง, ค่า x ซึ่งเส้นโค้ง ๆ หงาย, ค่า x ซึ่งเส้นโค้ง ๆ คว่ำ, และจุดเปลี่ยนเว้า

ถ้า $y = \dfrac{x^2}{x^2 - 1}$

วิธีทำ

พิจารณา $$\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}\left(\frac{x^2}{x^2 - 1}\right)$$

$$= \frac{2x(x^2 - 1) - 2x(x^2)}{(x^2 - 1)^2} = \frac{2x(x^2 - 1 - x^2)}{(x^2 - 1)^2}$$

$$= \frac{-2x}{(x^2 - 1)^2}$$

และ $$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{-2(x^2 - 1)^2 + 2(2x)(x^2 - 1)(2x)}{(x^2 - 1)^4}$$

$$= \frac{(x^2 - 1)(-2x^2 + 2 + 8x^2)}{(x^2 - 1)^4}$$

$$= \frac{(x^2 - 1)(6x^2 + 2)}{(x^2 - 1)^4} = \frac{6x^2 + 2}{(x^2 - 1)^3}$$

พิจารณา $$\frac{dy}{dx} = \frac{-2x}{(x^2 - 1)^2}$$

ให้ $$\frac{dy}{dx} = 0$$

$$\frac{-2x}{(x^2 - 1)^2} = 0$$

$$-2x = 0$$

$$x = 0$$

เพราะฉะนั้น เมื่อ $x = 0$ แล้ว $\frac{dy}{dx} = 0$

พิจารณา $\frac{dy}{dx}$ เมื่อ $x < 0$ และ $x > 0$

กรณีที่ 1. เมื่อ $x < 0$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-2x}{(x^2 - 1)^2} \text{ มีค่าบวก}$$

แสดงว่า เส้นโค้ง ๆ ขึ้น

กรณีที่ 2. เมื่อ $x > 0$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-2x}{(x^2 - 1)^2} \text{ มีค่าลบ}$$

แสดงว่า เส้นโค้ง ๆ ลง

พิจารณา $\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{6x^2+2}{(x^2-1)^3}$

เพราะว่า $\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{6x^2 + 2}{(x^2 - 1)^3}$ หาค่าไม่ได้ เมื่อ $x = \pm 1$

เพราะฉะนั้นที่ $x = 1, -1$ เป็นจุดเปลี่ยนเว้า

พิจารณา $x < -1$, $-1, < x < 1$ และ $x > 1$

กรณีที่ 1. เมื่อ $x < -1$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{6x^2 + 2}{(x^2 - 1)^3} \text{ มีค่าบวก}$$

แสดงว่า เส้นโค้ง ๆ หงาย

กรณีที่ 2. เมื่อ $-1 < x < 1$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{6x^2 + 2}{(x^2 - 1)^3} \text{ มีค่าลบ}$$

แสดงว่า เส้นโค้ง ๆ คว่ำ

กรณีที่ 3. เมื่อ $x > 1$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{6x^2 + 2}{(x^2 - 1)^3} \text{ มีค่าบวก}$$

แสดงว่า เส้นโค้ง ๆ หงาย

โจทย์ข้อ 10. จงหาค่า x ที่เส้นโค้ง ๆ ขึ้น, ค่า x ที่เส้นโค้ง ๆ ลง, ค่า x ที่เส้นโค้ง ๆ หงาย, ค่า x ที่เส้นโค้ง ๆ คว่ำ และจุดเปลี่ยนเว้า

ถ้า $y = \frac{x}{x + 1}$

วิธีทำ

พิจารณา
$$\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}\left(\frac{x}{x + 1}\right)$$
$$= \frac{x + 1 - x}{(x + 1)^2} = \frac{1}{(x + 1)^2}$$

และ
$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{(x + 1)^2 - 2(x + 1)}{(x + 1)^4}$$
$$= \frac{(x + 1)(x + 1 - 2)}{(x + 1)^4}$$
$$= \frac{(x + 1)(x - 1)}{(x + 1)^4}$$

พิจารณา
$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{(x + 1)^2}$$

เพราะว่า $\frac{dy}{dx}$ มีค่าเป็นบวกเสมอ

แสดงว่า เส้นโค้งจะโค้งขึ้นเสมอ

หมายเหตุ ค่าสูงสุดหรือค่าต่ำสุด ของฟังก์ชันอาจเกิดได้ที่จุด ซึ่ง

1. อนุพันธ์เป็นศูนย์ (0)
2. อนุพันธ์หาค่าไม่ได้
3. จุดปลายของโดเมนต์ของฟังก์ชัน

จุดที่สอดคล้องกับสามข้อข้างบนเรียกว่า "จุดวิกฤต" โดยการเปรียบเทียบค่าฟังก์ชันที่จุดเหล่านี้ จะบอกได้ทันทีว่าจุดใดให้ค่าสูงสุดสัมพัทธ์ ต่ำสุดสัมพัทธ์ สูงสุดสัมบูรณ์ และต่ำสุดสัมบูรณ์ของฟังก์ชัน

แบบฝึกหัด 4.6

จงหาจุดวิกฤต ค่าสูงสุดสัมพัทธ์ ค่าต่ำสุดสัมพัทธ์ ค่าสูงสุดสัมบูรณ์ ค่าต่ำสุดสัมบูรณ์ของฟังก์ชันต่อไปนี้

โจทย์ข้อ 1. $f(x) = x^2 - 2x + 3$ ในช่วง $[0, 1]$

วิธีทำ เพราะว่า $f'(x) = 2x - 2$

1) ให้

$$f'(x) = 0$$
$$2x - 2 = 0$$
$$x = 1$$

เพราะฉะนั้น เมื่อ $x = 1$ แล้ว $f'(1) = 0$

ดังนั้น จุด $x = 1$ เป็นจุดวิกฤต

2) ที่จุดปลาย $x = 0, x = 1$ คือ จุดวิกฤต

พิจารณาค่าของฟังก์ชัน ณ จุดวิกฤต

$$f(0) = 3$$
$$f(1) = 2$$

จะได้ว่า ค่าสูงสุดสัมพัทธ์ที่ $x = 0$

ค่าต่ำสุดสัมพัทธ์ที่ $x = 1$

และ ค่าสูงสุดสัมบูรณ์ที่ $x = 0$

ค่าต่ำสุดสัมบูรณ์ที่ $x = 1$

โจทย์ข้อ 2. $f(x) = x - x^2$ สำหรับ $x \in [0, 1]$

วิธีทำ เพราะว่า $f'(x) = 1 - 2x$

1) ให้
$$f'(x) = 0$$
$$1 - 2x = 0$$
$$x = \frac{1}{2}$$

เพราะฉะนั้น เมื่อ $x = \frac{1}{2}$, แล้ว $f'(x) = 0$

ดังนั้น จุด $x = \frac{1}{2}$ เป็นจุดวิกฤต

2) ที่จุดปลาย $x = 0, x = 1$ คือ จุดวิกฤต

พิจารณาค่าของฟังก์ชัน ณ จุดวิกฤต

$$f(0) = 0$$
$$f(\tfrac{1}{2}) = \frac{1}{4}$$
$$f(1) = 0$$

จะได้ว่า ค่าสูงสุดสัมพัทธ์ที่ $x = \frac{1}{2}$

ค่าต่ำสุดสัมพัทธ์ที่ $x = 0, x = 1$

และ ค่าสูงสุดสัมบูรณ์ที่ $x = \frac{1}{2}$

ค่าต่ำสุดสัมบูรณ์ที่ $x = 0, x = 1$

โจทย์ข้อ 3. $f(x) = x - x^3$ สำหรับ $x \in [0, 1]$

วิธีทำ เพราะว่า $f'(x) = 1 - 3x^2$

1. ให้
$$f'(x) = 0$$
$$1 - 3x^2 = 0$$
$$x^2 = \frac{1}{3}$$

$$x = \pm\sqrt{\frac{1}{3}} = \pm\frac{\sqrt{3}}{3}$$

เพราะฉะนั้น เมื่อ $x = \pm\frac{\sqrt{3}}{3}$ แล้ว $f'(x) = 0$

ดังนั้น จุด $x = \pm\frac{\sqrt{3}}{3}$ เป็นจุดวิกฤต

2. ที่จุดปลาย $x = 0, x = 1$ คือ จุดวิกฤต

พิจารณาค่าของฟังก์ชัน ณ จุดวิกฤต

$$f\left(\frac{-\sqrt{3}}{3}\right) = \frac{-6\sqrt{3}}{27}$$

$$f(0) = 0$$

$$f(1) = 0$$

$$f\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right) = \frac{6\sqrt{3}}{27}$$

จะได้ว่า ค่าต่ำสุดสัมพัทธ์ที่ $x = \frac{-\sqrt{3}}{3}$

ค่าสูงสุดสัมพัทธ์ที่ $x = 0, x = 1, x = \frac{\sqrt{3}}{3}$

และ ค่าต่ำสุดสัมบูรณ์ที่ $x = \frac{-\sqrt{3}}{3}$

ค่าสูงสุดสัมบูรณ์ที่ $x = \frac{\sqrt{3}}{3}$

โจทย์ข้อ 4. $f(x) = (x - x^2)^{-1}$ สำหรับ $x \in (0, 1)$

วิธีทำ เพราะว่า $f'(x) = -1(x - x^2)^{-2}(1 - 2x)$

$$= \frac{-1(1-2x)}{(x-x^2)^2} = \frac{2x-1}{(x-x^2)^2}$$

1) ให้ $f'(x) = 0$

$$\frac{2x-1}{(x-x^2)^2} = 0$$

$$2x - 1 = 0$$

$$x = \frac{1}{2}$$

เพราะฉะนั้น เมื่อ $x = \frac{1}{2}$, แล้ว $f'(x) = 0$

ดังนั้น จุด $x = \frac{1}{2}$ เป็นจุดวิกฤต

2) เพราะว่า เมื่อ $x = 0$ หรือ $x = 1$ แล้ว

$f'(0)$ และ $f'(1)$ หาค่าไม่ได้

แต่ $x = 0$ และ $x = 1$ ไม่อยู่ในช่วงเปิด $(0, 1)$

เพราะฉะนั้น จุด $x = 0$, และ $x = 1$ ไม่เป็นจุดวิกฤต

3. เพราะว่าช่วงเปิด $(0, 1)$ ไม่มีจุดปลาย

เพราะฉะนั้นหาจุดวิกฤตไม่ได้

พิจารณาค่าของฟังก์ชัน ณ จุดวิกฤต

$$f(\frac{1}{2}) = (\frac{1}{2} - \frac{1}{4})^{-1}$$

$$= (\frac{1}{4})^{-1} = 4$$

จะได้ว่า ค่าต่ำสุดสัมพัทธ์ที่ $x = \frac{1}{2}$

และ ค่าต่ำสุดสัมบูรณ์ที่ $x = \frac{1}{2}$

โจทย์ข้อ 5. $f(x) = |x - x^2|$ สำหรับ $x \in [-2, 2]$

วิธีทำ $f(x) = |x - x^2|$ สำหรับ $x \in [-2, 2]$

หรือ $$f(x) = \begin{cases} x - x^2 & \text{สำหรับ } x \in [0, 1] \\ -(x - x^2) & \text{สำหรับ } x \in [-2, 0) \cup (1, 2] \end{cases}$$

เพราะว่า $$f'(x) = \begin{cases} 1 - 2x & \text{สำหรับ } x \in (0, 1) \\ -1 + 2x & \text{สำหรับ } x \in (-2, 0) \text{ หรือ } x \in (1, 2) \end{cases}$$

1) ให้ $f'(x) = 0$

$$1 - 2x = 0 \quad \text{สำหรับ } x \in (0, 1)$$

$$x = \frac{1}{2}$$

หรือ $$-1 + 2x = 0 \quad \text{สำหรับ } x \in (-2, 0) \text{ หรือ } x \in (1, 2)$$

$$x = \frac{1}{2}$$

เพราะฉะนั้น จุดวิกฤตได้แก่ จุด $x = \frac{1}{2}$ เพราะว่า $f'(\frac{1}{2}) = 0$

2) เพราะว่า $f'_-(1) = 1 - (2)(1) = -1$

และ $$f'_+(1) = -1 + 2(1) = 1$$

ดังนั้น $f'(1)$ หาค่าไม่ได้

เพราะฉะนั้น $x = 1$ เป็นจุดวิกฤต

ทำนองเดียวกัน $x = -1$, $x = 0$ เป็นจุดวิกฤต

3) ที่จุดปลาย $x = -2$ และ $x = 2$ เป็นจุดวิกฤต

พิจารณาค่าของฟังก์ชัน ณ จุดวิกฤต

$$f(-1) = 2$$

$$f(-2) = 6$$

$$f(\tfrac{1}{2}) = \frac{1}{4}$$

$$f(1) = 0$$

$$f(2) = 2$$

$$f(0) = 0$$

จะได้ว่า ค่าต่ำสุดสัมพัทธ์ที่ $x = 0, 1$

ค่าสูงสุดสัมพัทธ์ที่ $x = -2, -1, \frac{1}{2}, 2$

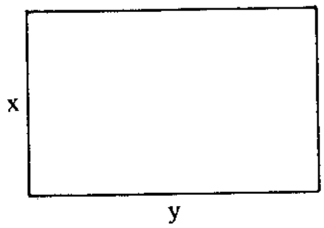
และ ค่าต่ำสุดสัมบูรณ์ที่ $x = 0$

ค่าสูงสุดสัมบูรณ์ที่ $x = -2$

แบบฝึกหัด 4.7

โจทย์ข้อ 1. จงแสดงว่าสี่เหลี่ยมผืนผ้าที่กำหนดเส้นรอบรูปให้ และมีพื้นที่มากที่สุดคือ สี่เหลี่ยมจตุรัส

วิธีทำ



ให้ x เป็นส่วนกว้าง, y เป็นส่วนยาว

ให้เส้นรอบรูปของสี่เหลี่ยมผืนผ้ายาว ℓ หน่วย

และ $$2x + 2y = \ell$$

$$x = \frac{\ell - 2y}{2} \qquad \text{..........(1)}$$

ให้A เป็นพื้นที่สี่เหลี่ยมผืนผ้า

$$A = xy$$

$$= y\,\frac{(\ell - 2y)}{2} = \frac{\ell y}{2} - y^2$$

$$\frac{dA}{dy} = \frac{\ell}{2} - 2y$$

ให้ $$\frac{dA}{dy} = 0$$

$$\frac{\ell}{2} - 2y = 0$$

$$y = \frac{\ell}{4}$$

แทนค่า y ในสมการ (1)

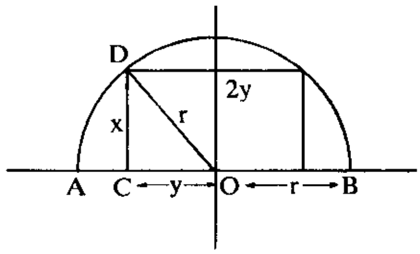
$$x = \frac{\ell}{4}$$

แสดงว่า ด้านกว้าง และด้านยาว ยาวเท่ากัน เท่ากับ $\frac{\ell}{4}$

นั่นคือ สี่เหลี่ยมนี้ คือสี่เหลี่ยมจัตุรัส

โจทย์ข้อ 2. จงหาขนาดของรูปสี่เหลี่ยมผืนผ้าที่บรรจุในครึ่งวงกลมรัศมี r ซึ่งมี พ.ท.มากที่สุด

วิธีทำ



ให้สี่เหลี่ยมผืนผ้ายาวด้านละ 2y กว้าง x

ให้ A เป็นพื้นที่สี่เหลี่ยมผืนผ้า

$$A = 2xy \qquad \text{..........(1)}$$

จากสามเหลี่ยม OCD

$$OD^2 = OC^2 + CD^2$$

$$r^2 = y^2 + x^2$$

$$r^2 - y^2 = x^2$$

$$(r^2 - y^2)^{1/2} = x \qquad \text{..........(2)}$$

แทนค่า x ในสมการ (1)

$$A = 2(r^2 - y^2)^{1/2}y$$

$$\frac{dA}{dy} = 2((r^2 - y^2)^{1/2} + \frac{1}{2}y(r^2 - y^2)^{-1/2}\ (-2y))$$

$$= 2(r^2 - y^2)^{1/2} - \frac{2y^2}{(r^2 - y^2)^{1/2}}$$

ให้ $\frac{dA}{dy} = 0$

$$2(r^2 - y^2)^{1/2} - \frac{2y^2}{(r^2 - y^2)^{1/2}} = 0$$

$$2(r^2 - y)^{1/2} = \frac{2y^2}{(r^2 - y^2)^{1/2}}$$

$$2(r^2 - y^2) = 2y^2$$

$$r^2 - y^2 = y^2$$

$$r^2 = 2y^2$$

$$\frac{r^2}{2} = y^2$$

$$\frac{r}{\sqrt{2}} = y$$

$$\frac{r\sqrt{2}}{2} = y$$

แทนค่า y ในสมการ (2)

$$x = (r^2 - \frac{r^2}{2})^{1/2}$$

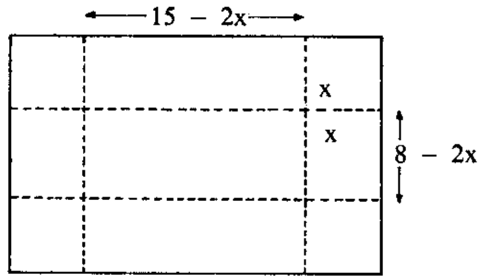
$$= \frac{r\sqrt{2}}{2}$$

เพราะฉะนั้น สี่เหลี่ยมผืนผ้ายาวด้านละ $2y = r\sqrt{2}$

และกว้าง $x = \frac{r}{2}\sqrt{2}$

โจทย์ข้อ 3. แผ่นสังกะสีรูปสี่เหลี่ยมผืนผ้ากว้าง 8 นิ้ว ยาว 15 นิ้ว ตัดแต่ละมุมออกเป็นรูปสี่เหลี่ยมจัตุรัส เพื่อดัดขึ้นเป็นกล่องด้านบนเปิด จะต้องตัดมุมอย่างไรจึงจะทำให้กล่องมีปริมาตรมากที่สุด

วิธีทำ



ให้ตัดมุมยาวด้านละ x นิ้ว

ให้ v เป็นปริมาตรของกล่องนี้

$$v = x(8 - 2x)(15 - 2x)\ ;\ 0 \leqslant x \leqslant 4$$

$$= 120x - 46x^2 + 4x^3$$

$$\frac{dv}{dx} = 120 - 92x + 12x^2$$

ให้ $\frac{dv}{dx} = 0$

$$120 - 92x + 12x^2 = 0$$

$$60 - 46x + 6x^2 = 0$$

$$(6 - x)(10 - 6x) = 0$$

$$x = 6,\ \frac{10}{6}$$

แต่ $0 \leqslant x \leqslant 4$ ดังนั้น $x = \frac{10}{6}$

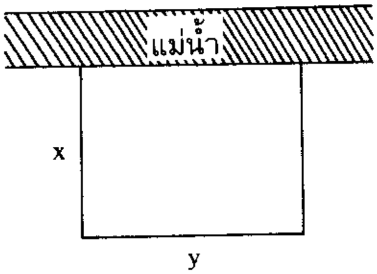
เพราะว่า $\frac{d^2y}{dx^2} = -92 + 24x$

ถ้า $x = \frac{10}{6}$, $\frac{d^2y}{dx^2} = -92 + 40 = -52$

เพราะว่า $\frac{d^2y}{dx^2} < 0$ แสดงว่าเป็นเส้นโค้งคว่ำ ณ จุด $x = \frac{10}{6}$

และ ณ จุด $x = \frac{10}{6}$ จะให้ปริมาตรสูงสุด

โจทย์ข้อ 4. กำหนดความยาวของรั้วเท่ากับ L ต้องการล้อมรั้วที่ดิน ซึ่งมีด้านหนึ่งติดกับแม่น้ำ ให้ได้พื้นที่มากที่สุดได้อย่างไร?



วิธีทำ ให้พื้นที่ดิน กว้าง x หน่วย

ยาว y หน่วย

และให้ A เป็นพื้นที่ของพื้นที่ดิน

$$A = xy \qquad ....(1)$$

แต่ความยาวเส้นรอบรูปยาว L ดังนั้น

$$2x + y = L$$

$$y = L - 2x$$

แทนค่า y ในสมการ (1)

$$A = x(L - 2x) = Lx - 2x^2$$

$$\frac{dA}{dx} = L - 4x$$

ให้ $$\frac{dA}{dx} = 0$$

$$L - 4x = 0$$

$$x = \frac{L}{4}$$

พิจารณา $$\frac{d^2A}{dx^2} = -4$$

เพราะว่า $\frac{d^2A}{dx^2} < 0$ เป็นเส้นโค้งคว่ำ

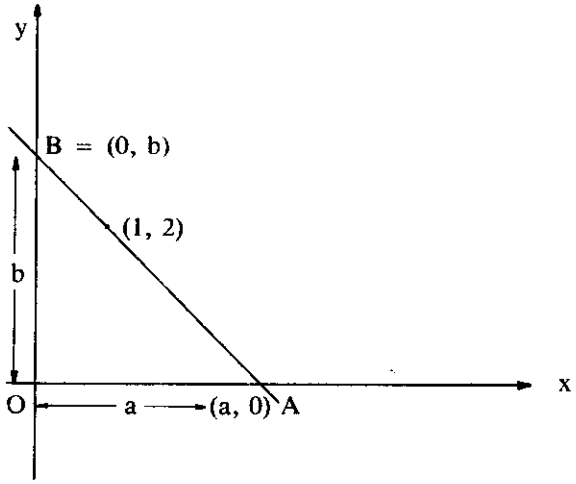
เพราะฉะนั้น ณ จุด $x = \frac{L}{4}$ จะทำให้พื้นที่ดินได้พื้นที่มากที่สุด

และ $y = \frac{L}{2}$

นั้นคือ ต้องล้อมรั้วกว้าง $\frac{L}{4}$ หน่วย และยาว $\frac{L}{2}$ หน่วย

โจทย์ข้อ 5. เส้นตรงไม่คงที่เส้นหนึ่งผ่านจุด (1, 2) ตัดแกน x ที่ A(a, 0) และตัดแกน y ที่ B(0, b) จงหาพื้นที่น้อยที่สุดของสามเหลี่ยม AOB ถ้า a, b เป็นจำนวนบวก

วิธีทำ



ให้เส้นตรง AB ตัดแกน X ที่จุด A(a, 0) ตัดแกน y ที่จุด B(0, b) และผ่านจุด (1, 2)

ให้ A เป็นพื้นที่สามเหลี่ยม AOB

$$A = \frac{1}{2} AO \cdot BO$$

$$= \frac{1}{2} a \cdot b \qquad \text{..........(1)}$$

เพราะว่า เส้นตรงที่ผ่านจุด A กับ (1, 2) และจุด B กับ (1, 2) มีความชันเท่ากัน

ความชัน A กับ (1, 2) = ความชัน B กับ (1, 2)

$$\frac{2-0}{1-a} = \frac{2-b}{1-0}$$

$$\frac{2}{2-b} = 1-a$$

$$\frac{2}{2-b} - 1 = -a$$

$$1 - \frac{2}{2-b} = a \qquad \text{..........(2)}$$

แทนค่า a ในสมการ (1)

$$A = \frac{1}{2}b\left(1 - \frac{2}{2-b}\right) = \frac{b}{2} - \frac{b}{2-b}$$

$$\frac{dA}{db} = \frac{1}{2} - \frac{[(2-b) - b(-1)]}{(2-b)^2} = \frac{1}{2} - \frac{-(2-b+b)}{(2-b)^2}$$

$$= \frac{1}{2} - \frac{2}{(2-b)^2} = \frac{(2-b)^2-4}{2(2-b)^2}$$

ให้ $$\frac{dA}{db} = 0$$

$$\frac{(2-b)^2-4}{2(2-b)^2} = 0$$

$$(2-b)^2-4 = 0$$

$$(2-b)^2 = 4$$

$$2-b = \pm 2$$

$$b = 0, 4$$

แทนค่า b ในสมการ (2)

$$a = 0, 2$$

จาก $$\frac{dA}{db} = \frac{(2-b)^2-4}{2(2-b)^2} = \frac{4-4b+b^2-4}{2(2-b)^2} = \frac{b^2-4b}{2(2-b)^2}$$

$$\frac{d^2A}{db^2} = \frac{2(2-b)^2(2b-4) + (b^2-4b)[(-4(2-b)]}{4(2-b)^4}$$

ที่จุด $b = 4$, $\frac{d^2A}{db^2} > 0$

แสดงว่า ที่จุด $b = 4$ เส้นโค้งจะโค้งหงาย

และจะได้ว่า $a = 2$, $b = 4$ จะให้พื้นที่น้อยที่สุด

ส่วนจุด $a = 0$, $b = 0$ ไม่ใช้ เพราะ a และ b ต้องเป็นบวก

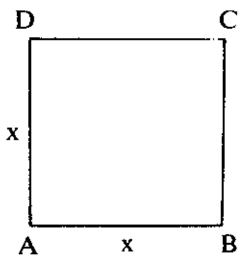
และ พื้นที่น้อยที่สุด
$$\begin{aligned} A &= \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 4 \\ &= 4 \end{aligned}$$

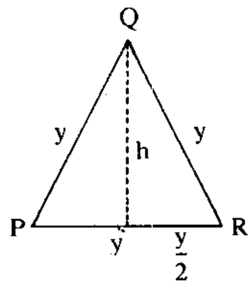
โจทย์ข้อ 6. ลวดเส้นหนึ่งยาว L ตัดออกเป็นสองส่วน ส่วนหนึ่งนำมาดัดเป็นรูปสี่เหลี่ยมจัตุรัส อีกส่วนหนึ่งมาดัดเป็นรูปสามเหลี่ยมด้านเท่า จะต้องตัดลวดอย่างไรจึงจะทำให้

(1) ผลรวมพื้นที่ทั้งสองมีค่าน้อยที่สุด

(2) ผลรวมพื้นที่ทั้งสองมีค่ามากที่สุด

วิธีทำ





ให้สี่เหลี่ยมจัตุรัส ABCD ยาวด้านละ x หน่วย

สามเหลี่ยมด้านเท่า PQR ยาวด้านละ y หน่วย

ให้ A เป็นพื้นที่ทั้งหมด

A = พื้นที่สามเหลี่ยมด้านเท่า PQR + พื้นที่สี่เหลี่ยมจัตุรัส ABCD

$$= \frac{1}{2} \cdot y \cdot h \cdot + x^2$$

$$= \frac{1}{2} y \cdot (\frac{y}{2}\sqrt{3}) + x^2 \because h = \sqrt{y^2 - \left(\frac{y}{2}\right)^2}$$

$$= \frac{1}{4} \sqrt{3}\, y^2 + x^2 \qquad \text{..........(1)}$$

เพราะว่า ความยาวเส้นรอบรูปของทั้งสองรูป เท่ากับ L

$$4x + 3y = L$$

$$x = \frac{L - 3y}{4} \qquad \text{..........(2)}$$

แทนค่า x ในสมการ (1)

$$A = \frac{\sqrt{3}}{4} y^2 + \left(\frac{L - 3y}{4}\right)^2$$

$$= \frac{\sqrt{3}}{4} y^2 + \frac{L^2}{16} - \frac{3Ly}{8} + \frac{9y^2}{16}$$

$$= \left(\frac{\sqrt{3}}{4} + \frac{9}{16}\right) y^2 - \frac{3Ly}{8} + \frac{L^2}{16}$$

$$= \left(\frac{9 + 4\sqrt{3}}{16}\right) y^2 - \frac{3Ly}{8} + \frac{L^2}{16} \qquad \text{.........(3)}$$

สำหรับ $0 \leqslant y \leqslant \frac{L}{3}$

$$\frac{dA}{dy} = \frac{(9 + 4\sqrt{3})}{8} y - \frac{3L}{8} \ ; 0 \leqslant y \leqslant \frac{L}{3} \qquad \text{..........(4)}$$

ให้ $\frac{dA}{dy} = 0$

$$\frac{9 + 4\sqrt{3})}{8} y - \frac{3L}{8} = 0$$

$$\frac{9 + 4\sqrt{3})}{8} y = \frac{3L}{8}$$

$$y = \frac{3L}{9 + 4\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}L}{3\sqrt{3} + 4}$$

แทนค่า y ในสมการ (2)

$$x = \frac{L}{4} - \frac{3y}{4} = \frac{L}{4} - \frac{3}{4}\left(\frac{\sqrt{3}L}{3\sqrt{3} + 4}\right)$$

$$= \frac{(3\sqrt{3}+4)L - 3\sqrt{3}L}{4(3\sqrt{3}+4)} = \frac{L}{3\sqrt{3}+4}$$

จากสมการ (4), $\frac{d^2A}{dy^2} = \frac{9+4\sqrt{3}}{8} > 0$

แสดงว่า เส้นโค้ง ๆ หงาย และทำให้ทราบว่า

ณ จุด $x = L/3\sqrt{3}+4$ และ $y = \sqrt{3}L/3\sqrt{3}+4$ เป็นจุดต่ำสุด

ซึ่งจะได้ว่า พื้นที่รวม A จะมีค่าน้อยสุด

จากจุดปลาย $y = 0$ และ $y = \frac{L}{3}$

เมื่อ $y = 0$ $\quad A = \frac{L^2}{16}$ และจากสมการ (3) ....(5)

เมื่อ $y = \frac{L}{3}$ $\quad A = \frac{(9+4\sqrt{3})}{16}\frac{L^2}{9} - \frac{3L}{8}\cdot\frac{L}{3} + \frac{L^2}{16}$

$$= \frac{(9+4\sqrt{3})}{16}\frac{L^2}{9} - \frac{L^2}{8} + \frac{L^2}{16}$$

$$= \frac{L^2}{16} + \frac{\sqrt{3}}{36}L^2 - \frac{L^2}{8} + \frac{L^2}{16} = \frac{\sqrt{3}L^2}{36} \quad \text{..........(6)}$$

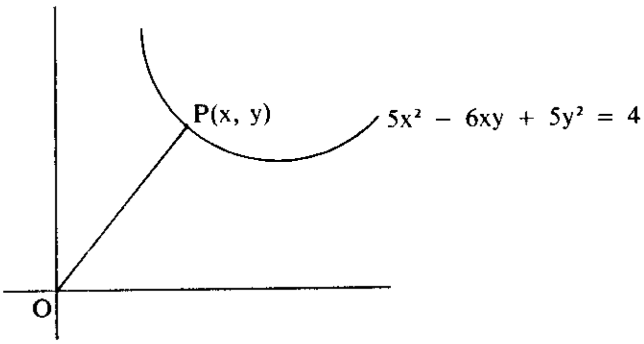
เมื่อเทียบสมการ (5) และ (6) แล้ว

เมื่อ $y = 0$, พื้นที่ A จะมีค่ามากที่สุด

หรือ พื้นที่มากที่สุด เมื่อเอาลวดมาตัดเป็นสี่เหลี่ยมจัตุรัสอย่างเดียว

โจทย์ข้อ 7. จงหาจุดบนเส้นโค้ง $5x^2 - 6xy + 5y^2 = 4$ ซึ่งอยู่ได้ใกล้จุดกำเนิดมากที่สุด

วิธีทำ



ให้ P(x, y) เป็นจุดใด ๆ บน เส้นโค้ง $5x^2 - 6xy + 5y^2 = 4$

ให้ D เป็นระยะทางระหว่างจุด P(x, y) กับจุด (0, 0)

$$D = (x^2 + y^2)^{1/2}$$

$$\frac{dD}{dx} = \frac{1}{2}(x^2 + y^2)^{-1/2}\left(2x + 2y\frac{dy}{dx}\right)$$

$$= \frac{x + y\frac{dy}{dx}}{(x^2 + y^2)^{1/2}} \qquad \text{..........(1)}$$

จาก $5x^2 + 5y^2 - 6xy = 4$

$$\frac{d}{dx}(5x^2 + 5y^2 - 6xy) = \frac{d}{dx}(4) = 0$$

$$10x + 10y\frac{dy}{dx} - 6\left(x\frac{dy}{dx} + y\right) = 0$$

$$10x + 10y\frac{dy}{dx} - 6x\frac{dy}{dx} - 6y = 0$$

$$(10y - 6x)\frac{dy}{dx} = 6y - 10x$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{6y - 10x}{10y - 6x}$$

แทนค่า $\frac{dy}{dx}$ ในสมการ (1)

$$\frac{dD}{dx} = \frac{x + y\left(\frac{6y - 10x}{10y - 6x}\right)}{(x^2 + y^2)^{1/2}}$$

ให้ $\frac{dD}{dx} = 0$

$$\frac{x + y\left(\frac{6y - 10x}{10y - 6x}\right)}{(x^2 + y^2)^{1/2}} = 0$$

$$x + \frac{6y^2 - 10xy}{10y - 6x} = 0$$

$$\frac{6y^2 - 10xy}{10y - 6x} = -x$$

$$6y^2 - 10xy = -10xy + 6x^2$$
$$6y^2 = 6x^2$$
$$y^2 = x^2$$
$$y = \pm x$$

นั่นคือ จุด (x, x) และจุด $(x, -x)$ เป็นจุดที่อยู่ใกล้จุดกำเนิด $(0, 0)$ และจุดทั้งสองก็อยู่บนเส้นโค้ง จึงได้ว่าจุดทั้งสองจะสอดคล้องตามสมการเส้นโค้ง นั่นคือ

ถ้า $y = x\ (x, x)$ แล้วจะได้ว่า ....(2)

$$5x^2 - 6x(x) + 5x^2 = 4$$
$$10x^2 - 6x^2 = 4$$
$$4x^2 = 4$$
$$x^2 = 1$$
$$x = \pm 1$$

เมื่อ $x = \pm 1$, จากสมการ (2)

$$y = \pm 1$$

ถ้า $y = -x\ (x, -x)$ แล้วจะได้ว่า ....(3)

$$5x^2 - 6x(-x) + 5x^2 = 4$$
$$10x^2 + 6x^2 = 4$$
$$16x^2 = 4$$
$$x^2 = \frac{4}{16} = \frac{1}{4}$$
$$x = \pm \frac{1}{2}$$

เมื่อ $x = \pm \frac{1}{2}$ จากสมการ (3)

$$y = \mp \frac{1}{2}$$

นั้นคือ จุด (1, 1), (−1, −1), $(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2})$, $(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$

เป็นจุดที่อยู่ใกล้จุด (0, 0)

เพราะว่า จุด (1, 1) อยู่ห่างจุด (0, 0) คือ

$$D_1 = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}$$

จุด (−1, −1) อยู่ห่างจุด (0, 0) คือ

$$D_2 = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}$$

จุด $(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2})$ อยู่ห่างจุด (0, 0) คือ

$$D_3 = \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{1}{4}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

จุด $(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ อยู่ห่างจุด (0, 0) คือ

$$D_4 = \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{1}{4}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

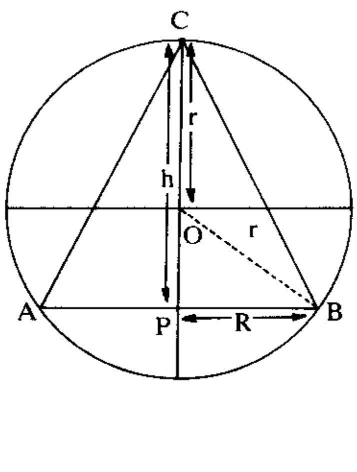
เมื่อเทียบ D_1, D_2, D_3, D_4, แล้ว ระยะทางที่สั้นที่สุดคือ

D_3 และ D_4 ซึ่งเท่ากับ $\frac{1}{\sqrt{2}}$ ซึ่งจุดที่ใกล้จุด (0, 0) มากที่สุดคือ

$(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2})$ และ $(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$

โจทย์ข้อ 8. จงหาปริมาตรที่มากที่สุดของกรวยกลมที่บรรจุในทรงกลมรัศมี r

วิธีทำ



ให้กรวยกลม ABC บรรจุภายในทรงกลมรัศมี r

ให้กรวยมีรัศมี = R

ให้ h เป็นส่วนสูงของกรวย ซึ่ง

และ V เป็นปริมาตรของกรวยกลม

$$V = \frac{1}{3}\pi R^2 h \qquad \text{..........(1)}$$

แต่ $h = OC + OP$

$$= r + (r^2 - R^2)^{1/2}$$

แทนค่า h ในสมการ (1)

$$V = \frac{1}{3}\pi R^2 (r + (r^2 - R^2)^{1/2})$$

$$= \frac{1}{3}\pi r R^2 + \frac{1}{3}\pi R^2 (r^2 - R^2)^{1/2};\ 0 < R < r \qquad \text{..........(2)}$$

$$\frac{dV}{dR} = 2 \cdot \frac{1}{3}\pi r R + \frac{1}{3}\pi R^2 \left(\frac{1}{2}\right)$$

$$(r^2 - R^2)^{-1/2}(-2R) + \frac{2}{3}\pi R (r^2 - R^2)^{1/2}$$

$$= \frac{2}{3}\pi r R + \frac{2}{3}\pi R (r^2 - R^2)^{1/2} - \frac{1}{3}\pi R^3 (r^2 - R^2)^{-1/2}$$

$$= \frac{2}{3}\pi R (r + (r^2 - R^2)^{1/2}) - \frac{1}{3}\pi R^3 (r^2 - R^2)^{-1/2}$$

ให้ $\frac{dV}{dR} = 0$

$$\frac{2}{3}\pi R (r + (r^2 - R^2)^{1/2}) = \frac{1}{3}\pi R^3 (r^2 - R^2)^{-1/2}$$

$$2(r + (r^2 - R^2)^{1/2}) = R^2(r^2 - R^2)^{-1/2}$$

$$2r + 2(r^2 - R^2)^{1/2} = R^2(r^2 - R^2)^{-1/2}$$

$$2r(r^2 - R^2)^{1/2} + 2(r^2 - R^2) = R^2$$

$$2r(r^2 - R^2)^{1/2} = R^2 - 2r^2 + 2R^2$$

$$2r(r^2 - R^2)^{1/2} = 3R^2 - 2r^2$$

ยกกำลังสองทั้งสองข้าง

$$4r^2(r^2 - R^2) = 9R^4 - 12r^2R^2 + 4r^4$$

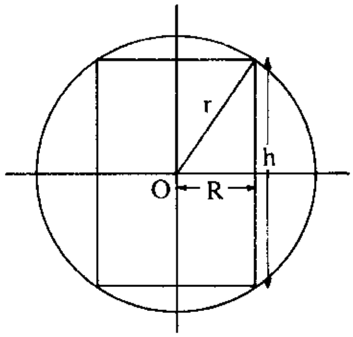
$$4r^4 - 4r^2R^2 = 9R^4 - 12r^2R^2 + 4r^4$$
$$8r^2R^2 = 9R^4$$
$$8r^2 = 9R^2$$
$$\frac{8r^2}{9} = R^2$$
$$\frac{2r\sqrt{2}}{3} = R$$

ถ้า $R = \frac{2}{3}r\sqrt{2}$ แล้วปริมาตร $V = \frac{32\pi r^3}{81}$ โดยแทนค่า R ในสมการ (2)

นั่นคือ ปริมาตรของกรวยจะมากที่สุดเป็น $\frac{32\pi r^3}{81}$ เมื่อ

กรวยมีรัศมี $\frac{2r\sqrt{2}}{3}$ และสูง $\frac{4}{3}r$ #

โจทย์ข้อ 9. จงหาปริมาตรที่มากที่สุดของทรงกระบอกที่บรรจุภายในทรงกลมรัศมี r



วิธีทำ ให้รัศมีของฐานของรูปทรงกระบอกเท่ากับ R และความสูงเท่ากับ h

ปริมาตรของทรงกระบอก คือ

$$V = \pi R^2 h$$

แต่ $h = 2\sqrt{r^2 - R^2}$ และ

ปริมาตร $$V = 2\pi R^2 (r^2 - R^2)^{1/2} \quad 0 < R < r \qquad \text{..........(1)}$$

$$\frac{dV}{dR} = 2\pi R^2 \cdot \frac{1}{2}(r^2 - R^2)^{1/2}\ (-2R) + (r^2 - R^2)^{1/2}(4\pi R)$$

$$= 2\pi R\ (r^2 - R^2)^{-1/2}(-R^2 + 2r^2 - 2R^2)$$

$$= \frac{2\pi R\ (-R^2 + 2r^2 - 2R^2)}{(r^2 - R^2)^{1/2}}$$

ให้ $\frac{dV}{dR} = 0$

$$\frac{2\pi R(-R^2 + 2r^2 - 2R^2)}{(r^2 - R^2)^{1/2}} = 0$$

$$-R^2 + 2r^2 - 2R^2 = 0$$

$$2r^2 - 3R^2 = 0$$

$$-3R^2 = -2r^2$$

$$R^2 = \frac{2}{3}r^2$$

$$R = \pm r\sqrt{\frac{2}{3}}$$

และ $\frac{dV}{dR}$ หาค่าไม่ได้ เมื่อ $r = R$

พิจารณา ถ้า $r = R$ จากสมการ (1) $V = 0$

ถ้า $R = r\sqrt{\frac{2}{3}}$ จากสมการ (1) ปริมาตร $V = \frac{4}{3\sqrt{3}}\pi r^3$

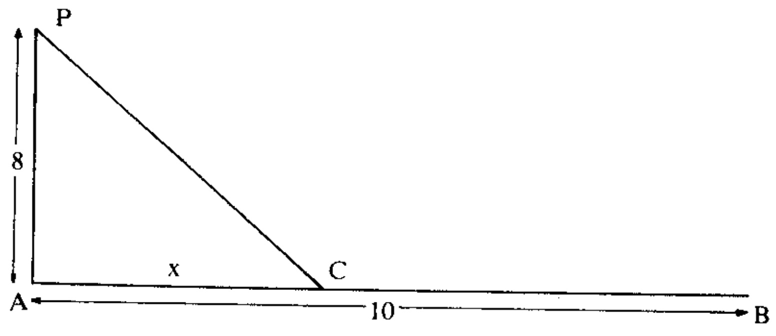
ส่วน R เป็นลบไม่ใช้

นั้นคือ ปริมาตรทรงกระบอกที่สูงสุด คือ $V = \frac{4}{3\sqrt{3}}\pi r^3$ เมื่อ

$R = r\sqrt{\frac{2}{3}}$ และ $h = \frac{2r}{\sqrt{3}}$

โจทย์ข้อ 10. ชายคนหนึ่งพายเรือจากจุด P ซึ่งอยู่ห่างจากฝั่ง AB เป็นระยะทาง 8 กิโลเมตร ดังรูป AB ยาว 10 กิโลเมตร ถ้าเขาต้องการถึงจุด B โดยใช้เวลาน้อยที่สุด เขาต้องขึ้นฝั่งที่ใด ถ้าอัตราเร็วในการพายเรือ และเดินเท้าเป็น 3 กิโลเมตรต่อชั่วโมง และ 6 กิโลเมตรต่อชั่วโมง ตามลำดับ

วิธีทำ



ให้เขาขึ้นฝั่งที่จุด C และ C ห่างจากจุด A, x กิโลเมตร

ให้ D เป็นระยะทางในการเดินทาง

$$
\begin{aligned}
D &= PC + CB \\
&= (8^2 + x^2)^{1/2} + (10 - x) \\
&= (64 + x^2)^{1/2} + (10 - x)
\end{aligned}
$$

ให้ T เป็นเวลาในการเดินทาง

$$
\begin{aligned}
T &= \text{เวลาเดินทางจาก P ไป C + เวลาเดินทางจาก C ไป B} \\
&= \frac{\text{ระยะทาง PC}}{\text{อัตราเร็วพายเรือ}} + \frac{\text{ระยะทาง CB}}{\text{อัตราเร็วเดินเท้า}} \\
&= \frac{1}{3}(64 + x^2)^{1/2} + \frac{1}{6}(10 - x);\ 0 \leqslant x \leqslant 10 \\
\frac{dT}{dx} &= \frac{1}{6}(64 + x^2)^{-1/2}(2x) + \frac{1}{6}(-1) \\
&= \frac{2x}{6(64 + x^2)^{1/2}} - \frac{1}{6} \\
&= \frac{2x - (64 + x^2)^{1/2}}{6(64 + x^2)^{1/2}}
\end{aligned}
$$

ให้ $\frac{dT}{dx} = 0$

$$
\begin{aligned}
\frac{2x - (64 + x^2)^{1/2}}{6(64 + x^2)^{1/2}} &= 0 \\
2x - (64 + x^2)^{1/2} &= 0 \\
2x &= (64 + x^2)^{1/2} \\
2x &= (64 + x^2)^{1/2}
\end{aligned}
$$

ยกกำลังสองทั้งสองข้าง

$$
\begin{aligned}
4x^2 &= 64 + x^2 \\
3x^2 &= 64 \\
x^2 &= \frac{64}{3} \\
x &= \frac{8}{\sqrt{3}} = \frac{8}{3}\sqrt{3}
\end{aligned}
$$

ดังนั้น ชายคนนี้ต้องขึ้นฝั่งที่จุดห่างจากจุด A เป็นระยะทาง $\frac{8\sqrt{3}}{5}$ กิโลเมตร #

จึงจะทำให้ใช้เวลาในการเดินทางน้อยที่สุด